

**Факультет элитного технического образования.**

**1 курс, 1 семестр.**

**Лектор Конев В.В.**

**Банк задач по теме “Пределы последовательностей и функций”.**

**1. Найти пределы последовательностей при  $n \rightarrow \infty$ :**

1.	$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, (-1)^{n+1} \frac{1}{n}, \dots$	2.	$\frac{2}{1}, \frac{4}{3}, \frac{6}{5}, \dots, \frac{2n}{2n-1}, \dots$
3.	$\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \dots$	4.	$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$

**2. Вычислить пределы:**

5.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right)$
6.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} \right)$
7.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}} \right)$
8.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \dots + \frac{2n-1}{2^n} \right)$
9.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}{n^3} \right)$
10.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1 + a + a^2 + \dots + a^n}{1 + b + b^2 + \dots + b^n} \right), \quad  a  < 1, \quad  b  < 1$
11.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} \right)$
12.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1)}{n+1} - \frac{2n+1}{2} \right)$
13.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^3}$

14.	$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{3/2} (\sqrt{n^3 + 1} - \sqrt{n^3 - 1})$	
15.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + (-1)^n}{n - (-1)^n}$	16. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n}$
17.	$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$	18. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sin n!}{n^2 + 1}$
19.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} \sin n^2}{n + 1}$	20. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^3} \sin n^2}{n + 1}$
21.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^3 - (n-2)^3}{5n^2 + 4n + 7}$	22. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^3 - (n-2)^3}{5n^3 + 4n + 7}$
23.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+4)^2}{x^2 + 4}$	24. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 7x + 11}{2x^2 + 3x + 5}$
25.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 7x + 11}{2x^3 + 4x + 5}$	26. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 7x + 11}{2x^2 + 3x + 5}$
27.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^3(3x+4)^2}{2x^5 + 3x + 1}$	28. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{3 + x\sqrt{x}}$
29.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{3 + x\sqrt{x}}$	30. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 7x + 11}{\sqrt{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 1}}$
31.	$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 + 1}$	32. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$
33.	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 1}{x^2 - 1}$	34. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{10} - 1}{x^2 - 1}$
35.	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}$	36. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 3x^2 + 2}{x^6 - 4x^3 + 3}$
37.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x + \sqrt{x}}}$	38. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}$
39.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + \sqrt{x}}}$	40. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}$

41.	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x-1} - 1}{\sqrt{x^2 - 1}}$	42.	$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{\sqrt{x+4} - \sqrt{14-x}}$
43.	$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 9}$	44.	$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 9}$
45.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x) - 1}{x}$	46.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^5 - (x+5x)}{x^2 + x^5}$
47.	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$	48.	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$
49.	$\lim_{x \rightarrow -8} \frac{x+8}{\sqrt[3]{x}+2}$	50.	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$
51.	$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$	52.	$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x+\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x}$
53.	$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}$	54.	$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+\Delta x} - \sqrt[3]{x}}{\Delta x}$
55.	$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$	56.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$
57.	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}$	58.	$\lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt{1-x} - 3}{2 + \sqrt[3]{x}}$
59.	$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 2x + 10} - x)$	60.	$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{4x^2 + 2x + 10} - x)$
61.	$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 3x + 10} - \sqrt{x^2 + 2x + 1})$		
62.	$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{2x^2 + 3x + 10} - \sqrt{x^2 + 2x + 1})$		
63.	$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 3x + 10} - \sqrt{x^2 + 3x + 1})$		
64.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{x^5}$		
65.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$		

66.	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{100} - 2x + 1}{x^{50} - 2x + 1}$	
67.	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \dots + x^n - n}{x - 1}$	
68.	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin 3x}{x}$	69. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 4x}$
70.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( x \sin \frac{\pi}{x} \right)$	71. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x^2 - 4)}{x - 2}$
72.	$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}$	73. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x - \cos a}{x - a}$
74.	$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x}$	75. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x}$
76.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x^2}$	77. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \cos x}{1 - \operatorname{tg} x}$
78.	$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{1 - \operatorname{tg} x}$	79. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \cos \pi x}{1 - x}$
80.	$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos 3x}{1 - \cos 4x}$	81. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left( \frac{\pi}{2} - x \right) \operatorname{tg} x$
82.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x - \sin 2x}{x^3}$	83. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\arcsin(x - 2)}{x^2 - 4}$
84.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\arcsin x^2 + 3x \operatorname{tg} x}$	85. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 3x}{\sin 4x}$
86.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{x}$	87. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x^2}$
88.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{n + 1}{n - 1} \right)^n$	89. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n + 1} \right)^n$
90.	$\lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 - \frac{2x}{2x + 1} \right)^{\frac{6x+5}{x}}$	91. $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{2x + 1} \right)^{\frac{3-4x}{x}}$

92.	$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x}{2x+1}\right)^{\frac{5}{x}}$	93.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-3}\right)^{2x}$
94.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-3}\right)^{2x+7}$	95.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+5}{x^2+2}\right)^{2x^2-3x+4}$
96.	$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2+x}{3-x}\right)^x$	97.	$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x-1}{x^2-1}\right)^{x+1}$
98.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{2x}{x+1}}$	99.	$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2}\right)^{\frac{\sin x}{x}}$
100.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+2}{2x^2+1}\right)^{x^2}$	101.	$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin x)^{1/x}$
102.	$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$	103.	$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sqrt{x} \operatorname{tg} \sqrt{x})^{\frac{3}{x}}$
104.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$	105.	$\lim_{x \rightarrow 0} x(\ln(x+2) - \ln x)$
106.	$\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)$	107.	$\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(2^{\frac{1}{x}} - 1\right)$
108.	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3^x - 3}{x - 1}$	109.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - e^{2x}}{x}$
110.	$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$	111.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x^2}$
112.	$\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x + \cos x)^{\frac{1}{x}}$	113.	$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{\sin x}{x - \sin x}}$
114.	$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x}$	115.	$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + \Delta x) - \ln x}{\Delta x}$
116.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-2x}}{\sin x}$	117.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{sh} x}$

118.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} x - 1}{x}$	119.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} x - 1}{x^2}$
------	--	------	--

**3. Определить порядок бесконечно большой функции  $f(x)$  по сравнению с  $x$  при  $x \rightarrow \infty$ .**

120.	$f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 5x + 7$	121.	$f(x) = \sqrt{5x^2 + 9x}$
122.	$f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$	123.	$f(x) = \sqrt[3]{4x^2 - x} + \sqrt{x}$
124.	$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - x} + \sqrt{5x}$	125.	$f(x) = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{x}}}$
126.	$f(x) = \frac{x^3 + 100x^2 + 7}{4x - 3}$	127.	$f(x) = \frac{x^{7/3} + 2}{4x^{5/2} + 3}$

**4. Определить порядок бесконечно малой функции  $\alpha(x)$  относительно  $x$  при  $x \rightarrow 0$ .**

128.	$\alpha(x) = 2x^3 + 4x^2 - 5x$	129.	$\alpha(x) = \sqrt{5x^2 + 9x}$
130.	$\alpha(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$	131.	$\alpha(x) = \sqrt[3]{4x^2 - x} + \sqrt{x}$
132.	$\alpha(x) = \sqrt[3]{x^2 - x} + \sqrt{5x}$	133.	$\alpha(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$
134.	$\alpha(x) = \frac{x^3 + 100x^2}{4x - 3}$	135.	$\alpha(x) = \frac{x^{7/3}}{4x^{5/2} + 3}$
136.	$\alpha(x) = \sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}$	137.	$\alpha(x) = \operatorname{tg} x - \sin x$

**5. Определить порядок бесконечно малой функции  $\alpha(x)$  относительно  $(x - 1)$  при  $x \rightarrow 1$ .**

138.	$\alpha(x) = x^3 - 3x + 2$	139.	$\alpha(x) = \sqrt[3]{1 - \sqrt{x}}$
------	----------------------------	------	--------------------------------------

140.	$\alpha(x) = \ln x$	141.	$\alpha(x) = e^x - e$
------	---------------------	------	-----------------------

**6. Определить порядок малости функции  $\alpha(x)$  относительно бесконечно малой  $\frac{1}{x}$  при  $x \rightarrow +\infty$ .**

142.	$\alpha(x) = \frac{x+1}{x^4+1}$	143.	$\alpha(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$
144.	$\alpha(x) = \sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x}$	145.	$\alpha(x) = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$

**7. Исследовать на непрерывность функции:**

146.	$f(x) = \frac{x}{(1+x)^2}$	147.	$f(x) = \frac{1+x}{1+x^3}$
148.	$f(x) = \frac{x^2-1}{x^3-3x+2}$	149.	$f(x) = \frac{x}{\sin x}$
150.	$f(x) = \sqrt{x} \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$	151.	$f(x) = e^{x+\frac{1}{x}}$
152.	$f(x) = e^{\frac{1}{x+1}}$	153.	$f(x) = e^{\frac{x}{x+1}}$
154.	$f(x) = \frac{1}{1 + \exp \frac{2x}{x-3}}$	155.	$f(x) = \frac{1}{1 + \exp \frac{1}{x+4}}$
156.	$f(x) = \frac{1}{1 - \exp \frac{2x}{x-3}}$	157.	$f(x) = \frac{1}{1 - \exp \frac{1}{x-3}}$
158.	$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2-x, & 1 < x \leq 2. \end{cases}$	159.	$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2-x, & 1 < x \leq 2. \end{cases}$
160.	$f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2-x, & 1 < x \leq 2. \end{cases}$	161.	$f(x) = \begin{cases} x, &  x  \leq 1, \\ 1, &  x  > 1. \end{cases}$
162.	$f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}$	163.	$f(x) = \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt[3]{1+x} - 1}$
164.	$f(x) = \frac{\operatorname{tg} 2x}{x}$	165.	$f(x) = \frac{\ln(1+2x)}{x}$

При составлении банка задач использованы следующие сборники задач:

1. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1971.
2. Демидович Б.П. Задачи и упражнения по математическому анализу для ВТУЗов. – М.: Наука, 1971.
3. Демидович Б.П. Сборник задач по математическому анализу. – М.: Наука, 1977.
4. Ефимов А.В., Поспелов А.С. Сборник задач по математике для втузов, т1-2.
5. Кудрявцев Л.Д. и др. Сборник задач по математическому анализу, т1.