ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«**ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ**»

В.В. Конев

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Рекомендовано в качестве учебного пособия
Редакционно-издательским советом
Томского политехнического университета

Издательство
Томского политехнического университета
2008

Конев В.В. Линейная алгебра. Учебное пособие. – Томск. Изд. ТПУ. 2008 – 65 стр.

Учебное пособие основано на курсе лекций, читаемых автором для студентов факультета элитного технического образования ТПУ, и включает в себя следующие разделы:

- Матрицы
- Определители
- Обратные матрицы
- Системы линейных уравнений

Наряду с изложением теоретического курса в пособии содержится большое количество примеров и иллюстраций.

Рецензент: Арефьев К. П., профессор, доктор физ.-мат. наук.

Содержание

Содержание …………………………………………………………….. 3

Глава 1. Матрицы

1.1. Введение ……………………………………………………… 5
1.2. Основные понятия …………………………………………… 5
1.3. Операции над матрицами …………………………………… 7
1.3.1. Произведение матриц …………………………………….. 8
1.4. Типы матриц ………………………………………………… 11
1.5. Дельта-символ Кронекера …………………………………… 13
1.6. Свойства матричных операций …………………………….. 14
Упражнения к главе 1 …………………………………………… 18

Глава 2. Определители

2.1. Перестановки и транспозиции ……………………………… 20
2.2. Формальное определение …………………………………… 23
2.3. Свойства определителей …………………………………..... 25
2.4. Вычисление определителей ………………………………… 32
2.4.1. Разложение определителя по элементам строки или столбца …………………………………………….. 32
2.4.2. Вычисление определителей методом элементарных преобразований …………………………………………… 36
Упражнения к главе 2 …………………………………………… 38

Глава 3. Обратная матрица

3.1. Терминология ……………………………………………….. 39
3.2. Две важные леммы …………………………………………. 39
3.3. Теорема об обратной матрице ……………………………... 41
3.3.1. Примеры вычисления обратной матрицы ……………… 42
3.4. Вычисление обратной матрицы методом элементарных преобразований …………………………………………… 45

Глава 4. Системы линейных уравнений

4.1. Ранг матрицы ……………………………………………….. 47
4.2. Основные понятия …………………………………………. 49

4.3. Метод Гаусса …………………………………………………. 50
4.3.1. Несколько примеров …………………………………….. 50
4.4. Однородные системы линейных уравнений ……………… 53
4.4.1. Примеры ……………………………………………………. 54
4.5. Правило Крамера ……………………………………………. 58
4.6. Обобщенное правило Крамера …………………………….. 61
Exercises to Chapter 4 ……………………………………… 64
Литература …………………………………………………………. 65

1. МАТРИЦЫ

1.1. Введение

Матрицы позволяют оперировать с массивами чисел, функций или математических символов и имеют широкие приложения в различных отраслях знания - таких, например, как математика, физика, информатика, экономика и так далее. Матрицы позволяют решать системы обычных или дифференциальных уравнений, предсказывать значения физических величин в квантовой теории, шифровать сообщения в Интернете, и многое другое.

В этой главе обсуждаются основные понятия матричной теории и изучаются некоторые ее приложения. Все ключевые положения разъясняются и сопровождаются наглядными примерами, а строгие доказательства утверждений сочетаются с интуитивными подходами.

1.2. Основные понятия

Прежде чем приступить к формальному обсуждению матриц, рассмотрим два простых примера.

1) Линейное уравнение

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0 \qquad (*)$$

содержит два набора величин, один из которых включает в себя коэффициенты a_1, a_2, a_3, a_4, а другой - неизвестные x_1, x_2, x_3, x_4.

Очевидно, что уравнение (*) полностью определяется заданием массива коэффициентов $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$.

Аналогично, массив коэффициентов

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} \end{pmatrix}$$

определяет систему двух линейных уравнений с пятью неизвестными:

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + a_{1,4}x_4 + a_{1,5}x_5 = 0 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + a_{2,4}x_4 + a_{2,5}x_5 = 0 \end{cases} \qquad (**)$$

Коэффициенты при переменных для удобства пронумерованы двумя индексами, первый из которых указывает номер уравнения, а второй – номер соответствующей переменной.

Умножая обе части уравнения на одно и то же число или прибавляя к одному уравнению другое, мы фактически производим операции над массивами коэффициентов.

2) Вектор в трехмерном пространстве задается упорядоченным набором трех своих координат: $\boldsymbol{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$. При этом линейные операции над векторами сводятся к линейным операциям над координатами.

Таким образом, при решении многих задач приходится оперировать не с отдельными величинами, а с их упорядоченными наборами.

Матрицы это такие прямоугольные массивы элементов, для которых определены операции сложения и умножения. В качестве элементов матрицы могут выступать числа, алгебраические символы или математические функции.

Размерность матрицы определяется числом ее строк и числом столбцов. Для обозначения размерности матрицы используется символ $m \times n$, который означает, что матрица имеет m строк и n столбцов. Сама матрица обозначается одной из заглавных букв латинского алфавита, а таблица ее элементов помещается в круглые скобки.

Примеры.

3×2 матрица	2×3 матрица	2×2 матрица
$A=\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 1 & 0 \\ 3 & \mathbf{4} \end{pmatrix}$	$B=\begin{pmatrix} -1 & \mathbf{5} & 0 \\ 3 & 3 & 8 \end{pmatrix}$	$C=\begin{pmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{pmatrix}$

В общем случае элемент матрицы A, стоящий в i-ой строке и j-ом столбце, обозначается символом $a_{i,j}$ или $A_{i,j}$.

Запись вида $A = \| a_{i,j} \|$ означает, что матрица A составлена из элементов $a_{i,j}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,j} & \cdots & a_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,j} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} = \| a_{i,j} \|.$$

Часто запятую между индексами опускают и пишут $A = \| a_{i\,j} \|$.

Запомните, что первый индекс указывает номер строки, а второй – номер столбца. В вышеприведенных примерах жирным шрифтом выделены матричные элементы $a_{3,2} = 4$ и $b_{1,2} = 5$.

Матрица размерности $1 \times n$ является **однострочной**:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \end{pmatrix}.$$

Матрица размерности $m \times 1$ является **одностолбцовой**: $\begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \cdots \\ a_{m,1} \end{pmatrix}$.

В **квадратной** матрице число строк совпадает с числом столбцов и это число определяет **порядок** матрицы. Так, матрица третьего порядка представляет собой матрицу размерности 3×3.

1.3. Операции над матрицами

Равенство матриц

Матрицы $A = \| a_{i,j} \|$ и $B = \| b_{i,j} \|$ равны, если их размерности совпадают, а соответствующие матричные элементы попарно равны.

$$A = B \quad \Leftrightarrow \quad a_{i,j} = b_{i,j}$$
для всех наборов индексов $\{i, j\}$.

Примеры:

1) Матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix}$ составлены из одних и тех же элементов, но имеют разные размерности. Поэтому $A \neq B$.
2) Матрицы $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ и $D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, имеющие одинаковые размерности, составлены из одних и тех же элементов. Однако не все соответствующие матричные элементы попарно равны. Поэтому $C \neq D$.

Умножение матрицы на скаляр

Умножение матрицы A на скалярную величину λ (справа или слева) дает матрицу B той же размерности, что и A; при этом каждый элемент матрицы умножается на λ: $b_{i,j} = \lambda a_{i,j}$.

Чтобы умножить матрицу на скаляр λ, нужно каждый матричный элемент умножить на λ:
$$B = \lambda A \quad \Leftrightarrow \quad b_{i\,j} = \lambda a_{i\,j}.$$

Пример: Если $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, то $5A = \begin{pmatrix} 10 & -15 & 0 \\ 5 & 20 & -5 \end{pmatrix}$.

Сложение матриц

Операция сложения определена только для матриц одной и той же размерности. Результатом сложения матриц $A = \| a_{i,j} \|$ и $B = \| b_{i,j} \|$ является матрица $C = \| c_{i,j} \|$ той же размерности, элементы которой равны сумме соответствующих матричных элементов $a_{i,j}$ и $b_{i,j}$:

$$c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}.$$

> Чтобы найти алгебраическую сумму матриц, нужно попарно сложить соответствующие матричные элементы:
> $$C = A + B \quad \Leftrightarrow \quad c_{i\,j} = a_{i\,j} + b_{i\,j}.$$

Пример: Пусть $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 6 & -15 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Тогда

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & -15 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+6 & 7-15 & 1+3 \\ -1+4 & 2+1 & 0+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

1.3.1. Произведение матриц

Умножение строки на столбец

Предположим, что матрица-строка A содержит столько же элементов, что и матрица-столбец B. Тогда умножение строки A на столбец B дает число, равное сумме произведений соответствующих элементов:

$$AB = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1,1} \\ b_{2,1} \\ \cdots \\ b_{n,1} \end{pmatrix} = a_{1,1}b_{1,1} + a_{1,2}b_{2,1} + \ldots + a_{1,n}b_{n,1} = \sum_{k=1}^{n} a_{1,k}b_{k,1}.$$

Чтобы умножить двухстрочную матрицу $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \end{pmatrix}$ на матрицу-столбец $B = \begin{pmatrix} b_{1,1} \\ \vdots \\ b_{n,1} \end{pmatrix}$, нужно каждую строку матрицы A умножить на столбец B. В этом случае произведение AB представляет собой матрицу размерности 2×1:

$$AB=\begin{pmatrix}A_1\\A_2\end{pmatrix}B=\begin{pmatrix}A_1B\\A_2B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{1,1}b_{1,1}+a_{1,2}b_{2,1}+\ldots+a_{1,n}b_{n,1}\\a_{2,1}b_{1,1}+a_{2,2}b_{2,1}+\ldots+a_{2,n}b_{n,1}\end{pmatrix}.$$

Аналогично, результатом умножения m-строчной матрицы на n-столбцовую матрицу является $m\times n$ матрица.

Произведение матриц

Операция матричного умножения AB определена только для таких матриц A и B, когда число элементов в строке A совпадает с числом элементов в столбце B. Если при этом матрица A содержит m строк, а матрица B содержит n-столбцов, то произведение AB представляет собой матрицу C размерности $m\times n$. Элемент $c_{i,j}$, стоящий в i-ой строке и j-ом столбце матрицы C, вычисляется по правилу умножения строки на столбец: i-ая строка A умножается на j-ый столбец B.

> Пусть матрицы $A=\|a_{i,j}\|$ и $B=\|b_{i,j}\|$
> имеют размерности $m\times l$ и $l\times n$, соответственно.
> Тогда матрица $C=\|c_{i,j}\|=AB$ имеет размерность $m\times n$ и при этом
>
> $$C=AB \qquad \Leftrightarrow \quad c_{i,j}=\sum_{k=1}^{l}a_{i,k}b_{k,j}\ .$$

Если обозначить строки матрицы A как $A_1, A_2, \ldots, A_m$, а столбцы матрицы B как $B_1, B_2, \ldots, B_n$, то правило матричного умножения можно представить в следующем блочном виде:

$$C=AB=\begin{pmatrix}A_1\\A_2\\\cdots\\A_m\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}B_1 & B_2 & \cdots & B_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1B_1 & A_1B_2 & \cdots & A_1B_n\\A_2B_1 & A_2B_2 & \cdots & A_2B_n\\\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\A_mB_1 & A_mB_2 & \cdots & A_mB_n\end{pmatrix}.$$

Заметим, что символическая запись A^2 означает произведение двух одинаковых квадратных матриц: $A^2=A\cdot A$.

Аналогично, $\quad A^3=A\cdot A\cdot A,$

$$A^n=\underbrace{A\cdot A\cdot\ldots\cdot A}_{n}.$$

Обратите внимание, что в общем случае произведение матриц некоммутативно, то есть $AB\neq BA$. Например, произведением AB матрицы A размерности $1\times n$ на матрицу B размерности $n\times 1$ является число (то есть матрица размерности 1×1), тогда как произведение BA представляет собой матрицу n-го порядка.

Если A и B – матрицы одного и того же порядка, то разность произведений $AB-BA$ называется **коммутатором** матриц A и B.

Примеры:

1) Пусть $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}5\\-4\\0\end{pmatrix}$. Тогда

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5\\-4\\0\end{pmatrix}=1\cdot 5+2\cdot(-4)+3\cdot 0=-3.$$

$$BA=\begin{pmatrix}5\\-4\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\cdot 1 & 5\cdot 2 & 5\cdot 3\\-4\cdot 1 & -4\cdot 2 & -4\cdot 3\\0\cdot 1 & 0\cdot 2 & 0\cdot 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 10 & 15\\-4 & -8 & -12\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

2) Найти коммутатор матриц $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\0 & 3\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}3 & 5\\4 & -1\end{pmatrix}$.

Решение:

$$AB=\begin{pmatrix}2 & 1\\0 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 5\\4 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot 3+1\cdot 4 & 2\cdot 5+1\cdot(-1)\\0\cdot 3+3\cdot 4 & 0\cdot 5+3\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & 9\\12 & -3\end{pmatrix},$$

$$BA=\begin{pmatrix}3 & 5\\4 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1\\0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot 2+5\cdot 0 & 3\cdot 1+5\cdot 3\\4\cdot 2+(-1)\cdot 0 & 4\cdot 1+(-1)\cdot 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 18\\8 & 1\end{pmatrix},$$

$$AB-BA=\begin{pmatrix}10 & 9\\12 & -3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6 & 18\\8 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -9\\4 & -4\end{pmatrix}.$$

3) Найти A^{2002}, если $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}$.

Решение:

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix},$$

$$A^3=A\cdot A^2=\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3\\0 & 1\end{pmatrix},$$

$$A^4=A\cdot A^3=\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 3\\0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 4\\0 & 1\end{pmatrix}, \text{ и т.д.}$$

$$A^{2002}=\begin{pmatrix}1 & 2002\\0 & 1\end{pmatrix}.$$

1.4. Типы матриц

В квадратной матрице $A = \| a_{i,j} \|$ элементы $a_{i,i}$ $(i = 1,2,3,\ldots)$ образуют **главную диагональ** и называются **диагональными элементами**.

Матрица, в которой все недиагональные элементы равны нулю, называется **диагональной**:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что в диагональной матрице элементы $a_{i,j} = 0$, если $i \neq j$.

Диагональная матрица вида

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

называется **единичной**, поскольку она играет роль обычной единицы в системе вещественных чисел, а именно, при умножении на единичную матрицу (справа или слева) исходная матрица не изменяется:

$$AE = A \qquad \text{и} \qquad EA = A.$$

Это свойство будет доказано в следующем разделе.

Нулевая матрица состоит из одних нулей:

$$O \equiv \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

В системе матриц, 0-матрица обладает тем же свойством, что и обычный нуль, то есть

$$AO = O \qquad \text{и} \qquad OA = O$$

для любой матрицы A.

Однако, эта аналогия не является абсолютной. Так, произведение матриц может равняться нулевой матрице, хотя ни один из сомножителей не является нулевой матрицей. Например,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Говорят, что матрица имеет **треугольный** вид, если все ее элементы, расположенные выше или ниже главной диагонали, равны нулю:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Если в произвольной $m \times n$ матрице A произвести взаимную замену строк и столбцов, то полученная матрица называется транспонированной и обозначается символом A^T. Это означает, что строки матрицы A являются столбцами матрицы A^T, а столбцы матрицы A являются строками матрицы A^T; и наоборот: $(A^T)_{i,j} = A_{j,i}$.

Матрица A называется **симметричной**, если $A^T = A$. В этом случае $a_{j,i} = a_{i,j}$.

Матрица A называется **кососимметричной**, если $A^T = -A$, то есть $a_{j,i} = -a_{i,j}$.

Примеры:

1) Пусть $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ – произвольная матрица второго порядка,

$B = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{pmatrix}$ – произвольная 2×3 матрица.

Нетрудно проверить прямым вычислением, что матрицы не изменяются при умножении на единичные матрицы соответствующих порядков:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{pmatrix}.$$

2) Если $A = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, то $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -7 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

3) Матрица $S = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 7 \\ 2 & -5 & 9 \\ 7 & 9 & 3 \end{pmatrix}$ является симметричной, так как $S^T = S$.

4) Матрица $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ является кососимметричной, поскольку

$$A^T = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = -A.$$

1.5. Дельта символ Кронекера

Дельта-символ Кронекера определяется следующим выражением:

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad i = j, \\ 0, & \text{если} \quad i \neq j. \end{cases}$$

Дельта-символ симметричен относительно перестановки индексов:

$$\delta_{i,j} = \delta_{j,i}.$$

Рассмотрим некоторые применения $\delta_{i,j}$.

1. Дельта-символ снимает суммирование в выражениях вида

$$\sum_i a_i \delta_{i,j}, \quad \sum_j a_j \delta_{i,j}, \quad \sum_i a_{i,j} \delta_{i,j}, \quad \sum_j a_{i,j} \delta_{i,j}, \quad \text{и т.д.}$$

$$\boxed{\begin{gathered} \sum_{i=k}^{n} a_i \delta_{i,j} = a_j, \quad \text{если } k \le j \le n. \\ \sum_{i=k}^{n} a_i \delta_{i,j} = 0, \quad \text{если} \quad j < k \quad \text{или} \quad j > n. \end{gathered}}$$

Примеры:

- Сумма $\sum_{i=1}^{100} i^2\delta_{i,3}$ содержит только одно ненулевое слагаемое, поскольку $\delta_{i,3}=1$ при $i=3$ и $\delta_{i,3}=0$ для всех других значений i. Следовательно, $\sum_{i=1}^{100} i^2\delta_{i,3}=3^2=9$.
- Сумма $\sum_{i=1}^{100} i^2\delta_{i,120}$ содержит только нулевые слагаемые, поскольку $\delta_{i,120}=0$ для всех $1\le i\le 100$ и, следовательно, $\sum_{i=1}^{100} i^2\delta_{i,120}=0$.
- $\sum_{k=5}^{1000} 2^k\delta_{10,k}=2^{10}=1024$, однако $\sum_{k=20}^{1000} 2^k\delta_{10,k}=0$.

2. Числа $\delta_{i,j}$ являются элементами единичной матрицы,

$$E=\|\delta_{i,j}\|=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}.$$

Рассмотрим i, j-ый матричный элемент $(A\cdot E)_{i,j}$ произведения AE, где A– произвольная $m\times n$ матрица, E – единичная матрица n-го порядка.

По определению матричного произведения и с учетом свойств дельта-символа,

$$(A\cdot E)_{i,j}=\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\delta_{k,j}=a_{i,j}$$

Равенство соответствующих матричных элементов означает равенство матриц. Таким образом, $A\cdot E=A$.

1.6. Свойства матричных операций

Свойства, связанные со сложением

1. Для любой матрицы A существует противоположная матрица $(-A)$
$$A+(-A)=A-A=0.$$
2. Если A и B – матрицы одинаковой размерности, то
$$A+B=B+A.$$
3. Если A, B, и C – матрицы одинаковой размерности, то
$$(A+B)+C=A+(B+C).$$

4. Транспонирование суммы матриц эквивалентно транспонированию каждой матрицы суммы:
$$(A+B)^T = A^T + B^T .$$

Вышеприведенные свойства вполне очевидны. Их доказательство предоставляется читателю.

Свойства, связанные с умножением

Предположим, что размерности матриц таковы, что соответствующие произведения определены, и пусть λ и μ – произвольные числа. Тогда

1. $\lambda(\mu A) = (\lambda \mu)A$.
2. $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$.
3. $(AB)C = A(BC)$.
4. $(AB)^T = B^T A^T$.
5. Произведение диагональных матриц одного и того же порядка коммутативно: $AB = BA$.

Свойства 1) и 2) основываются на определении операции умножения матрицы на скаляр.

Для доказательства свойства 3 достаточно доказать попарное равенство соответствующих матричных элементов матриц $(AB)C$ и $A(BC)$.

По определению, *i*,*j*-тый элемент произведения матрицы AB на матрицу C равен
$$((AB)C)_{i,j} = \sum_k (AB)_{i,k} c_{k,j} .$$
Учитывая, что
$$(AB)_{i,k} = \sum_l a_{i,l} b_{l,k} ,$$
получаем
$$((AB)C)_{i,j} = \sum_k \sum_l a_{i,l} b_{l,k} c_{k,j} .$$
Изменим теперь порядок суммирования:
$$((AB)C)_{i,j} = \sum_l a_{i,l} \sum_k b_{l,k} c_{k,j}$$
$$= \sum_l a_{i,l} (BC)_{l,j} = (A(BC))_{i,j}.$$

В виду произвольности номеров *i* и *j*, соответствующие матричные элементы попарно равны, что означает равенство матриц:
$$(AB)C = A(BC) .$$

Для доказательства свойства 4 воспользуемся равенствами

$$(AB)^T{}_{i,j} = (AB)_{j,i}, \qquad A^T{}_{i,j} = A_{j,i} \equiv a_{j,i} \qquad \text{и} \qquad B^T{}_{i,j} = B_{j,i} \equiv b_{j,i}.$$

Тогда

$$(AB)^T{}_{i,j} = (AB)_{j,i} = \sum_k a_{j,k} b_{k,i}$$

$$= \sum_k A^T{}_{k,j} B^T{}_{i,k} = \sum_k B^T{}_{i,k} A^T{}_{k,j} = (B^T A^T)_{i,j}.$$

Таким образом, произвольный элемент матрицы $(AB)^T$ совпадает с соответствующим элементом матрицы $(B^T A^T)$ и, следовательно, матрицы равны: $(AB)^T = B^T A^T$.

Доказательство свойства 5 основывается на следующих доводах:

1) Диагональные матрицы являются симметричными, т.е. $A^T{}_{i,j} = A_{i,j}$.

2) Произведение диагональных матриц есть диагональная матрица.

Поэтому достаточно доказать попарное равенство диагональных элементов:

$$(AB)_{i,i} = \sum_k a_{i,k} b_{k,i} = \sum_k a_{k,i} b_{i,k} = \sum_k b_{i,k} a_{k,i} = (BA)_{i,i}.$$

Тем самым, равенство матриц доказано.

Свойства, связанные со сложением и умножением

Пусть размерности матриц таковы, что соответствующие операции сложения и умножения определены, и пусть λ – произвольное число. Тогда

1. $A(B+C) = AB + AC$
2. $(A+B)C = AC + BC$
3. $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$

Для доказательства свойства 1 рассмотрим элемент, стоящий в *i*-ой строке и *j*-ом столбце матрицы $A(B+C)$.

$$(A(B+C))_{i,j} = \sum_k a_{i,k} (B+C)_{k,j} = \sum_k a_{i,k} (b_{k,j} + c_{k,j})$$

$$= \sum_k a_{i,k} b_{k,j} + \sum_k a_{i,k} c_{k,j} = (AB)_{i,j} + (AC)_{i,j} = (AB + AC)_{i,j}$$

Следовательно, матрицы $A(B + C)$ и $(AB + AC)$ равны.

Аналогичным образом можно **обосновать свойство 2**, убедившись в попарном равенстве элементов матриц $(A + B)C$ и $(AC + BC)$:

$$((A+B)C)_{i,j} = \sum_k (A+B)_{i,k} C_{k,j} = \sum_k (a_{i,k} + b_{i,k}) c_{k,j}$$
$$= \sum_k a_{i,k} c_{k,j} + \sum_k b_{i,k} c_{k,j} = (AC)_{i,j} + (BC)_{i,j} = (AC + BC)_{i,j}.$$

Соответствующие матричные элементы попарно равны и, следовательно, матрицы равны.

Доказательство свойства 3 в виду очевидности предоставляется читателю.

Замечания:

– Многие свойства матричных операций совпадают со свойствами соответствующих операций над вещественными числами. Однако в случае произвольных матриц $AB \neq BA$.
– Числовую матрицу первого порядка можно интерпретировать как обычное число ($\| a_{1,1} \| \equiv a_{1,1}$) и, таким образом, матрицы представляют собой непосредственное обобщение вещественных чисел.

Пример 1. Прямым вычислением убедиться в справедливости свойства $(AB)C = A(BC)$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{и} \qquad C = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 \end{pmatrix},$$

$$(A \cdot B)C = \begin{pmatrix} 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 & 12 & 17 \end{pmatrix},$$

$$B \cdot C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & 12 & 1 \\ 20 & 0 & 8 \end{pmatrix},$$

$$A(B \cdot C) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -11 & 12 & 1 \\ 20 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 & 12 & 17 \end{pmatrix} = (A \cdot B)C.$$

Пример 2. Прямым вычислением убедиться в справедливости свойства $(AB)^T = B^T A^T$ на примере произвольных матриц второго порядка, $A = \| a_{i,j} \|$ и $B = \| b_{i,j} \|$.

Решение:

1) $$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}b_{1,1} + a_{1,2}b_{2,1} & a_{1,1}b_{1,2} + a_{1,2}b_{2,2} \\ a_{2,1}b_{1,1} + a_{2,2}b_{2,1} & a_{2,1}b_{1,2} + a_{2,2}b_{2,2} \end{pmatrix},$$

2) $(A\cdot B)^T=\begin{pmatrix} a_{1,1}b_{1,1}+a_{1,2}b_{2,1} & a_{2,1}b_{1,1}+a_{2,2}b_{2,1} \\ a_{1,1}b_{1,2}+a_{1,2}b_{2,2} & a_{2,1}b_{1,2}+a_{2,2}b_{2,2} \end{pmatrix}$,

3) $B^T A^T=\begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{2,1} \\ b_{1,2} & b_{2,2} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_{1,1}a_{1,1}+b_{2,1}a_{1,2} & b_{1,1}a_{2,1}+b_{2,1}a_{2,2} \\ b_{1,2}a_{1,1}+b_{2,2}a_{1,2} & b_{1,2}a_{2,1}+b_{2,2}a_{2,2} \end{pmatrix}$,

что совпадает с произведением $A\cdot B$.

Пример 3. Пусть $f(x)=2x-x^2+1$ и $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Найти $f(A)$.

Решение: При переходе к матричной функции $f(A)$, числовое слагаемое 5 следует заменить произведением $5I$, где I – единичная матрица. Следовательно,

$$f(A)=2A-A^2+5I=$$

$$=2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}+5\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Упражнения к главе 1.

1. Для данных матриц $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ и $C=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

   найти линейную комбинацию $2A-3B+4C$.

2. Представить матрицу $A=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ в виде линейной комбинации матриц

$$X=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\quad Y=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \text{и}\quad Z=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. Установить какие из матричных произведений AB и BA определены и найти размерности этих произведений.
   1) A – матрица размерности 3×5; B – матрица размерности 5×2.
   2) A – матрица размерности 3×2; B – матрица размерности 2×3.
   3) A – матрица размерности 4×2; B – матрица размерности 4×2.
   4) A – матрица размерности 1×7; B – матрица размерности 7×1.
   5) A и B – квадратные матрицы 5-го порядка.

4. Дана матрица $A=\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

   – Вычислить произведения AA^T и $A^T A$.

   – Вычислить коммутатор $AA^T - A^T A$, если он определен.
   Если коммутатор не определен, объяснить почему.

5. Найти матричное произведение $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -3 & 5 & -1 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

6. Проверить непосредственным вычислением справедливость тождества

$$(AB)C = A(BC),$$

   если $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ и $C=\begin{pmatrix} -2 & 8 & 1 \end{pmatrix}$.

7. Найти коммутатор $AB - BA$, если A и B – произвольные диагональные матрицы 4-го порядка.

8. Найти A^{50}, если $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

9. Найти $B^T A^T$, если $AB=\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

10. Пусть $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ и $f(x) = 3x^2 + 5x - 4$. Найти $f(A)$.

11. Дана матрица $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Найти матрицу B такую, что обращает произведение AB в нулевую матрицу.

2. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

2.1. Перестановки и транспозиции

Пусть S представляет собой множество натуральных чисел от 1 to n, расположенных в порядке возрастания (в естественном порядке):

$$S = \{1, 2, 3, \ldots, n\}.$$

Под **перестановкой** S понимается множество этих же чисел, упорядоченное некоторым другим образом:

$$\{1, 2, 3, \ldots, n\} \quad \Rightarrow \quad \{i_1, i_2, i_3, \ldots, i_n\}.$$

Перестановка называется **транспозицией**, если переставляются местами только два элемента множества, тогда как остальные элементы остаются на своих местах.

Пример перестановки:

$$\{1, 2, 3, 4\} \quad \Rightarrow \quad \{2, 4, 1, 3\}$$

Пример транспозиции:

$$\{1, 2, 3, 4\} \quad \Rightarrow \quad \{\mathbf{4}, 2, 3, \mathbf{1}\}$$

Любую перестановку множества S можно осуществить посредством нескольких транспозиций. Например, перестановка $\{2, 4, 1, 3\}$ представляет собой последовательность трех транспозиций:

$$\{\mathbf{1}, 2, 3, \mathbf{4}\} \quad \Rightarrow \quad \{\mathbf{3}, \mathbf{2}, 1, 4\} \quad \Rightarrow \quad \{2, \mathbf{3}, 1, \mathbf{4}\} \quad \Rightarrow \quad \{2, 4, 1, 3\}.$$

Говорят, что перестановка множества S содержит **инверсию** элементов i_j и i_k, если

$$i_j > i_k \quad \text{при} \quad j < k.$$

Например, перестановка $\{2, 4, 1, 3\}$ содержит три инверсии элементов:

2 и 1,
4 и 1,
4 и 3.

Число инверсий определяет **четность** перестановки.

Перестановка называется **четной**, если она содержит четное число инверсий.

Нечетная перестановка содержит нечетное число инверсий.

Заметим, что четная перестановка может быть преобразована к естественному порядку посредством только четного числа транспозиций, тогда как для преобразования нечетной перестановки требуется нечетное число транспозиций.

Пример. Перестановка {2, 4, 1, 3} множества $\{1, 2, 3, 4\}$ является нечетной, поскольку она содержит 3 инверсии.

Теорема 1

Любая транспозиция изменяет четность перестановки.

Доказательство:

Заметим, во-первых, что транспозиция соседних элементов i_j и i_{j+1} изменяет четность перестановки.

Во-вторых, транспозиция элементов i_j и i_{j+k} эквивалентна последовательности $(2k-1)$ транспозиций соседних элементов. Действительно, посредством k транспозиций элемента i_j с соседними элементами справа от i_j мы получаем перестановку $\{\cdots, i_{j+k}, i_j, \cdots\}$:

$$\overset{\boldsymbol{k}\ \text{транспозиций}}{\{\cdots, \boldsymbol{i}_j, \underbrace{\cdots, \boldsymbol{i}_{j+k},}_{\boldsymbol{k}\ \text{элементов}} \cdots\}}$$

Затем посредством k–1 транспозиций элемента i_{j+k} с соседними элементами слева от i_{j+k} мы получаем требуемую перестановку $\{\cdots, i_j, \cdots, i_{j+k}, \cdots\}$:

$$\overset{\boldsymbol{k}\text{-1 транспозиций}}{\{\cdots, \cancel{\boldsymbol{i}_j}, \underbrace{\cdots,}_{\boldsymbol{k}\text{-1 элементов}} \boldsymbol{i}_{j+k}, \boldsymbol{i}_j, \cdots\}}$$

Полное число $k+(k-1)=2k-1$ транспозиций является нечетным числом и, следовательно, четность перестановки изменилась.

Теорема 2

Существует $n!$ различных перестановок множества $S = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

Доказательство:

Чтобы получить произвольную перестановку множества S, на первую позицию можно поставить любой из n элементов.

Для каждой из этих n возможностей вторую позицию можно заместить одним из оставшихся $n-1$ элементов, третью – любым из оставшихся $n-2$ элементов и т.д. Последняя n-ая позиция может быть замещена единственным оставшимся элементом. Таким образом, существует $n(n-1)(n-2)\ldots 1 = n!$ различных перестановок множества S.

Пример.

Множество $S = \{1, 2, 3\}$ содержит три элемента, и поэтому число различных перестановок равно $3! = 6$:

$$\{1, 2, 3\}, \quad \{2, 3, 1\}, \quad \{3, 1, 2\}, \quad \{3, 2, 1\}, \quad \{2, 1, 3\}, \quad \{1, 3, 2\}.$$

a) Перестановки

$$\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 1\} \text{ и } \{3, 1, 2\}$$

являются четными, поскольку каждая из них представляет собой последовательность четного числа транспозиций элементов множества S:

$$\{\mathbf{1}, 2, \mathbf{3}\} \quad \rightarrow \quad \{\mathbf{3}, \mathbf{2}, 1\} \quad \rightarrow \quad \{2, 3, 1\},$$

$$\{\mathbf{1}, \mathbf{2}, 3\} \quad \rightarrow \quad \{\mathbf{2}, 1, \mathbf{3}\} \quad \rightarrow \quad \{3, 1, 2\}.$$

Подсчет числа инверсий приводит к тому же самому результату: перестановки $\{1, 2, 3\}$, $\{2, 3, 1\}$ и $\{3, 1, 2\}$ четные, поскольку каждая из них содержит четное число инверсий элементов. В частности, перестановка $\{2, 3, 1\}$ содержит две инверсии элементов:

2 и 1, т.к. число 2 расположено слева от меньшего числа 1.

3 и 1, т.к. число 3 расположено слева от меньшего числа 1.

b) Аналогично, перестановки

$$\{3, 2, 1\}, \quad \{2, 1, 3\} \quad \text{и} \quad \{1, 3, 2\}$$

являются нечетными, поскольку каждая из них представляет собой последовательность нечетного числа транспозиций элементов множества S. В частности, перестановка $\{3, 2, 1\}$ представляет собой транспозицию элементов 1 и 3 множества S.

Говоря на языке числа инверсий, можно сказать, что перестановка $\{3, 2, 1\}$ является нечетной, поскольку она содержит нечетное число инверсий элементов:

3 и 2, т.к. число 3 расположено слева от меньшего числа 2,
3 и 1, т.к. число 3 расположено слева от меньшего числа 1,
2 и 1, т.к. число 2 расположено слева от меньшего числа 1.

Перестановка $\{2, 1, 3\}$ содержит одну инверсию элементов 2 и 1.

Перестановка $\{1, 3, 2\}$ содержит одну инверсию элементов 3 и 2.

2.2. Формальное определение

Пусть $A = \| a_{i,j} \|$ – квадратная матрица n-го порядка, и пусть $\{k_1, k_2, \cdots, k_n\}$ – некоторая перестановка упорядоченного множества $S = \{1, 2, \cdots, n\}$ первых n натуральных чисел.

Рассмотрим произведение, содержащее n матричных элементов, составленных так, чтобы каждая строка и каждый столбец матрицы A были представлены одним и только одним элементом:

$$a_{1,k_1} a_{2,k_2} \ldots a_{n,k_n} . \qquad (1)$$

Первый сомножитель представляет собой элемент из первой строки и k_1 столбца, второй сомножитель представляет вторую строку и k_2 столбец и т.д.

Согласно Теореме 2 существует $n!$ различных перестановок $\{k_1, k_2, \cdots, k_n\}$ индексов, нумерующих столбцы, каждая из которых порождает произведение вышеуказанного типа и поэтому существует $n!$ таких произведений.

Припишем каждому произведению свой знак в зависимости от четности перестановки $\{k_1, k_2, \cdots, k_n\}$: знак “+”, если перестановка четная и знак “–” в случае нечетной перестановки.

Чтобы описать это математически, введем число инверсий в перестановке $\{k_1, k_2, \cdots, k_n\}$, которое обозначим выражением $P\{k_1, k_2, \cdots, k_n\}$. Заметим, что

$$(-1)^{P\{k_1, k_2, \ldots, k_n\}} = \begin{cases} +1 & \text{в случае четной перестановки} \\ -1 & \text{в случае нечетной перестановки} \end{cases}$$

Алгебраическая сумма всех возможных произведений

$$a_{1,k_1} a_{2,k_2} \ldots a_{n,k_n} (-1)^{P\{k_1, k_2, \ldots, k_n\}}$$

называется **определителем** (или **детерминантом**) матрицы A:

$$\det A = \sum_{\{k_1, k_2, \ldots, k_n\}} a_{1,k_1} a_{2,k_2} \ldots a_{n,k_n} (-1)^{P\{k_1, k_2, \ldots, k_n\}} . \qquad (2)$$

Используется также обозначение в виде массива элементов, заключенных между вертикальными прямыми:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}. \qquad (3)$$

Заметим, что число четных перестановок в сумме (2) совпадает с числом нечетных перестановок и равно $n!\,/\,2$.

Определитель представляет собой важную характеристику матрицы. При этом – как правило – существенным является лишь то, отличен определитель от нуля или же равен нулю. Например, обратная матрица существует только в том случае, если $\det A \neq 0$.

Не путайте определитель матрицы с самой матрицей: матрица это массив чисел, а определитель матрицы это одно число.

Частные случаи

1. Матрица первого порядка содержит единственный элемент, и этот элемент является определителем матрицы: $\det \| a_{1,1} \| = a_{1,1}$.

2. Рассмотрим квадратную матрицу второго порядка,

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}.$$

Существует только две перестановки множества $\{1, 2\}$: $\{1, 2\}$ и $\{2, 1\}$. Перестановка $\{1, 2\}$ не содержит инверсий и поэтому является четной, тогда как перестановка $\{2, 1\}$ содержит одну инверсию и является нечетной. Эти перестановки порождают произведения

$$+a_{1,1}a_{2,2} \quad \text{и} \quad -a_{1,2}a_{2,1},$$

алгебраическая сумма которых представляет собой определитель второго порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}$$

3. В случае матрицы третьего порядка существует уже шесть различных перестановок множества $\{1, 2, 3\}$:

$$\{1, 2, 3\}, \qquad \{2, 3, 1\}, \qquad \{3, 1, 2\},$$

$$\{3, 2, 1\}, \qquad \{2, 1, 3\}, \qquad \{1, 3, 2\}.$$

Первые три перестановки являются четными, поскольку каждая из них содержит четное число инверсий.

Оставшиеся три перестановки являются нечетными, так каждая из них содержит нечетное число инверсий. (См. пример на стр. 22.)

Таким образом,

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2}$$

$$- a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1} - a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3} - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2}$$

Эту формулу можно легко запомнить с помощью правила треугольников, которое иллюстрируется нижеприведенным рисунком.

$$+ a_{1,1}\,a_{2,2}\,a_{3,3} \qquad - a_{1,3}\,a_{2,2}\,a_{3,1}$$
$$+ a_{1,2}\,a_{2,3}\,a_{3,1} \qquad - a_{1,2}\,a_{2,1}\,a_{3,3}$$
$$+ a_{1,3}\,a_{2,1}\,a_{3,2} \qquad - a_{1,1}\,a_{2,3}\,a_{3,2}$$

Элементы, стоящие на диагоналях или в вершинах треугольников, основания которых параллельны диагоналям, образуют произведения трех элементов. Если основание треугольника параллельно главной диагонали матрицы, то произведение элементов сохраняет свой знак. Если же основание треугольника параллельно побочной диагонали матрицы, то произведение элементов берется с противоположным знаком.

2.3. Свойства определителей

1. Определитель транспонированной матрицы равен определителю исходной матрицы:

$$\det A^T = \det A.$$

Это свойство выражает равноправие строк и столбцов определителя.

Доказательство: Свойство вытекает из определения детерминанта – оба детерминанта представляют собой суммы одних и тех же элементов.

2. Умножая строку или столбец определителя на число λ, мы умножаем определитель на это число:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda\cdot a_{i1} & \lambda\cdot a_{i2} & \cdots & \lambda\cdot a_{ij} & \cdots & \lambda\cdot a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda\cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Можно сказать и так: Общий множитель строки (или столбца) можно выносить за знак определителя.

Доказательство: При умножении строки определителя на число один из сомножителей в произведении $a_{1,k_1}a_{2,k_2}\ldots a_{n,k_n}(-1)^{P\{k_1,\, k_2,\, \ldots,\, k_n\}}$ умножается на это число. Это число входит в виде общего множителя в каждое слагаемое суммы

$$\det A = \sum_{\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}} a_{1,i_1}a_{2,i_2}\ldots a_{n,i_n}(-1)^{P\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}}.$$

3. Определитель изменяет свой знак при перестановке местами любых двух строк (или столбцов) определителя.

$$\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

Доказательство: По Теореме 1, транспозиция изменяет четность перестановки. Следовательно, каждое слагаемое суммы

$$\det A = \sum_{\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}} a_{1,i_1}a_{2,i_2}\ldots a_{n,i_n}(-1)^{P\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}}$$

изменяет свой знак на противоположный.

4. Если матрица имеет нулевую строку (столбец), то определитель этой матрицы равен нулю:

$$\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & a_{i,3} & \cdots & a_{i,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{j,1} & a_{j,2} & a_{j,3} & \cdots & a_{j,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = 0$$

Доказательство: Нуль является общим множителем строки (столбца) и, следовательно, общим множителем определителя.

5. Если две строки (столбца) матрицы равны между собой, то определитель этой матрицы равен нулю:

$$\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & a_{i,3} & \cdots & a_{i,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & a_{i,3} & \cdots & a_{i,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = 0$$

Доказательство: По Свойству 3 при перестановке двух строк местами определитель изменяет свой знак. С другой стороны, перестановка местами одинаковых строк не меняет определитель. Следовательно,

$$\det A = -\det A \quad \Rightarrow \quad \det A = 0.$$

6. Если две строки (столбца) матрицы пропорциональны друг другу, то определитель этой матрицы равен нулю:

$$\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & a_{i,3} & \cdots & a_{i,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ca_{i,1} & ca_{i,2} & ca_{i,3} & \cdots & ca_{i,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = 0$$

Доказательство: Вынося общий множитель пропорциональности в строке за знак определителя, мы получаем определитель, имеющий две одинаковых строки. Согласно Свойству 5 такой определитель равен нулю.

7. Определитель матрицы треугольного вида равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ 0 & 0 & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} = a_{1,1} \cdot a_{2,2} \cdot a_{3,3} \cdot \ldots \cdot a_{n,n}.$$

В частности, определитель единичной матрицы E равен 1.

Доказательство: По определению, $\det A$ представляет собой алгебраическую сумму произведений элементов (с учетом правила выбора знаков), составленных так, чтобы каждая строка и каждый столбец матрицы A были представлены в произведении одним и только одним элементом.

В первом столбце имеется только один ненулевой элемент, а именно $a_{1,1}$.

Во втором столбце в нашем распоряжении остается только один ненулевой элемент $a_{2,2}$, поскольку первая строка уже представлена своим элементом. При любой другом выборе соответствующее произведение обращается в нуль.

Аналогично, в третьем столбце мы можем остановить свой выбор только на элементе $a_{3,3}$ и т.д.

Таким образом, сумма (2) содержит только одно ненулевое слагаемое, которое равно произведению элементов, стоящих на главной диагонали.

8. Если каждый элемент строки (столбца) определителя представлен в виде суммы двух членов, то

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_{1,1} & \boldsymbol{a}_{1,2} & \boldsymbol{a}_{1,3} & \cdots & \boldsymbol{a}_{1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \boldsymbol{a}_{k,1}+\boldsymbol{b}_{k,1} & \boldsymbol{a}_{k,2}+\boldsymbol{b}_{k,2} & \boldsymbol{a}_{k,3}+\boldsymbol{b}_{k,3} & \cdots & \boldsymbol{a}_{k,n}+\boldsymbol{b}_{k,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \boldsymbol{a}_{n,1} & \boldsymbol{a}_{n,2} & \boldsymbol{a}_{n,3} & \cdots & \boldsymbol{a}_{n,n} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k,1} & a_{k,2} & a_{k,3} & \cdots & a_{k,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{k,1} & b_{k,2} & b_{k,3} & \cdots & b_{k,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Доказательство: Преобразуем исходный определитель:

$$\sum_{\{i_1,i_2,\ldots,i_n\}} a_{1,i_1} \ldots (a_{k,i_k} + b_{k,i_k}) \ldots a_{n,i_n} (-1)^{P\{i_1,i_2,\ldots,i_n\}} =$$

$$= \sum_{\{i_1,i_2,\ldots,i_n\}} \ldots a_{k,i_k} \ldots \quad + \sum_{\{i_1,i_2,\ldots,i_n\}} \ldots b_{k,i_k} \ldots =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k,1} & a_{k,2} & a_{k,3} & \cdots & a_{k,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{k,1} & b_{k,2} & b_{k,3} & \cdots & b_{k,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

9. Определитель не изменится, если к одной из его строк прибавить другую, предварительно умноженную на любое число:

$$\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & a_{i,3} & \cdots & a_{i,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k,1} & a_{k,2} & a_{k,3} & \cdots & a_{k,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & \cdots & a_{i,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k,1}+ca_{i,1} & a_{k,2}+ca_{i,2} & \cdots & \cdots & a_{k,n}+ca_{i,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

Доказательство: Определитель, стоящий в правой части равенства, можно представить в виде суммы двух определителей, один из которых является исходным, а второй имеет две пропорциональные друг другу строки и, следовательно, равен нулю.

10. Пусть A и B – квадратные матрицы одного и того же порядка. Тогда определитель произведения матриц равен произведению определителей:

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B\,.$$

Примеры.

1) Вычислить $\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ -\cos x & \sin x \end{vmatrix}$.

Решение:

$$\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ -\cos x & \sin x \end{vmatrix} = \sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot (-\cos x) = \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

2) Для данной матрицы $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ убедиться в справедливости тождества $\det A = \det A^T$.

Решение:

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \quad \text{и} \quad \det A^T = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

3) Вычислить $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$.

Решение: Преобразуем определитель, вычитая из второй строки удвоенную первую, а из третьей – утроенную первую.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \overset{\substack{r_2 \to r_2 - 2r_1 \\ r_3 \to r_3 - 3r_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Вынося из третьей строки общий множитель 2, мы получаем определитель, имеющий две одинаковых строки:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

4) Пусть $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Убедиться в справедливости тождества $\det AB = \det A \cdot \det B$.

Решение:

$$\det A = \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 10, \quad \det B = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 11,$$

$$\det A \cdot \det B = 110.$$

$$AB = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 & 5 \\ 13 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\det AB = \begin{vmatrix} 35 & 5 \\ 13 & 5 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} 35 & 1 \\ 13 & 1 \end{vmatrix} = 5(35-13) = 110.$$

5) Вычислить $\det A^{1000}$, если $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение: Заметим, что $\det A^{1000} = (\det A)^{1000}$

Далее,

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \det A^{1000} = 1^{1000} = 1.$$

6) Пусть $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Вычислить:

(a) $\det A$, (b) $\det A^3$, (c) $\det(2A)$,
(d) $\det(-3A)$, (e) $\det(A - 2E)$.

Решение:

(a) Определитель матрицы треугольного вида равен произведению диагональных элементов.
Таким образом,

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot (-1) = -2.$$

(b) Определитель произведения матриц равен произведению определителей. Следовательно,

$$\det A^3 = (\det A)^3 = (-2)^3 = -8.$$

(c) Представим матрицу $2A$ в виде $2E\,A$, где E– единичная матрица. Тогда

$$\det(2A) = \det(2E)\cdot\det A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}\cdot(-2) = 2^3(-2) = -16\,.$$

(d) Аналогично,

$$\det(-3A) = \det(-3E)\cdot\det A = (-3)^3(-2) = 54\,.$$

(e) Сначала найдем матрицу $(A-2E)$, а затем ее определитель:

$$A-2E = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix},$$

$$\det(A-2E) = 0\cdot(-1)\cdot(-3) = 0\,.$$

2.4. Вычисление определителей

Здесь мы рассмотрим два метода вычисления определителей. Суть одного из них заключается в разложении определителя по элементам строки или столбца, в результате чего исходный определитель *n*-го порядка выражается через *n* определителей меньшего порядка. Другой метод основывается на свойствах определителей и связан с преобразованием определителя к более простому виду. Комбинация двух методов дает наиболее эффективный путь вычисления определителей.

2.4.1. Разложение определителя по элементам строки или столбца

Предварительно введем некоторые важные для последующего изложения понятия.

Рассмотрим квадратную матрицу *n*-го порядка. Выберем *i*,*j*-ый элемент $a_{i,j}$ этой матрицы и вычеркнем *i*-ую строку и *j*-ый столбец. В результате мы получаем матрицу (*n*–1)-го порядка, определитель которой называется **минором** элемента $a_{i,j}$ и обозначается символом $M_{i,j}$.

$$M_{i,j} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Алгебраическое дополнение $A_{i,j}$ элемента $a_{i,j}$ определяется формулой

$$A_{i,j} = (-1)^{i+j} M_{i,j}\,.$$

Нетрудно заметить, что алгебраическое дополнение i,j-го элемента совпадает с минором этого элемента, если сумма индексов, нумерующих строку и столбец элемента, является четным числом. Для нечетных значений $i+j$ алгебраическое дополнение отличается от минора только знаком.

Теорема о разложении определителя по элементам строки.

Определитель матрицы A равен сумме произведений элементов строки на их алгебраические дополнения:

$$\det A = a_{i,1} A_{i,1} + a_{i,2} A_{i,2} + \ldots + a_{i,n} A_{i,n} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} A_{i,j}$$

Доказательство: По определению, определитель матрицы A представляет собой сумму

$$\det A = \sum_{\{k_1,k_2,\ldots k_i,\ldots k_n\}} a_{1,k_1} a_{2,k_2} \ldots a_{i,k_i} \ldots a_{n,k_n} (-1)^{P\{k_1,k_2,\ldots,k_n\}} \qquad (*)$$

по все возможным перестановкам индексов, нумерующих столбцы.

Выберем произвольным образом некоторую строку, например, с номером i. Один из элементов этой строки представлен в каждом произведении $a_{1,k_1} a_{2,k_2} \ldots a_{i,k_i} \ldots a_{n,k_n}$. Поэтому слагаемые суммы (*) можно перегруппировать, объединив в первую группу те, что содержат элемент $a_{i,1}$ в качестве общего множителя, во вторую группу – члены, содержащие элемент $a_{i,2}$, и т.д.

Другими словами, выражение (*) можно представить в виде линейной комбинации элементов $a_{i,j}$ ($j = 1,2,\cdots,n$),

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} \sum_{\{k_1,k_2,\dots j,\dots k_n\}} a_{1,k_1} a_{2,k_2} \dots a_{i,j} \dots a_{n,k_n} (-1)^{P\{k_1,k_2,\dots,k_n\}} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \sum_{\{k_1,k_2,\dots j,\dots k_n\}} a_{1,k_1} a_{2,k_2} \dots a_{i-1,k_{i-1}} a_{i+1,k_{i+1}} a_{n,k_n} (-1)^{P\{k_1,k_2,\dots,k_n\}} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} A_{i,j} = a_{i,1} A_{i,1} + a_{i,2} A_{i,2} + \dots + a_{i,n} A_{i,n},$$

где

$$A_{i,j} = \sum_{\{k_1,\cdots,k_{i-1},k_i=j,k_{i+1},\cdots,k_n\}} a_{1,k_1} a_{2,k_2} \cdots a_{i-1,k_{i-1}} a_{i+1,k_{i+1}} \dots a_{n,k_n} (-1)^{P(k_1,\cdots,k_{i-1},j,k_{i+1},\cdots,k_n)}.$$

Покажем, что $A_{i,j}$ представляет собой алгебраическое дополнение элемента $a_{i,j}$.

Рассмотрим четность перестановки $\{k_1,\cdots,k_{i-1},j,k_{i+1},\cdots,k_n\}$.

Во-первых, требуется i–1 транспозиций элемента j с соседними элементами, чтобы получить перестановку $\{j,k_1,\cdots,k_{i-1},k_{i+1},\cdots,k_n\}$.

Во-вторых, в полученной перестановке, элемент j образует j–1 инверсий с другими элементами.

Следовательно,

$$(-1)^{P(k_1,\cdots,k_{i-1},j,k_{i+1},\cdots,k_n)} = (-1)^{i-1+j-1}(-1)^{P(k_1,\cdots,k_{i-1},k_{i+1},\cdots,k_n)} =$$
$$= (-1)^{i+j}(-1)^{P(k_1,\cdots,k_{i-1},k_{i+1},\cdots,k_n)}$$

Однако

$$\sum_{\{k_1,\cdots,k_{i-1},k_{i+1},\cdots,k_n\}} \cdots a_{i-1,k_{i-1}} a_{i+1,k_{i+1}} \dots \ (-1)^{P(k_1,\cdots,k_{i-1},k_{i+1},\cdots,k_n)} = M_{i,j}$$

представляет собой минор элемента $a_{i,j}$.

Таким образом, $A_{i,j} = (-1)^{i+j} M_{i,j}$, что и требовалось доказать.

Поскольку $\det A = \det A^T$, то тем самым справедлива и следующая **Теорема о разложении определителя по элементам столбца.**

> Определитель матрицы A равен сумме произведений элементов столбца на их алгебраические дополнения:
> $$\det A = a_{1,j} A_{1,j} + a_{2,j} A_{2,j} + \dots + a_{n,j} A_{n,j}$$
> $$= \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} A_{i,j}$$

Теоремы о разложении определителя имеют важное значение в теоретических исследованиях. Они устанавливает, что проблема вычисления определителя n-го порядка сводится к проблеме вычисления n определителей $(n-1)$-го порядка.

Пример:

1) Вычислить определитель произвольной матрицы $A = \| a_{ij} \|$ третьего порядка разложением по элементам

   (i) первой строки; (ii) второго столбца.

Решение:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31},$$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$= -a_{12}(a_{12}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) - a_{32}(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21})$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Результаты, полученные различными методами, идентичны.

2) Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \\ -3 & 7 & 5 \end{vmatrix}$ разложением по элементам

   (i) первой строки, (ii) второго столбца.

Решение:

(i) Разложение определителя по элементам первой строки дает

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \\ -3 & 7 & 5 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} - (-5) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \cdot 4 \cdot 5 + 5 \cdot 1 \cdot 5 + 3(7 + 12) = 122.$$

(ii) Тот же самый результат получается при разложении определителя по элементам второго столбца:

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \\ -3 & 7 & 5 \end{vmatrix} = -(-5)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} - 7\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 5(5+0) + 4(10+9) - 7(0-3) = 122.$$

2.4.2. Вычисление определителей методом элементарных преобразований

Под элементарными преобразованиями понимаются следующие операции.

N	Операция	Результат
1	Перестановка местами двух строк.	Определитель изменяет свой знак.
2	Умножение строки на ненулевое число.	Определитель умножается на это число.
3	Прибавление к строке другой строки, предварительно умноженной на любое число.	Определитель не изменяется.

С учетом равноправия строк и столбцов определителя подобные операции в полной мере применимы к столбцам.

Идея метода заключается в том, чтобы с помощью элементарных преобразований строк и столбцов привести определитель к треугольному виду, что решает проблему его вычисления.

Можно поступать и несколько иначе: с помощью элементарных преобразований получить строку (или столбец), содержащую только один ненулевой элемент, и затем разложить полученный определитель по элементам этой строки (столбца). Подобная процедура понижает порядок определителя на одну единицу.

Примеры.

1) Пусть $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -3 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Вычислить $\det A$, приведя матрицу к треугольному виду.

Решение:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -3 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \overset{\substack{r_1 \to r_1 - 2r_3 \\ r_2 \to r_2 + 3r_3}}{=} \begin{vmatrix} 0 & -8 & -5 \\ 0 & 8 & 14 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_1 \leftrightarrow r_3}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 8 & 14 \\ 0 & -8 & -5 \end{vmatrix} \overset{r_3 \to r_3 + r_2}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 8 & 14 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix}.$$

Определитель матрицы треугольного вида равен произведению ее диагональных элементов:

$$\det A = -1 \cdot 8 \cdot 9 = -72.$$

2) Вычислить определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 6 & -1 \\ 7 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение: Сначала преобразуем первую строку с помощью элементарных операций над столбцами, стремясь получить в ней максимально возможное число нулей. С этой целью вычтем из второго столбца пятый столбец, предварительно умноженный на 5, а к третьему столбцу прибавим удвоенный второй столбец:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 6 & -1 \\ 7 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{c_2 \to c_2 - 5c_1 \\ c_3 \to c_3 + 2c_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -14 & 12 & -1 \\ 7 & -35 & 15 & 3 \\ 4 & -15 & 10 & 1 \end{vmatrix}.$$

Теперь разложим определитель по элементам первой строки:

$$\det A = \begin{vmatrix} -14 & 12 & -1 \\ -35 & 15 & 3 \\ -15 & 10 & 1 \end{vmatrix}$$

Преобразуем строки, прибавляя к первой строке третью и вычитая из второй строки утроенную третью:

$$\begin{vmatrix} -14 & 12 & -1 \\ -35 & 15 & 3 \\ -15 & 10 & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{r_1 \to r_1 + r_3 \\ r_2 \to r_2 - 3r_3}}{=} \begin{vmatrix} -29 & 22 & 0 \\ 10 & -15 & 0 \\ -15 & 10 & 1 \end{vmatrix}$$

Разлагаем определитель по элементам третьего столбца:

$$\det A = \begin{vmatrix} -29 & 22 \\ 10 & -15 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} -29 & 22 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 5((-29)\cdot(-3) - 22\cdot 2) = 105.$$

Упражнения к главе 2

1. Вычислить определители матриц

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 7 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ \text{и}\quad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & -4 & 1 \\ 5 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

2. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$. Найти определитель матричного произведения A^2B^3.

3. Вычислить $\det A^{10}$, если $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.

4. Определитель матрицы A равен 5. Найти:

   1) $\det(2A)$; 2) $\det A^T$; 3) $\det A^3$, 4) $\det(2A^2A^T)$.

5. Вычислить $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$ двумя различными способами, используя его разложение по элементам строки и столбца.

6. Вычислить определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 4 & 0 & 7 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, приведя ее к треугольному виду.

7. Вычислить $\det A = \begin{vmatrix} 5 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 6 & -1 \\ 0 & 7 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

3. Обратная матрица

3.1. Терминология

Рассмотрим квадратную матрицу A.

Матрица A^{-1} называется **обратной матрицей** к A, если

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E,$$

где E – единичная матрица.

Отметим, несколько забегая вперед, что условием существования обратной матрицы является отличие от нуля определителя матрицы. В этой связи уместно ввести соответствующую терминологию.

Матрица называется **сингулярной**, если ее определитель равен нулю. В качестве синонимов используются также термины “**особая** матрица” или “**вырожденная** матрица”.

Если $\det A \neq 0$, то матрица A называется **несингулярной** (или **неособенной**, или **невырожденной**).

Если в матрице A заменить ее элементы их алгебраическими дополнениями и перейти к транспонированной матрице, то полученная матрица называется **присоединенной** для A и обозначается символом $\operatorname{adj} A$:

$$\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n,1} & A_{n,2} & \cdots & A_{n,n} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{2,1} & \cdots & A_{n,1} \\ A_{1,2} & A_{2,2} & \cdots & A_{n,2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1,n} & A_{2,n} & \cdots & A_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $\operatorname{adj} A = \| A_{i,j}^T \|$ и $(\operatorname{adj} A)_{i,j} = A_{i,j}^T = A_{j,i}$.

3.2. Две важные леммы

Пусть A – квадратная матрица n-го порядка.

Лемма 1. Сумма произведений элементов любой строки (или столбца) на алгебраические дополнения элементов другой строки (столбца) равна нулю:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} A_{j,k} = 0, \qquad (i \neq j) \tag{1}$$

и

$$\sum_{k=1}^{n} a_{k,i} A_{k,j} = 0, \qquad (i \neq j). \tag{2}$$

Доказательство: Рассмотрим вспомогательную матрицу $\widetilde{A}$, полученную из матрицы A заменой j-ой строки i-ой строкой:

$$A=\begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & a_{i,3} & \cdots & a_{i,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j,1} & a_{j,2} & a_{j,3} & \cdots & a_{j,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \Rightarrow \widetilde{A}=\begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & a_{i,3} & \cdots & a_{i,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & a_{i,3} & \cdots & a_{i,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

Произведем разложение $\det\widetilde{A}$ по элементам j-ой строки:

$$\det\widetilde{A}=\sum_{k=1}^{n} a_{j,k}\widetilde{A}_{j,k}=\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\widetilde{A}_{j,k}.$$

Заметим, что алгебраическое дополнение элемента некоторой строки не зависит от элементов этой строки. (Потому что при вычислении алгебраического дополнения эта строка просто вычеркивается.) Однако матрицы $\widetilde{A}$ и A отличаются друг от друга только j-ой строкой и, следовательно, $\widetilde{A}_{j,k}=A_{j,k}$. Тогда

$$\det\widetilde{A}=\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}A_{j,k}.$$

Пришла пора вспомнить, что матрица $\widetilde{A}$ имеет две одинаковых строки, что влечет за собой равенство нулю ее определителя.
Таким образом, утверждение (1) доказано:

$$\det\widetilde{A}=\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}A_{j,k}=0. \qquad (i\neq j).$$

Аналогично доказывается справедливость утверждения (2).

Лемма 2. Если $\det A\neq 0$, то

$$\frac{1}{\det A}A\cdot\operatorname{adj}A=\frac{1}{\det A}\operatorname{adj}A\cdot A=E, \tag{3}$$

где E – единичная матрица.

Доказательство. Запишем равенства (3) в терминах матричных элементов:

$$(A\cdot\operatorname{adj}A)_{i,j}=(\operatorname{adj}A\cdot A)_{i,j}=\det A\cdot\delta_{i,j}, \tag{4}$$

Это означает, что

$$(A\cdot\operatorname{adj}A)_{i,j}=(\operatorname{adj}A\cdot A)_{i,j}=\begin{cases} 0, & \text{если } i\neq j \\ \det A, & \text{если } i=j \end{cases} \tag{5}$$

Предположим, что $i\neq j$. Тогда согласно Лемме 1

$$\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} A_{j,k} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} A^T_{k,j} = 0 \quad \Rightarrow \quad (A \cdot \operatorname{adj} A)_{i,j} = 0,$$

и

$$\sum_{k=1}^{n} a_{k,i} A_{k,j} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} A^T_{j,k}\, a_{k,i} = 0 \quad \Rightarrow \quad (\operatorname{adj} A \cdot A)_{j,i} = 0.$$

Мы показали, что результатом умножения (в том или ином порядке) матрицы A и присоединенной матрицы $\operatorname{adj} A$ является диагональная матрица. Остается доказать, что все диагональные элементы этой матрицы равны $\det A$:

$$(A \cdot \operatorname{adj} A)_{i,i} = (\operatorname{adj} A \cdot A)_{i,i} = \det A.$$

Этот результат становится очевидным, если воспользоваться теоремами о разложении определителя по элементам строки и столбца:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} A_{i,k} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} A^T_{k,i} = (A \cdot \operatorname{adj} A)_{i,i}$$

и

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i} A_{k,i} = \sum_{k=1}^{n} A^T_{i,k}\, a_{k,i} = (\operatorname{adj} A \cdot A)_{i,i}.$$

3.3. Теорема об обратной матрице

Для любой несингулярной матрицы A существует

единственная обратная матрица:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A.$$

Сингулярная матрица не имеет обратной матрицы.

Доказательство.

1. Предположим, что существует обратная матрица к A. Тогда

$$A A^{-1} = E.$$

Учитывая, что определитель произведения матриц равен произведению определителей, получаем

$$\det A \cdot \det A^{-1} = 1$$

и, следовательно, $\det A \neq 0$.

Это означает, что сингулярные матрицы не имеют обратных матриц.

2. Предположим теперь, что существуют две обратные матрицы, A^{-1} и B^{-1}. Тогда

$$A A^{-1} = A^{-1} A = E$$

и

$$AB^{-1} = B^{-1}A = E.$$

Используем эти равенства для преобразования матрицы B^{-1}:

$$B^{-1} = B^{-1}E = B^{-1}AA^{-1} = (B^{-1}A)A^{-1} = EA^{-1} = A^{-1},$$

что доказывает утверждение о единственности обратной матрицы.

3. В соответствии с Леммой 2

$$A \cdot (\frac{1}{\det A}\operatorname{adj} A) = (\frac{1}{\det A}\operatorname{adj} A) \cdot A = E.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\det A}\operatorname{adj} A = A^{-1}.$$

3.3.1. Примеры вычисления обратной матрицы

Пример 1. Найти обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение. Начнем с вычисления определителя матрицы:

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2.$$

Поскольку $\det A \neq 0$, то обратная матрица существует.

Далее найдем алгебраические дополнения всех элементов:

$$A_{1,1} = (-1)^{1+1}2 = 2, \qquad A_{1,2} = (-1)^{1+2} \cdot 1 = -1,$$

$$A_{2,1} = (-1)^{2+1} \cdot 4 = -4, \qquad A_{2,2} = (-1)^{2+2}3 = 3.$$

Составляем присоединенную матрицу для A:

$$\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Проверка:

$$AA^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E,$$

и

$$A^{-1}A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Пример 2. Найти обратную матрицу для матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}$.

Решение. Вычисляем определитель:

$$\det A=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 3 & 3 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 3 & 3\\ 3 & 3 & 3\end{vmatrix}=0.$$

Матрица оказалась сингулярной и, следовательно, она не имеет обратной матрицы.

Пример 3. Найти обратную матрицу для матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 4 & -1\\ 5 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

Решение.

1) Для вычисления определителя прибавим ко второй строке удвоенную первую; затем разложим определитель по элементам второго столбца:

$$\det A=\begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 4 & -1\\ 5 & 0 & 1\end{vmatrix}\overset{r_2\to r_2+2r_1}{=}\begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 0 & 5\\ 5 & 0 & 1\end{vmatrix}=(-2)\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2 & 5\\ 5 & 1\end{vmatrix}=-46.$$

2) Найдем алгебраические дополнения элементов матрицы:

$$A_{1,1}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}4 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=4,\qquad A_{1,2}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}0 & -1\\ 5 & 1\end{vmatrix}=-5,$$

$$A_{1,3}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}0 & 4\\ 5 & 0\end{vmatrix}=-20,\qquad A_{2,1}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 0 & 1\end{vmatrix}=2,$$

$$A_{2,2}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 5 & 1\end{vmatrix}=-14,\qquad A_{2,3}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & -2\\ 5 & 0\end{vmatrix}=-10,$$

$$A_{3,1}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 4 & -1\end{vmatrix}=-10,\quad A_{3,2}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 0 & -1\end{vmatrix}=1,$$

$$A_{3,3}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & -2\\ 0 & 4\end{vmatrix}=4.$$

3) Запишем присоединенную матрицу для A:

$$\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & -20 \\ 2 & -14 & -10 \\ -10 & 1 & 4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -10 \\ -5 & -14 & 1 \\ -20 & -10 & 4 \end{pmatrix}.$$

4) Делением присоединенной матрицы на $\det A$, получаем обратную матрицу:

$$A^{-1} = -\frac{1}{46}\begin{pmatrix} 4 & 2 & -10 \\ -5 & -14 & 1 \\ -20 & -10 & 4 \end{pmatrix}.$$

5) **Проверка**:

$$AA^{-1} = -\frac{1}{46}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 & -10 \\ -5 & -14 & 1 \\ -20 & -10 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{46}\begin{pmatrix} -46 & 0 & 0 \\ 0 & -46 & 0 \\ 0 & 0 & -46 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Аналогично,

$$A^{-1}A = -\frac{1}{46}\begin{pmatrix} -46 & 0 & 0 \\ 0 & -46 & 0 \\ 0 & 0 & -46 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Все О.К.

Пример 4. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Решить матричное уравнение

$$XA = B. \qquad (*)$$

Решение. Поскольку $\det A = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, то матрица A является неособенной и существует обратная матрица A^{-1}.

Умножаем обе части уравнения (*) матрицей A^{-1} справа:

$$XAA^{-1} = B \cdot A^{-1} \quad \Rightarrow \quad XE = B \cdot A^{-1} \quad \Rightarrow$$

$$X = B \cdot A^{-1}$$

Находим присоединенную матрицу для A:

$$\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$X = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -17 \\ 5 & -12 \end{pmatrix}.$$

Проверка:

$$X \cdot A = \begin{pmatrix} 7 & -17 \\ 5 & -12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \equiv B.$$

3.4. Вычисление обратной матрицы методом элементарных преобразований

Предположим, что матрица A неособенная и изложим еще один метод нахождения обратной матрицы, основанный на элементарных операциях над строками. Алгоритм чрезвычайно прост по своей сути.

Сначала составляется расширенная матрица – присоединением к матрице A единичной матрицы E:

$$(A|E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right).$$

Затем с помощью элементарных операций над строками расширенная матрица преобразуется к виду (E | B).

И это все:

$$A^{-1} = B.$$

В данном контексте под элементарными преобразованиями понимается:

1) Умножение строки на любое ненулевое число.
2) Прибавление к одной строке любой другой, при желании предварительно умноженной на любое число.

Пример. Найти обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение. Преобразуем расширенную матрицу $(A|I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$.

Вычтем из первой строки удвоенную вторую строку:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Затем вычтем первую строку из второй строки:

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 1 & -2\\ 1 & 2 & 0 & 1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 2 & -1 & 3\end{array}\right).$$

Разделим вторую строку на 2:

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 2 & -1 & 3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2}\end{array}\right).$$

Следовательно,

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & -4\\ -1 & 3\end{pmatrix}.$$

Проверка:

$$AA^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3 & 4\\ 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -4\\ -1 & 3\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=E$$

и

$$A^{-1}A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & -4\\ -1 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 4\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=E.$$

Метод работает.

Упражнения к главе 3.

1. Найти миноры и алгебраические дополнения элементов второй строки матрицы $A=\begin{pmatrix}-3 & 2 & 3\\ 4 & 1 & 6\\ 7 & 5 & -1\end{pmatrix}$.

2. Дана матрица $A=\begin{pmatrix}-3 & 2 & 3\\ 4 & 1 & 6\\ 7 & 5 & -1\end{pmatrix}$. Найти все недиагональные элементы матричного произведения $A\cdot\operatorname{adj}A$.

3. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}5 & 4\\ 3 & 2\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}2 & -6\\ 1 & 7\end{pmatrix}$. Решить для X матричное уравнение $AX = B$.

4. Найти обратную матрицу для $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 5\\ -2 & 4 & 0\\ 3 & -1 & 1\end{pmatrix}$.

4. Системы линейных уравнений

4.1. Ранг матрицы

Говорят, что **ранг** матрицы A размерности $m \times n$ равен r, если существует хотя бы одна несингулярная подматрица r-го порядка, тогда как любая подматрица более высокого порядка является сингулярной.

Если это определение озвучить в терминах определителей, то оно будет выглядеть примерно так:

Матрица A размерности $m \times n$ имеет **ранг** r, если существует хотя бы один отличный от нуля определитель r-го порядка, тогда как определитель любой подматрицы более высокого порядка равен нулю.

Очевидно, что

$$\operatorname{rank} A \le \min\{m, n\}.$$

Для вычисления ранга матрицы можно использовать метод элементарных преобразований строк и столбцов – в точности тот самый метод, который применяется для вычисления определителей. Будет уместным напомнить основные операции метода:

1. Перестановка строк или столбцов.
2. Умножение строки ил столбца на ненулевое число.
3. Прибавление к строке (столбцу) другой строки (столбца), предварительно умноженной на любое число.

Строки или столбцы, содержащие одни нули, могут быть опущены.

Целью элементарных преобразований является приведение матрицы к ступенчатой форме, т.е. к квазитреугольному виду вроде того, что представлено ниже:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Очевидно, что определитель третьего порядка, составленный из элементов первых трех строк и столбцов, отличен от нуля, и ранг матрицы равен 3:

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 & -2 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 \cdot (-1) \ne 0.$$

Теорема. В результате элементарных преобразований матрицы ее ранг не изменяется.

Доказательство. Нам предстоит убедиться только в том, что в результате элементарных преобразований нулевой определитель остается нулевым, а ненулевой – ненулевым.

1. Перестановка строк или столбцов матрицы изменяет только знак определителя.
2. При умножении строки (столбца) матрицы на ненулевое число определитель умножается на это число.
3. Определитель не изменяется, если к строке (столбцу) прибавляется другая строка (столбец).

Таким образом, в результате элементарных преобразований сингулярные матрицы остаются сингулярными, а несингулярные – несингулярными.

Пример.

1) Найти ранг матрицы $A=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & -3 & 3 \\ 7 & -2 & 13 & 1 \\ 3 & -1 & 8 & -2 \end{pmatrix}$.

Решение. Вычтем из третьей строки первую и четвертую строки:

$$A=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & -3 & 3 \\ 7 & -2 & 13 & 1 \\ 3 & -1 & 8 & -2 \end{pmatrix} \; r_3 \to r_3 - r_1 - r_4 \; \begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 8 & -2 \end{pmatrix}.$$

Если теперь прибавить третью строку, умноженную на (–2), (–3) и 2, соответственно, к другим строкам, то в четвертом столбце возникает максимально возможное число нулей:

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 8 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} r_1 \to r_1 - 2r_3 \\ r_2 \to r_2 - 3r_3 \\ r_4 \to r_4 + 2r_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 8 & 0 \end{pmatrix}.$$

Далее из четвертой строки вычтем первую строку и затем к полученной строке прибавим вторую:

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 8 & 0 \end{pmatrix} r_4 \to r_4 - r_1 \begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} r_4 \to r_4 + r_2 \begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Опускаем нулевую строку и на этом завершаем преобразования, поскольку стало очевидным, что существует подматрица третьего порядка, определитель которой отличен от нуля, и при этом не существует отличных от нуля определителей более высокого порядка:

$$\begin{vmatrix} -1 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-3)\cdot 1 = 3\,.$$

Таким образом, ранг матрицы A равен 3.

4.2. Основные понятия

Рассмотрим систему m линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

Здесь a_{ij} – числовые коэффициенты; b_i $(i = 1,2,\cdots,m)$ – свободные члены; x_j $(j = 1,2,\cdots,n)$ – неизвестные.

Решением системы (1) является совокупность значений неизвестных x_j, при подстановке которых все уравнения системы (1) обращаются в тождества.

Система уравнений называется **совместной**, если она имеет хотя бы одно решение. В противном случае система является **несовместной**.

Система (1) может быть представлена в виде матричного уравнения

$$AX = B,$$

где A –матрица, составленная из коэффициентов a_{ij} при неизвестных; матрица B представляет собой столбец свободных членов; элементами матрицы X являются неизвестные $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Если $B = 0$, то система уравнений называется **однородной**:

$$AX = 0\,.$$

Две системы уравнений, имеющие одинаковые множества решений, называются **эквивалентными**. Очевидно, что такие операции как перестановка уравнений местами, умножение обеих частей уравнения на ненулевое число или прибавление к одному уравнению другого, умноженного на некоторое число, преобразуют систему уравнений в ей эквивалентную.

4.3. Метод Гаусса

Рассмотрим расширенную матрицу системы (1):

$$(A|B)=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Существует взаимно-однозначное соответствие между элементарными преобразованиями линейной системы и операциями над строками расширенной матрицы. Действительно,

– Перестановка уравнений системы соответствует перестановке строк расширенной матрицы.
– Умножение уравнения на ненулевое число соответствует умножению строки на это число.
– Сложение уравнений системы соответствует сложению строк матрицы.

Решение системы (1) **методом Гаусса** представляет собой не что иное как преобразование расширенной матрицы к треугольному или ступенчатому виду:

$$(A|B) \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{cccccc|c} \tilde{a}_{11} & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \tilde{b}_1 \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \tilde{b}_2 \\ 0 & 0 & \tilde{a}_{33} & \cdots & \cdot & \cdots & \tilde{b}_3 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdot & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \tilde{a}_{rr} & \cdots & \tilde{b}_r \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdot & \cdots & \vdots \end{array}\right)$$

Матрица такого вида соответствует более простой системе уравнений, решение которой начинается с решения последнего уравнения, затем результат подставляется в предпоследнее уравнение и т.д. При необходимости часть неизвестных рассматривается в качестве свободных параметров.

4.3.1. Несколько примеров

1) Решить систему уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 10 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = -2 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

Решение. Рассмотрим расширенную матрицу и приведем ее к треугольному виду, выполняя операции над строками:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 5 & 10 \\ 1 & 1 & -3 & -2 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \end{array}\right) r_2 \to 2r_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 5 & 10 \\ 2 & 2 & -6 & -4 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} r_3 \to r_3 - r_2 \\ r_2 \to r_2 - r_1 \end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 5 & 10 \\ 0 & 3 & -11 & -14 \\ 0 & 2 & 7 & 5 \end{array}\right) r_3 \to 3r_3 \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 5 & 10 \\ 0 & 3 & -11 & -14 \\ 0 & 6 & 21 & 15 \end{array}\right) r_3 \to r_3 - 2r_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 5 & 10 \\ 0 & 3 & -11 & -14 \\ 0 & 0 & 43 & 43 \end{array}\right) r_3 \to \frac{r_3}{43} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 5 & 10 \\ 0 & 3 & -11 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Полученная матрица описывает систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \ \ + 5x_3 \ = 10 \\ \qquad 3x_2 - 11x_3 = -14 \\ \qquad\qquad\quad x_3 = 1 \end{cases}$$

эквивалентную исходной системе. Решение находится элементарно:

$$3x_2 = -14 + 11x_3 = -3 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -1,$$
$$2x_1 = 10 + x_2 - 5x_3 = 4 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2.$$

Убедимся в том, что полученный набор $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ обращает каждое уравнение данной системы в тождество:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 2 \cdot 2 - (-1) + 5 \cdot 1 \equiv 10, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 2 + (-1) - 3 \cdot 1 \equiv -2, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 2 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) + 1 \equiv 1. \end{cases}$$

2) Решить систему уравнений методом Гаусса,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -2 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 5 \end{cases}$$

Решение. Преобразуем расширенную матрицу, производя элементарные операции над строками:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & -2 \\ 4 & 1 & -3 & 5 \end{array}\right) \begin{matrix} r_3 \to r_3 - 4r_1 \\ r_2 \to r_2 - 2r_1 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 1 & 5 \end{array}\right) r_3 \to r_3 - r_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{array}\right).$$

Третья строка соответствует уравнению

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 7,$$

не имеющему решений и, следовательно, система является несовместной.

3) Решить систему уравнений методом Гаусса,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -2 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 4 \end{cases}$$

Решение. Производя элементарные преобразования над строками, приведем расширенную матрицу к ступенчатой форме:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -3 & 1 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{c} r_3 \to r_3 + r_1 \\ r_2 \to r_2 - 2r_1 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & 2 & -4 & -1 & 4 \end{array}\right) r_3 \to r_3 + 2r_2$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 9 & 0 \end{array}\right).$$

Выпишем соответствующую систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ \quad -x_2 + x_3 + 5x_4 = -2 \\ \qquad -2x_3 + 9x_4 = 0 \end{cases}$$

Последнее уравнение содержит две переменных, одну из которых нужно рассматривать в качестве свободного параметра. Назначим этому параметру произвольное значение $x_4 = c$ и выразим остальные переменные через c:

$$x_3 = 9c/2,$$

$$x_2 = 2 + x_3 + 5x_4 = 2 + 9x_4/2 + 5x_4 = 2 + 19c/2,$$

$$x_1 = x_3 - x_2 + 2x_4 = 9x_4/2 - 19x_4/2 - 2 + 2x_4 = -2 - 3c.$$

Таким образом, общее решение системы имеет вид

$$X = \begin{pmatrix} -2 - 3c \\ 2 + \dfrac{19}{2}c \\ \dfrac{9}{2}c \\ c \end{pmatrix}.$$

Если подставить вместо c произвольное число, например нуль, то мы получим частное решение: $X_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Подставляя $c = 2$, получаем другое частное решение: $X_2 = \begin{pmatrix} -8 \\ 21 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Таким образом, данная система имеет бесконечное множество решений.

Проверка: Подставим $x_1 = -2 - 3c$, $x_2 = 2 + \frac{19}{2}c$, $x_3 = \frac{9}{2}c$ и $x_4 = c$ в каждое уравнение системы:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -2 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -2 - 3c + 2 + \frac{19}{2}c - \frac{9}{2}c - 2c = 0 \\ -4 - 6c + 2 + \frac{19}{2}c - \frac{9}{2}c + c = -2 \\ 2 + 3c + 2 + \frac{19}{2}c - \frac{27}{2}c + c = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \equiv 0 \\ -2 \equiv -2 \\ 4 \equiv 4 \end{cases}$$

Уравнения обратились в тождества.

4.4. Однородные системы линейных уравнений

Однородная система линейных уравнений имеет вид

$$AX = 0, \qquad (2)$$

где A – матрица коэффициентов; X – матрица-столбец, составленная из неизвестных.

Очевидно, что любая однородная система имеет нулевое решение $X = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, которое называется **тривиальным** решением.

Теорема
Если X_1 и X_2 являются решениями однородной системы, то и их линейная комбинация
$$c_1X_1 + c_2X_2$$
является решением этой системы.

Доказательство. По условию теоремы,
$$AX_1 = 0 \quad \text{и} \quad AX_2 = 0.$$
Тогда для любых чисел c_1 и c_2
$$c_1AX_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad A(c_1X_1) = 0,$$
$$c_2AX_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad A(c_2X_2) = 0.$$
Складывая эти тождества, получаем
$$A(c_1X_1) + A(c_2X_2) = 0,$$
что влечет
$$A(c_1X_1 + c_2X_2) = 0.$$
Следовательно, линейная комбинация решений $c_1X_1 + c_2X_2$ также является решением.

4.4.1. Примеры

1) Решить однородную систему уравнений методом Гаусса.
$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Решение. Выполним элементарные преобразования над строками матрицы коэффициентов, приведя ее к ступенчатому виду:
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} r_2 \to r_2 - r_1 \\ r_3 \to r_3 - 4r_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 8 & -11 \end{pmatrix} r_3 \to r_3 - r_2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 9 & -9 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы равен 3, тогда как число неизвестных равно 4. Поэтому одну из неизвестных, например, x_4 следует рассматривать как свободный параметр. Далее нужно присвоить этому параметру произвольное значение $x_4 = c$ и выразить базисные неизвестные x_1, x_2 и x_3 через c.

Полученная матрица соответствует следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + 3c = 0 \\ \quad 2x_2 - x_3 - 2c = 0 \\ \qquad 9x_3 - 9c = 0 \end{cases}$$

Из последнего уравнения следует, что $x_3 = c$. Выразим остальные базисные переменные:

$$2x_2 = x_3 + 2c = 3c \qquad \Rightarrow \qquad x_2 = \frac{3}{2}c,$$

$$x_1 = x_2 + x_3 - 3c = \frac{3}{2}c + c - 3c = -\frac{1}{2}c.$$

Таким образом, общее решение системы найдено:

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}c \\ \frac{3}{2}c \\ c \\ c \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Чтобы найти частное решение X_1, нужно придать параметру c какое-нибудь числовое значение. Полагая $c = 4$, получаем

$$X_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Проверка: Подставим неизвестные

$$x_1 = -\frac{1}{2}c, \quad x_2 = \frac{3}{2}c, \qquad x_3 = c, \qquad x_4 = c$$

в уравнения системы:

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}c - \frac{3}{2}c - c + 3c = 0 \\ -\frac{1}{2}c + \frac{3}{2}c - 2c + c = 0 \\ -\frac{4}{2}c - \frac{6}{2}c + 4c + c = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} 0 \equiv 0 \\ 0 \equiv 0 \\ 0 \equiv 0 \end{cases}$$

Уравнения обратились в тождества.

2) Пусть $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ 5 & -5 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

Найти общее решение однородной системы линейных уравнений

$$AX=0.$$

Решение. Преобразуем матрицу коэффициентов к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ 5 & -5 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} r_2 \to r_2 - 2r_1 \\ r_3 \to r_3 - 2r_2 - r_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} r_3 \to r_3 + r_2$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Поскольку $\operatorname{rank} A=2$, а число неизвестных равно 4, то две неизвестные должны рассматриваться как базисные, а оставшиеся переменные как свободные параметры. Полагая $x_2=c_1$ и $x_3=c_2$, получаем систему

$$\begin{cases} 2x_1 - c_1 - c_2 + x_4 = 0, \\ \qquad\qquad 3c_2 - x_4 = 0, \end{cases}$$

решение которой имеет вид

$$x_4 = 3c_2 \quad \text{и} \quad x_1 = \frac{1}{2}(c_1 + c_2 - 3c_2) = \frac{1}{2}c_1 - c_2.$$

Запишем общее решение

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}c_1 - c_2 \\ c_1 \\ c_2 \\ 3c_2 \end{pmatrix}$$

и представим его в виде линейной комбинации частных решений:

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}c_1 \\ c_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -c_2 \\ 0 \\ c_2 \\ 3c_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Если общее решение однородной системы представлено в виде линейной комбинации типа

$$X = c_1 X_1 + c_2 X_2,$$

то говорят, что частные решения $X_1, X_2, \ldots$ образуют **фундаментальную систему решений**.

В нашем случае фундаментальную систему решений образуют частные решения $X_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

3) Предположим, что общее решение однородной системы уравнений имеет вид

$$X = \begin{pmatrix} 4c_1 + 7c_2 - 2c_3 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что $X = c_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ и поэтому частные решения

$$X_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad X_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

образуют фундаментальную систему решений.

4) Дана матрица $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$. Решить однородную систему линейных уравнений $AX = 0$.

Решение. Преобразуем коэффициентную матрицу к треугольному виду:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} r_2 \to r_2 + 3r_1 \\ r_3 \to r_3 + 2r_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & -5 \end{pmatrix} r_3 \to r_3 - 2r_2 \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Соответствующая система

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ \quad 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ \qquad\quad x_3 = 0 \end{cases}$$

имеет только тривиальное решение $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

4.5. Правило Крамера

Имеется один частный случай, когда решение системы линейных уравнений можно представить в явном виде. Соответствующая теорема носит название “Правило Крамера” и имеет важное значение в теоретических исследованиях.

Правило Крамера. Пусть матричное уравнение

$$A\,X = B \tag{3}$$

описывает систему n линейных уравнений с n неизвестными.

Если $\det A \neq 0$, то система (3) является совместной и имеет единственное решение описываемое формулой

$$x_i = \frac{D_i}{D}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{4}$$

где $D = \det A$; D_i – определитель, полученный из D заменой i-го столбца столбцом свободных членов матрицы B:

$$D_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \cdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Доказательство. Нам предстоит доказать следующие утверждения:

1) Решение системы (3) существует и является единственным.
2) Равенства (4) являются следствием уравнения (3) и обратно, равенства (4) влекут за собой уравнение (3).

Так как $\det A \neq 0$, то существует и при том единственная обратная матрица A^{-1}. Умножая обе части матричного уравнения (3) слева на A^{-1}, получаем его решение:

$$X = A^{-1}B. \tag{5}$$

Единственность обратной матрицы доказывает первую часть теоремы.

Чтобы получить *i*-ый элемент x_i матрицы *X*, нужно умножить *i*-ую строку матрицы A^{-1} на столбец *B*.

Используя выражение для обратной матрицы

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\operatorname{adj} A$$

и учитывая, что *i*-ая строка присоединенной матрицы $\operatorname{adj} A$ составлена из алгебраических дополнений $A_{1,i}$, $A_{2,i}$, …, $A_{n,i}$, получаем

$$x_i = (A^{-1}B)_i = \frac{1}{D}\begin{pmatrix} A_{1,i} & A_{2,i} & \cdots & A_{n,i} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{D}\sum_{k=1}^{n} A_{k,i}\, b_k \, .$$

Сумма в правой части представляет собой разложение определителя D_i по элементам *i*-го столбца и, следовательно,

$$x_i = \frac{D_i}{D}.$$

Теперь проделаем обратное преобразование, переходя от выражений

$$x_i = \frac{1}{D}\sum_{k=1}^{n} A_{k,i}\, b_k$$

к системе уравнений (3).

Умножим обе части последнего равенства на $D\, a_{j,i}$ и просуммируем по *i*:

$$D\sum_{i=1}^{n} a_{j,i}\, x_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} A_{k,i}\, a_{j,i}\, b_k \, .$$

Изменим порядок суммирования в правой части полученного выражения:

$$D\sum_{i=1}^{n} a_{j,i}\, x_i = \sum_{k=1}^{n} b_k \sum_{i=1}^{n} A_{k,i}\, a_{j,i} \, . \qquad (6)$$

Ранее было показано, что

$$\sum_{i=1}^{n} A_{k,i} a_{j,i} = \delta_{k\,j} \det A = \delta_{k\,j} D \, ,$$

где $\delta_{k\,j}$ – дельта символ Кронекера.

С учетом того, что дельта символ Кронекера $\delta_{k\,j}$ снимает суммирование, получаем

$$D\sum_{i=1}^{n} a_{j,i}\, x_i = D\sum_{k=1}^{n} b_k \delta_{kj} = Db_j \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} a_{j,i}\, x_i = b_j \quad \Rightarrow \quad AX = B \, ,$$

что и требовалось доказать.

Пример. Решить методом Крамера систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 10 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = -2 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

Решение. Вычислим определители, выполняя предварительно элементарные преобразования над строками и затем разлагая полученные определители по элементам их первых столбцов.

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{r_1 \to r_1 - 2r_2 \\ r_3 \to r_3 - r_1}}{=} \begin{vmatrix} 0 & -3 & 11 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -3 & 11 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = 43,$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 10 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{r_1 \to r_1 + 5r_2 \\ r_2 \to r_2 + r_3}}{=} \begin{vmatrix} 0 & 4 & -10 \\ 0 & 9 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -10 \\ 9 & -1 \end{vmatrix} = 86,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 10 & 5 \\ 1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{r_1 \to r_1 - r_3 \\ r_3 \to r_3 - 2r_1}}{=} \begin{vmatrix} 0 & 9 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \\ 0 & 5 & 7 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = -43,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 10 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{r_1 \to r_1 - 2r_2 \\ r_3 \to r_3 - r_1}}{=} \begin{vmatrix} 0 & -5 & 9 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -5 & 9 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 43.$$

Таким образом,

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{86}{43} = 2,$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-43}{43} = -1,$$

$$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{43}{43} = 1.$$

Сравните эти результаты с теми, что были получены методом Гаусса в примере 1 на стр. 50.

4.6. Обобщенное правило Крамера

Теорема. Необходимым и достаточным условием совместности системы m линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (*)$$

является равенство между собой рангов коэффициентной A и расширенной $\overline{A}$ матриц.

В русско-язычной литературе на эту теорему ссылаются как на теорему Кронекера-Капелли.

Доказательство.

1. Докажем необходимость условия, сформулированного в теореме, т.е. покажем, что предположение о совместности системы уравнений влечет за собой равенство рангов, $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \overline{A}$.

Рассмотрим расширенную матрицу

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{1,1} & \cdots & a_{1,1} & b_1 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} & b_m \end{array} \right)$$

и преобразуем ее, выполнив элементарные операции над столбцами.

Вычтем из последнего столбца первый столбец, умноженный на x_1, второй столбец умноженный на x_2, и т.д. При этом ранг матрицы не меняется:

$$\operatorname{rank} \overline{A} = \operatorname{rank} \left(\begin{array}{ccc|c} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} & b_1 - (a_{1,1}x_1 + \ldots + a_{1,n}x_n) \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} & b_m - (a_{m,1}x_1 + \ldots + a_{m,n}x_n) \end{array} \right).$$

С учетом уравнений (*) последний столбец является нулевым и поэтому его можно опустить. Тогда

$$\operatorname{rank} \overline{A} = \operatorname{rank} \left(\begin{array}{ccc|c} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} & 0 \end{array} \right) = \operatorname{rank} \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} = \operatorname{rank} A.$$

2. Перейдем к доказательству достаточности условия: покажем, что равенство рангов $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \overline{A} = r$ влечет за собой совместность системы (*).

Если $\operatorname{rank} A = r$, то существует несингулярная подматрица $\widetilde{A}$ r-го порядка. Ее коэффициенты при неизвестных указывают нам – какие именно r неизвестных следует выбрать за базисные переменные, приписав оставшимся $(n-r)$ неизвестным роль свободных параметров. Укороченная система r линейных уравнений полностью эквивалентна исходной системе и имеет (согласно теореме Крамера) единственное решение для любого набора значений свободных параметров.

Следствие.

1) Если $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \overline{A}$ и совпадает с числом n неизвестных, то система имеет единственное решение.
2) Если $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \overline{A} < n$, то система имеет бесконечное множество решений.

Доводы:

Первое утверждение по сути представляет собой просто другую формулировку правила Крамера.

Равенство рангов коэффициентной и расширенной матриц говорит о совместности системы. При этом число $r = \operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \overline{A}$ устанавливает количество базисных переменных, тогда как остальные $(n-r)$ переменные играют роль свободных параметров и могут принимать любые значения. Каждому набору параметров, число которых бесконечно велико, соответствует свое решение.

Примеры.

1. Дана система линейных уравнений,

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = a \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = b \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 = c \end{cases}$$

Установить соотношения между параметрами a, b и c, при которых система является несовместной.

Решение. Составим расширенную матрицу и преобразуем ее к ступенчатой форме:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 4 & 5 & 6 & b \\ 7 & 8 & 9 & c \end{array}\right) \begin{array}{c} r_2 \to r_2 - 2r_1 \\ r_3 \to r_3 - 3r_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 2 & 1 & 0 & b-2a \\ 4 & 2 & 0 & c-3a \end{array}\right) r_3 \to r_3 - 2r_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 2 & 1 & 0 & b-2a \\ 0 & 0 & 0 & c-3a-2b \end{array}\right).$$

Если $c - 3a - 2b \neq 0$, то система является несовместной. В противном случае одна из неизвестных является свободной переменной и, следовательно, система имеет бесконечное множество решений.

2. Система линейных уравнений задана расширенной матрицей, представленной в приведенно-ступенчатой форме:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 7 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Выяснить сколько решений имеет эта система.

Решение. Очевидно, что ранг матрицы, составленной из коэффициентов при неизвестных, равен рангу расширенной матрицы и совпадает с числом неизвестных. Следовательно, система уравнений имеет единственное решение – согласно следствию из обобщенного правила Крамера.

3. Выяснить сколько решений имеет система линейных уравнений, заданная расширенной матрицей

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 6 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{array}\right)$$

при различных значениях параметра a.

Решение. Если $a \neq 0$, то $\operatorname{rank} \overline{A} = 4$, тогда как $\operatorname{rank} A = 3$. В этом случае система является несовместной и не имеет решений.

Если $a = 0$, то $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \overline{A} = 3$, что меньше числа неизвестных, количество которых равно 4. Тогда одна из неизвестных должна рассматриваться как свободный параметр, и при этом система имеет решение при любых значениях этого параметра.
Следовательно, система имеет бесконечное множество решений.

Упражнения к главе 4

1. Найти ранг матрицы $A=\begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 & 5 & -2 \\ 2 & 1 & -3 & 0 & 4 \\ 3 & 7 & -10 & -5 & 14 \end{pmatrix}.$
2. Найти ранг матрицы $A=\begin{pmatrix} 11 & -3 & 18 & 3 \\ -2 & -1 & -11 & 5 \\ 7 & -2 & 13 & 1 \\ 3 & -1 & 8 & -2 \end{pmatrix}.$
3. Решить системы уравнений методом Гаусса:
$$\begin{cases} 5x_1+2x_2-4x_3=4 \\ x_1+3x_2+4x_3=3 \\ 2x_1+4x_2+x_3=1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 7x_1+x_2-5x_3=3 \\ 4x_1+x_2-3x_3=5 \\ -2x_1+x_2+x_3=2 \end{cases}$$
4. Найти общее и одно из частных решений системы уравнений, заданной расширенной матрицей
$$\left(\begin{array}{cccc|c} -3 & -2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -3 & 1 & 4 \end{array}\right).$$
5. Найти фундаментальную систему решений однородного уравнения
$A\,X = B$, где $A=\begin{pmatrix} -2 & 2 & 5 & 3 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ 5 & -5 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$
6. Решить системы уравнений методом Крамера
$$\begin{cases} 5x_1+2x_2-4x_3=4 \\ x_1+3x_2+4x_3=3 \\ 2x_1+4x_2+x_3=1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 2x_1-x_2+5x_3=19 \\ x_1+x_2-3x_3=-3 \\ 2x_1+4x_2+x_3=6 \end{cases}$$
7. Установить при каких значениях параметров a, b и c система уравнений
$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=a \\ 4x_1+5x_2+6x_3=b \\ 7x_1+8x_2+9x_3=c \end{cases}$$
является совместной.
8. Установить при каких значениях параметров a и b система уравнений
$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=a \\ 4x_1+5x_2+6x_3=b \\ 7x_1+8x_2+9x_3=0 \end{cases}$$
является несовместной.

Литература

1. *Курош А.Г.* Курс высшей алгебры. – М. Наука, 1968.
2. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. – М. Наука.
3. *Ланкастер П.* Теория матриц. – М. Наука, 1973.
4. *Беклемишев Д. В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М. Наука, 1987.
5. *Бугров Я.* С. *Никояьский С.М.* Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. – М. Наука, 1988.
6. *Головина Л. И.* Линейная алгебра и некоторые её приложения. – М. Наука, 1979.
7. *Ильин В.Л., Позняк Э.Г.* Линейная алгебра. – М. Наука, 1984.
8. *Ильин В.А, Позняк Э.Г.* Аналитическая геометрия. – М. Наука, 1988 г.
9. *Моденов П. С.* Аналитическая геометрия. – М. Изд-во МГУ, 1969.
10. *Рублёв АН.* Курс линейной алгебры и аналитической геометрии. – М. Наука, 1972.

11. Сборник задач по математике под ред. Ефимова А.В. и Демидовича Б.П. Часть 1. – М. Наука, 1988.
12. *Беклемишева Л.А., Петрович АЮ.. Чубаров И.А.* Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. – М. Наука, 1987.
13. *Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я.* Высшая математика в упражнениях и задачах. – М.: Высшая школа, 1980.
14. *Каплан Н.А.* Практические занятия по высшей математике.(в 3-х томах). – Харьков: Изд-во ХГУ, т. 1–1965.
15. *Клетеник Д.В.* Сборник задач по аналитической геометрии. – М. Наука, 1987.
16. *Кузнецов Л.А* Сборник индивидуальных заданий по курсу высшей математики. – М. Наука, 1964.
17. *Минорский В.П.* Сборник задач по высшей математике. – М. Наука, 1987.
18. *Проскуряков И.В.* Сборник задач по линейной алгебре. – М. Наука, 1984.
19. *Фадеев Д.К, Соминский И. С.* Сборник задач по высшей алгебре. – М. Наука, 1977.