Банк задач по элементам теории поля

1. Найти угол между градиентами скалярного поля
$$\varphi = x^3 + y^3 + 3z^2y - 5xy^2$$
в точках $M_1(2;\ 1;\ -2)$ и $M_2(0;\ -3;\ 1)$.
Чему равна производная этого скалярного поля в точке $M_3(1;\ 1;\ 2)$ в направлении вектора $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 5\mathbf{k}$?

2. Найти производную скалярного поля
$$\varphi = 3x^2 - 2xz + y^2 - 5xy$$
в точке $M(x, y, z)$ в направлении радиус-вектора $\mathbf{r}$ этой точки.

3. Найти производную скалярного поля
$$\varphi = \frac{1}{r}$$
в точке $M(x, y, z)$ в направлении единичного вектора
$$\mathbf{a} = \mathbf{i}\cos\alpha + \mathbf{j}\cos\beta + \mathbf{k}\cos\gamma\,,$$
где r – длина радиус-вектора точки M; $\cos\alpha$, $\cos\beta$ и $\cos\gamma$ – направляющие косинусы вектора $\mathbf{a}$.

4. Найти производную скалярного поля $\varphi(M)$ в направлении градиента скалярного поля $u(M)$.

5. Вычислить градиент скалярного поля $\varphi(M) = \mathbf{C}\,\mathbf{r}$, где $\mathbf{C}$ –постоянный вектор; $\mathbf{r}$ – радиус-вектор переменной точки $M(x, y, z)$.

6. Вычислить $\operatorname{grad}|\mathbf{C}\times\mathbf{r}|$, где $\mathbf{C}$ –постоянный вектор; $\mathbf{r}$ – радиус-вектор переменной точки $M(x, y, z)$.

7. Вычислить $\operatorname{grad} r^n$, где r – длина радиус-вектора точки $M(x, y, z)$.

8. Пусть $\varphi = \varphi(u)$, $u = u(x, y, z)$. Выразить $\operatorname{grad}\varphi$ через $\operatorname{grad} u$.

9. Пусть $\varphi = \varphi(r)$, где r – длина радиус-вектора точки $M(x, y, z)$. Найти $\operatorname{grad}\varphi$.

10. Доказать, что
$$\operatorname{grad}(uv) = u\operatorname{grad} v + v\operatorname{grad} u.$$

11. Пусть $\varphi = \varphi(u, v)$, где $u = u(x, y, z)$ и $v = v(x, y, z)$. Доказать, что
$$\operatorname{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial u}\operatorname{grad} u + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\operatorname{grad} v.$$

12. Найти направление наибыстрейшего возрастания функции
$$\varphi = (\mathrm{x} + \mathrm{y} - 4\mathrm{x})^2$$
в точке $M_0(1; 1; 2)$. Чему равна наибольшая скорость роста функции φ в этой точке?

13. Вычислить дивергенцию векторного поля
$$\mathbf{A} = (x^2 + y^2)\mathbf{i} + (y^2 + z^2)\mathbf{j} + (z^2 + x^2)\mathbf{k}$$
в точке $M_1(0;\ -3;\ 1)$.

14. Вычислить дивергенцию векторного поля

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{r}}{r}$$

в точке $M_1(1;\ -3;\ 2)$.

15. Пусть $\varphi = \varphi(x, y, z)$ – заданное скалярное поле, $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z)$ – заданное векторное поле. Найти $\operatorname{div}(\mathbf{A}\varphi)$.

16. Вычислить дивергенцию векторного поля

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{r}}{r},$$

где $\mathbf{r}$ – радиус-вектор переменной точки.

17. Вычислить дивергенцию векторного поля

$$\mathbf{A} = \mathbf{r}\, r.$$

где $\mathbf{r}$ – радиус-вектор переменной точки.

18. Вычислить дивергенцию векторного поля

$$\mathbf{A} = \mathbf{r}\, r^2.$$

где $\mathbf{r}$ – радиус-вектор переменной точки.

19. Вычислить дивергенцию векторного поля

$$\mathbf{A} = r\, \mathbf{C}.$$

где r – длина радиус-вектора переменной точки; $\mathbf{C}$ – постоянный вектор.

20. Вычислить дивергенцию векторного поля

$$\mathbf{A} = r^2\, \mathbf{C},$$

где r – длина радиус-вектора переменной точки; $\mathbf{C}$ – постоянный вектор.

21. Вычислить дивергенцию векторного поля

$$\mathbf{A} = \mathbf{r}\, (\mathbf{r}\, \mathbf{C}),$$

где $\mathbf{r}$ –радиус-вектор переменной точки; $\mathbf{C}$ – постоянный вектор.

22. Вычислить дивергенцию векторного поля

$$\mathbf{A} = \mathbf{C}\, (\mathbf{r}\, \mathbf{B}),$$

где $\mathbf{r}$ –радиус-вектор переменной точки; $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ – постоянные векторы.

23. Пусть $\varphi = \varphi(r)$, где r – длина радиус-вектора $\mathbf{r}$ переменной точки. Вычислить дивергенцию векторного поля

$$\mathbf{A} = \mathbf{r}\, \varphi.$$

24. Вычислить $\operatorname{div}(u \operatorname{grad} v)$.

25. Вычислить дивергенцию векторного поля

$$\mathbf{A} = \mathbf{C} \times \mathbf{r},$$

где $\mathbf{r}$ –радиус-вектор переменной точки; $\mathbf{C}$ – постоянный вектор.

26. Вычислить дивергенцию векторного поля

$$\mathbf{A} = r\,(\mathbf{C} \times \mathbf{r}),$$

где $\mathbf{r}$ –радиус-вектор переменной точки; $\mathbf{C}$ – постоянный вектор.

27. Вычислить дивергенцию векторного поля

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} \times (\mathbf{C} \times \mathbf{r}),$$

где $\mathbf{r}$ –радиус-вектор переменной точки; $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ – постоянные векторы.

28. Вычислить поток векторного поля

$$\mathbf{A} = (x^2 + y^2)\mathbf{i} + (y^2 + z^2)\mathbf{j} + (z^2 + x^2)\mathbf{k}$$

через часть плоскости $0xy$, ограниченной окружностью $x^2 + y^2 = 1$ (в направлении вектора $\mathbf{к}$).

29. Вычислить поток векторного поля

$$\mathbf{A} = (x^2 + y^2)\mathbf{i} + (y^2 + z^2)\mathbf{j} + (z^2 + x^2)\mathbf{k}$$

через часть плоскости $0yz$, ограниченной окружностью $y^2 + z^2 = 1$ (в направлении вектора $-\mathbf{i}$).

30. Вычислить поток векторного поля

$$\mathbf{A} = (x^2 + y^2)\mathbf{i} + (y^2 + z^2)\mathbf{j} + (z^2 + x^2)\mathbf{k}$$

через внешнюю поверхность куба, ограниченного плоскостями

$$x = 0, \qquad x = 1, \qquad y = 0, \qquad y = 1, \qquad z = 0, \qquad z = 1.$$

Вычисления произвести непосредственно и с помощью теоремы Остроградского — Гаусса.

31. Вычислить поток векторного поля

$$\mathbf{A} = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$$

через внешнюю поверхность куба, ограниченного плоскостями

$$x = 0, \qquad x = 2, \qquad y = 0, \qquad y = 2, \qquad z = 0, \qquad z = 2.$$

Решить задачу непосредственным вычислением и с помощью теоремы Остроградского — Гаусса.

32. Вычислить поток векторного поля

$$\mathbf{A} = (x^2 + y^2)\mathbf{i} + (y^2 + z^2)\mathbf{j} + (z^2 + x^2)\mathbf{k}$$

через внешнюю поверхность тетраэдра, ограниченного плоскостями

$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad z = 0, \qquad 2x + 3y + 4z = 24.$$

Вычисления произвести непосредственно и с помощью теоремы Остроградского — Гаусса.

33. Вычислить поток векторного поля

$$\mathbf{A} = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$$

через внешнюю поверхность тетраэдра, ограниченного плоскостями

$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad z = 0, \qquad x + 2y + 3z = 6.$$

Решить задачу непосредственным вычислением и с помощью теоремы Остроградского — Гаусса.

34. Вычислить поток векторного поля

$$\mathbf{A} = (x^2 + y^2)\mathbf{i} + (y^2 + z^2)\mathbf{j} + (z^2 + x^2)\mathbf{k}$$

через боковую поверхность цилиндра:

$$x^2 + y^2 = 1, \qquad z = 1, \qquad z = 2.$$

35. Вычислить поток векторного поля

$$\mathbf{A} = (x^2 + y^2)\mathbf{i} + (y^2 + z^2)\mathbf{j} + (z^2 + x^2)\mathbf{k}$$

через боковую поверхность цилиндра:

$$y^2 + z^2 = 1, \qquad x = -3, \qquad x = 5.$$

36. Вычислить поток векторного поля

$$\mathbf{A} = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$$

через внешнюю поверхность цилиндра:

$$x^2 + y^2 = 1, \qquad z = 0, \qquad z = 3.$$

37. Вычислить поток векторного поля

$$\mathbf{A} = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$$

через коническую поверхность в направлении внешней нормали:

$$z^2 = x^2 + y^2, \;\; 0 \le z \le H.$$

38. Вычислить поток векторного поля

$$\mathbf{A} = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$$

через внешнюю поверхность сферы:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4.$$

39. Доказать формулу

$$\Delta(uv) = u\Delta v + v\Delta u + 2\,\mathrm{grad}\,u\;\,\mathrm{grad}\,v\,.$$

40. Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – фиксированная точка, лежащая за пределами области V; $M(x, y, z)$ – переменная точка; $\mathbf{A} = \overrightarrow{M_0M}$; S – граница области V; $\mathbf{n}$ – вектор внешней нормали к поверхности S; φ – угол между векторами $\mathbf{A}$ и $\mathbf{n}$.
Доказать формулу

$$\iint\limits_S \cos\varphi\, dS = 2\iiint\limits_V \frac{dV}{|\mathbf{A}|}.$$

41. В условиях предыдущей задачи записать поток векторного поля $\dfrac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|}$ через поверхность S с помощью тройного интеграла по области V.

42. Вычислить поток векторного поля $\mathbf{A} = c\dfrac{\mathbf{r}}{r^3}$ через сферу радиуса R с центром в начале координат, где $\mathbf{r}$ – радиус-вектор переменной точки; r – длина радиус-вектора $\mathbf{r}$; c – некоторая константа.

43. Вычислить поток векторного поля $\mathbf{A} = f(r)\,\mathbf{r}$ через сферу радиуса R с центром в начале координат, где $\mathbf{r}$ – радиус-вектор переменной точки; $f(r)$ – произвольная дифференцируемая функция от длины r радиус-вектора $\mathbf{r}$.

44. Вычислить ротор векторного поля
$$\mathbf{A} = (x^2 + y^2)\mathbf{i} + (y^2 + z^2)\mathbf{j} + (z^2 + x^2)\mathbf{k}$$
в точке $M_1(0;\ -3;\ 1)$.

45. Найти ротор векторного поля
$$\mathbf{A} = z^2 y\mathbf{i} + x^2 z\mathbf{j} + y^2 x\mathbf{k}$$
в точке $M_1(0;\ -3;\ 1)$.

46. В условиях предыдущей задачи найти $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A}$ в точке $M_1(0;\ -3;\ 1)$.

47. Вычислить $\operatorname{rot}(\varphi\mathbf{A})$, где φ – некоторое скалярное поле; $\mathbf{A}$ – заданное векторное поле.

48. Вычислить ротор векторного поля
$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{r}}{r},$$
где $\mathbf{r}$ – радиус-вектор переменной точки.

49. Вычислить ротор векторного поля
$$\mathbf{A} = \mathbf{r}\,r.$$
где $\mathbf{r}$ – радиус-вектор переменной точки.

50. Вычислить ротор векторного поля
$$\mathbf{A} = \mathbf{r}\,r^2.$$
где $\mathbf{r}$ – радиус-вектор переменной точки.

51. Вычислить ротор векторного поля
$$\mathbf{A} = r\,\mathbf{C},$$
где r – длина радиус-вектора переменной точки; $\mathbf{C}$ – постоянный вектор.

52. Вычислить ротор векторного поля
$$\mathbf{A} = r^2\,\mathbf{C},$$
где r – длина радиус-вектора переменной точки; $\mathbf{C}$ – постоянный вектор.

53. Пусть $\varphi = \varphi(r)$, где r – длина радиус-вектора $\mathbf{r}$ переменной точки. Вычислить ротор векторного поля
$$\mathbf{A} = \mathbf{r}\,\varphi.$$

54. Пусть $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ – некоторые векторные поля. Доказать формулу
$$\operatorname{div}[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = (\operatorname{rot}\mathbf{A}, \mathbf{B}) - (\mathbf{A}, \operatorname{rot}\mathbf{B}).$$

55. Вычислить циркуляцию векторного поля
$$\mathbf{A} = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$$
по окружности
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \\ x + y + z = 0, \end{cases}$$

пробегаемой против хода часовой стрелки (если смотреть с положительной стороны оси Oz). Вычисление провести двумя способами: непосредственно и с помощью формулы Стокса.

56. Вычислить циркуляцию векторного поля

$$\mathbf{A} = (y - x)\mathbf{i} + (z - y)\mathbf{j} + (x - z)\mathbf{k}$$

вдоль замкнутого контура, состоящего из дуги винтовой линии

$$\begin{cases} x = a\cos t\,, \\ y = a\sin t\,, \\ z = \dfrac{b}{2\pi}t \end{cases}$$

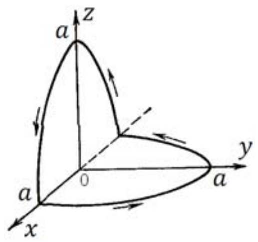
от точки $M_1(a;0;0)$ до точки $M_2(a;0;b)$ и прямолинейного отрезка M_2M_1. Обход совершается в направлении возрастания параметра t (при движении по винтовой линии).

Вычисления провести двумя способами: непосредственно и с помощью формулы Стокса.

57. Вычислить циркуляцию векторного поля

$$\mathbf{A} = (x^2 + y^2)\mathbf{i} + (x^2 - y^2)\mathbf{j} + 2z^2\mathbf{k}$$

вдоль замкнутой кривой, составленной из двух дуг полуокружностей, изображенных на рисунке (направление обхода указано на рисунке стрелкой).



Вычисления провести двумя способами: непосредственно и с помощью формулы Стокса.

58. Вычислить циркуляцию векторного поля

$$\mathbf{A} = (y^2 - z^2)\mathbf{i} + (z^2 - x^2)\mathbf{j} + (x^2 - y^2)\mathbf{k}$$

по замкнутому контуру треугольника $M_1M_2M_3$ с координатами вершин $M_1(1;0;0)$, $M_2(0;1;0)$ и $M_3(0;0;1)$. Вычисления провести двумя способами: непосредственно и с помощью формулы Стокса.

59. Проверить, является ли поле

$$\mathbf{A} = (3x^2y^2z + y^2z^3)\mathbf{i} + (2x^3yz + 2xyz^3)\mathbf{j} + (x^3y^2 + 3xy^2z^2)\mathbf{k}$$

потенциальным. Если да, то найти его потенциал.

60. Проверить, является ли поле

$$\mathbf{A} = \left(\frac{3x^2y^2}{z} - 2x^3\right)\mathbf{i} + \left(\frac{2x^3y}{z} + 3y^3\right)\mathbf{j} + \left(z^3 - \frac{x^3y^2}{z^2}\right)\mathbf{k}$$

потенциальным. Если да, то найти его потенциал.

61. Найти потенциал поля

$$\mathbf{A} = \frac{4}{(x^2 + y^2 + z^2)^3}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}).$$