4. Функциональные ряды, область сходимости

Областью сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \cdots \tag{1}$$

называется множество значений аргумента x, для которых этот ряд сходится. Функция

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) \tag{2}$$

называется **частичной суммой** ряда; ее предельное значение

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x) \tag{3}$$

называется **суммой ряда**; разность

$$R_n(x) = S(x) - S_n(x) \tag{4}$$

называется **остатком** ряда.

Для нахождения области сходимости ряда (1) можно использовать известные признаки сходимости, в частности, признаки Даламбера и Коши.

Пример 1. Чтобы определить область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n},$$

воспользуемся признаком Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)x^n}{x^{n+1}n}\right| = \frac{1}{|x|}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}\right| = \frac{1}{|x|} < 1,$$

что влечет

$$|x| > 1.$$

В граничных точках $x = \pm 1$ ряд расходится.

Пример 2. Область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\ln x}}$$

легко устанавливается с помощью сравнения с эталонным рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p},$$

который сходится при $p > 1$. Тогда

$$\ln x > 1 \qquad \Rightarrow \qquad x > e.$$

5. Функциональные ряды, область равномерной сходимости

Ряд

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \tag{5}$$

называется равномерно сходящимся в области D, если неравенство

$$\left|S(x) - \sum_{k=1}^{n} u_k(x)\right| < \varepsilon$$

выполняется для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ для всех x из области D, начиная с некоторого номера $n > N$ (не зависящего от x).

Признак равномерной сходимости Вейерштрасса. Если для всех x из области D выполняется неравенство

$$|u_n(x)| \leq a_n\,, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

и при этом мажорирующий числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то ряд (5) равномерно сходится в области D.

Пример 3. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\ln x}}$$

сходится равномерно в области $x \geq e + \delta$, где δ – любое сколь угодно малое положительное число, поскольку в этой области числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\ln(e+\delta)}}$$

сходится и является мажорирующим для рассматриваемого функционального ряда:

$$\frac{1}{n^{\ln x}} \leq \frac{1}{n^{\ln(e+\delta)}}$$

для всех $x \in [e + \delta;\ \infty\}$.

В задачах 68-90 найти области сходимости рядов.

68.	$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$
69.	$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$$
70.	$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \sin \frac{x}{4^n}$$
71.	$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n\sqrt{n}}$$
72.	$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n+3)x}{(2n+3)^2}$$
73.	$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n+3)x}{(2n+3)^2}$$
74.	$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{e^{nx}}$$
75.	$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n}$$
76.	$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{x^n}$$
77.	$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln^n x$$
78.	$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^n}$$

79.	$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{1+x^n}$$
80.	$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^n}$$
81.	$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{nx}$$
82.	$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-nx^2}$$
83.	$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^x}{\mathrm{e}^{nx}}$$
84.	$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$
85.	$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{x^n}$$
86.	$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+2}{4n+1} x^n$$
87.	$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+2}{4n+1} (x-1)^n$$
88.	$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+2}{4n+1}\right)^n x^n$$
89.	$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+2}{4n+1}\right)^n (x+5)^n$$
90.	$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+2}{4n+1}\right)^n \frac{1}{(x-2)^n}$$

В задачах 91-101 найти области равномерной сходимости рядов.

91.	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+(nx)^2}$
92.	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n}$
93.	$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx^2}$
94.	$\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n}$
95.	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$
96.	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$
97.	$\sum_{n=1}^{\infty} 4^n \sin\frac{x}{5^n}$
98.	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n+3)x}{(2n+3)^2}$
99.	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n+3)x}{(2n+3)^2}$
100.	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{e^{nx}}$
101.	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n}$

6. Степенные ряды

Ряды вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n = c_0 + c_1 (x - x_0) + c_2 (x - x_0)^2 + \cdots, \tag{6}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = c_0 + c_1 (z - z_0) + c_2 (z - z_0)^2 + \cdots$$

называются **степенными**. Для каждого степенного ряда существует число R, называемое **радиусом сходимости**, что при $|x - x_0| < R$ ряд сходится, а при $|x - x_0| > R$ ряд расходится. Для выяснения сходимости ряда в граничных точках $x - x_0 = \pm R$ требуется проводить дополнительное исследование.

Для нахождения радиуса сходимости можно применять известные признаки сходимости. В частности,

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|,$$
$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}. \tag{7}$$

Если $R = 0$, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ сходится в единственной точке $x = x_0$.

Если $R = \infty$, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ сходится на всей числовой оси.

Степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ сходится равномерно в области

$$|x - x_0| \le R - \delta, \tag{8}$$

где δ – любое сколь угодно малое положительное число.

Ряды, полученные почленным дифференцированием или интегрированием степенного ряда, также являются степенными; имеют тот же радиус сходимости, что и исходный ряд; сходятся равномерно в области (8). Поэтому степенные ряды можно почленно дифференцировать и интегрировать в области (8) и при этом

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1},$$

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n x^{n+1}}{n+1}.$$

Стандартные разложения функций в ряды Тейлора в окрестности точки $x_0 = 0$:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots, \qquad -\infty < x < \infty \tag{9}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots, \qquad -\infty < x < \infty \tag{10}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots, \qquad -\infty < x < \infty \tag{11}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots, \quad -1 < x \le 1 \tag{12}$$

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots, \qquad -1 \le x \le 1 \tag{13}$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots, \qquad -1 < x < 1 \tag{14}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots, \qquad -1 < x < 1 \tag{15}$$

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \cdots \tag{16}$$

В задачах 102-113 найти радиусы сходимости и области сходимости степенных рядов.

102.	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$
103.	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$
104.	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$
105.	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots$
106.	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots$
107.	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$
108.	$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$
109.	$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots$
110.	$1 + 2x^2 + 4x^4 + 8x^6 + 16x^8 + \cdots$
111.	$\frac{x}{1 \cdot 2} + \frac{x^2}{2 \cdot 3} + \frac{x^3}{3 \cdot 4} + \cdots$
112.	$(x+2) - \frac{(x+2)^3}{3} + \frac{(x+2)^5}{5} - \cdots$
113.	$1 + (x-4) + \frac{(x-4)^2}{2^2} + \frac{(x-4)^3}{3^2} + \cdots$

Задачи 114-123

114.	Применяя почленное дифференцирование ряда (10), доказать справедливость разложения (11).
115.	Применяя почленное дифференцирование ряда (11), доказать справедливость разложения (10).
116.	Применяя почленное интегрирование ряда (10), доказать справедливость разложения (11).
117.	Применяя почленное интегрирование ряда (11), доказать справедливость разложения (10).
118.	Применяя почленное интегрирование ряда (14), доказать справедливость разложения (12).
119.	Применяя почленное дифференцирование ряда (12), доказать справедливость разложения (14).
120.	Используя формулу (14), доказать справедливость разложения (13).
121.	Используя формулу (13), доказать справедливость разложения (14).
122.	Используя разложения (9)-(11), получить формулу Эйлера: $$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$
123.	Используя разложение (12), получить формулу $$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\right)$$ и установить область ее применимости.

Задачи 124-143. Разложить в степенные ряды функции

124.	e^{-3x} по степеням x.
125.	e^{-3x} по степеням $(x+1)$.
126.	e^{x^2} по степеням x.

127.	$\sin 3x$ по степеням x.
128.	$\sin 3x$ по степеням $(x - \pi/6)$.
129.	$\sin^2 x$ по степеням x.
130.	$\cos 5x$ по степеням x.
131.	$\cos 4x$ по степеням $(x + \pi/6)$.
132.	$\cos^2 2x$ по степеням x.
133.	$\frac{1}{2+x}$ по степеням x.
134.	$\frac{1}{2+x}$ по степеням $(x + 3)$.
135.	$\frac{1}{x^2+5x+4}$ по степеням x.
136.	$\frac{1}{x^2+5x+4}$ по степеням $(x + 3)$.
137.	$\frac{x^3}{x^4+16}$ по степеням x.
138.	$\ln x$ по степеням $(x - 3)$.
139.	$\ln(x + \sqrt{x^2 + 9})$ по степеням x.
140.	$\arcsin x$ по степеням x.
141.	$\int_0^x e^{-x^2} dx$ по степеням x.
142.	$\int_0^x \frac{\sin x}{x} dx$ по степеням x.
143.	$\int_0^x \frac{1 - \cos x}{x^2} dx$ по степеням x.

144.	$\int_0^x \frac{1-e^{-2x}}{x}dx$ по степеням x.

Задачи 144-153. Свернуть степенные ряды:

145.	$2+3x+4x^2+5x^3+\cdots$
146.	$2-3x+4x^2-5x^3+\cdots$
147.	$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{4}x^3+\cdots$
148.	$\frac{1}{1}-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{4}x^3+\cdots$
149.	$\frac{2}{1}+\frac{3}{2}x+\frac{4}{3}x^2+\frac{5}{4}x^3+\cdots$
150.	$\frac{2}{1}-\frac{3}{2}x+\frac{4}{3}x^2-\frac{5}{4}x^3+\cdots$
151.	$1\cdot 2+2\cdot 3x+3\cdot 4x^2+4\cdot 5x^3+\cdots$
152.	$1\cdot 2-2\cdot 3x+3\cdot 4x^2-4\cdot 5x^3+\cdots$
153.	$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}x+\frac{1}{3\cdot 4}x^2+\frac{1}{4\cdot 5}x^3+\cdots$
154.	$\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 3}x+\frac{1}{3\cdot 4}x^2-\frac{1}{4\cdot 5}x^3+\cdots$

Задачи 154-158. Найти суммы числовых рядов:

155.	$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5^2}+\frac{1}{4\cdot 5\cdot 5^3}+\cdots$
156.	$\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{2}{2\cdot 3\cdot 5}+\frac{2^2}{3\cdot 4\cdot 5^2}-\frac{2^3}{4\cdot 5\cdot 5^3}+\cdots$
157.	$2+\frac{3}{7}+\frac{4}{7^2}+\frac{5}{7^3}+\cdots$
158.	$1\cdot 2+2\cdot 3\cdot\left(\frac{3}{5}\right)+3\cdot 4\left(\frac{3}{5}\right)^2+4\cdot 5\left(\frac{3}{5}\right)^3+\cdots$

Задачи 159-168. Вычислить приближенно

159.	$\ln 2$
160.	$\ln 3$
161.	$\ln 5$
162.	$\sqrt{20}$
163.	$\sqrt[3]{10}$
164.	$\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$
165.	$\sin 10°$
166.	$\sin 78°$
167.	$\cos 6°$
168.	$e^{-1/2}$

Задачи 169-173. Представить результат в виде ряда:

169.	$\int_0^2 e^{-x^2} dx$
170.	$\int_0^3 \frac{\sin x}{x} dx$
171.	$\int_0^1 \frac{1-\cos 2x}{x^2} dx$
172.	$\int_0^2 \frac{1-e^{-x}}{x} dx$
173.	$\int_0^2 \frac{\ln(1+x/4)}{x} dx$