Лекция 12

1. Линейное преобразование

Рассмотрим задачу из линейной алгебры.

Задача 1.

Даны матрица $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ размером 2×2 и вектор-столбец $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Найти произведение $Y = AX$

Решение.

$$AX = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot (-1) + 4 \cdot 3 \\ 2 \cdot (-1) + (-3) \cdot 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1+12 \\ -2-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -11 \end{pmatrix}$$

Ответ: $Y = \begin{pmatrix} 13 \\ -11 \end{pmatrix}$

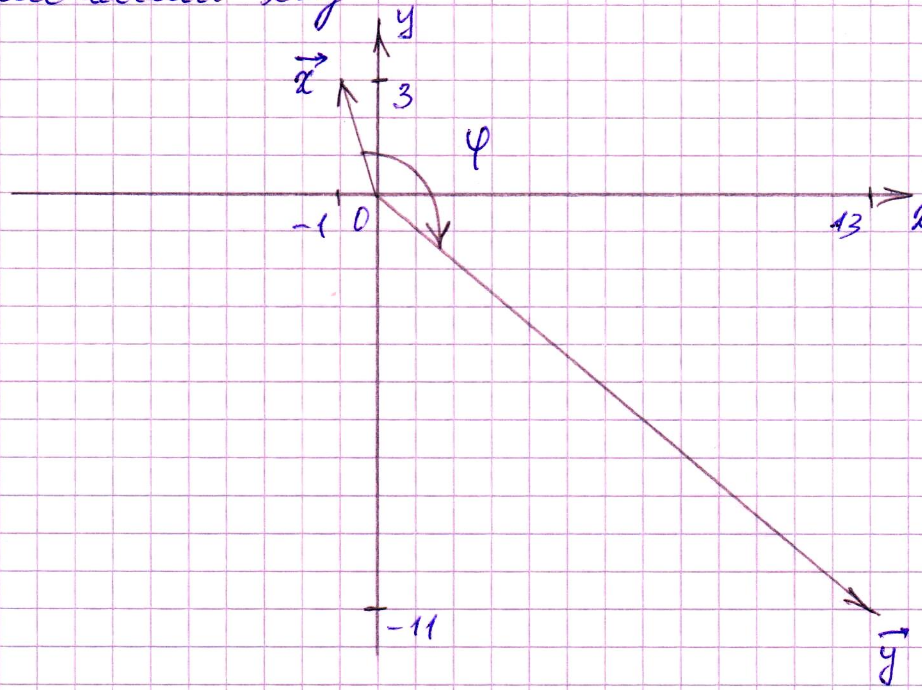
Дадим геометрическое истолкование задачи. Возьмём геометрический вектор на плоскости, координаты которого равны элементам вектора-столбца X:

$$\vec{x} = \{-1; 3\}$$

Результат умножения AX также используем для построения геометрического вектора

$$\vec{y} = \{13, -11\}$$

Изобразим эти векторы на координатной плоскости xOy



С геометрической точки зрения умножение вектора-столбца x на матрицу A означает преобразование вектора $\vec{x}$: поворот на угол и растяжение длины.

В этом случае говорят, что линейное преобразование, заданное матрицей A переводит вектор $\vec{x}$ в вектор $\vec{y}$.

В дальнейшем нас будут интересовать такие векторы $\vec{x}$, которые с помощью заданного линейного преобразования с матрицей A переходят в коллинеарные векторы $\lambda\vec{x}$. Здесь λ - число, которое либо увеличивает длину вектора $\vec{x}$ ($|\lambda|>1$), либо уменьшает её ($|\lambda|<1$); оставляет вектор $\lambda\vec{x}$ сонаправленным вектору $\vec{x}$ ($\lambda>1$) либо делает противоположно направленным ($\lambda<1$).

Итак, рассматриваем преобразование

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$$

При умножении координаты вектора $\vec{x}=\{x_1, x_2\}$ будем записывать в виде вектора-столбца $\vec{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=X$

$$AX = \lambda X \qquad (1)$$

Известно, что $X=EX$, где $E=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ - единичная матрица. Поэтому равенство (1) перепишем в виде

$$AX = \lambda EX$$

Переносим все члены равенства в левую часть

$$AX-\lambda EX=0,$$

здесь $0=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ - нулевой вектор-столбец.

По свойству умножения матриц можно вынести общий множитель за скобки

$$(A-\lambda E)X=0 \qquad (2)$$

Напомним, что в равенстве участвуют:

$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ — матрица линейного преобразования,

$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ — единичная матрица,

λ — число,

$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ — неизвестный вектор-столбец, элементы которого x_1 и x_2 нужно найти,

$0=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ — нулевой вектор-столбец.

Можно сказать, что матричная запись (2) соответствует системе линейных однородных уравнений, которая получится в результате преобразований:

$$(A-\lambda E)X=\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=$$

$$=\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} \lambda\cdot 1 & \lambda\cdot 0 \\ \lambda\cdot 0 & \lambda\cdot 1 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=$$

$$=\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12}-0 \\ a_{21}-0 & a_{22}-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Итак, система линейных уравнений имеет вид

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 = 0 \end{cases}$$

Решив эту систему, найдем x_1 и x_2.

Однородная система всегда совместна и всегда имеет тривиальное решение.

Нам потребуется нахождение ненулевых векторов, следовательно ненулевых решений.

Система с квадратной матрицей имеет бесконечно много решений, если её определитель равен 0:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (3)$$

Равенство (3) содержит неизвестное λ.

Раскроем определитель:

$$(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda) - a_{12}a_{21} = 0$$

После раскрытия скобок и приведения подобных членов, получим квадратное уравнение

$$a_{11}a_{22} - \lambda a_{22} - a_{11}\lambda + \lambda^2 - a_{12}a_{21} = 0$$

$$\lambda^2 - (a_{11}+a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$$

Квадратное уравнение имеет два корня:

$$\lambda = \lambda_1, \quad \lambda = \lambda_2$$

После их нахождения поочереди подставим их в систему

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda_1)x_1 + a_{12}x_2 = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda_1)x_2 = 0 \end{cases}$$

Решением этой системы будет вектор, соответствующий значению первого корня λ_1

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda_2)x_2 + a_{12}x_2 = 0 \\ a_{21}x_2 + (a_{22}-\lambda_2)x_2 = 0 \end{cases}$$

Решением этой системы будет вектор, соответствующий значению второго корня λ_2.

2. Собственные числа и собственные векторы матрицы линейного преобразования

Определение.

Ненулевой вектор X называется собственным вектором матрицы линейного преобразования A, если выполняется равенство

$$AX = \lambda X$$

при некотором действительном числе λ.
При этом число λ называется собственным числом, или собственным значением матрицы линейного преобразования A.

Пример.

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы A

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Решение

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} -1-\lambda & 4 \\ 2 & -3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 4 \\ 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(-1-\lambda)(-3-\lambda)-2\cdot 4=0$$

$$3+3\lambda+\lambda+\lambda^2-8=0$$

$$\lambda^2+4\lambda-5=0$$

$$D=16-4\cdot(-5)=16+20=36$$

$$\sqrt{D}=6$$

$$\lambda_{1,2}=\frac{-4\pm 6}{2}=-2\pm 3$$

$$\left.\begin{array}{l}\lambda_1=-5\\ \lambda_2=1\end{array}\right\}$$ - собственные числа матрицы A

$$\begin{cases}(-1-\lambda)x_1+4x_2=0\\ 2x_1+(-3-\lambda)x_2=0\end{cases}$$

$$\lambda_1=-5$$

$$\begin{cases}(-1-(-5))x_1+4x_2=0\\ 2x_1+(-3-(-5))x_2=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}(-1+5)x_1+4x_2=0\\ 2x_1+(-3+5)x_2=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}4x_1+4x_2=0\\ 2x_1+2x_2=0\end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c}4&4&0\\2&2&0\end{array}\right)\sim\left|S_2-\frac{1}{2}S_1\right|\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cc|c}4&4&0\\2-\frac{1}{2}\cdot 4&2-\frac{1}{2}\cdot 4&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|c}4&4&0\\0&0&0\end{array}\right)$$

$4x_1+4x_2=0$

$x_1+x_2=0$

базисное: x_1
свободное: x_2

$x_2=t_1$

$x_1+t_1=0$

$x_1=-t_1$

Общее решение: $\begin{cases} x_1=-t_1 \\ x_2=t_1 \end{cases}$ $X=\begin{pmatrix} -t_1 \\ t_1 \end{pmatrix}$

ФСР. $t_1=1$ $\begin{matrix} x_1=-1 \\ x_2=1 \end{matrix}$ $X_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

X_1 – один из собственных векторов, соответствующих собственному числу $\lambda_1=-5$

$\lambda_2=1$

$$\begin{cases} (-1-1)x_1+4x_2=0 \\ 2x_1+(-3-1)x_2=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x_1+4x_2=0 \\ 2x_1-4x_2=0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 4 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim \left| s_1+s_2 \right| = \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 4 & 0 \\ 2-2 & -4+4 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$-2x_1+4x_2=0$

базисное : x_1
свободное : x_2

$x_1-2x_2=0$

$x_2=t_2$

$x_1-2t_2=0$

$x_1=2t_2$

Общее решение $\begin{cases} x_1=2t_2 \\ x_2=t_2 \end{cases}$ $X=\begin{pmatrix} 2t_2 \\ t_2 \end{pmatrix}$

ФСР $t_2=1$ $\begin{matrix} x_1=2 \\ x_2=1 \end{matrix}$ $X_2=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

X_2 - один из собственных векторов, соответствующих собственному числу $\lambda_2=1$

Ответ: $\lambda_1=-5$ $X_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_2=1$ $X_2=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Все утверждения верны так же и для матриц размером 3×3 и векторов размером 3×1.

3. Пятичленное уравнение второй ~~порядка~~ степени

Уравнение второй степени ~~порядка~~ с двумя неизвестными вида

$$Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0 \qquad (1)$$

называется пятичленным, или неполным.

Если A и B одного знака, т.е $AB>0$, то уравнение называется уравнением эллиптического типа,

если A и B разных знаков, т.е. $AB<0$, то уравнение называется уравнением гиперболического типа,

если один из коэффициентов равен нулю $A=0$ или $B=0$, то уравнение называется уравнением параболического типа.

В геометрическом смысле уравнение (1) определяет кривую второго порядка со смещенным центром.

Приведение уравнения к каноническому виду осуществляется путем выделения полного квадрата по каждой из переменной x и y:

$$Ax^2+Cx+By^2+Dy+E=0$$

$$A\left(x^2+\frac{C}{A}x\right)+B\left(y^2+\frac{D}{B}y\right)+E=0$$

$$A\left(x^2+2\frac{C}{2A}x\right)+B\left(y^2+2\frac{D}{2B}y\right)+E=0$$

$$A\left(x^2+2\frac{C}{2A}+\frac{C^2}{4A^2}-\frac{C^2}{4A^2}\right)+B\left(y^2+2\frac{D}{2B}+\frac{D^2}{4B^2}-\frac{D^2}{4B^2}\right)+E=0$$

$$A\left(x+\frac{C}{2A}\right)^2-\frac{C^2}{4A}+B\left(y+\frac{D}{2B}\right)^2-\frac{D^2}{4B}+E=0$$

$$A\left(x+\frac{C}{2A}\right)^2+B\left(y+\frac{D}{2B}\right)^2=\frac{C^2}{4A}+\frac{D^2}{4B}-E$$

$$\frac{\left(x+\frac{C}{2A}\right)^2}{\frac{\frac{C^2}{4A}+\frac{D^2}{4B}-E}{A}}+\frac{\left(y+\frac{D}{2B}\right)^2}{\frac{\frac{C^2}{4A}+\frac{D^2}{4B}-E}{B}}=1$$

Пример 1.

Привести [illegible] уравнение второго порядка к каноническому виду и построить соответствующую кривую.

$$3x^2-4x+2y^2-10y+13=0$$

Решение. $A=3>0,\ B=2>0 \Rightarrow$ тип эллиптический

$$3x^2-4x+2y^2-10y+13=0$$

$$3\left(x^2-\frac{4}{3}x\right)+2\left(y^2-5y\right)+13=0$$

$$3\left(x^2-2\cdot\frac{2}{3}x\right)+2\left(y^2-2\cdot\frac{5}{2}y\right)+13=0$$

$$3\left(x^2-2\cdot\frac{2}{3}x+\left(\frac{2}{3}\right)^2-\left(\frac{2}{3}\right)^2\right)+$$

$$+2\left(y^2-2\cdot\frac{5}{2}y+\left(\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2\right)+13=0$$