4.3. Поверхности второго порядка

Поверхность 2-го порядка в прямоугольной декартовой системе координат определяется уравнением 2-ой степени относительно трех переменных x, y, z.

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + Gx + Hy + Kz + L = 0.$$

Задача приведения общего уравнения поверхности 2-го порядка к каноническому виду решается аналогично задаче приведения общего уравнения кривой 2-го порядка к каноническому виду и состоит в поворотах и параллельном переносе системы координат в новое начало в пространстве. Однако, эта задача, в отличие от задачи для кривых на плоскости, гораздо более громоздкая. Остановимся на рассмотрении только таких уравнений, в которых отсутствуют произведения xz, xy, yz, т.е. уравнения вида

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dx + Ey + Fz + G = 0.$$

Преобразование таких уравнений не требует поворотов системы координат и содержит лишь параллельный перенос системы координат в новое начало.

Наиболее простым (каноническим) уравнением описывается поверхность, привязанная к осям симметрии поверхности. Свое название поверхность получает, как правило, по названию кривых 2-го порядка, получающихся при пересечении поверхности плоскостями, параллельными плоскостям координат $x = const$, $y = const$, $z = const$.

Различают 5 основных типов поверхностей 2-го порядка. Графики поверхностей, их канонические уравнения и названия приведены в таблице.

Остановимся кратко на характеристике типов поверхностей, на распознавании типа поверхности по ее уравнению и построении поверхности по характерным параметрам.

4.3.1. Эллипсоиды.

Эллипсоид – это поверхность, в любом сечении которой плоскостями, параллельными координатным, получаются эллипсы. Каноническое уравнение эллипсоида с центром в начале координат:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Уравнение эллипсоида с центром в точке $O'(x_0;y_0;z_0)$:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1.$$

Уравнение *эллипсоида* имеет

a) квадраты всех трех переменных;

b) знаки при квадратах переменных одинаковые;

c) коэффициенты при квадратах переменных разные.

Для построения эллипсоида необходимо знать:

1) координаты центра (если центр смещен от начала координат, то в уравнении будут присутствовать члены с первыми степенями переменных, в этих случаях действия по приведению уравнения к виду, удобному для построения, аналогичны тем, что проводились для кривых 2-го порядка),

2) размеры полуосей: a – откладывается по оси OX, b – откладывается по оси OY, c – откладывается по оси OZ.

Далее строим три основных эллипса, которые получаются в сечениях эллипсоида плоскостями координат.

4.3.2. Сфера

Частным случаем эллипсоида является сфера:

$$x^2+y^2+z^2=r^2.$$

Уравнение *сферы* отличается от уравнения эллипсоида тем, что *коэффициенты при квадратах переменных одинаковые.*

Уравнение сферы с центром в точке $O'(x_0;y_0;z_0)$:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2.$$

Для построения сферы необходимо знать координаты центра и радиус. В плоскостях координат строим три сечения сферы, которые будут окружностями с радиусами, равными радиусу сферы.

4.3.3. Гиперболоиды

Канонические уравнения *гиперболоидов*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=\pm 1$$

имеют следующие признаки:

a) присутствуют квадраты всех трех переменных;

b) знаки при квадратах разные;

c) коэффициенты при квадратах переменных могут быть как различными, так и одинаковыми.

Гиперболоиды - это поверхности, в двух сечениях которых плоскостями, параллельными координатным, получаются гиперболы, а в третьем - либо эллипс, либо окружность. Различают два вида гиперболоидов.

1. Однополостный гиперболоид определяется уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

В сечении однополостного гиперболоида плоскостями $y=0$ и $x=0$ получаются гиперболы, а в сечении плоскостью $z=0-$ эллипс.

Для построения данного однополостного гиперболоида необходимо :

1) знать координаты центра,

2) ось симметрии (определяется по переменной, перед квадратом которой в каноническом уравнении знак минус),

3) построить так называемый горловой эллипс с полуосями a и b, который получается в сечении гиперболоида плоскостью $z=0$,

4) построить гиперболы в плоскостях XOZ и YOZ.

Если в исходном уравнении знак минус стоит перед квадратом другой переменной, например, перед y^2, то горловой эллипс получится в сечении гиперболоида плоскостью $y=0$, и гиперболоид будет иметь ось симметрии OY. Если в исходном уравнении знак минус стоит перед x^2, то будет иметь ось симметрии OX. Соответствующие уравнения будут иметь вид

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

2. Двухполостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1.$$

Эта поверхность состоит из двух полостей, в вертикальных сечениях которых плоскостями XOZ и YOZ – гиперболы, а в горизонтальных $z = const > \pm c$ – эллипсы. Если взять значения $|z| < c$, то в сечениях будут получаться мнимые эллипсы, например, при $z = 0$ получим "мнимый" эллипс

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1.$$

Ось симметрии гиперболоида определяется по той переменной, перед квадратом которой в левой части канонического уравнения стоит знак минус.

Уравнения двухполостных гиперболоидов с осями симметрии OY и OX можно записать по аналогии с соответствующими уравнениями однополостных гиперболоидов:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1, \qquad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1.$$

Заметим, что в уравнении однополостного гиперболоида в правой части должна стоять $+1$, *а в левой части должен быть один знак "минус" перед квадратом какой-либо переменной;*

в уравнении двухполостного гиперболоида в правой части должна стоять -1, *а в левой части должен быть один знак "минус" перед квадратом какой-либо переменной.*

4.3.4. Конусы

Коническая поверхность определяется уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

От уравнений гиперболоидов оно отличается тем, что в нем отсутствует свободный член (вместо единицы в правой части уравнения стоит ноль).

Сечения данного конуса горизонтальными плоскостями $z = const$ представляют собой эллипсы (в случае a=b – окружности). Сечения конуса координатными плоскостями XOZ и YOZ дают по паре пересекающихся прямых (образующих конуса), проходящих через начало координат (вершину конуса). Как и во всех предыдущих случаях возможно смещение вершины конуса в точку $O'(x_0; y_0; z_0)$. Ось симметрии данного конуса – OZ (определяется так же, как и у гиперболоидов, по переменной, перед которой в левой части канонического уравнения стоит знак "минус").

Конус с осью симметрии OY : $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 0.$

Конус с осью симметрии OX : $-\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 0.$

Заметим,что в левой части канонического уравнения конуса должен быть один знак "минус".

4.3.5. Параболоиды

1 Эллиптический параболоид имеет каноническое уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \pm z.$$

Легко увидеть, что *в уравнении параболоида присутствуют все три переменные,* но отличительным *признаком* уравнения параболоида является *отсутствие квадрата одной переменной.*

В сечениях данного параболоида плоскостями, параллельными координатным XOZ и YOZ, будут параболы с осью симметрии OZ и ветвями, направлеными вверх или вниз, в зависимости от знака перед z. В сечениях плоскостями $z = const$ получаются эллипсы (либо окружности, если $a = b$).

Для построения эллиптического параболоида необходимо знать:

a) координаты вершины,

b) ось симметрии (параллельна той оси, координата которой входит в уравнение только в первой степени),

c) направление ветвей.

Параболоид с осью симметрии OY :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = \pm y.$$

Параболоид с осью симметрии OX :

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \pm x.$$

Можно также записать уравнения параболоидов с вершиной в точке $O'(x_0; y_0; z_0)$.

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = \pm(z - z_0).$$

Например, уравнение кругового параболоида с вершиной в точке $O'(0; 0; -2)$ и осью симметрии OZ будет иметь вид

$$x^2 + y^2 = \pm(z + 2).$$

2. Гиперболический параболоид

Гиперболический параболоид - это поверхность второго порядка, каноническое уравнение которой имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z.$$

Эта сложная поверхность имеет форму седла. В таблице изображена поверхность, которая соответствует приведенному уравнению. При построении поверхности с уравнениями, например вида

$$2x^2 - z^2 = y,$$

или

$$\frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{3} = 5x,$$

необходимо повернуть параболоид соответствующим образом.

Отметим, что уравнения эллиптического и гиперболического параболоидов отличаются тем, что в левой части уравнения эллиптического параболоида стоит сумма квадратов переменных, а в левой части уравнения гиперболического параболоида – разность квадратов.

4.3.6. Цилиндрические поверхности

Цилиндрической называется поверхность, которую описывает прямая (называемая *образующей*), перемещающаяся параллельно самой себе вдоль некоторой кривой (называемой *направляющей*).

Характерным признаком канонического уравнения цилиндра является то, что в уравнении отсутствует одна переменная.

Образующие цилиндра параллельны той оси, координаты которой нет в уравнении.

Направляющей цилиндра может служить любая кривая. Ниже рассмотрены такие цилиндрические поверхности, у которых направляющей является кривая 2-го поряка. В таблице представлены примеры эллиптического (кругового), гиперболического и параболического цилиндров с образующими параллельными оси OZ. Уравнение такой поверхности совпадает с уравнением его направляющей.

Для построения цилиндра необходимо построить сначала направляющую, на которую затем "натягивается" цилиндрическая поверхность так, чтобы ее образующая была параллельна соответствующей оси.

4.3.7. Построение поверхностей по каноническим уравнениям

При определении типа поверхности по данному уравнению необходимо установить:

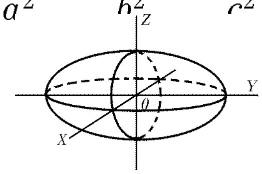
1) имеет ли уравнение все три переменные,
2) имеются ли квадраты всех переменных,
3) одинаковые или разные знаки при квадратах,
4) одинаковые или разные коэффициенты при квадратах.

Если не выполняется 1-ое условие, т.е. в уравнении отсутствует одна переменная, то мы имеем дело с цилиндрической поверхностью, если не выполняется 2-ое условие, т.е. отсутствует квадрат одной переменной, то это поверхность является параболоидом и т.д.

Таблица поверхностей 2-го порядка

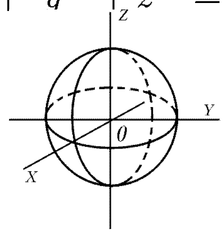
I. Эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



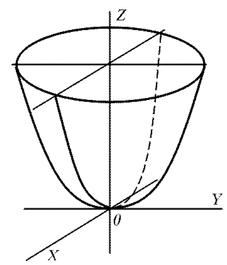
2. Сфера

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$



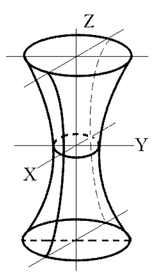
3. Параболоид эллиптический

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$$



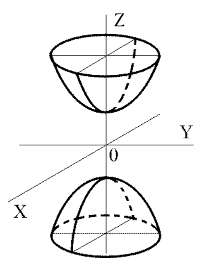
4. Гиперболоид однополостной

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$



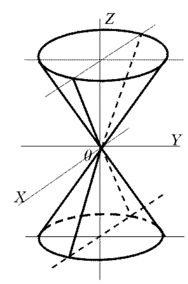
5. Гиперболоид двухполостной

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$



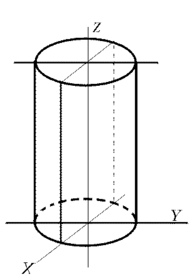
6. Конус

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$



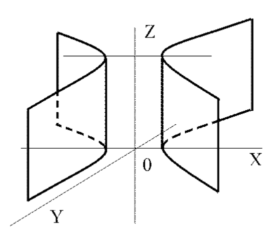
7. Цилиндр эллиптический

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



8. Цилиндр гиперболический

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



9. Цилиндр параболический

$$y = x^2$$