Лекционные наброски на тему “Бета и гамма функции”

1. Бета-функция

определяется равенством

$$B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx. \tag{1}$$

Интеграл в правой части называется **интегралом Эйлера первого рода**. Если $a < 1$ и $b < 1$, то этот интеграл является несобственным на нижнем пределе и сходится при $a > 0$ и $b > 0$. В противном случае интеграл расходится.

Симметрия. Покажем, что функция $B(a,b)$ является симметричной относительно перестановки ее аргументов, то есть

$$B(a,b) = B(b,a). \tag{2}$$

Действительно, выполнив замену переменной

$$t = 1 - x, \quad dt = -dx,$$

получим заявленное утверждение:

$$B(a,b) = \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{a-1}dt = B(b,a).$$

Второе представление бета-функции. Выполнив подстановку $x = \cos^2 \varphi$, получим

$$\begin{aligned} B(a,b) &= -\int_{\pi/2}^{0} \cos^{2a-2}\varphi\,(1-\cos^2\varphi)^{b-1} 2\cos\varphi\sin\varphi\,d\varphi = \\ &= 2\int_0^{\pi/2} \cos^{2a-1}\varphi\ \sin^{2b-1}\varphi\,d\varphi. \end{aligned} \tag{3}$$

Пример 1.

$$B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^{\pi/2} d\varphi = \pi.$$

Пример 2.

$$B(1,b) = 2\int_0^{\pi/2} \cos\varphi\ \sin^{2b-1}\varphi\,d\varphi = \frac{1}{b}.$$

Пример 3.

$$B(a,a) = 2\int_0^{\pi/2} \cos^{2a-1}\varphi\ \sin^{2a-1}\varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{b^{2a-2}}\int_0^{\pi/2} \sin^{2a-1}2\varphi\, d\varphi = \frac{1}{b^{2a-1}}\int_0^{\pi} \sin^{2a-1}t\, dt =$$

$$= \frac{1}{b^{2a-1}}\left(\int_0^{\pi/2} \sin^{2a-1}t\, dt + \int_{\pi/2}^{\pi} \sin^{2a-1}t\, dt\right).$$

Покажем, что второй интеграл в правой части последнего равенства совпадает с первым. Сделаем замену $x = \pi - t$ и воспользуемся тригонометрическим тождеством $\sin(\pi - x) = \sin x$:

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \sin^{2a-1}t\, dt = -\int_{\pi/2}^{0} \sin^{2a-1}x\, dx = \int_0^{\pi/2} \sin^{2a-1}x\, dx.$$

Из формулы (3) следует, что

$$2\int_0^{\pi/2} \sin^{2a-1}t\, dt = B\left(\frac{1}{2}, a\right).$$

Таким образом,

$$B(a,a) = \frac{1}{b^{2a-1}} B\left(\frac{1}{2}, a\right). \qquad (4)$$

Рекуррентное соотношение. Преобразуем интеграл (1), используя формулу интегрирования по частям:

$$u = (1-x)^{b-1}, \quad du = -(b-1)(1-x)^{b-2}dx,$$

$$dv = x^{a-1}dx, \quad v = \frac{1}{a}x^a = \frac{1}{a}\left(x^{a-1} - x^{a-1}(1-x)\right).$$

Тогда

$$B(a,b) = (1-x)^{b-1}\frac{x^a}{a}\bigg|_0^1 + \frac{b-1}{a}\int_0^1 x^a(1-x)^{b-2}dx.$$

Если $b > 1$, то первый член в правой части этого равенства обращается в ноль при подстановке пределов, а подынтегральную функцию второго члена можно представить в виде

$$x^a(1-x)^{b-2} = x^{a-1}(1-x)^{b-2}\big(1-(1-x)\big) =$$
$$= x^{a-1}(1-x)^{b-2} - x^{a-1}(1-x)^{b-1}.$$

Тогда

$$B(a,b) = \frac{b-1}{a}\left(\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-2}dx - \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx\right) =$$
$$= \frac{b-1}{a}\big(B(a,b-1) - B(a,b)\big),$$

что влечет

$$B(a,b) = \frac{b-1}{a+b-1}B(a,b-1). \tag{5}$$

Учитывая симметричность бета – функции (2), получим

$$B(a,b) = \frac{a-1}{a+b-1}B(a-1,b). \tag{6}$$

Сопоставляя выражения (5) и (6), получим

$$(b-1)B(a,b-1) = (a-1)B(a-1,b).$$

В терминах обозначений

$$p = b-1, \quad q = a-1$$

последнее равенство принимает вид

$$B(p,q+1) = \frac{q}{p}B(p+1,q). \tag{7}$$

Если $b = n$ – натуральное число, то из равенства (5) следует, что

$$B(a,n) = \frac{n-1}{a+n-1}\cdot\frac{n-2}{a+n-2}\cdot\frac{n-3}{a+n-3}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{a+1}\cdot B(a,1).$$

Однако

$$B(a,1) = \int_0^1 x^{a-1}dx = \frac{1}{a}$$

и, следовательно,

$$B(a,n) = B(n,a) = \frac{(n-1)!}{a(a+1)(a+2)\dots(a+n-1)}.$$

Считая, что $a = m$ – натуральное число, получим равенство

$$B(m,n) = B(n,m) = \frac{(n-1)!\,(m-1)!}{(m+n-1)!}. \qquad (8)$$

Ещё одна формулу для Эйлерова интеграла 1-го рода получается подстановкой

$$x = \frac{y}{y+1}$$

и имеет вид

$$B(a,b) = \int_0^{+\infty} \frac{y^{a-1}}{(1+y)^{a+b}} dy. \qquad (9)$$

2. Гамма –функция

определяется равенством

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx \qquad (10)$$

и называется **Эйлеровым интегралом второго рода**. Сходимость интеграла от x^{a-1} с нижним пределом 0 обеспечена при $a > 0$, а сходимость интеграла (10) при $a > 0$ и $x \to +\infty$ достигается благодаря наличию быстро затухающего множителя e^{-x}.

Формула приведения (первая основная формула). Получим рекуррентное соотношение для Γ-функции. С этой целью запишем формулу (10) в виде

$$\Gamma(a+1) = \int_0^{+\infty} x^a e^{-x} dx$$

и выполним интегрирование по частям, полагая

$$u = x^a, \quad dv = e^{-x} dx,$$

$$du = a x^{a-1} dx, \quad v = -e^{-x}.$$

Тогда

$$\Gamma(a+1) = -x^a e^{-x}|_0^{+\infty} + a\int_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx = a\Gamma(a).$$

Если $a > 0$, то первый член в правой части этого равенства обращается в ноль, и мы получаем формулу приведения

$$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a) \qquad (a > 0), \tag{11}$$

которая позволяет выразить Γ-функцию через ее значение с меньшим на единицу аргументом.

Последовательное применение формулы (11) дает

$$\begin{aligned}\Gamma(a+1) = a(a-1)\Gamma(a-1) = a(a-1)(a-2)\Gamma(a-2) = \cdots = \\ = a(a-1)\ldots(a-k)\Gamma(a-k),\end{aligned} \tag{12}$$

где $a - k > 0$.

Для натуральных значений аргумента

$$\Gamma(n+1) = n(n-1)\ldots 1 \cdot \Gamma(1). \tag{13}$$

Однако при $a = 1$ из определения (10) имеем равенство

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 1$$

и, следовательно, для любого натурального числа n

$$\Gamma(n+1) = n!. \tag{14}$$

Другое представление Γ-функции. Подставляя $x = t^2$ в формулу (10), получим

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} t^{2a-2}e^{-t^2}2tdt = 2\int_0^{+\infty} t^{2a-1}e^{-t^2}dt. \tag{15}$$

Далее полагаем $a = 1/2$:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} t^{-1}e^{-t^2}2tdt = 2\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt.$$

Интеграл в правой части этого равенства известен под именем “интеграл Пуассона”:

$$2\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}.$$

Таким образом,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \qquad (16)$$

Учитывая формулу (12), получим, что для любого натурального числа n выполняется равенство

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\dots\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = $$
$$= \frac{(2n-1)(2n-3)\dots 3\cdot 1}{2^n}\sqrt{\pi} = \qquad (17)$$
$$= \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}.$$

Дополнение (вторая основная формула для Γ-функции):

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin \pi x} \quad (0 < a < 1). \qquad (18)$$

3. Выражение бета-функции через гамма-функцию.

Метод 1. Чтобы установить связь между Эйлеровы интегралами, выполним в (10) подстановку $x = ty$, где $t > 0$. Тогда

$$\frac{\Gamma(a)}{t^a} = \int_0^{+\infty} y^{a-1}e^{-ty}dy.$$

Затем сделаем замену $a \to a+b, \quad t \to t+1$, что влечёт

$$\frac{\Gamma(a+b)}{(t+1)^{a+b}} = \int_0^{+\infty} y^{a+b-1}e^{-(1+t)y}dy.$$

Далее умножим обе части этого равенства на t^{a-1} и проинтегрируем результат по переменной t от 0 до $+\infty$:

$$\int_0^{+\infty} \Gamma(a+b)\frac{t^{a-1}}{(t+1)^{a+b}}\,dt = \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{\infty} y^{a+b-1}e^{-(1+t)y}dy\right)t^{a-1}dt.$$

Теперь воспользуемся равенством (9) и изменим порядок интегрирования в правой части этого уравнения:

$$\Gamma(a+b)B(a,b)=\int\limits_0^{+\infty}\left(\int\limits_0^{\infty}t^{a-1}e^{-ty}dt\right)y^{a+b-1}e^{-y}dy=$$

$$=\int\limits_0^{+\infty}\left(\int\limits_0^{\infty}(ty)^{a-1}e^{-ty}d(ty)\right)y^{b-1}e^{-y}dy=$$

$$=\int\limits_0^{+\infty}\left(\int\limits_0^{\infty}x^{a-1}e^{-x}dx\right)y^{b-1}e^{-y}dy=$$

$$=\int\limits_0^{+\infty}\Gamma(a)y^{b-1}e^{-y}dy=\Gamma(a)\Gamma(b).$$

Следовательно, мы получили формулу, устанавливающую взаимосвязь между Эйлеровыми интегралами 1-го 2-го рода:

$$B(a,b)=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}. \tag{19}$$

Метод 2. Запишем формулу (15) в виде

$$\Gamma(a)=2\int\limits_0^{+\infty}x^{2a-1}e^{-x^2}dx,\quad \Gamma(b)=2\int\limits_0^{+\infty}y^{2b-1}e^{-y^2}dy.$$

Перемножив эти равенства, получим

$$\Gamma(a)\Gamma(b)=4\iint\limits_D x^{2a-1}e^{-x^2}y^{2b-1}e^{-y^2}\,dxdy,$$

где областью интегрирования в двойном интеграле является первая четверть $(0\le x\le+\infty,\ 0\le y\le+\infty)$.

Переходя к полярным координатам, получим

$$\Gamma(a)\Gamma(b)=4\iint\limits_D e^{-\rho^2}\rho^{2a+2b-2}\cos^{2a-1}\varphi\ \sin^{2b-1}\rho d\rho d\varphi=$$

$$= 2\int_0^{+\infty} \rho^{2(a+b)-1} e^{-\rho^2} d\rho \cdot 2\int_0^{\pi/2} \cos^{2a-1}\varphi \, \sin^{2b-1}\varphi \, d\varphi.$$

С учетом формул (3) и (15) имеем

$$\Gamma(a)\Gamma(b) = \Gamma(a+b)B(a,b),$$

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$