Математика 2.1

Неопределенный интеграл. Часть 1

Лектор:
Игорь Витальевич Корытов

Содержание части 1

- Первообразная и неопределенный интеграл
  - Первообразная
  - Неопределённый интеграл
- Свойства

Первообразная и неопределенный интеграл

Первообразная

- **Дано:** $\mathbb{R} = (-\infty; +\infty)$, $X \subseteq \mathbb{R}$ (X – промежуток числовой оси)
- $F(x): D(F(x)) = X, \exists F'(x), x \in X$ ($F(x)$ определена и дифференцируема на числовом промежутке X)
- $f(x): D(f(x)) = X$ ($f(x)$ определена на числовом промежутке X)
- **Определение 1.** Функция $y = F(x)$ называется ***первообразной*** для функции $y = f(x)$ на множестве X, если $F'(x) = f(x)\ \forall x \in X$.

Первообразная

- В теоремах считаем $X = (a, b)$.

- **Теорема 1.** Если $F(x)$ – *первообразная* для $f(x)$ на интервале (a, b) и $C = \text{const}$, то $F(x) + C$ – также *первообразная* для $f(x)$ на (a, b).

- **Доказательство.**

- $(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x) + 0 = f(x)$.■

Первообразная

- **Теорема 2.** Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ – *первообразные* для $f(x)$ на интервале (a, b), то $F_1(x) - F_2(x) = C$.
- **Доказательство.** Обозначим $F_1(x) - F_2(x) = G(x)$, $x \in (a, b)$.
- Тогда $\forall x \in (a, b)$ по теореме Лагранжа
- $G(x) - G(a) = G'(c)(x - a)$, $c \in (a, x)$.
- Так как $G'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$,
- $G(x) - G(a) = 0 \cdot (x - a) \Rightarrow G(x) - G(a) = 0 \Rightarrow G(x) = G(a) \Rightarrow$
- $G(x) = \text{const}$, $x \in (a, b) \Rightarrow F_1(x) - F_2(x) = C$. ■

Первообразная

- **Следствие.** Две любые первообразные одной и той же функции отличаются на постоянную.

Неопределенный интеграл

- **Определение 2.** ***Неопределенным интегралом*** функции $f(x)$ называется множество всех ее первообразных

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

- $\int$ – знак интеграла, dx – дифференциал переменной x,
- $f(x)$ – подынтегральная функция,
- $f(x)dx$ – подынтегральное выражение,
- $F(x)$ – любая из первообразных,
- C – постоянная интегрирования, $C \in (-\infty, +\infty)$.

Свойства неопределенного интеграла

Свойства неопределенного интеграла

- **Свойство 1.** Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

- Доказательство.

$$\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x) + C)' = f(x).$$

Свойства неопределенного интеграла

- **Свойство 2.** Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.$$

- Доказательство.

$$d\left(\int f(x)dx\right) = \left(\int f(x)dx\right)' dx = f(x)dx.$$

Свойства неопределенного интеграла

- **Свойство 3.** Неопределенный интеграл от производной функции равен этой функции плюс произвольная постоянная
$$\int F'(x)dx = F(x) + C.$$

- Доказательство.
$$\int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C.$$

Свойства неопределенного интеграла

- **Свойство 4.** Неопределенный интеграл от дифференциала функции равен этой функции плюс произвольная постоянная

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

- Доказательство.

$$\int dF(x) = \int F'(x)dx = F(x) + C.$$

Свойства неопределенного интеграла

- **Свойство 5 (линейность).** Неопределенный интеграл от суммы функций равен сумме неопределенных интегралов от функций-слагаемых

$$\int \big(f_1(x) + f_2(x)\big)dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx\,.$$

- Доказательство.

$$\left(\int \big(f_1(x) + f_2(x)\big)dx\right)' = f_1(x) + f_2(x),$$

$$\left(\int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx\right)' = \left(\int f_1(x)dx\right)' + \left(\int f_2(x)dx\right)' = f_1(x) + f_2(x).$$

Свойства неопределенного интеграла

- **Свойство 6 (линейность).** Постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx\,.$$

- Доказательство.

$$\left(\int kf(x)dx\right)' = kf(x),$$

$$\left(k\int f(x)dx\right)' = k\left(\int f(x)dx\right)' = kf(x).$$

Конец части 1