Факультет элитного технического образования.
1 курс, 1 семестр.
Лектор Конев В.В.
Банк задач по теме “Комплексные числа”.

1. Для каждой пары комплексных чисел z_1 и z_2 найти их сумму, разность, произведение и частное от деления.

   a) $z_1 = 2 - 3i,\ \ z_2 = -1 + 4i$

   b) $z_1 = -1 + 2i,\ \ z_2 = 4 + 3i$

   c) $z_1 = -\sin\frac{\pi}{3} - i\cos\frac{\pi}{3},\ \ z_2 = \sqrt{2} + i$

   d) $z_1 = \sin\frac{\pi}{6} + i\cos\frac{\pi}{6},\ \ z_2 = \cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}$

2. В условиях предыдущей задачи изобразить на комплексной плоскости числа z_1 и z_2, а также их сумму и разность. Дать геометрическую интерпретацию сложению и вычитанию комплексных чисел, основанную на правилах действий над векторами.

3. Найти модуль и аргумент каждого из комплексных чисел:

   a) $z = \sqrt{3} + 3i$ b) $z = \sqrt{3} - 3i$

   c) $z = -\sqrt{3} + 3i$ d) $z = -\sqrt{3} - 3i$

   e) $z = 3 + i\sqrt{3}$ f) $z = 3 - i\sqrt{3}$

   g) $z = -3 + i\sqrt{3}$ h) $z = -3 - i\sqrt{3}$

   i) $z = 1 + i$ j) $z = 1 - i$

   k) $z = -1 + i$ l) $z = -1 - i$

4. Представить комплексные числа в тригонометрической и показательной формах и изобразить их на комплексной плоскости.

   a) $z = -1 + i$ b) $z = -1 - i$

   c) $z = \sqrt{3} - 3i$ d) $z = 3 + i\sqrt{3}$

   e) $z = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ f) $z = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$

g) $z = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$

h) $z = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$

i) $z = 3\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right)$

j) $z = 3\left(-\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right)$

k) $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{5} - i\sin\frac{\pi}{5}\right)$

l) $z = 2\left(-\cos\frac{\pi}{5} - i\sin\frac{\pi}{5}\right)$

m) $z = \dfrac{i\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)}{\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}}$

n) $z = \dfrac{1}{\cos\frac{4\pi}{3} - i\sin\frac{4\pi}{3}}$

o) $z = \dfrac{-\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}}{\cos\frac{13\pi}{12} - i\sin\frac{13\pi}{12}}$

p) $z = \dfrac{\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right)\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{i}$

q) $z = \dfrac{i}{(1+i)^2}$

r) $z = \dfrac{4i^6}{(1+i)^2}$

s) $z = (\sqrt{3} - i)^{100}$

t) $z = \left(\dfrac{\sqrt{3}i + 1}{i - 1}\right)^6$

5. Представить комплексные числа в алгебраической форме и изобразить их на комплексной плоскости.

a) $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

b) $z = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

c) $z = 4\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$

d) $z = 4\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$

e) $z = \dfrac{i\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)}{\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}}$

f) $z = \dfrac{1}{\cos\frac{4\pi}{3} - i\sin\frac{4\pi}{3}}$

g) $z = \dfrac{-\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}}{\cos\frac{13\pi}{12} - i\sin\frac{13\pi}{12}}$

h) $z = \dfrac{\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right)\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{i}$

i) $z = \dfrac{i}{(1+i)^2}$ j) $z = \dfrac{4i^6}{(1+i)^2}$

k) $z = \left(\dfrac{i}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{12}$ l) $z = (\cos 31^\circ + i\sin 31^\circ)^{-10}$

6. Упростить выражения:

a) $(1+i)^{10}$ b) $\dfrac{1+3i}{(1-i)(1+2i)}$

c) $i + i^2 + i^3 + i^4$ d) $i^{10} + i^{11} + i^{12} + i^{13}$

e) $\dfrac{1+i}{1-i} + \dfrac{1-i}{1+i}$ f) $\dfrac{1+i}{1-i} - \dfrac{1-i}{1+i}$

g) $2i\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ h) $\dfrac{13+12i}{6i-8} + \dfrac{(1+2i)^2}{2+i}$

7. Найти вещественную и мнимую части комплексных чисел.

a) $(2-3i)(-1+4i)$ b) $(1+i)^{10}$

c) $\dfrac{1+3i}{1-i}$ d) $\dfrac{1+3i}{1+2i}$

e) $4\left(\cos\dfrac{7\pi}{6} + i\sin\dfrac{7\pi}{6}\right)$ f) $2\left(\cos\dfrac{5\pi}{3} + i\sin\dfrac{5\pi}{3}\right)$

8. Установить, при каких действительных значениях x и y комплексные числа z_1 и z_2 равны между собой.

a) $z_1 = y^2 - 7y + 9xi,\ \ z_2 = x^2 i + 20i - 12$

b) $z_1 = y^2 + 5y + 11xi,\ \ z_2 = x^2 i + 30i - 6$

9. Установить, при каких действительных значениях x и y комплексные числа z_1 и z_2 являются взаимно сопряженными.

a) $z_1 = 8x^2 - 20i^{17},\ \ z_2 = 9x^2 - 4 + 10i^7$

b) $z_1 = y^2 - 7y - 9xi, \;\; z_2 = x^2 i + 20i - 12$

c) $z_1 = y^2 + 5y - 11xi, \;\; z_2 = x^2 i + 30i - 6$

10. Решить уравнения относительно *z*:

a) $(1 + 2i)(z - i) + (4i - 3)(1 - iz) + 7i = -1$

b) $z^2 + z^* = 0$

c) $z^2 + 4z + 29 = 0$

d) $z^2 - 2z + 5 = 0$

e) $z^2 + 3|z| = 0$

f) $z^2 + 2|z| = 1$

g) $z^2 + |z|^2 = 0$

h) $z^2 + z\,|z| + |z^2| = 0$

11. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} z_1 + 2z_2 = 1 + i, \\ 3z_1 + iz_2 = 2 - 3i \end{cases}$$

12. Найти множество точек комплексной плоскости, определяемое условиями:

a) $z^2 + 2|z| = 1$

b) $z^2 + |z|^2 = 0$

c) $|z| = 1 + \operatorname{Re} z$

d) $|z| = 1 - 2\operatorname{Re} z$

e) $|z| = 1$

f) $|z| = 3$

g) $\varphi = \frac{\pi}{3}$

h) $\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{3\pi}{4}$

i) $\varphi = -\frac{\pi}{6}, \;\; |z| = 2$

j) $|z + 1| = 1$

k) $|z - i| = 1$

l) $|z - i| = |z + i|$

m) $|z - i| < |z + i|$

n) $|z - i| > |z + i|$

o) $|z + 2i - 1| = 2$

p) $|z + 2i - 1| \geq 2$

q) $|z - 2|^2 + |z + 2|^2 = 26$

r) $|z - 2| + |z + 2| = 26$

s) $\operatorname{Im} z > -1$

t) $\operatorname{Im}\frac{1}{z} < -1$

u) $\operatorname{Re} z < 2$

v) $\operatorname{Re}\dfrac{1}{z} > 1$

13. Используя формулу Эйлера, получить тригонометрические тождества для:

a) $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$

b) $\sin 3\alpha$ и $\cos 3\alpha$

c) $\sin(\alpha + \beta)$ и $\cos(\alpha + \beta)$

d) $\sin(\alpha - \beta)$ и $\cos(\alpha - \beta)$

14. Найти корни уравнений

a) $z^3 = 1$

b) $z^4 = 1$

c) $z^6 = 1$

d) $z^3 = -1$

e) $z^4 = -1$

f) $z^6 = -1$

g) $z^3 = 8i$

h) $z^4 = i$

i) $z^8 = 1 + i$

j) $z^5 = 1 + i\sqrt{3}$

При составлении банка задач использован сборник задач: Кудрявцев Л.Д. и др. Сборник задач по математическому анализу, т1.