1. Числовые ряды, основные понятия.

Числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots \tag{1}$$

называется **сходящимся**, если его частичная сумма

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \tag{2}$$

имеет конечный предел

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S. \tag{3}$$

Тогда S называется **суммой ряда**, а разность

$$R_n = S - S_n \tag{4}$$

называют **остатком** ряда.

Если предел (3) не существует или равен бесконечности, то ряд называется **расходящимся**.

Пример 1. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Используя разложение

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

запишем частичную сумму ряда в виде

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Тогда сумма ряда равна

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1,$$

а остаток ряда выражается формулой

$$R_n = -\frac{1}{n+1}.$$

Необходимый признак сходимости ряда:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0. \tag{5}$$

Пример 2. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+2}{5n+7}$$

расходится, поскольку

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n+2}{5n+7} = \frac{3}{5} \neq 0.$$

Пример 3. Хотя общий член ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+7}$$

стремится к нулю при $n \to \infty$, однако этот ряд является расходящимся.

Сходимость или расходимость ряда не нарушается при отбрасывании любого конечного числа его членов. Например, ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{и} \quad \sum_{n=100}^{\infty} a_n \tag{6}$$

сходятся или расходятся одновременно. Другими словами, сходимость или расходимость ряда определяется поведением его членов при $n \to \infty$.

2. Признаки сходимости знакоположительных рядов

Признаки сравнения.

1. Если (начиная с некоторого номера n) выполняется неравенство

$$0 \leq a_n \leq b_n \tag{7}$$

и при этом сходится ряд $\sum b_n$, то сходится и ряд $\sum a_n$.

Если (начиная с некоторого номера n) выполняется неравенство

$$0 \leq b_n \leq a_n \tag{8}$$

и при этом ряд $\sum b_n$ расходится, то расходится и ряд $\sum a_n$.

2. Если существует конечный и отличный от нуля предел отношения

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lambda\,,$$

то ряды $\sum a_n$ и $\sum b_n$ сходятся или расходятся одновременно.

В качестве эталонных рядов для сравнения удобно использовать сумму членов геометрической прогрессии

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n \quad \begin{cases} \text{сходится, если } |q| < 1 \\ \text{расходится, если } |q| \geq 1 \end{cases} \tag{9}$$

и обобщенный гармонический ряд (ряд Дирихле)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \quad \begin{cases} \text{сходится, если } \ p > 1 \\ \text{расходится, если } \ p \leq 1. \end{cases} \tag{10}$$

Пример 4. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sqrt{n}+9}{3n^2+5}.$$

При больших значениях n имеем

$$\frac{2\sqrt{n}+9}{3n^2+5} \sim \frac{2\sqrt{n}}{3n^2} \sim \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{n^{3/2}}.$$

Сравнение с эталонным рядом (10) приводит к заключению о сходимости данного ряда.

Пример 5. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^3 n}{n^{1.2}}.$$

Если $n \to \infty$, то для любых положительных значений k и ε выполняется неравенство

$$\ln^k n < n^{\varepsilon}.$$

Тогда

$$\frac{\ln^3 n}{n^{1.2}} < \frac{n^{0.1}}{n^{1.2}} = \frac{1}{n^{1.1}}$$

и, следовательно, рассматриваемый ряд сходится.

Пример 6. Установить сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{5n+3}\right)^n.$$

Если $n \to \infty$, то

$$\left(\frac{2n+1}{5n+3}\right)^n \sim \left(\frac{2}{5}\right)^n.$$

По признаку сравнения с эталонным рядом (9) получаем требуемый результат.

Признак сходимости Даламбера. Если существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q, \tag{11}$$

то ряд $\sum a_n$ сходится при $q < 1$ и расходится при $q > 1$.
Вопрос о сходимости ряда остается открытым, если $q = 1$.

Радикальный признак сходимости Коши. Если существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = q, \tag{12}$$

то ряд $\sum a_n$ сходится при $q < 1$ и расходится при $q > 1$.
Вопрос о сходимости ряда остается открытым, если $q = 1$.

Интегральный признак сходимости Коши. Пусть функция $f(x)$ является положительно определенной, монотонно убывающей и непрерывной при $x \geq A \geq 1$ и $f(n) = a_n$. Тогда ряд $\sum a_n$ и интеграл

$$\int_A^\infty f(x)dx$$

сходятся или расходятся одновременно.

Отметим также, что для преобразования общего члена ряда можно использовать **формулу Стирлинга**:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n, \quad \text{если } n \to \infty. \tag{13}$$

Например, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{3^n n!}$$

сходится, поскольку

$$\frac{n^n}{3^n n!} \overset{n\to\infty}{\Longrightarrow} \frac{n^n e^n}{3^n n^n\sqrt{2\pi n}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\left(\frac{e}{3}\right)^n < \left(\frac{e}{3}\right)^n.$$

Одним из более тонких признаков сходимости является **признак Раабе**: если существует предел

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = p, \tag{14}$$

то при $p > 1$ ряд $\sum a_n$ сходится, а при $p < 1$ расходится.

3. Сходимость знакочередующихся рядов

Признак Лейбница. Знакочередующийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n. \qquad (15)$$

сходится, если начиная с некоторого номера k его члены монотонно убывают по абсолютной величине и стремятся к нулю при $n \to \infty$:

$$a_k \geq a_{k+1} \geq a_{k+2} \geq \cdots > 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

В случае, когда

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots > 0,$$

для суммы ряда выполняется неравенство

$$S < a_1.$$

Отметим, что остаток R_n ряда (15) также представляет собой знакочередующийся ряд:

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k\,.$$

Следовательно,

$$|R_n| < a_{n+1}\,.$$

Пример 1. Сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}$$

с очевидностью следует из признака Лейбница.

Пример 2. Для ошибки аппроксимации числового ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2^n n}$$

частичной суммой

$$\sum_{n=1}^{9}(-1)^{n+1}\frac{1}{2^n n}$$

справедлива оценка

$$|R_n| < \frac{1}{2^{10}10} < 10^{-4}.$$

4. Суммирование рядов

1. Пусть $|q| < 1$. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q}. \tag{16}$$

2. Для нахождения суммы ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+m)},$$

где m – натуральное число, нужно представить члены ряда в виде разложения на простые дроби:

$$\frac{1}{k(k+m)} = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+m}\right).$$

Тогда

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+m)} = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+m}\right) =$$

$$= \frac{1}{m}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m}\right) - \frac{1}{m}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+m}\right),$$

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{m}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m}\right).$$

В частности,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)} = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\left(1 - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) + (\frac{1}{4} - \frac{1}{7}) + \cdots\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+5)} = \frac{1}{5}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+5}\right) =$$

$$= \frac{1}{5}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right).$$

Задачи 1-26. Найти суммы следующих рядов:

1.	$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$$
2.	$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+5)}$$
3.	$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$$
4.	$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{9n^2-4}$$
5.	$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-8n-5}$$
6.	$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$$ **Совет**. Используйте разложения $$\frac{2n+1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1},$$ $$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.$$
7.	$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(4n^2-1)^2}$$ **Совет**. Используйте разложения $$\frac{n}{4n^2-1}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n+1}\right),$$ $$\frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right).$$
8.	$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

	Совет. Используйте разложение $$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = $$ $$= \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{n(n+2)}.$$
9.	$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+3)(n+5)}$$
10.	$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{6^n}$$
11.	Показать, что $$\sum_{n=1}^{\infty} nq^n = \frac{q}{(1-q)^2}.$$ **Совет**. Преобразуйте выражение $$S_n(1-q)$$ к виду $$S_n - qS_n = q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n - nq^{n+1},$$ где $$S_n = \sum_{k=1}^{n} kq^k$$ представляет собой частичную сумму ряда.
12.	$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n}$$
13.	$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{2^n}$$

14.	Пусть члены ряда $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$ представимы в виде $$a_n = b_n - b_{n+1}$$ и существует конечный предел $$\lim_{n\to\infty} b_n = b.$$ Показать, что $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = b_1 - b.$$
15.	Решить задачу 8, используя свойство, установленное в предыдущем задании. **Совет**. Используйте представление $$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{(n+2)-n}{2n(n+1)(n+2)} = = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right) = = b_n - b_{n+1},$$ где $$b_n = \frac{1}{2n(n+1)}.$$
16.	$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$$ **Совет**. Используйте представление $$\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{(n+3)-n}{3n(n+1)(n+2)(n+3)} = = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right) = = b_n - b_{n+1},$$ где $$b_n = \frac{1}{3n(n+1)(n+2)}.$$

17.	$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n(n+1)}}$$ **Совет**. Используйте представление $$\frac{n-\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n(n+1)}}=\sqrt{\frac{n}{n+1}}-\sqrt{\frac{n-1}{n}}=$$ $$=b_{n+1}-b_n,$$ где $$b_n=\sqrt{\frac{n-1}{n}}.$$
18.	$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)$$
19.	$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}}$$
20.	$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$
21.	$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{(n+1)(3n-2)}{n(3n+1)}$$
22.	$$\ln\frac{2\cdot 4}{1\cdot 7}+\ln\frac{3\cdot 7}{2\cdot 10}+\ln\frac{4\cdot 10}{3\cdot 13}+\cdots+\frac{(n+1)(3n+1)}{n(3n+4)}+\cdots$$
23.	$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+i)^n}$$
24.	$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+i)^n}{2^n}$$
25.	$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(in)}{4^n}$$

26.	$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(in)}{3^n}$$

Задачи 27-41. Найти наименьшее число членов, аппроксимирующих сумму ряда с точностью до 10^{-3}.

27.	$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$$ **Пример решения**. Найдем частичную сумму ряда: $$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=$$ $$=1-\frac{1}{n+1}.$$ Тогда остаток ряда R_n равен $$R_n=-\frac{1}{n+1}$$ и, следовательно, $$\lvert R_n\rvert=\frac{1}{n+1}<10^{-3},$$ $$n+1>10^3,\qquad n_{\min}=1000.$$
28.	$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+5)}$$
29.	$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$$
30.	$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{9n^2-4}$$
31.	$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-8n-5}$$

32.	$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{6^n}$$
33.	$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5^n}$$
34.	$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{2^n}$$
35.	$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$
36.	$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}+\cdots$$
37.	$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}-\frac{1}{16}-\frac{1}{32}-\cdots$$
38.	$$1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\frac{1}{32}-\cdots$$
39.	$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots$$
40.	$$\frac{1}{5}+\frac{1}{8}+\frac{1}{11}+\frac{1}{14}+\frac{1}{17}+\cdots$$
41.	$$1+\frac{2}{5}+\frac{3}{25}+\frac{4}{125}+\frac{5}{625}+\cdots$$

В задачах 42-66 исследовать ряды на сходимость.

42.	$$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\cdots$$
43.	$$1+\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{10}}+\cdots$$
44.	$$\frac{1}{2^3}+\frac{2}{3^3}+\frac{3}{4^3}+\cdots$$

45.	$\frac{1}{1+1^2}+\frac{1}{1+2^2}+\frac{1}{1+3^2}+\cdots$
46.	$\frac{1^2}{1+1^4}+\frac{2^2}{1+2^4}+\frac{3^2}{1+3^4}+\cdots$
47.	$\frac{1}{3^2-1^2}+\frac{1}{5^2-2^2}+\frac{1}{7^2-3^2}+\cdots$
48.	$\frac{1}{2\ln^2 2}+\frac{1}{3\ln^2 3}+\frac{1}{4\ln^2 4}+\cdots$
49.	$\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{6}{27}+\frac{8}{81}+\cdots$
50.	$1+\frac{2}{2!}+\frac{4}{3!}+\frac{8}{4!}+\cdots$
51.	$1+\frac{1\cdot 2}{1\cdot 3}+\frac{1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 3\cdot 5}+\cdots$
52.	$1+\frac{3}{2\cdot 3}+\frac{3^2}{2^2\cdot 5}+\frac{3^3}{2^3\cdot 7}+\cdots$
53.	$\frac{1}{2}+\frac{3!}{2\cdot 4}+\frac{5!}{2\cdot 4\cdot 6}+\frac{7!}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}+\cdots$
54.	$\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{5}{\sqrt{2\cdot 3^2}}+\frac{9}{\sqrt{3\cdot 3^3}}+\frac{13}{\sqrt{4\cdot 3^4}}+\cdots$
55.	$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\cdots$
56.	$\frac{\sin\alpha}{1}+\frac{\sin 2\alpha}{2^2}+\frac{\sin 3\alpha}{3^2}+\cdots$
57.	$1+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{5\sqrt{5}}+\frac{1}{7\sqrt{7}}+\cdots$
58.	$1+\frac{1}{101}+\frac{1}{201}+\frac{1}{301}+\cdots$
59.	$1+\frac{3}{4}+\frac{5}{9}+\frac{7}{16}+\cdots$

60.	$1+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{10^2}+\cdots$
61.	$\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\frac{7}{2^4}+\cdots$
62.	$\frac{21}{3}+\frac{41}{9}+\frac{61}{27}+\cdots$
63.	$\frac{2}{1!}+\frac{4}{3!}+\frac{6}{5!}+\cdots$
64.	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)$
65.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n(n+1)}}$
66.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^5 n}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$
67.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^{n^2}}{n^n 5^n}$