

Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы

Тройные интегралы. Задачи 1-14.

В задачах 1-4 расставить пределы интегрирования в тройном интеграле

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$$

для указанных областей.

1. Тетраэдр, ограниченный плоскостями

$$x + y + z = 1, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

2. Цилиндр, ограниченный поверхностями

$$x^2 + y^2 = R^2, \quad z = 0, \quad z = H.$$

3. Конус, ограниченный поверхностями

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}, \quad z = c.$$

4. Объем, ограниченный поверхностями

$$z = 1 - x^2 - y^2, \quad z = 0.$$

5. Вычислить тройной интеграл

$$\iiint_V \frac{dx dy dz}{(x + y + z + 1)^3}$$

по области, ограниченной координатными плоскостями и плоскостью $x + y + z = 1$.

6. Вычислить тройной интеграл

$$\iiint_V (x + y + z)^2 dx dy dz$$

по общей части параболоида $2az \geq x^2 + y^2$ и шара $x^2 + y^2 + z^2 \leq 3a^2$.

7. Вычислить тройной интеграл

$$\iiint_V z dx dy dz$$

по области, ограниченной плоскостью $z = 0$ и верхней половиной эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

8. Вычислить тройной интеграл

$$\iiint_V z dx dy dz$$

по области, ограниченной конусом

$$z^2 = \frac{H}{R^2}(x^2 + y^2)$$

и плоскостью $z = H$.

9. Вычислить тройной интеграл

$$\iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz$$

по области, ограниченной поверхностями

$$z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2), \quad z = 2.$$

10. Вычислить объем цилиндра $x^2 + y^2 = ax$, ограниченного сферой $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ и плоскостью $z = 0$.

11. Вычислить объем области, ограниченной поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$, $x^2 + y^2 = z^2$ и содержащей точку $(0; 0; R)$ сферой

12. Вычислить интеграл

$$\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy \int_0^a z \sqrt{x^2 + y^2} dz$$

преобразовав его предварительно к цилиндрическим координатам.

13. Вычислить интеграл

$$\int_{-R}^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} (x^2 + y^2) dz,$$

преобразовав его предварительно к сферическим координатам.

14. Вычислить объем тела, ограниченного параболоидом

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 2 \frac{x}{a}$$

и плоскостью $x = a$.

Криволинейные интегралы первого рода. Задачи 15-27.

Вычислить криволинейные интегралы

$$\int_L f(x, y) dl$$

вдоль линии L :

15.	$f(x, y) = xy$, L - контур квадрата $ x + y = 2$.
16.	$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}}$, L - отрезок прямой, соединяющей точки $O(0; 0)$ и $A(1; 2)$.
17.	$f(x, y) = xy$, L - четверть эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, расположенная в первом квадранте.
18.	$f(x, y) = y^2$, L - первая арка циклоиды $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$

19.	$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, L - дуга кривой $\begin{cases} x = a(\cos t + t \sin t), \\ y = a(\sin t - t \cos t), \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$
20.	$f(x, y) = xy$, L - дуга гиперболы $\begin{cases} x = a \operatorname{ch} t, \\ y = a \operatorname{sh} t, \end{cases} \quad (0 \leq t \leq t_0).$
21.	$f(x, y) = x + y$, L - правый лепесток кривой $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$.
22.	$f(x, y) = x^{4/3} + y^{4/3}$, L - дуга астроида $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

Вычислить криволинейные интегралы

$$\int_L f(x, y, z) dl$$

вдоль линии L :

23.	$f(x, y, z) = x + z$, L - дуга кривой $\begin{cases} x = t, \\ y = \frac{3t^2}{\sqrt{2}}, \\ z = t^3, \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 1).$
24.	$f(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$, L - первый виток винтовой линии $\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = a \sin t, \\ z = bt. \end{cases}$
25.	$f(x, y, z) = \sqrt{2y^2 + z^2}$, L - окружность $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x = y$.

26. Найти длину дуги пространственной кривой

$$\begin{cases} x = 3t, \\ y = 3t^2, \\ z = 2t^3 \end{cases}$$

от точки $O(0; 0; 0)$ до точки $A(3; 3; 2)$.

27. Найти длину дуги конической винтовой линии $x = ae^t \cos t$, $y = ae^t \sin t$, $z = ae^t$ от точки $O(0; 0; 0)$ до точки $A(a; 0; a)$.

Криволинейные интегралы второго рода. Задачи 28-40.

28. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_{AB} (x^2 - 2xy) dx + (2xy + y^2) dy$$

где AB - дуга параболы $y = x^2$ от точки $A(1; 1)$ до точки $B(2; 4)$.

29. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_L (2a - y) dx + x dy$$

где L - дуга первой арки циклоиды $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases}$ пробегаемая в направлении возрастания параметра t .

30. Вычислить криволинейный интеграл

$$\oint_L \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2 + y^2}$$

вдоль окружности $x^2 + y^2 = R^2$ в положительном направлении.

31. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_L (2a - y)dx + xdy$$

вдоль верхней половины эллипса $x = a \cos t$, $y = a \sin t$ в положительном направлении.

32. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_L \frac{ydx - xdy}{y^2}$$

от точки $A(1; 2)$ до точки $B(2; 1)$ по пути, не пересекающему ось Ox .

33. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_L \frac{xdx + ydy + zdz}{(x^2 + y^2 + z^2)^3}$$

от точки $A(1; 3; 1)$ до точки $B(2; 5; 4)$.

34. Вычислить криволинейный интеграл

$$\oint_L \sqrt{x^2 + y^2} dx + y(xy + \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})) dy$$

вдоль окружности $x^2 + y^2 = R^2$ в положительном направлении.

35. Вычислить криволинейный интеграл

$$\oint_L \frac{xy(ydx - xdy)}{x^2 + y^2},$$

где L – правый лепесток кривой $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$, пробегаемый в положительном направлении.

36. Вычислить криволинейный интеграл

$$\oint_L 2(x^2 + y^2)dx + (x + y)^2 dy,$$

где L – контур треугольника с вершинами в точках $A(1;1)$, $B(2;2)$ и $C(1;3)$, пробегаемый в положительном направлении.

37. Вычислить криволинейный интеграл

$$\oint_L -x^2 y dx + xy^2 dy$$

вдоль окружности $x^2 + y^2 = R^2$ в положительном направлении.

38. С помощью криволинейного интеграла вычислить площадь эллипса: $x = a \cos t$,
 $y = b \sin t$.

39. С помощью криволинейного интеграла вычислить площадь астрои́дой: $x = a \cos^3 t$,
 $y = a \sin^3 t$.

40. С помощью криволинейного интеграла вычислить площадь кардиоидой:
 $x = a(2 \cos t - \cos 2t)$, $y = a(2 \sin t - \cos 2t)$.

Поверхностные интегралы первого рода. Задачи 41-45.

41. Вычислить

$$\iint_S (x^2 + y^2) dS,$$

где S – сфера $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

42. Вычислить

$$\iint_S \sqrt{x^2 + y^2} dS,$$

где S – боковая поверхность конуса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 0 \quad (0 \leq z \leq b),$$

43. Вычислить

$$\iint_S (x + y + z) dS,$$

где S – поверхность $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \geq 0$.

44. Вычислить

$$\iint_S (x^2 + y^2) dS,$$

где S – граница тела $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1$.

45. Вычислить

$$\iint_S \frac{dS}{(x + y + z)^2},$$

где S – граница тетраэдра: $x + y + z \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.