Монотонность последовательности, пределом которой является число e

Составитель Корытов И. В.

1. Исходная последовательность

- Последовательность

$$\{x_n\} = \left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}.$$

- Общий член последовательности

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

2. Общий член как бином Ньютона

- Разложение общего члена по формуле бинома Ньютона

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot 1^{n-k} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \cdot \frac{1}{n^k}.$$

2. Общий член как бином Ньютона

- Количество сомножителей в произведении

$$\underbrace{\underbrace{1\cdot 2\cdot 3\cdot\dots\cdot(n-k)}_{n-k\text{ сомножителей}}\cdot\underbrace{(n-k+1)\cdots(n-1)n}_{k\text{ сомножителей}}}_{n\text{ сомножителей}}$$

- Вынесение общего множителя из каждой скобки числителя

$$x_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{n\cdot n\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots n\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}{k!}\cdot\frac{1}{n^k},$$

2. Общий член как бином Ньютона

- с учетом количества множителей в числителе

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)}{k!} \cdot \frac{1}{n^k},$$

- после сокращения дроби

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)}{k!}.$$

3. Сравнение данного и последующего членов последовательности

- n-й член последовательности

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}{k!},$$

- (n+1)-й член последовательности

$$x_{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}{k!} + \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right)}{(n+1)!}.$$

3. Сравнение данного и последующего членов последовательности

- Положительность множителей

$$1-\frac{1}{n}>0, \qquad 1-\frac{2}{n}>0, \dots, 1-\frac{k-1}{n}>0,$$
$$1-\frac{1}{n+1}>0, \qquad 1-\frac{2}{n+1}>0, \dots, 1-\frac{n}{n+1}>0.$$

- Сравнение членов

$$x_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}{k!}<$$

$$<\sum_{k=0}^{n}\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}{k!}+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right)}{(n+1)!}=x_{n+1}$$

4. Монотонность последовательности

- Неравенство

$$x_n < x_{n+1}, \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

означает, что последовательность

$$\{x_n\} = \left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$$

является возрастающей.