Г л а в а 4.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

4.1. Плоскость

Всякую плоскость в прямоугольных координатах $OXYZ$ можно описать уравнением 1-ой степени (линейным) относительно трех переменных x, y и z, т.е. уравнением вида

$$Ax + By + Cz + D = 0. \qquad (1)$$

Это уравнение называется *общим уравнением плоскости.*

Для получения уравнения плоскости используются средства векторной алгебры.

4.1.1. Основные уравнения плоскости

1. *Плоскость задана точкой* $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ *и вектором нормали* $\vec{N} = \{A;\ B;\ C\}$, в качестве которого может быть взят любой вектор, перпендикулярный плоскости. (Рис.107.)

В этом случае для составления уравнения плоскости мы берем на ней произвольную точку $M(x;\ y;\ z)$, образуем вектор

$$\overrightarrow{M_0M} = \{(x - x_0)\ ;\ (y - y_0);\ (z - z_0)\}$$

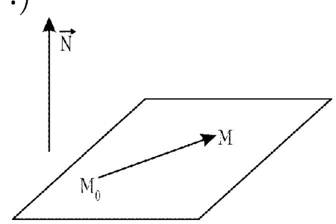

Рис. 107.

и записываем условие перпендикулярности векторов

$$\vec{N} = \{A;\ B;\ C\} \quad \text{и} \quad \overrightarrow{M_0M} = \{(x - x_0)\ ;\ (y - y_0);\ (z - z_0)\},$$

используя их скалярное произведение $\left(\vec{N} \cdot \overrightarrow{M_0M}\right) = 0.$
Или в координатной форме

$$A \cdot (x - x_0) + B \cdot (y - y_0) + C \cdot (z - z_0) = 0. \qquad (2)$$

Раскрыв скобки и обозначив $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$, получим *общее уравнение* плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Таким образом, можно получить уравнение плоскости, зная координаты точки, через которую проходит плоскость, и какой-либо вектор, перпендикулярный плоскости. Рассмотрим простейшие примеры.

Задача 1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(5; -1; 7)$ перпендикулярно вектору $\vec{N} = \{2; 4; -3\}$.

Решение. Используем уравнение (2). Подставляем в него вместо коэффициентов A, B, C координаты вектора $\vec{N}$, а вместо $(x_0; y_0; z_0)$ – координаты точки M_0.

$$2 \cdot (x-5) + 4 \cdot (y+1) - 3 \cdot (z-7) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x + 4y - 3z + 15 = 0.$$

Задача 2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку точку $M_0(1; 2; -6)$ перпендикулярно вектору $\overrightarrow{PQ}$, соединяющему точки $P(1; -5; 2)$ и $Q(5; -7; -1)$.

Решение. Исходное уравнение (2).
Координаты точки, через которую проходит плоскость, известны. Найдем координаты вектора нормали $\vec{N} = \{A; B; C\}$, которым в данной задаче является вектор

$$\overrightarrow{PQ} = \{5-1; -7+5; -1-2\} = \{4; -2; -3\}.$$

Таким образом, уравнение плоскости

$$4(x-1) - 2(y-2) - 3(z+6) = 0 \quad \Rightarrow \quad 4x - 2y - 3z - 18 = 0.$$

Задача 3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(1; 2; -6)$ перпендикулярно оси OX.

Решение. Исходное уравнение то же. Координаты точки, через которую проходит плоскость, известны. В качестве вектора нормали $\vec{N} = \{A; B; C\}$ в данном случае можно взять вектор $\vec{i} = \{1; 0; 0\}$ – орт оси OX. Таким образом, уравнение плоскости

$$1(x-1) + 0(y-2) + 0(z+6) = 0 \quad \Rightarrow \quad x - 1 = 0 \quad \text{или} \quad x = 1.$$

2. *Плоскость задана координатами трех точек, принадлежащих плоскости:* $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ и $M_3(x_3;\ y_3;\ z_3)$. (Рис.108.)

1-ый способ. Возьмем на плоскости произвольную точку $M(x;\ y;\ z)$ и образуем 3 вектора, лежащие в этой плоскости:

$$\overrightarrow{M_1M} = \{(x-x_1);(y-y_1);(z-z_1)\},$$
$$\overrightarrow{M_1M_2} = \{(x_2-x_1);(y_2-y_1);(z_2-z_1)\},$$
$$\overrightarrow{M_1M_3} = \{(x_3-x_1);(y_3-y_1);(z_3-z_1)\}.$$

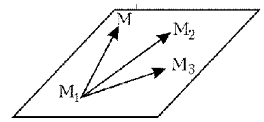

Рис. 108.

А теперь запишем условие компланарности 3-х векторов в векторной и координатной формах с помощью смешанного произведения

$$(\overrightarrow{M_1M},\ \overrightarrow{M_1M_2},\ \overrightarrow{M_1M_3}) = 0,$$

$$\Rightarrow \quad \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (3)$$

Раскрывая этот определитель по элементам 1-ой строки, получим общее уравнение плоскости.

Задача 4. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(3;-2;2)$, $M_2(-3;1;2)$, $M_3(-1;2;1)$.

Решение. Возьмем на плоскости произвольную точку $M(x;\ y;\ z)$ и образуем 3 вектора, лежащие в этой плоскости:

$\overrightarrow{M_1M} = \{(x-3);\ (y+2);\ (z-2)\}$, $\overrightarrow{M_1M_2} = \{-6;\ 3;\ 0\}$,

$\overrightarrow{M_1M_3} = \{-4;\ 4;\ -1\}$. А теперь запишем условие компланарности этих векторов в координатной форме с помощью смешанного произведения

$$\begin{vmatrix} x-3 & y+2 & z-2 \\ -6 & 3 & 0 \\ -4 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрываем этот определитель по элементам 1-ой строки

$$(x-3)\cdot(-3) - (y+2)\cdot(6) + (z-2)\cdot(-12) = 0.$$

Разделим все выражение на (-3)

$$(x-3) + 2\,(y+2) + 4\,(z-2) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x + 2y + 4z - 7 = 0.$$

• **3.** $3x - 2y + z = 0.$

В уравнении отсутствует свободный член, значит плоскость проходит через начало координат.

Изобразить такую плоскость трудно, можно лишь построить часть плоскости (рис.112.), проведя в плоскостях координат "следы" плоскости, например:

$XOY: \Rightarrow \quad z = 0 \quad \Rightarrow \qquad 3x - 2y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 3x/2.$

$YOZ: \Rightarrow \quad x = 0 \quad \Rightarrow \qquad -2y + z = 0 \quad \Rightarrow \quad z = 2y.$

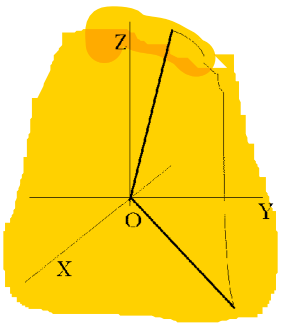

Рис. 112.

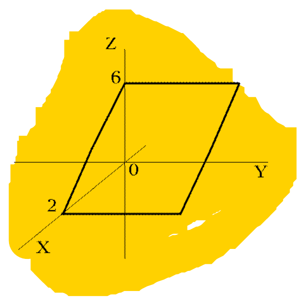

Рис. 113.

Если в уравнении плоскости отсутствует одна переменная, то плоскость проходит параллельно той оси, координата которой отсутствует в уравнении.

• **4.** $3x + z - 6 = 0.$

В уравнении данной плоскости отсутствует y, такая плоскость проходит параллельно оси OY, отсекая на осях координат отрезки

$a = 2$ (на оси OX, при $z = 0$) и $c = 6$ (на оси OZ, при $x = 0$). (Рис.113.)

• **5.** $2x - 5y = 12.$

В уравнении данной плоскости отсутствует z, такая плоскость проходит параллельно оси OZ, отсекая на осях координат отрезки

$a = 6$ (на оси OX, при $y = 0$) и

$b = -12/5 = -2.4$ (на оси OY, при $x = 0$). (Рис.114.)

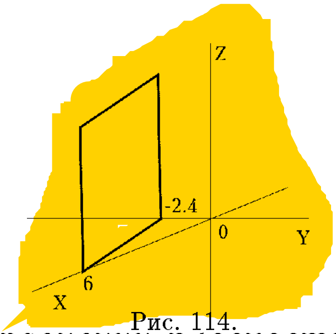

Рис. 114.

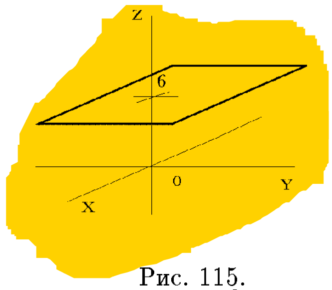

Рис. 115.

Если в уравнении плоскости отсутствуют две переменные, то плоскость проходит параллельно соответствующей координатной плоскости.

● **6**. $z - 6 = 0$.

В уравнении отсутствуют x и y, значит плоскость будет проходить параллельно координатной плоскости XOY через точку $z = 6$ на оси OZ. (Рис.115.)

● **7**. $3x - 6 = 0$.

Плоскость $3x - 6 = 0$ проходит параллельно плоскости YOZ через точку $x = 2$ на оси OX. (Рис.116.)

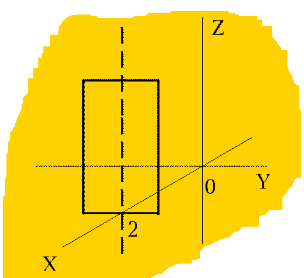

Рис. 116.

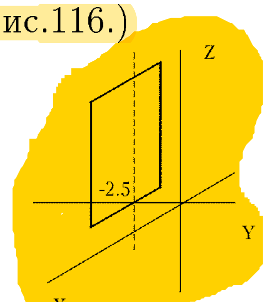

Рис. 117.

● **8**. $2y + 5 = 0$.

Плоскость $2y + 5 = 0$ проходит параллельно плоскости XOZ через точку $y = -5/2$ на оси OY. (Рис.117.)

Уравнения *координатных плоскостей* получаются, если в предыдущих случаях (п. 6-8) будет отсутствовать и свободный член:

$z = 0$ – уравнение плоскости XOY,
$y = 0$ – уравнение плоскости XOZ,
$x = 0$ – уравнение плоскости YOZ.

Задача 8. Составить уравнение плоскости, проходящей через две точки $M_1(0;-1;4)$, $M_2(2;-5;1)$ параллельно вектору $\vec{a}=\{0;-2;1\}$.

Решение. Для составления уравнения плоскости нам нужно иметь координаты точки (можно взять любую из данных в условии) и вектора нормали. Если ввести в рассмотрение вектор $\overrightarrow{M_1M_2}=\{2;-4;-3\}$, то нормальный вектор плоскости будет перпендикулярен двум векторам $\vec{a}$ и $\overrightarrow{M_1M_2}$ и, как в предыдущей задаче, в качестве вектора нормали берем вектор, являющийся векторным произведением этих векторов

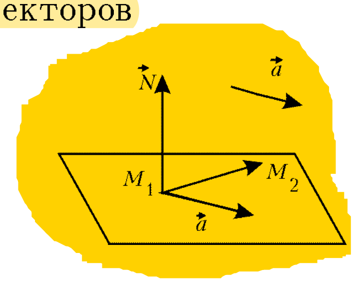

Рис. 120.

$$\vec{N}=[\vec{a}\times\overrightarrow{M_1M_2}]=$$

$$=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & -2 & 1\\ 2 & -4 & -3\end{vmatrix}=$$

$$=10\cdot\vec{i}+2\cdot\vec{j}+4\cdot\vec{k}.$$

Итак, вектор нормали $\vec{N}=\{10;\ 2;\ 4\}$. Подставляем координаты точки M_1 и вектора $\vec{N}$ в уравнение плоскости

$$10(x-0)+2(y+1)+4(z-4)=0 \quad\Rightarrow\quad 10x+2y+4z-14=0.$$

Окончательно $\quad 5x+y+2z-7=0.$

3. Взаимное расположение плоскостей

Плоскости могут быть параллельны, перпендикулярны или в общем случае пересекаться под каким-то углом. Отметим, что все эти задачи сводятся к задаче о взаимной ориентации векторов нормалей этих плоскостей и поэтому решаются средствами векторной алгебры. Во всех случаях по данным уравнениям плоскостей необходимо определить координаты их векторов нормалей.

Нахождение угла, образованного парой пересекающихся плоскостей

Пусть даны две плоскости

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$

$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$$

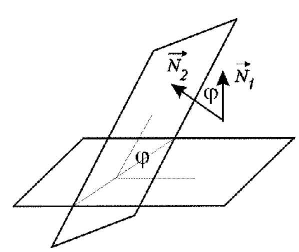

Рис. 121.

Углом между плоскостями называется двугранный угол, который измеряется вписанным в него линейным углом. Как ясно из рисунка, этот линейный угол равен углу между векторами нормалей этих плоскостей

$$\vec{N}_1 = \{A_1;\ B_1;\ C_1\} \qquad \text{и} \qquad \vec{N}_2 = \{A_2;\ B_2;\ C_2\}.$$

Записываем известную формулу для косинуса угла между векторами

$$\cos\varphi = \cos(\vec{N}_1,\ \vec{N}_2) = \frac{(\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2)}{|\ \vec{N}_1\ ||\ \vec{N}_2\ |}.$$

$$cos\ \ \varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Задача 9. Найти угол между плоскостями $x - 2y + 2z - 8 = 0$ и $x + z - 6 = 0$.

Решение. Векторы нормалей плоскостей имеют координаты

$$\vec{N}_1 = \{1; -2; 2\}, \qquad \vec{N}_2 = \{1; 0; 1\}.$$

Находим косинус угла между ними

$$\cos\ \ \varphi = \cos(\vec{N}_1,\ \vec{N}_2) = \frac{(\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2)}{|\ \vec{N}_1\ ||\ \vec{N}_2\ |} =$$

$$= \frac{1 \cdot 1 + (-2) \cdot 0 + 2 \cdot 1}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} \cdot \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{3}{3 \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Таким образом, острый угол между плоскостями равен 45^o.

Проверка условий параллельности и перпендикулярности плоскостей

Ясно, что вектора нормалей параллельных плоскостей коллинеарны $\vec{N}_1\ ||\ \vec{N}_2$.

Записываем условие коллинеарности этих векторов в координатной форме

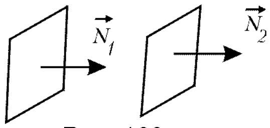

Рис. 122.

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Вектора нормалей перпендикулярных плоскостей также взаимно перпендикулярны $\vec{N}_1 \perp \vec{N}_2$. Запишем условие перпендикулярности

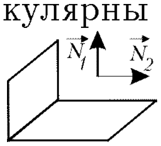

Рис. 123.

$$(\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2) = 0,$$

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Задача 10. При каких m и p плоскости $-2x + 3y + mz - 1 = 0$ и $px - 6y + 2z + 3 = 0$ будут параллельны ?

Решение. Запишем условие коллинеарности нормальных векторов плоскостей в координатной форме

$$\frac{-2}{p} = \frac{3}{-6} = \frac{m}{2}.$$

Отсюда $-2/p = -1/2$, $\quad p = 4$, $\quad m/2 = -1/2$, $\quad m = -1$.

Задача 11. Доказать, что плоскости $2x + 3y + 2z - 1 = 0$ и $5x - 6y + 4z - 3 = 0$ перпендикулярны.

Решение. Векторы нормалей $\vec{N}_1 = \{2; 3; 2\}$, $\vec{N}_2 = \{5; -6; 4\}$. Проверяем условие перпендикулярности векторов

$$(\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2) = 0, \qquad 2 \cdot 5 + 3 \cdot (-6) + 2 \cdot 4 = 0, \qquad 0 = 0.$$

Вывод : вектор $\vec{N}_1 \perp \vec{N}_2$, следовательно, перпендикулярны и плоскости.

4. Нахождение расстояния от точки до плоскости

Расстояние d от данной точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ до данной плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ находится по формуле

$$d = \frac{|\ Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D\ |}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Для определения расстояния от точки до плоскости необходимо в левую часть общего уравнения плоскости подставить координаты *данной точки, полученное число взять по абсолютной величине и разделить на длину нормального вектора плоскости.*

Задача 12. Найти объем куба, одна из вершин которого в точке $M_1(2;-3;5)$, а грань лежит на плоскости
$-x+2y-2z+16=0$.

Решение. Подстановкой координат точки в уравнение плоскости убеждаемся в том, что точка M_1 не принадлежит заданной плоскости, поэтому расстояние от этой точки до плоскости равно длине ребра куба

$$d=\frac{|\,(-1)\cdot 2+2\cdot(-3)-2\cdot 5+16\,|}{\sqrt{(-1)^2+2^2+(-2)^2}}=\frac{2}{3}.$$

Объем куба $V=d^3=\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$. (куб. ед.)

Задача 13. Найти расстояние между параллельными плоскостями $4x+3y-5z-8=0$ и $4x+3y-5z+12=0$.

Решение. Расстояние между параллельными плоскостями есть длина перпендикуляра, опущенного из любой точки одной плоскости на другую. Схема решения:

Находим точку на первой плоскости: зануляем любые две координаты, например $y=0$, $z=0$, и из уравнения первой плоскости находим $x=2$. Итак, $M_1(2;0;0)$.

По известной формуле расстояния от точки до плоскости находим расстояние от этой точки до второй плоскости

$$d=\frac{|4\cdot 2+3\cdot 0-5\cdot 0+12|}{\sqrt{4^2+3^2+(-5)^2}}=\frac{20}{\sqrt{50}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}.$$

Уравнения плоскости

	Название	Уравнение. Смысл параметров
1.	Плоскость, проходящая через точку перпендикулярно данному вектору	$A(x-x_o)+B(y-y_o)+C(z-z_o)=0$ $M_o(x_o;y_o;z_o)$-точка на пл-ти $\vec{N}=\{A;B;C\}-$ вектор нормали
2.	Общее уравнение плоскости	Ax+By+Cz+D=0 $\vec{N}=\{A;B;C\}$
3.	Уравнение плоскости в отрезках	$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ a- отрезок на оси OX b-отрезок на оси OY c-отрезок на оси OZ

Взаимное расположение плоскостей

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \qquad \vec{N}_1=\{A_1;B_1;C_1\}.$$
$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \qquad \vec{N}_2=\{A_2;B_2;C_2\}.$$

Косинус угла

$$\boxed{\cos\varphi=\frac{(\vec{N}_1\cdot\vec{N}_2)}{|\vec{N}_1|\cdot|\vec{N}_2|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}}$$

Условие параллельности

$$\boxed{\vec{N}_1||\vec{N}_2, \quad \vec{N}_2=\alpha\vec{N}_1, \qquad \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}}$$

Условие перпендикулярности

$$\boxed{\vec{N}_1\perp\vec{N}_2, \quad (\vec{N}_1\cdot\vec{N}_2)=0, \quad A_1\ A_2+B_1\ B_2+C_1C_2=0}$$