4.2. Прямая в пространстве

Прямая в пространстве может быть задана :

– точкой $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и направляющим вектором $\vec{s} = \{m; n; p\}$, в качестве которого может служить любой параллельный данной прямой вектор;

– двумя точками $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$;

– как линия пересечения двух плоскостей.

4.2.1. Основные уравнения прямой в пространстве

1. *Прямая задана точкой* $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ *и направляющим вектором* $\vec{s} = \{m;\ n;\ p\}$, *в качестве которого может быть взят любой вектор, параллельный прямой.*

В этом случае для составления уравнения прямой мы берем на ней произвольную точку $M(x;\ y;\ z)$, образуем вектор $\overrightarrow{M_0M} = \{(x - x_0)\ ;\ (y - y_0);\ (z - z_0)\}$ и записываем условие коллинеарности векторов $\vec{s} = \{m;\ n;\ p\}$ и $\overrightarrow{M_0M} = \{(x - x_0)\ ;\ (y - y_0);\ (z - z_0)\}$ в координатной форме

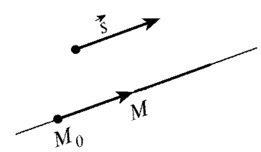


Рис. 124.

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}. \qquad (1)$$

Таким образом, получили *канонические уравнения* прямой в пространстве.

Задача 14. Составить уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(3; -1;\ 2)$ параллельно: a) оси OY, b) вектору $\vec{s} = \{5;\ 0;\ 4\}$.

Решение. Используем уравнения (1). В первом случае направляющим вектором будет вектор оси OY : $\vec{j} = \{0; 1; 0\}$, а во втором вектор $\vec{s}$

$$a)\ \frac{x - 3}{0} = \frac{y + 1}{1} = \frac{z - 2}{0}, \qquad b)\ \frac{x - 3}{5} = \frac{y + 1}{0} = \frac{z - 2}{4}.$$

2. *Прямая задана двумя точками* $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ *и* $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$.

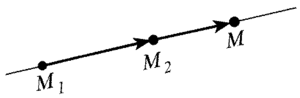


Рис. 125.

В этом случае для составления уравнений прямой можно использовать уже полученные канонические уравнения (1), взяв в качестве направляющего вектора прямой вектор $\vec{s} = \{m;\ n;\ p\} = \overrightarrow{M_1M_2} = \{(x_2 - x_1)\ ;\ (y_2 - y_1)\ ;\ (z_2 - z_1)\}$.

Тогда уравнения *прямой, проходящей через две заданные точки,* будут иметь вид

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \qquad (2)$$

Задача 15. Составить уравнения прямой, проходящей через две заданные точки $M_1(0;1;-2)$ и $M_2(-3;4;-1)$.

Решение. Подставим в уравнения прямой, проходящей через две точки, координаты точек M_1 и M_2

$$\frac{x-0}{-3-0} = \frac{y-1}{4-1} = \frac{z+2}{-1+2} \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{-3} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+2}{1}.$$

3. Отметим, что из канонических уравнений прямой (и уравнений прямой, проходящей через две заданные точки,) легко получаются *параметрические уравнения*

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} = t \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} \dfrac{x - x_0}{m} = t, \\ \dfrac{y - y_0}{n} = t, \\ \dfrac{z - z_0}{p} = t. \end{cases}$$

Откуда окончательно

$$\begin{cases} x - x_0 = mt, \\ y - y_0 = nt, \\ z - z_0 = pt, \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} x = mt + x_0, \\ y = nt + y_0, \\ z = pt + z_0. \end{cases} \qquad (3)$$

4. *Прямая задана как линия пересечения двух плоскостей*

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \qquad (4)$$

Эту систему называют *общими уравнениями* прямой в пространстве. Поскольку наиболее наглядными и удобными для использования при решении задач являются канонические и параметрические уравнения прямой, то возникает необходимость перехода от общих уравнений прямой к каноническим (параметрическим).

Задача 16. Привести общее уравнение прямой к каноническому виду

$$\begin{cases} 5x - 2y + 3z - 4 = 0, \\ 3x + 2y - 5z - 4 = 0. \end{cases} \qquad (*).$$

Записать параметрические уравнения прямой.

Решение. Для составления уравнений прямой необходимо знать координаты точки, принадлежащей прямой, и координаты направляющего вектора. Решение задачи будет состоять из двух этапов.

а). *Нахождение точки* $M_0(x_0; y_0; z_0)$.

Прямая задана как линия пересечения двух плоскостей и имеет бесчисленное множество точек, координаты которых удовлетворяют системе $(*)$. Система является неопределенной, так как в ней два уравнения, а неизвестных три. Одно из неизвестных можно задать произвольно. Пусть, например, $z = 0$.

Тогда система $(*)$ примет вид

$$\begin{cases} 5x - 2y - 4 = 0, \\ 3x + 2y - 4 = 0. \end{cases} \qquad (**)$$

Складывая уравнения, получим $8x - 8 = 0$, т.е. $x = 1$. Значение y получим, подставив найденное значение x в $(**)$: $2y = 4 - 3x$, $2y = 4 - 3, y = 1/2$. Итак, точка M_0 получена: $M_0(1; 1/2; 0)$.

b). *Нахождение направляющего вектора.*

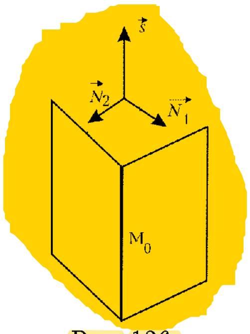


Рис. 126.

Направляющий вектор прямой $\vec{s} = \{m; n; p\}$ перпендикулярен векторам нормалей обеих пересекающихся плоскостей $\vec{N}_1 = \{5; -2; 3\}$ и $\vec{N}_2 = \{3; 2; -5\}$. Поэтому в качестве направляющего вектора можно взять вектор, являющийся векторным произведением векторов нормалей плоскостей. Итак,

$$\vec{s} = [\vec{N}_1 \times \vec{N}_2] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 4 \cdot \vec{i} + 34 \cdot \vec{j} + 16 \cdot \vec{k} = \{4; 34; 16\}.$$

Записываем канонические уравнения прямой

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \quad \Longrightarrow \quad \frac{x - 1}{4} = \frac{y - 1/2}{34} = \frac{z}{16}.$$

Окончательно

$$\frac{x - 1}{2} = \frac{y - 1/2}{17} = \frac{z}{8}.$$

Для того, чтобы записать параметрические уравнения, приравняем каждое отношение к параметру t и получим систему параметрических уравнений

$$\begin{cases} x = 2t + 1, \\ y = 17t + 1/2, \\ z = 8t. \end{cases}$$

4.2.2. Взаимное расположение прямых в пространстве

Прямые в пространстве могут быть параллельны, перпендикулярны, или образовывать в общем случае какой-то угол. Отметим, что все эти задачи сводятся к задаче о взаимной ориентации направляющих векторов этих прямых и поэтому решаются средствами векторной алгебры. Во всех случаях по данным уравнениям прямых необходимо определить координаты их направляющих векторов.

1. Нахождение угла между прямыми

Пусть даны две прямые

$$l_1: \qquad \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1},$$

$$l_2: \qquad \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}.$$

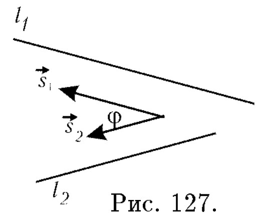


Рис. 127.

Углом между двумя прямыми называется угол между двумя лучами, выходящими из какой-либо точки пространства, параллельно данным прямым. Из рисунка ясно, что угол между прямыми есть угол между направляющими векторами этих прямых

$$\vec{s}_1 = \{m_1;\ n_1;\ p_1\} \qquad \text{и} \qquad \vec{s}_2 = \{m_2;\ n_2;\ p_2\}.$$

Записываем известную формулу для косинуса угла между векторами

$$\cos\ \varphi = \cos(\vec{s}_1,\ \vec{s}_2) = \frac{(\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2)}{|\ \vec{s}_1\ ||\ \vec{s}_2\ |}.$$

$$cos\ \ \varphi = \frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}.$$

Задача 17. Найти косинус угла между прямыми

$$l_1\ :\ \begin{cases} x = 2t - 1, \\ y = -2, \\ z = 3t + 1 \end{cases}, \qquad l_2\ :\ \begin{cases} x = t + 3, \\ y = 5t - 1, \\ z = -4. \end{cases}$$

Решение. Прямые заданы параметрическими уравнениями, коэффициентами при t являются координаты направляющих векторов этих прямых

$$\vec{s}_1 = \{2;\ 0;\ 3\} \qquad \text{и} \qquad \vec{s}_2 = \{1;\ 5;\ 0\}.$$

Находим косинус угла между векторами

$$\cos\ \varphi = \cos(\vec{s}_1,\ \vec{s}_2) = \frac{(\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2)}{|\ \vec{s}_1\ ||\ \vec{s}_2\ |} =$$

$$= \frac{2\cdot 1 + 0\cdot 5 + 3\cdot 0}{\sqrt{2^2+0^2+3^2}\cdot\sqrt{1^2+5^2+0^2}} = \frac{2}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{26}} \approx 0.56.$$

Задача 18. Найти косинус угла наклона прямой к оси OY

$$l: \begin{cases} x - 2y + z - 4 = 0, \\ 3x + y + 2 = 0. \end{cases}$$

Решение. Прямая задана общими уравнениями, то есть как линия пересечения двух плоскостей, векторы нормали которых

$$\vec{N}_1 = \{1; -2; 1\}, \qquad \vec{N}_2 = \{3; 1; 0\}.$$

Направляющий вектор находим как их векторное произведение

$$\vec{s} = [\vec{N}_1 \times \vec{N}_2] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \{-1; 3; 7\}.$$

Косинус угла, который образует полученный вектор с осью OY, определяется как отношение второй координаты вектора к его длине

$$\cos\ \beta = \frac{3}{\sqrt{1+9+49}} = \frac{3}{\sqrt{59}}.$$

2. Проверка условий параллельности и перпендикулярности прямых в пространстве

Ясно, что направляющие вектора параллельных прямых коллинеарны $\vec{s}_1 \,||\, \vec{s}_2$.

Записываем условие коллинеарности этих векторов в координатной форме

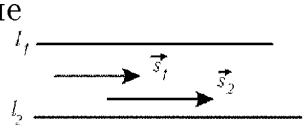


Рис. 128.

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}.$$

Направляющие вектора перпендикулярных прямых также взаимно перпендикулярны $\vec{s}_1 \perp \vec{s}_2$. Запишем условие перпендикулярности

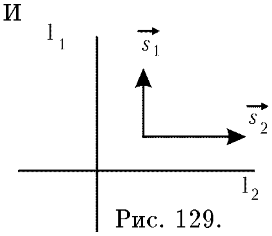


Рис. 129.

$$(\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2) = 0,$$

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0.$$

Из уравнения одной прямой берутся координаты точки и далее находится расстояние от этой точки до второй прямой, как показано выше.

4.2.3. Взаимное расположение прямой и плоскости

В задачах на взаимное расположение прямой с плоскостью в пространстве привлекаются направляющий вектор прямой и вектор нормали плоскости.

1. Нахождение угла между прямой и плоскостью

Пусть требуется найти угол между прямой

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p} \quad \text{и плоскостью} \quad Ax+By+Cz+D=0.$$

Углом между прямой и плоскостью в пространстве называется угол между этой прямой и ее проекцией на эту плоскость.

Из рисунка видно, что угол между прямой и плоскостью φ дополняет угол α между направляющим вектором прямой $\vec{s}=\{m;n;p\}$ и вектором нормали плоскости $\vec{N}=\{A;B;C\}$ до 90^o.

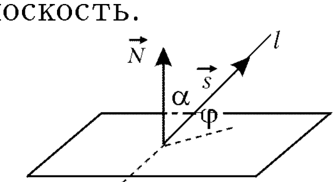


Рис. 132.

Средствами векторной алгебры находим угол α :

$$\cos\alpha=\frac{(\vec{N}\cdot\vec{s})}{|\vec{N}|\cdot|\vec{s}|}.$$

Но $\cos\alpha=\cos(90^o-\varphi)=\sin\varphi$, поэтому можно записать формулу для нахождения синуса угла между прямой и плоскостью в векторной и координатной форме

$$\sin\varphi=\frac{|(\vec{N}\cdot\vec{s})|}{|\vec{N}|\cdot|\vec{s}|}=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

Так как угол φ принимает значения от 0^o до 180^o, а синус таких углов величина положительная, то в числителе формулы поставлен знак модуля.

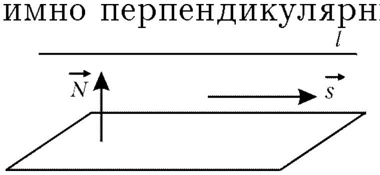
Задача 23. Найти угол между прямой
$\dfrac{x+4}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z+1}{-6}$ и плоскостью $x-2y+2z-5=0$.

Решение. Из условий задачи имеем : вектор нормали плоскости $\vec N=\{1;-2;2\}$ и направляющий вектор прямой $\vec s=\{2;3;-6\}$. Записываем формулу для нахождения синуса угла между прямой и плоскостью

$$\sin\varphi=\frac{|1\cdot 2+(-2)\cdot 3+2\cdot(-6)|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}\sqrt{2^2+3^2+(-6)^2}}=\frac{|-16|}{\sqrt{9}\sqrt{49}}=\frac{16}{21}.$$

2. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости в пространстве

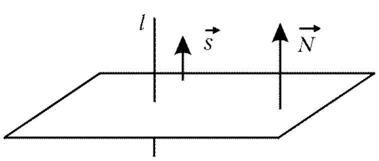
Из рисунка видно, что, если прямая и плоскость параллельны, то их характеристические вектора $\vec N=\{A;B;C\}$ и $\vec s=\{m;n;p\}$ взаимно перпендикулярны



$$\vec N\perp\vec s\quad\Rightarrow\quad(\vec N\cdot\vec s)=0,$$

$$Am+Bn+Cp=0.$$

Рис. 133.



Если прямая перпендикулярна плоскости, то вектора $\vec N=\{A;B;C\}$ и $\vec s=\{m;n;p\}$ будут коллинеарны

3.

$$\vec N\,||\,\vec s\quad\Rightarrow\quad\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}.$$

Рис. 134.

Нахождение точки пересечения прямой с плоскостью

Задача 24. Найти точку пересечения прямой
$\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z-2}{1}$ с плоскостью $3x+5y+z-21=0$.

Решение. Для того, чтобы найти точку пересечения прямой с плоскостью достаточно найти решение системы, включающей в себя уравнения прямой и плоскости $\begin{cases}\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z-2}{1},\\ 3x+5y+z-21=0.\end{cases}$

Уравнения прямой в пространстве

	Название	Уравнение Смысл параметров
1.	Канонические ур-я прямой в пространстве	$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_o}{p}$ $M_0(x_o;y_o;z_o)$–точка на прямой $\vec{s}=\{m;n;p\}$–направляющий вектор
2.	Параметрические ур-я прямой в пространстве	$\begin{cases} x=mt+x_o \\ y=nt+y_o \\ z=pt+z_o \end{cases}$, тот же
3.	Уравнения прямой, проходящей через две точки	$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$ Точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ и $M_2(x_2;y_2;z_2)$
4.	Общие уравнения прямой в пространстве	$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$

Взаимное расположение прямых в пространстве

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}, \qquad \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{x-x_2}{p_2}$$

$$\vec{s}_1=\{m_1;n_1;p_1\}, \qquad \vec{s}_2=\{m_2;n_2;p_2\}$$

Косинус угла

$$\boxed{\cos\varphi=\frac{(\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2)}{|\vec{s}_1|\cdot|\vec{s}_2|}=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}}$$

Условие параллельности

$$\boxed{\vec{s}_1||\vec{s}_2, \quad \vec{s}_2=\alpha\vec{s}_1, \qquad \frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}}$$

Условие перпендикулярности

$$\boxed{\vec{s}_1\perp\vec{s}_2, \quad (\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2)=0, \quad m_1\ m_2+n_1\ n_2+p_1p_2=0}$$

Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p} \qquad \vec{s}=\{m;n;p\}$$

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad \vec{N}_1=\{A;B;C\}$$

Синус угла

$$\boxed{\sin\varphi=\frac{|(\vec{N}\cdot\vec{s})|}{|\vec{N}|\cdot|\vec{s}|}=\frac{|\,Am+Bn+Cp\,|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}}$$

Условие параллельности

$$\boxed{\vec{s}\ \perp\ \vec{N}, \qquad (\vec{N}\ \cdot\ \vec{s})=0, \qquad A\,m+B\,n+C\,p=0}$$

Условие перпендикулярности

$$\boxed{\vec{s}\ ||\ \vec{N}, \qquad \vec{N}\ =\alpha\,\vec{s}, \qquad \frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}}$$

Точка пересечения
$$\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+pt \\ A\,x+B\,y+C\,z+D=0 \end{cases}$$

Условие принадлежности прямой плоскости

$$M_0\in P, \quad \vec{s}\perp\vec{N}, \quad \begin{cases} Ax_0+By_0+Cz_0+D=0 \\ A\,m+B\,n+C\,p=0 \end{cases}$$

Расстояние от точки до прямой в пространстве

$$d=\frac{|\,[\overrightarrow{M_0M_1}\times\vec{s}]\,|}{|\,\vec{s}\,|}$$

Расстояние между скрещивающимися прямыми

$$d=\frac{|\,(\overrightarrow{M_1M_2},\ \vec{s}_1,\ \vec{s}_2)\,|}{|\,[\vec{s}_1\times\vec{s}_2]\,|}$$

Условие пересечения двух прямых в пространстве

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}=0.$$