ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

В.В. Конев

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Формула Тейлора
Функции нескольких переменных
Интегралы

Рекомендовано в качестве учебного пособия
Редакционно-издательским советом
Томского политехнического университета

Издательство
Томского политехнического университета
2008

UDC 517
Конев В.В. Математический анализ. Учебное пособие. – Томск. Изд. ТПУ. 2008. – 123стр. Учебное пособие основано на курсе лекций, читаемых автором для студентов отделения элитного технического образования ТПУ, и включает в себя следующие разделы:

– Формула Тейлора
– Функции нескольких переменных
– Неопределенные интегралы
– Определенные интегралы
– Несобственные интегралы.

Наряду с изложением теоретического курса в пособии содержится большое число примеров и графических иллюстраций.

Рецензент: Арефьев К. П., профессор, доктор физ.-мат. наук.

Оглавление

Глава 1
ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА

Глава 2
ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Глава 3
НЕОПРЕДЕЛЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Глава 4
ОПРЕДЕЛЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Глава 5
НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

1. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА

1.1. Формула Тейлора для многочлена

Рассмотрим многочлен целой степени n:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n$$
$$= \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k. \tag{1}$$

Покажем, что коэффициенты многочлена можно представить в виде

$$a_k = \frac{P_n^{(k)}(x_0)}{k!} \qquad (0 \le k \le n),$$

где $P_n^{(k)}(x_0)$ – производные от $P_n(x)$ в точке x_0. (Напомним, что $P_n^{(0)}(x_0) \equiv P_n(x_0)$ – по определению.)

Полагая в (1) $x = x_0$, получаем $a_0 = P_n(x_0)$.

Найдем *к*-ую производную от $P_n(x)$ в точке $x = x_0$.

Во-первых, производная *к*-го порядка от $(x - x_0)^k$ равна константе:

$$\frac{d^k}{dx^k}(x - x_0)^k = k!.$$

Во-вторых, производные *к*-го порядка от слагаемых, содержащих $x - x_0$ в меньших степенях, равны нулю.

В третьих, производные *к*-го порядка от слагаемых, содержащих $x - x_0$ в больших степенях, содержат множитель $x - x_0$ и поэтому обращаются в нуль в точке $x = x_0$.

Следовательно, $P_n^{(k)}(x_0) = (a_k(x - x_0)^k)^{(k)} = a_k\, k!$ и, таким образом,

$$P_n(x) = P_n(x_0) + \frac{P_n'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{P_n^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{P_n^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k, \tag{2}$$

Формула (2) называется **формулой Тейлора для многочлена**.

В частном случае, когда $x_0 = 0$, формула (2) принимает вид

$$P_n(x) = P_n(0) + \frac{P_n'(0)}{1!}x + \ldots + \frac{P_n^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{P_n^{(k)}(0)}{k!}x^k. \tag{3}$$

и называется **формулой Маклорена для многочлена**.

С помощью формулы (2) любой многочлен можно преобразовать от одного вида к другому. В качестве примера рассмотрим многочлен

$$P(x) = 1 + 8(x - 2) + 6(x - 2)^2 + (x - 2)^3 \tag{4}$$

и представим его в виде разложения по степеням x.

Согласно формуле Маклорена,

$$P(x) = P(0) + P'(0)\,x + \frac{P''(0)}{2}x^2 + \frac{P'''(0)}{6}x^3.$$

Очевидно, что

$$P(x) = 1 + 8(x-2) + 6(x-2)^2 + (x-2)^3 \quad \Rightarrow \quad P(0) = 1.$$

$$P'(x) = 8 + 12(x-2) + 3(x-2)^2 \quad \Rightarrow \quad P'(0) = -4.$$

$$P''(x) = 12 + 6(x-2) \quad \Rightarrow \quad P''(0) = 0.$$

$$P'''(x) = 6 \quad \Rightarrow \quad P'''(0) = 6.$$

Таким образом, $P(x) = 1 - 4x + x^3$.

Чтобы проверить полученный результат, нужно раскрыть скобки в (4) и привести подобные члены.

1.2. Формула Тейлора для дифференцируемых функций

Теорема. Если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 производные до n-го порядка включительно, то ее можно представить в виде

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x) \\ = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n(x), \end{aligned} \tag{5}$$

где функция $R_n(x)$ и ее производные до n-го порядка обращаются в нуль в точке $x = x_0$:

$$R_n(x_0) = R_n'(x_0) = R_n''(x_0) = \ldots = R_n^{(n)}(x_0) = 0. \tag{6}$$

Доказательство.

Подставим в равенство (5) $x = x_0$:

$$f(x_0) = f(x_0) + R_n(x_0) \quad \Rightarrow \quad R_n(x_0) = 0.$$

Продифференцируем обе части равенства (5) и положим $x = x_0$:

$$f'(x_0) = f'(x_0) + R_n'(x_0) \quad \Rightarrow \quad R_n'(x_0) = 0.$$

Вычисляя производные высшего порядка и полагая $x = x_0$, получаем

$$f^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) + R_n^{(k)}(x_0) \quad \Rightarrow \quad R_n^{(k)}(x_0) = 0$$

для всех $0 \le k \le n$, что и требовалось доказать.

Формула (5) называется **формулой Тейлора с остаточным членом** $R_n(x)$, а ее частный случай, когда $x_0 = 0$, называют **формулой Маклорена**,

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + R_n(x). \tag{7}$$

Формулу Тейлора можно также представить в терминах дифференциалов, учитывая следующие соображения.

Если разность $x - x_0 = \Delta x$ рассматривать как приращение аргумента, то $f(x) - f(x_0) = \Delta f(x)$ представляет собой соответствующее приращение функции.

Дифференциал аргумента, по определению, равен приращению аргумента, $dx = \Delta x$; $dx^k \equiv (dx)^k = (x - x_0)^k$.

Дифференциал функции $f(x)$ в точке $x = x_0$ равен

$$df(x_0) = f'(x_0)dx = f'(x_0)(x - x_0).$$

Дифференциал k-го порядка функции $f(x)$ в точке $x = x_0$ равен

$$d^k f(x_0) = f^{(k)}(x_0)dx^k = f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k.$$

Таким образом, формула Тейлора в терминах дифференциалов имеет следующий вид:

$$\Delta f(x) = df(x_0) + \frac{d^2 f(x_0)}{2!} + \frac{d^3 f(x_0)}{3!} + \ldots + \frac{d^n f(x_0)}{n!} + R_n(x). \qquad (8)$$

Формула Тейлора имеет многочисленные применения. Чаще всего она используется для аппроксимации функции $f(x)$ многочленом:

$$f(x) \cong f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

При этом остаточный член $R_n(x)$ рассматривается как погрешность аппроксимации и отбрасывается.

Для обоснования подобного подхода можно привести следующие доводы. Если $f(x)$ является непрерывной функцией в окрестности точки x_0, то этим же свойством обладает и остаточный член $R_n(x)$. Поскольку $R_n(x)$ и его производная равны нулю в точке x_0, то и в некоторой окрестности этой точки $R_n(x)$ остается достаточно малым.

Можно сделать даже более сильное утверждение и показать, что $R_n(x)$ является бесконечно малой более высокого порядка по сравнению с $(x - x_0)^n$ при $x \to x_0$, т.е.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0. \qquad (9)$$

С этой целью вычислим предел (9), применяя правило Лопиталя:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = \lim_{x \to x_0} \frac{R_n'(x)}{n(x - x_0)^{n-1}}.$$

Согласно равенству (6), выражение под знаком предела представляет собой неопределенность вида $\frac{0}{0}$, которую можно раскрыть повторным применением правила Лопиталя.

Следуя подобной процедуре, получаем цепочку равенств, приводящих к ожидаемому результату:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}=\lim_{x\to x_0}\frac{R_n'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}}=\ldots=\lim_{x\to x_0}\frac{R_n^{(n)}(x)}{n!}=0.$$

1.3. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа

Для контроля погрешности вычислений полезно иметь представления остаточного члена в различных формах, наиболее употребительная из которых - **форма Лагранжа**,

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \qquad (10)$$

где c - некоторая точка, расположенная между x и x_0.

Если $|x-x_0|<1$ и $f^{(n+1)}(x)\le M$, то

$$|R_n(x)|=\left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right|\le\left|M\,\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}\right| \;\to\; 0$$

при $n\to\infty$.

Чем меньше величина $(x-x_0)$, тем быстрее $(x-x_0)^{n+1}$ убывает с ростом *n*. Это означает, что многочлен

$$P_n(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

тем лучше аппроксимирует функцию $f(x)$, чем меньше $(x-x_0)$ и чем больше *n*.

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа имеет следующий вид:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \qquad (11)$$

Частным случаем этой формулы при $n=0$ является теорема Лагранжа:

$$f(x)=f(x_0)+f'(c)(x-x_0).$$

Пример. Пусть $f(x)=\sqrt{x}$ и $x_0=4$. Тогда

$$f(x_0)=2,\quad f'(x_0)=\left.\frac{1}{2\sqrt{x}}\right|_{x=x_0}=\frac{1}{4},\quad f''(x_0)=-\left.\frac{1}{4\sqrt{x^3}}\right|_{x=x_0}=-\frac{1}{32}.$$

Следовательно, $f(x)\approx 2+\frac{1}{4}(x-4)-\frac{1}{64}(x-4)^2$.

В частности, $\sqrt{5}\approx 2+1/4-1/64=143/64=2.234\ldots$

1.4. Приложения формулы Тейлора

Все нижеприведенные формулы вытекают из формулы Маклорена. Единственное, что требуется для их вывода – получить выражения для соответствующих производных n-го порядка.
Для оценки остаточных членов использована форма Лагранжа.

1) Пусть $f(x)=e^x$. Тогда $f^{(n)}(x)=e^x$ и $f^{(n)}(0)=1$ для $n\ge 0$, что дает

$$\boxed{e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^n}{n!}+R_n(x)} \tag{12}$$

Здесь $R_n(x)=\dfrac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}$; c - точка, расположенная между нулем и x.

Если $x<0$, то $e^c<1$, так что $|\,R_n(x)\,|<\dfrac{1}{(n+1)!}|\,x\,|^{n+1}$.

2) Пусть $f(x)=\sin x$. Тогда

$$f^{(k)}(x)=\sin(x+\frac{k\pi}{2}),\qquad f^{(k)}(0)=\sin\frac{k\pi}{2}.$$

Очевидно, что

$$f^{(2n-1)}(0)=(-1)^{n-1}\text{ (для нечетных } k\text{)},$$

$$f^{(2n)}(0)=0\text{ (для четных } k\text{)}.$$

Следовательно,

$$\boxed{\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-...+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+R_n(x)} \tag{13}$$

где $|\,R_n(x)\,|<\dfrac{|\,x\,|^{2n}}{(2n)!}$ для $x<0$; $|\,R_n(x)\,|<\dfrac{|\,x\,|^{2n+1}}{(2n+1)!}$ для $x>0$.

3) Пусть $f(x)=\cos x$. Тогда $f^{(k)}(x)=\cos(x+\dfrac{k\pi}{2})$, $f^{(k)}(0)=\cos\dfrac{k\pi}{2}$.

Если k – нечетное число, то $f^{(2n+1)}(0)=0$.
Если же k – четное число, то $f^{(2n)}(0)=(-1)^n$.
Следовательно,

$$\boxed{\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-...+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+R_n(x)} \tag{14}$$

где $|\,R_n(x)\,|<\dfrac{|\,x\,|^{2n+2}}{(2n+2)!}$ для любых x.

4) Пусть $f(x) = \operatorname{arctg} x$, где $-1 < x \le 1$. Тогда

$$\boxed{\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + R_n(x)} \qquad (15)$$

Если $0 < x < 1$, то $|\, R_n(x)\,| < \dfrac{1}{2n+1}|\, x\,|^{2n+1}$.

5) Пусть $f(x) = \ln(1+x)$, где $-1 < x \le 1$. Тогда

$$f(0) = 1, \quad f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{(1+x)^n}(n-1)!, \quad f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!,$$

что приводит к разложению

$$\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_n(x)} \qquad (16)$$

где $R_n(x) = (-1)^n \dfrac{x^{n+1}}{n+1}(1+c)^{-n-1}$; $|\, c\,| < |\, x\,|$.

Если $0 < x < 1$, то $|\, R_n(x)\,| < \dfrac{1}{n+1}x^{n+1}$.

6) Пусть $f(x) = (1+x)^m$, где m - рациональное число. Тогда

$$f^{(n)}(x) = m(m-1)\ldots(m-n+1)(1+x)^{m-n}, \quad f^{(n)}(0) = m(m-1)\ldots(m-n+1),$$

$$\boxed{(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + R_n(x)} \qquad (17)$$

Если $m = n$, то $R_n(x) = 0$.

Например, $(1+x)^4 = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4$.

1.5. Примеры применения формулы Тейлора

Пример 1. Вычислить приближенно $\sqrt[3]{e}$.

Решение: Подставим в формулу (12) $x = 1/3$ и выберем последовательно $n = 1, 2, 3$:

1) $e^x \approx 1 + x \quad \Rightarrow \quad \sqrt[3]{e} = e^{1/3} \approx 1 + \dfrac{1}{3} = \dfrac{4}{3} \approx 1.333$;

2) $e^x \approx 1 + x + \dfrac{x^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \sqrt[3]{e} \approx 1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2!}\dfrac{1}{3^2} = \dfrac{25}{18} \approx 1.389$;

3) $e^x \approx 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} \quad \Rightarrow \quad \sqrt[3]{e} \approx 1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2!}\dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{3!}\dfrac{1}{3^3} = \dfrac{113}{81} \approx 1.395$.

Любопытно сравнить эти результаты с точным значением: $\sqrt[3]{e} = 1.3956\ldots$

Пример 2. Вычислить приближенно $\sin 18°$.
Решение. Прежде всего, следует преобразовать градусы в радианы:

$$18° = \frac{\pi}{10}.$$

Формула (13) при $x = \frac{\pi}{10}$ и $n = 1, 2$ дает, соответственно:

1) $\sin x \approx x \qquad \Rightarrow \qquad \sin\frac{\pi}{10} \approx \frac{\pi}{10} \approx 0.314$;

2) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} \qquad \Rightarrow \qquad \sin\frac{\pi}{10} \approx \frac{\pi}{10} - \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{10}\right)^3 \approx 0.3089$.

Точное значение $\sin 18°$ равно $0.3090...$

Пример 3. Вычислить приближенно $\sqrt[3]{10}$.
Решение. Преобразуем число 10 к виду

$$10 = 2^3 + 2 = 2^3(1 + \frac{2}{2^3}) = 2^3(1 + \frac{1}{4}).$$

Тогда $\sqrt[3]{10} = 2\sqrt[3]{1 + \frac{1}{4}}$.

Теперь можно воспользоваться формулой (17), положив $x = \frac{1}{4}$ и $m = \frac{1}{3}$.

При $n = 2$ получаем

$$\sqrt[3]{1 + \frac{1}{4}} = \left(1 + \frac{1}{4}\right)^{1/3} \approx 1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\frac{1}{3}(\frac{1}{3} - 1)\frac{1}{4^2} = \frac{155}{144}.$$

Следовательно, $\sqrt[3]{10} = 2\sqrt[3]{1 + 1/4} \approx 155/72 \approx 2.1528$.

Точное значение равно $2.1544...$

Пример 4. Оценить погрешность вычисления $\sqrt{e}$ в зависимости от порядка аппроксимирующего многочлена.
Решение. Рассмотрим остаточный член (12) при $x = 1/2$:

$$R_n(\frac{1}{2}) = \frac{e^c}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{2^{n+1}},$$

где $0 < c < 1/2$.

Очевидно, что $e^c < e^{1/2} < 2$.
Тогда

$$R_n(\frac{1}{2}) < \frac{1}{(n+1)!\,2^n} \qquad \Rightarrow$$

$$R_1(\frac{1}{2}) < 0.25, \quad R_2(\frac{1}{2}) < \frac{1}{24} \approx 0.04, \qquad R_3(\frac{1}{2}) < \frac{1}{192} \approx 0.005.$$

1.6. Формулы приближенных вычислений

Некоторые полезные приближенные формулы, справедливые для достаточно малых значений x, сведены в таблицу и проиллюстрированы графиками.

Таблица 1

Функция	Первое приближение	Следующее приближение
e^x	$1+x$	$1+x+\frac{x^2}{2}$
$\sin x$	x	$x-\frac{x^3}{6}$
$\cos x$	$1-\frac{x^2}{2}$	$1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$
$\operatorname{tg} x$	x	$x+\frac{x^3}{3}$
$\ln(1+x)$	x	$x-\frac{x^2}{2}$
$\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$	x	$x+\frac{x^3}{3}$
$\operatorname{arctg} x$	x	$x-\frac{x^3}{3}$
$\sqrt{1+x}$	$1+\frac{x}{2}$	$1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}$
$\sqrt[3]{1+x}$	$1+\frac{x}{3}$	$1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}$
$\frac{1}{1+x}$	$1-x$	$1-x+x^2$
$\frac{1}{1-x}$	$1+x$	$1+x+x^2$

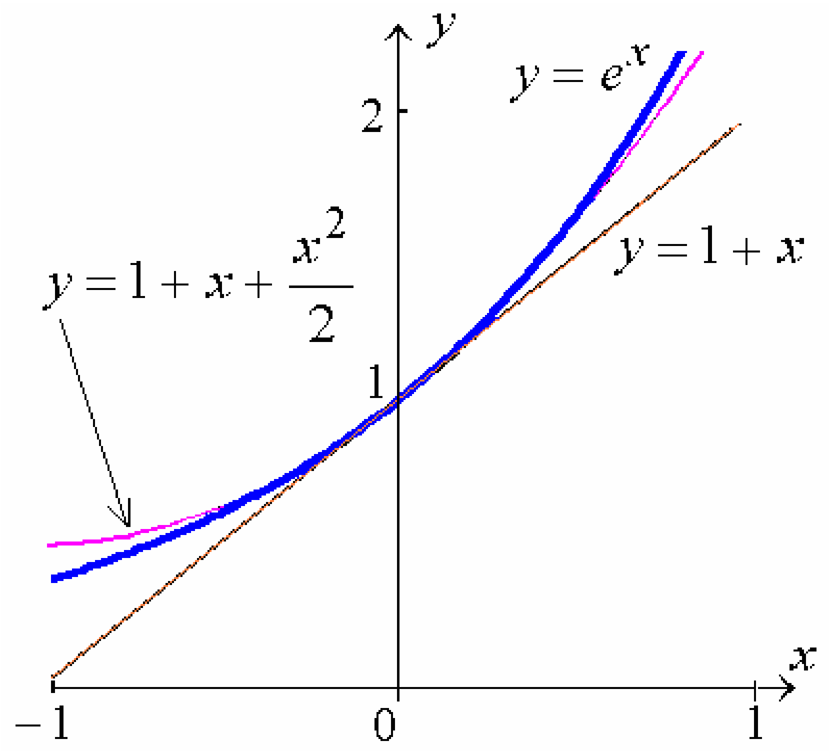

y
$y = e^x$
2
$y = 1 + x + \frac{x^2}{2}$
$y = 1 + x$
1
x
-1
0
1

Рис. 1

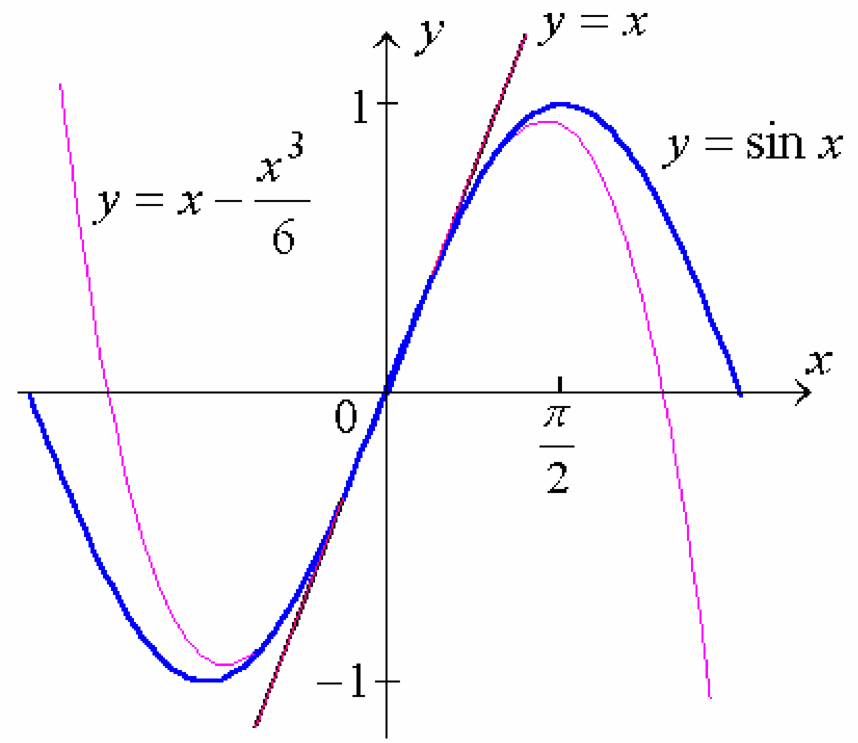
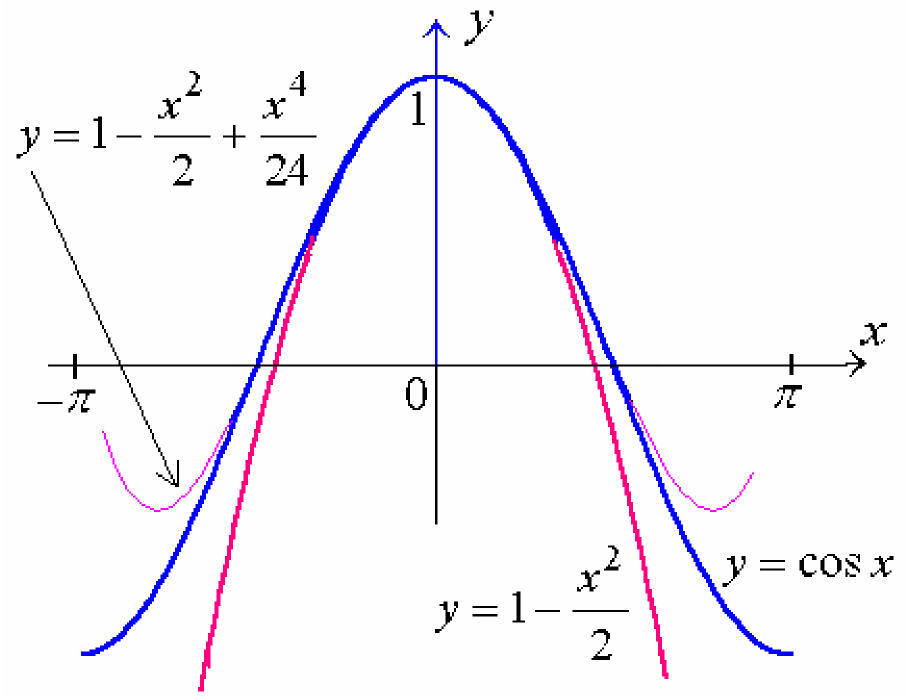
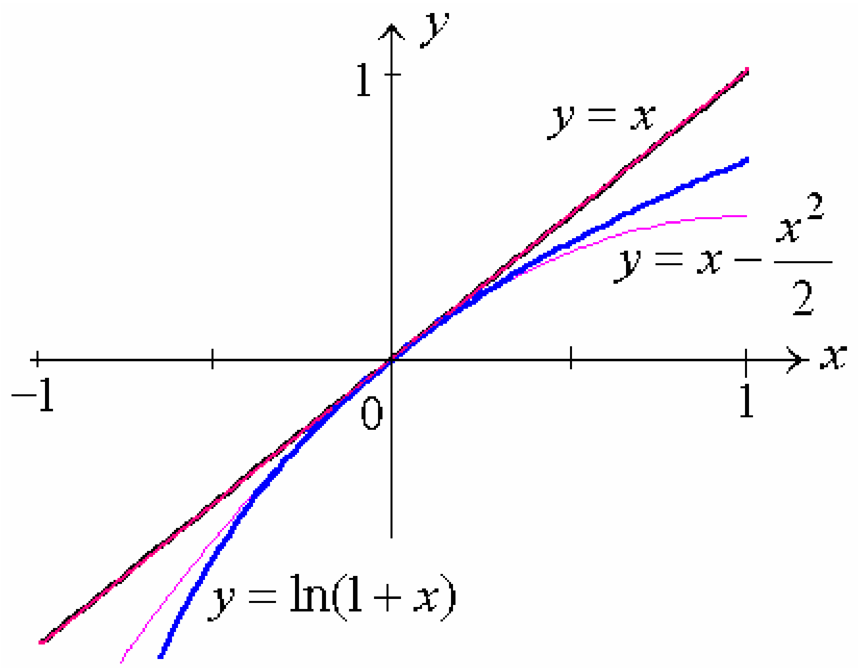

y
$y = x$
1
$y = \sin x$
$y = x - \frac{x^3}{6}$
x
0
$\frac{\pi}{2}$
-1

Рис. 2



y
$y = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$
1
x
$-\pi$
0
π
$y = \cos x$
$y = 1 - \frac{x^2}{2}$

Рис. 3



y
1
$y = x$
$y = x - \frac{x^2}{2}$
x
-1
0
1
$y = \ln(1 + x)$

Рис. 4

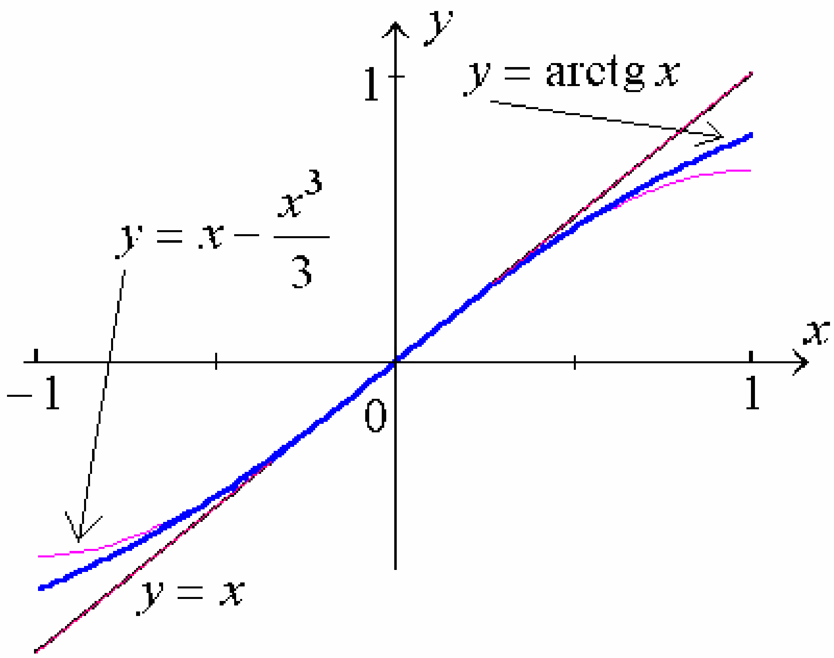


Рис. 5

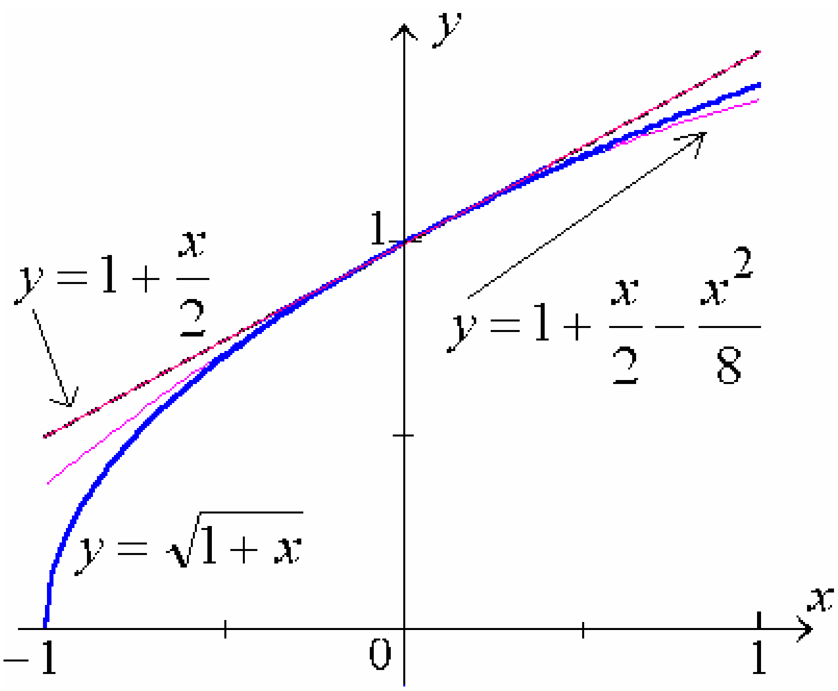


Рис. 6

2. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

2.1. Основные понятия

Основные понятия теории функций нескольких переменных по своей сути не отличаются от соответствующих представлений теории функций одной переменной. Это, естественно, не означает, что все результаты, полученные для функций одной переменной, можно механически переносить на случай функций двух и более переменных. Необходимы определенные обобщения и осторожность в интерпретации результатов.
Начнем с простейших обобщений.

Расстояние между точками.

1) Чтобы описать положение точки P на числовой оси Ox, достаточно указать единственное число: $x-$координату точки. Расстояние между точками $P(x)$ и $P_0(x_0)$ числовой прямой определяется формулой
$$\rho(P,P_0)=|x-x_0|=\sqrt{(x-x_0)^2}\,.$$
2) Любая точка P координатной плоскости xOy описывается упорядоченной парой вещественных чисел (x,y), а расстояние между точками $P(x,y)$ и $P_0(x_0,y_0)$ этой плоскости вычисляется по формуле
$$\rho(P,P_0)=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\,.$$
3) Точка P трехмерного пространства задается тремя координатами (x,y,z), так что расстояние между точками $P(x,y,z)$ и $P_0(x_0,y_0,z_0)$ равно
$$\rho(P,P_0)=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}\,.$$

Говоря, например, о точке $P(x,y,z)$, мы фактически подразумеваем набор независимых переменных (x,y,z), не обязательно вкладывая в это понятие геометрический смысл. В этом же смысле используется термин “точка n-мерного пространства”, т.е. в смысле “упорядоченная совокупность чисел ($x_1,x_2,...,x_n$)”. Расстояние между точками $P(x_1,x_2,...,x_n)$ и $P(a_1,a_2,...,a_n)$ n-мерного пространства определяется формулой
$$\rho(P,P_0)=\sqrt{(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2+...+(x_n-a_n)^2}\,, \qquad (1)$$
что является естественным обобщением привычного понятия “расстояние”.

Определение функции

Если каждой точке $P(x_1,x_2,...,x_n)$ некоторой области D n-мерного пространства поставлено в соответствие значение переменной u, то говорят, что в области D задана функция u переменных $x_1,x_2,...,x_n$:
$$u=f(x_1,x_2,...,x_n)\,.$$
Область D называется **областью определения** функции.

Общеупотребительным является и более короткое обозначение:

$$u = f(P).$$

Функцию двух переменных обычно обозначают в виде

$$z = f(x, y).$$

Уравнение $z = f(x, y)$ при этом можно интерпретировать как уравнение поверхности в обычном трехмерном пространстве, а областью определения функции $f(x, y)$ является проекция этой поверхности на координатную плоскость xOy.

Пример 1. Областью определения D функции

$$z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} + \sqrt{2 - x^2 - y^2}$$

является кольцо с центром в начале координат:

$$1 \le x^2 + y^2 \le 2.$$

Используя символику теории множеств, можно записать, что

$$D = \{x \mid (x^2 + y^2 \ge 1) \bigcap (x^2 + y^2 \le 2)\}.$$

Пример 2. Областью определения функции

$$z = \ln(2x - x^2 - y^2)$$

является внутренняя часть круга радиусом 1 с центром в точке $P_0(1,0)$:

$$(x-1)^2 + y^2 < 1.$$

Пример 3. Область определения функции

$$z = \arcsin\frac{y}{x}$$

определяется неравенствами

$$|y| \le |x|, \qquad x \ne 0.$$

Пример 4. Областью определения функции

$$z = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{4 - y^2}$$

является прямоугольник:

$$|x| \le 1, \qquad |y| \le 2$$

Области, рассмотренные в Примерах 1-4, показаны схематически на Рис. 1.

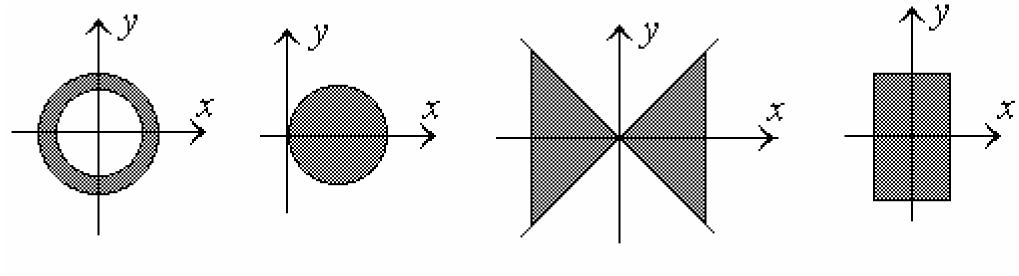


Рис. 1

2.2. Пределы

Напомним, что в случае функции одной переменной математическое утверждение

$$\lim_{x\to a} f(x) = A$$

означает, что значения функции $f(x)$ становятся сколь угодно близкими к числу A - по мере того, как расстояние между точками x и a стремится к нулю.

Предел функции нескольких независимых переменных имеет в точности такой же смысл, а само понятие предела функций нескольких переменных вводится совершенно аналогично тому, как это делается для функции одной переменной.

Пусть функция $f(P)$ (любого числа переменных) определена в некоторой окрестности точки P_0.

Тогда число A называется **пределом функции** $f(P)$ при $P \to P_0$, если для любого сколь угодно малого положительного числа ε существует такое число $\delta > 0$, что как только расстояние $\rho(P, P_0)$ между точками P и P_0 становится меньше δ, то выполняется неравенство

$$|f(P) - A| < \varepsilon .$$

Для обозначения предела наряду с привычной математической символикой типа

$$\lim_{P\to P_0} f(P) = A. \qquad (2)$$

используются и другие формы записи. Так, в случае функции двух переменных мы имеем дело с **двойным пределом**, что можно записать в виде

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x, y) = A. \qquad (3)$$

Можно выбрать конкретный порядок предельного перехода, например,

$$\lim_{x\to a}(\lim_{y\to b} f(x, y)) \qquad \text{или} \qquad \lim_{y\to b}(\lim_{x\to a} f(x, y)).$$

Пределы, представленные в таком виде, называются **повторными**. Необходимым и достаточным условием существования двойного предела (3) является равенство между собой повторных пределов:

$$\lim_{x\to a}\lim_{y\to b} f(x, y) = \lim_{y\to b}\lim_{x\to a} f(x, y). \qquad (4)$$

При этом двойной предел равен повторным:

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x, y) = \lim_{x\to a}\lim_{y\to b} f(x, y) = \lim_{y\to b}\lim_{x\to a} f(x, y).$$

Все свойства предела функции сохраняются при переходе от одной к нескольким переменным:

- Постоянный множитель можно выносить за знак предела:

$$\lim_{P\to P_0} cf(P) = c\lim_{P\to P_0} f(P). \qquad (5)$$

- Если существует каждый из пределов, $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)$ и $\lim\limits_{P\to P_0} g(P)$, то существуют и пределы суммы, произведения и частного от деления функций. При этом
  – предел суммы равен сумме пределов,

$$\lim_{P\to P_0}(f(P)\pm g(P)) = \lim_{P\to P_0} f(P) \pm \lim_{P\to P_0} g(P); \qquad (6)$$

  – предел произведения равен произведению пределов,

$$\lim_{P\to P_0} f(P)g(P) = \lim_{P\to P_0} f(P)\lim_{P\to P_0} g(P); \qquad (7)$$

  – предел частного от деления функций равен частному от деления пределов (при условии, что $\lim\limits_{P\to P_0} g(P)\neq 0$),

$$\lim_{P\to P_0}\frac{f(P)}{g(P)} = \frac{\lim\limits_{P\to P_0} f(P)}{\lim\limits_{P\to P_0} g(P)}. \qquad (8)$$

Пример. Вычислить предел функции $f(x,y)=\dfrac{\sin xy}{x(1+y)}$ при $(x,y)\to(0,3)$.

Решение: Проверим выполнение условия (4).
Фиксируем переменную y и устремим x к нулю:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin xy}{x(1+y)} = \frac{1}{(1+y)}\lim_{x\to 0}\frac{\sin xy}{x} = \frac{y}{(1+y)}.$$

Теперь пусть $y\to 3$:

$$\lim_{y\to 3}\frac{y}{(1+y)} = \frac{3}{4}.$$

Изменим порядок предельного перехода: сначала фиксируем переменную x и найдем предел при $y\to 3$, а затем устремим x к нулю:

$$\lim_{y\to 3}\frac{\sin xy}{x(1+y)} = \frac{\sin 3x}{4x} \qquad \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 3}\frac{\sin xy}{x(1+y)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{4x} = \frac{3}{4}.$$

Повторные пределы равны между собой. Следовательно,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 3}}\frac{\sin xy}{x(1+y)} = \frac{3}{4}.$$

Существуют, однако, и такие функции, которые не имеют пределов в некоторых точках.

Рассмотрим, например, предел функции $f(x) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ при $(x, y) \to (0{,}0)$.

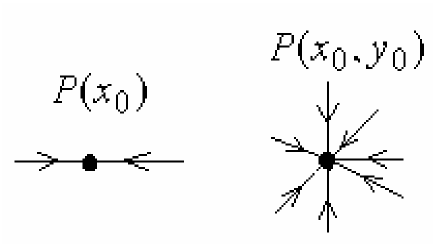
Фиксируем переменную x и устремим y к нулю:

$$\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0}\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}) = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2} = \lim_{x\to 0} 1 = 1.$$

Изменим порядок предельного перехода:

$$\lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0}\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}) = \lim_{y\to 0}\frac{-y^2}{y^2} = \lim_{y\to 0}(-1) = -1.$$

Повторные пределы не совпадают друг с другом. Следовательно, функция $f(x) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ не имеет предела в точке $(0{,}0)$.



Уместно напомнить, что и в случае функции одной переменной необходимым и достаточным условием существования предела является равенство между собой левостороннего и правостороннего пределов. В этом смысле вышеприведенный пример не содержит каких-либо принципиально новых моментов. Единственным отличием является то обстоятельство, что в случае функции нескольких переменных существует не два, а бесконечное число способов приближения к предельной точке.

2.3. Непрерывность

Понятие непрерывности функции не нуждается в каких-либо модификациях при переходе от одной переменной к нескольким.

Функция $f(P)$ называется **непрерывной в точке** P_0, если

$$\lim_{P\to P_0} f(P) = f(P_0).$$

Функция $f(P)$ называется **непрерывной на** некотором **множестве**, если она непрерывна в каждой точке этого множестве. Если же в какой-то точке непрерывность нарушается, то говорят, что функция имеет **разрыв** в этой точке, а сама точка при этом называется **точкой разрыва**.

Точки разрыва могут образовывать **линии разрыва**, а также **поверхности разрыва**.

Примеры:

- Функция $z = \operatorname{tg} xy$ не определена на кривых $xy = (2k+1)\pi/2$, где k – любое целое число. Эти кривые представляют собой гиперболы и являются линиями разрыва.
- Функция $u = \dfrac{x - z^2}{2x + y - 3x}$ не определена во всех точках плоскости $2x + y - 3z = 0$. Следовательно, эта плоскость является плоскостью разрыва.

Все свойства непрерывности функций сохраняются при переходе от одной переменной к любому их числу.

- 🕮 Как сумма, так и произведение любого конечного числа непрерывных функций есть непрерывная функция.
- 🕮 Частное от деления непрерывных функций есть непрерывная функция (при условии, что знаменатель отличен от нуля).
- 🕮 Любая элементарная функция являются непрерывной в области своего определения.

2.4. Частные производные

Производная функции одной переменной определяется как предел отношения приращения $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$ функции к приращению Δx аргумента при $\Delta x \to 0$:

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Частные производные функции нескольких переменных определяются аналогичным образом.

Из соображений удобства рассмотрим функцию двух независимых переменных.

Частная производная функции $u = f(x, y)$ по переменной x обозначается символом $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ и представляет собой предел вида

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}. \qquad (9)$$

Частная производная функции $z = f(x, y)$ по переменной y представляет собой аналогичный предел:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}. \qquad (10)$$

Используются и более короткие обозначения для частных производных:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = f'_x = u'_x, \qquad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = f'_y = u'_y.$$

Частные производные обладают теми же свойствами, что и обычные производные. Все правила дифференцирования так же остаются неизменными. Следует только иметь в виду, что при вычислении частной производной по какой либо из переменных все остальные переменные фиксируются и рассматриваются как константы.

Пример. Найти частные производные функции $f(x,y)$ по переменным x и y, если

$$f(x,y) = x^2y^3 + 5\sin x - e^{\sqrt{y}}.$$

Решение.

$$f'_x = 2xy^3 + 5\cos x, \qquad f'_y = 3x^2y^2 - e^{\sqrt{y}}\frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

Частные производные высших порядков вводятся таким же образом, что и обычные производные высших порядков:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Другие обозначения частных производных высших порядков:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{x^2}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{y^2}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{xy}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{yx},$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = f'''_{x^3}, \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = f'''_{xy^2}, \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = f'''_{xyx} \qquad \text{и т.д.}$$

Частные производные типа f''_{xy}, f''_{yx}, f'''_{xy^2} и т.д. называются **смешанными производными**.

Существует теорема, согласно которой **смешанные производные не зависят от порядка дифференцирования** при условии, что частные производные являются непрерывными функциями. В дальнейшем, если не оговорено противное, мы будем иметь дело с функциями, удовлетворяющими этому условию. В этом случае нет необходимости следить за порядком дифференцирования:

$$u''_{xy} = u''_{yx},$$

$$u'''_{x^2y} = u'''_{xyx} = u'''_{yx^2} \quad \text{и т.д.}$$

2.5. Полные дифференциалы

Рассмотрим, для начала, дифференциал функции $u = f(x,y)$ двух независимых переменных.

Дифференциалами независимых переменных называются приращения аргументов:

$$dx = \Delta x, \qquad dy = \Delta y .$$

Полный дифференциал функции $u = f(x,y)$ определяется соотношением

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy . \qquad (11)$$

Обобщение на общий случай функции n независимых переменных вполне очевидно:

$$du = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_k}dx_k = \frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}dx_2 + ... + \frac{\partial u}{\partial x_n}dx_n . \qquad (12)$$

Свойства дифференциалов не зависят от числа аргументов функций:

$$d(cu) = cdu$$

$$d(u \pm v) = du \pm dv ,$$

$$d(u \cdot v) = udv + vdu ,$$

$$d(\frac{u}{v}) = \frac{udv - vdu}{v^2} .$$

Теорема о полном дифференциале: Пусть функции $A(x,y)$ и $B(x,y)$ имеют непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Тогда выражение вида

$$A(x,y)dx + B(x,y)dy$$

является полным дифференциалом некоторой функции $u = f(x,y)$, если

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x} . \qquad (13)$$

Доказательство: Предположим, что

$$du = A(x,y)dx + B(x,y)dy .$$

Тогда из определения (11) следует, что

$$A(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \text{и} \qquad B(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y} .$$

Следовательно,

$$\frac{\partial A(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \qquad \text{и} \qquad \frac{\partial B(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} .$$

Равенство друг другу смешанных производных u''_{xy} и u''_{yx} (в силу их непрерывности) влечет за собой и доказываемое равенство $A'_y = B'_x$.

Отметим, что можно доказать и более сильное утверждение: равенство (13) является не только необходимым, но и достаточным условием того, что выражение $A(x,y)dx+B(x,y)dy$ представляет собой полный дифференциал некоторой функции.

2.6. Дифференциалы высших порядков

Пусть x и y – независимые переменные. Введем следующие обозначения:

$$dx^2=(dx)^2, \qquad dy^2=(dy)^2, \ldots \quad , \quad dx^n=(dx)^n, \qquad dy^n=(dy)^n.$$

Вторым дифференциалом функции называется дифференциал первого дифференциала; третьим дифференциалом – дифференциал второго дифференциала, и т.д.:

$$d^2u=d(du), \qquad d^3u=d(d^2u), \ldots, \; d^nu=d(d^{n-1}u).$$

Если $u=f(x,y)$, то

$$\begin{aligned} d^2u &= d(\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy)=d(\frac{\partial u}{\partial x}dx)+d(\frac{\partial u}{\partial y}dy) \\ &=(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}dx^2+\frac{\partial^2u}{\partial y\partial x}dydx)+(\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}dy^2) \qquad (14) \\ &=\frac{\partial^2u}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}dy^2 \end{aligned}$$

(При выводе этой формулы было использовано равенство смешанных производных).

Равенство (14) имеет ту же структуру, что и формула для квадрата суммы. Это не случайно – формула для третьего дифференциала по структуре совпадает с формулой для куба суммы и т.д. Существует простой – чисто формальный – способ получения n-го дифференциала функции, идею которого мы продемонстрируем на примере функции двух переменных.

Преобразуем формулу (14), выполнив формальные действия:

$$\begin{aligned} d^2u &= (dx)^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+2dxdy\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}+(dy)^2\frac{\partial^2u}{\partial y^2} \\ &=((dx)^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2dxdy\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+(dy)^2\frac{\partial^2}{\partial y^2})u \\ &=(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y})^2u \end{aligned}$$

Сами по себе выражения $\dfrac{\partial}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial}{\partial x}$ лишены смысла – как, например, *sin* без аргумента. Они представляют собой некие операторы, то есть команды. Как только справа от $\frac{\partial}{\partial x}$ окажется функция u, то оператор $\frac{\partial}{\partial x}$ превратит ее в производную $\frac{\partial u}{\partial x}$.

Аналогично выглядит n-ый дифференциал функции:

$$d^n u = (dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y})^n u\,. \tag{15}$$

Чтобы перейти от символической записи (15) к стандартной, нужно:

- сначала возвести выражение в скобках в n-ую степень;
- затем раскрыть скобки и вернуть символ u на положенное место – справа от операторов;
- все показатели степени интерпретировать как порядки производных и дифференциалов.

Пример. Найти третий дифференциал функции двух переменных.

Решение.
Первый шаг:

$$d^3 u = (dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y})^3 u\,.$$

Второй шаг:

$$d^3 u = (dx^3\frac{\partial^3}{\partial x^3} + 3dx^2\,dy\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y} + 3dx\,dy^2\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2} + dy^3\frac{\partial^3}{\partial y^3})u\,.$$

Заключительный этап:

$$d^3 u = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}dx^2\,dy + 3\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}dx\,dy^2 + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}dy^3\,.$$

2.7. Дифференцирование сложных функций

Пусть $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ – дифференцируемая функция, аргументы которой в свою очередь являются дифференцируемыми функциями переменной t:

$$x_1 = x_1(t), \qquad x_2 = x_2(t), \qquad \ldots, \qquad x_n = x_n(t)\,.$$

Тогда полная производная функции u вычисляется по формуле

$$\frac{du}{dt} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{dx_k}{dt}\,. \tag{16}$$

Если функция u имеет вид $u = f(x_1, x_2, ..., x_n, t)$, т.е. явным образом зависит от переменной t, то

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{dx_k}{dt}\,. \tag{17}$$

Пример 1. Пусть $u = f(x, y, t)$, где $x = x(t)$ и $y = y(t)$.
Тогда

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt}. \qquad (18)$$

Пример 2. Найти $\dfrac{du}{dt}$, если $u = e^{5x} y^3$, где $x = \sin t$ и $y = t^2$.

Решение.

$$\frac{du}{dt} = 5e^{5x}\cos t \cdot y^3 + e^{5x} 3y^2 2t = 5e^{5\sin t}\cos t \cdot t^6 + 6e^{5\sin t} t^5.$$

Пусть теперь аргументы дифференцируемой функции $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ являются дифференцируемыми функциями двух переменных p и t:

$$x_1 = x_1(p, t), \qquad x_2 = x_2(p, t), \qquad \ldots, \qquad x_n = x_n(p, t).$$

Тогда частные производные функции u вычисляется по формулам

$$\frac{\partial u}{\partial p} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial p} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial p} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial p} + ... + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial p},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t} + ... + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t}.$$

2.8. Дифференцирование неявных функций

1) Пусть функция $y = y(x)$ задана в неявном виде:

$$F(x, y) = 0. \qquad (19)$$

Вычислим полный дифференциал от обеих частей этого равенства:

$$dF \equiv \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$$

Выразим производную функции y по переменной x через частные производные функции $F(x, y)$:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}. \qquad (20)$$

2) Пусть функция $z = z(x, y)$ двух переменных задана в неявном виде:

$$F(x, y, z) = 0.$$

Очевидно, что $dF = 0$. Учитывая определение дифференциала, мы получаем

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz = 0. \qquad (21)$$

Чтобы найти, например, частную производную $\frac{\partial z}{\partial x}$, нужно разделить обе части этого равенства на dx и фиксировать переменную y; при этом $dy = 0$ и $\frac{dz}{dx} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}$:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

Следовательно,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} \qquad (22a)$$

Аналогично вычисляются и другие частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}, \qquad \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_y}, \qquad \frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{F'_z}{F'_y}, \quad \text{и т.д.} \qquad (22b)$$

Пример. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если

$$xy^2z^3 + \sqrt{z}\ln x - y/z = 0.$$

Решение. Здесь $F(x, y, z) = xy^2z^3 + \sqrt{z}\ln x - y/z$. Тогда

$$F'_x = y^2z^3 + \sqrt{z}/x, \qquad F'_y = 2xyz^3 - 1/z,$$

$$F'_z = 3xy^2z^2 + \ln x/(2\sqrt{z}) + y/z^2.$$

Теперь воспользуемся формулами (22):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{y^2z^3 + \sqrt{z}/x}{3xy^2z^2 + \ln x/(2\sqrt{z}) + y/z^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{2xyz^3 - 1/z}{3xy^2z^2 + \ln x/(2\sqrt{z}) + y/z^2}.$$

2.9. Геометрическая интерпретация частных производных

Пусть задана функция двух переменных:

$$z = f(x, y). \qquad (23)$$

Будем интерпретировать это уравнение как уравнение поверхности и перепишем его в неявном виде:

$$F(x, y, z) = 0, \qquad (24)$$

где

$$F(x, y, z) = f(x, y) - z.$$

Предположим, что поверхность достаточно гладкая в окрестности точки $P_0(x_0, y_0, z_0)$, так что в этой точке существуют частные производные функции $F(x, y, z)$.

Касательные линии в точке P_0 поверхности образуют касательную плоскость, уравнение которой можно представить в виде

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0, \qquad (25)$$

где A, B, C - координаты нормального вектора к поверхности в точке P_0.

Касательную плоскость можно рассматривать как предельное положение секущей плоскости, проходящей через точки $P(x, y, z)$ и $P_0(x_0, y_0, z_0)$ при $P \to P_0$, т.е. при

$$\Delta x = x - x_0 \to 0, \qquad \Delta y = y - y_0 \to 0, \qquad \Delta z = z - z_0 \to 0.$$

Соответственно, вектор $\Delta \vec{r} = \{\Delta x, \Delta y, \Delta z\}$ стремится к вектору $d\vec{r} = \{dx, dy, dz\}$, параллельному касательной плоскости.

Функция F удовлетворяет уравнению (24). Тогда ее дифференциал в любой точке поверхности (а значит и в точке $P_0(x_0, y_0, z_0)$) равен нулю:

$$\frac{\partial F(x_0, y_{0,} z_0)}{\partial x} dx + \frac{\partial F(x_0, y_{0,} z_0)}{\partial y} dy + \frac{\partial F(x_0, y_{0,} z_0)}{\partial z} dz = 0. \qquad (26)$$

Выражение в левой части можно рассматривать как скалярное произведение векторов $\vec{N} = \{F'_x(P_0), F'_y(P_0), F'_z(P_0)\}$ и $d\vec{r} = \{dx, dy, dz\}$:

$$\vec{N} \cdot d\vec{r} = 0.$$

Это уравнение выражает ортогональность векторов $\vec{N}$ и $d\vec{r}$: $\vec{N} \perp d\vec{r}$.

Поскольку вектор $d\vec{r}$ представляет собой предельное положение вектора $\Delta \vec{r}$, проведенного из точки P_0 в точку P, а точка P является произвольной точкой поверхности, то вектор $d\vec{r}$ является произвольно ориентированным вектором касательной плоскости.

Следовательно, вектор $\vec{N}$ перпендикулярен касательной плоскости в точке P_0. Это означает, что частные производные функции F в точке P_0 являются координатами нормального вектора к поверхности в этой точке:

$$A = \frac{\partial F(x_0, y_{0,} z_0)}{\partial x}, \qquad B = \frac{\partial F(x_0, y_{0,} z_0)}{\partial y}, \qquad C = \frac{\partial F(x_0, y_{0,} z_0)}{\partial z}.$$

Таким образом, уравнение касательной плоскости к поверхности $F(x, y, z) = 0$ в точке P_0 имеет следующий вид:

$$F'_x(P_0)(x-x_0)+F'_y(P_0)(y-y_0)+F'_z(P_0)(z-z_0)=0. \qquad (27)$$

Каноническое уравнение прямой, проходящей через точку P_0 параллельно направляющему вектору $\vec{q}$, описывается уравнением

$$\frac{x-x_0}{q_x}=\frac{y-y_0}{q_y}=\frac{z-z_0}{q_z}.$$

Нормаль $\vec{N}$ к поверхности одновременно является направляющим вектором $\vec{q}$ прямой, проходящей через точку P_0 перпендикулярно к поверхности $F(x,y,z)=0$. Следовательно, уравнение такой прямой имеет вид

$$\frac{x-x_0}{F'_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(x_0,y_0,z_0)}. \qquad (28)$$

Если поверхность задана в явном виде, например, уравнением $z=f(x,y)$, то

$$F(x,y,z)=z-f(x,y)$$

и, следовательно,

$$F'_x=f'_x, \qquad F'_y=f'_y \qquad \text{и} \qquad F'_z=-1. \qquad (29)$$

Пример. Составить уравнение касательной плоскости к поверхности параболоида вращения $z=x^2+y^2$ в точке $P_0(\text{-}4,3,25)$.

Решение. Найдем частные производные функция

$$F(x,y,z)=x^2+y^2-z$$

в заданной точке:

$$F'_x(P)=2x \qquad \Rightarrow \qquad F'_x(P_0)=-8,$$

$$F'_y(P)=2y \qquad \Rightarrow \qquad F'_y(P_0)=6,$$

$$F'_z(P)=-1 \qquad \Rightarrow \qquad F'_x(P_0)=-1,$$

Теперь нужно просто подставить найденные значения в уравнение касательной плоскости (27):

$$-8(x+4)+6(y-3)-(z-25)=0 \qquad \Rightarrow$$

$$8x-6y+z+25=0.$$

2.10. Формула Тейлора для функций нескольких переменных

Формула Тейлора, записанная в терминах дифференциалов, не меняет свой вид при переходе от функции одной переменной к функции нескольких переменных (см. стр. 8, раздел 2.1, формула (8)):

$$f(P)-f(P_0)=df(P_0)+\frac{d^2f(P_0)}{2!}+\frac{d^3f(P_0)}{3!}+\ldots+\frac{d^nf(P_0)}{n!}+R_n(P). \qquad (30)$$

Для дифференциалов можно воспользоваться символической записью. Тогда в случае функции двух переменных:

$$\Delta f = f(x,y) - f(x_0,y_0),$$

$$\Delta f = \sum_{k=1}^{n}((x-x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y-y_0)\frac{\partial}{\partial y})^n f(x_0,y_0) + R_n(x,y).$$

Для функции трех переменных:

$$\Delta f = f(x,y,z) - f(x_0,y_0,z_0),$$

$$\Delta f = \sum_{k=1}^{n}((x-x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y-y_0)\frac{\partial}{\partial y} + (z-z_0)\frac{\partial}{\partial z})^n f(x_0,y_0,z_0) + R_n(x,y,z).$$

Формула Тейлора принимает еще более громоздкий вид, если расписать дифференциалы.

Так, даже в случае функции двух переменных и с учетом лишь второго дифференциала мы имеем

$$\begin{aligned}\Delta f &= f'_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)\\ &+\frac{1}{2}(f''_{x^2}(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)^2 + 2f''_{xy}(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)(y-y_0)\\ &+ f''_{y^2}(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)^2) + \ldots\end{aligned}$$

2.11. Экстремумы функций двух переменных

Определения максимума, минимума и экстремума функции нескольких переменных в точности такие же, что и в случае функции одной переменной.

Для примера приведем пару таких определений.

Функция $f(P)$ имеет **максимум** в точке P_0, если $f(P) \le f(P_0)$ для всех P в некоторой окрестности точки P_0.

Каждая из точек, в которых функция достигает максимума или минимума, называются **точкой экстремума**.

В общем виде проблема нахождения экстремумов некоторой дифференцируемой функции решается с помощью формулы Тейлора (30).

Идея решения достаточно проста: точка P_0 является точкой экстремума, если и только если знак разности $\Delta f(P_0) = f(P) - f(P_0)$ сохраняется в некоторой окрестности этой точки.

Ограничимся для простоты случаем функции двух переменных.

Пусть функция $z = f(x,y)$ определена и дифференцируема в окрестности точки P_0. В первом приближении

$$\Delta f(P_0) \approx df(P_0) = f'_x(P_0)dx + f'_y(P_0)dy.$$

Если производные $f'_x(P_0)$ и $f'_y(P_0)$ – или хотя бы одна из них – отличны от нуля, то знак приращения $\Delta f(P_0)$ будет зависеть от знаков приращения dx и dy.

Таким образом, в точках экстремума частные производные функции $f(P)$ равны нулю (или не существуют). Это **необходимое условие экстремума**.

Для нахождения критических точек нужно решить систему уравнений:

$$\begin{cases} f'_x(x,y)=0 \\ f'_y(x,y)=0 \end{cases} \qquad (32)$$

(Отметим, что касательная плоскость в критических точках проходит параллельно плоскости xOy).

Поскольку в критической точке P_0 первый дифференциал функции $f(P)$ обращается в нуль, то необходимо учесть следующий член в формуле Тейлора:

$$\Delta f(P_0) \approx \frac{d^2 f(P_0)}{2!} = \frac{1}{2}(f''_{x^2}dx^2 + 2f''_{xy}dxdy + f''_{y^2}dy^2).$$

Сформулируем **достаточные условия экстремума**.

- Функция имеет минимум в критической точке, если второй дифференциал в этой точке положителен.
- Функция имеет максимум в критической точке, если второй дифференциал в этой точке отрицателен.

Существует простое правило, позволяющее установить знак второго дифференциала и, тем самым, установить - является ли критическая точка P_0 точкой экстремума.

Правило: Пусть частные производные второго порядка f''_{x^2}, f''_{xy}, f''_{yx} и f''_{y^2}, вычисленные в критической точке P_0, является элементами определителя:

$$D = \begin{vmatrix} f''_{x^2}(P_0) & f''_{xy}(P_0) \\ f''_{yx}(P_0) & f''_{y^2}(P_0) \end{vmatrix} \qquad (33)$$

Тогда:

- Если $D>0$ и $f''_{x^2}(P_0)>0$, то P_0 является точкой минимума.
- Если $D>0$ и $f''_{x^2}(P_0)<0$, то P_0 является точкой максимума.
- Если $D<0$, то функция $f(x,y)$ имеет в P_0 седловую точку.
- Если $D=0$, то вопрос об экстремуме остается открытым.

3. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

3.1. Первообразные

Понятие неопределенного интеграла тесно связано с понятием первообразной, нахождение которой представляет собой операцию обратную дифференцированию. Это означает, что по известному результату дифференцирования нужно восстановить исходную функцию, т.е. исходные данные и ответ меняются ролями.

Функция $F(x)$ называется **первообразной** функции $f(x)$ в области D, если

$$F'(x) = f(x) \qquad (1)$$

для всех $x \in D$.

Первообразная это функция, производная от которой равна данной функции.

Пример 1. Функция $f(x)$ является первообразной для $f'(x)$.

Пример 2. Функция $\ln(1+x^2)$ является первообразной функции $\dfrac{2x}{1+x^2}$, т.к.

$$(\ln(1+x^2))' = \frac{1}{1+x^2} \cdot (1+x^2)' = \frac{2x}{1+x^2} \qquad \text{для всех } x \in D.$$

Если к первообразной $F(x)$ функции $f(x)$ прибавить произвольную константу C, то полученная функция $F(x)+C$ также является первообразной, поскольку $(F(x)+C)' = f(x)$. Справедливо и более сильное утверждение.

Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ – первообразные функции для f, то они отличаются друг от друга не более чем на постоянное слагаемое: $F_1(x) = F_2(x) + C$.

Действительно, если $F_1'(x) = F_2'(x) = f(x)$, то

$$(F_1 - F_2)' = F_1' - F_2' = 0 \qquad \text{для всех } x \in D.$$

Следовательно, разность $F_1 - F_2$ равна константе.

Таким образом, если известна одна первообразная $F(x)$ функции f, то известны все ее первообразные, совокупность которых может быть представлена в виде $F(x)+C$, где C - произвольная константа.

Пример 3. Обе функции, $F_1 = (x+1)^2$ и $F_2 = x^2 + 2x - 4$, являются первообразными функции $f(x) = 2(x+1)$, поскольку

$$F_1' = 2(x+1) \qquad \text{и} \qquad F_2' = 2x + 2 = 2(x+1).$$

Легко проверить, что разность $F_1 - F_2$ равна константе 5.

3.2. Понятие неопределенного интеграла

Совокупность всех первообразных $F(x)$ функции $f(x)$ называется ее неопределенным интегралом.

Неопределенный интеграл от функции $f(x)$ обозначается символом $\int f(x)dx$, который читается так: "Интеграл от $f(x)$ по переменной x".

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

если

$$F'(x) = f(x).$$

Сопутствующие термины:
$f(x)$ – подынтегральная функция;
$f(x)dx$ – подынтегральное выражение;
x – переменная интегрирования;
C – постоянная интегрирования.

3.3. Свойства интегралов

1. Дифференцирование – операция, обратная интегрированию:

$$\frac{d}{dx}\int f(x)dx = (\int f(x)dx)' = f(x).$$

Это свойство непосредственно следует из определения интеграла. Если его представить в виде

$$d\int f(x)dx = f(x)dx,$$

то можно заметить, что рядом стоящие символы d и $\int$ как бы взаимно уничтожают друг друга.

2. Интегрирование “компенсирует“ дифференцирование:

$$\int f'(x)dx = \int \frac{df(x)}{dx}dx = \int df(x) = f(x) + C.$$

Это свойство формально выражает вполне тривиальный результат: $f(x)$ является первообразной функции $f'(x)$. Обратите внимание на то, что символы $\int$ и d вновь следуют друг за другом, но в противоположном порядке; в этом случае их также можно совместно опустить, прибавив к оставшемуся результату постоянную интегрирования.

3. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int cf(x)dx = c\int f(x)dx.$$

Это свойство вытекает из аналогичного свойства производных. Для его доказательства достаточно показать, что функции, стоящие в левой и правой частях равенства, являются первообразными одной и той же функции:

$$(\int cf(x)dx)' = cf(x),$$

$$(c\int f(x)dx)' = c(\int f(x)dx)' = cf(x).$$

4. Интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме интегралов:

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

Доказательство этого свойства строится совершенно аналогично предыдущему и опирается на правило дифференцирования суммы:

$$(\int (f(x) \pm g(x))dx)' = f(x) \pm g(x),$$

$$(\int f(x)dx \pm \int g(x)dx)' = (\int f(x)dx)' \pm (\int g(x)dx)' = f(x) \pm g(x)$$

5. Пусть $\int f(x)dx = F(x) + \mathrm{C}$. Тогда для любой дифференцируемой функции $u = u(x)$,

$$\int f(u)du = F(u) + \mathrm{C}.$$

Это свойство основывается на инвариантности формы первого дифференциала, который сохраняет свою форму при замене аргумента x на сложную функцию $u = u(x)$:

$$dF(x) = F'(x)dx \qquad \Rightarrow \qquad dF(u) = F'(u)du.$$

Примеры.

- $\dfrac{d}{dx}\int \sin^3 3x dx = \sin^3 3x$ | Свойство 1 |
- $\dfrac{d}{dx}\int \ln\sqrt{x^2+1}dx = \ln\sqrt{x^2+1}$ | Свойство 1 |
- $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \int (\mathrm{tg}x)'dx = \mathrm{tg}x + C$ | Свойство 2 |
- $\int 3x^2 dx = \int (x^3)'dx = x^3 + C$ | Свойство 2 |
- $\int (\dfrac{2}{\cos^2 x} - 3)dx = 2\int \dfrac{1}{\cos^2 x}dx - 3\int dx$ $= 2\mathrm{tg}\, x - 3x + C$ | Свойства 3 и 4 |
- $\int \dfrac{\ln^4 x}{x}dx = \int \ln^4 x\, d(\ln x) = \dfrac{\ln^5 x}{5} + C$ | Свойство 5 |
- $\int \dfrac{\cos x}{\sin x}dx = \int \dfrac{d(\sin x)}{\sin x} = \ln|\sin x| + C$ | Свойство 5 |

3.4. Таблица интегралов

Для составления таблицы интегралов возьмем за основу таблицу производных. Начнем со степенной функции: $(x^k)' = kx^{k-1}$.
Заменим в этой формуле k на $(n+1)$:

$$(x^{n+1})' = (n+1)x^n .$$

Предположим, что $n \neq -1$ и разделим обе части равенства на $(n+1)$; затем внесем постоянный множитель под знак производной:

$$x^n = \frac{1}{n+1}(x^{n+1})' \quad \Rightarrow \quad x^n = (\frac{x^{n+1}}{n+1})' .$$

Производная от функции $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ равна x^n. Следовательно, $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ является первообразной для функции x^n:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C , \qquad n \neq -1 .$$

Аналогичным образом можно преобразовать оставшуюся часть таблицы производных в таблицу интегралов.

Таблица 1. Основные интегралы

№	Производные	Интегралы	Ограничения
1	$x^n = (\frac{x^{n+1}}{n+1})'$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$n \neq -1$
2	$\frac{1}{x} = (\ln x)'$	$\int \frac{dx}{x} = \ln \lvert x \rvert + C$	$x \neq 0$
3	$a^x = (\frac{a^x}{\ln a})'$ $e^x = (e^x)'$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ $\int e^x dx = e^x + C$	$a > 0$, $a \neq 1$
4	$\sin x = (-\cos x)'$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$	
5	$\cos x = (\sin x)'$	$\int \cos x dx = \sin x + C$	
6	$\frac{1}{\cos^2 x} = (\mathrm{tg} x)'$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + C$	$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$
7	$\frac{1}{\sin^2 x} = (-\mathrm{ctg} x)'$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x + C$	$x \neq \pi n$
8	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} (\arcsin x)' \\ (-\arccos x)' \end{cases}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{cases}$	$\lvert x \rvert \leq 1$
9	$\frac{1}{1+x^2} = \begin{cases} (\mathrm{arctg} x)' \\ (-\mathrm{arcctg} x)' \end{cases}$	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \mathrm{arctg} x + C \\ -\mathrm{arcctg} x + C \end{cases}$	

Комментарии к # 2:

Если $x > 0$, то $\ln|x| = \ln x$ и $(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}$.

Если $x < 0$, то $\ln|x| = \ln(-x)$ и $(\ln|x|)' = (\ln(-x))' = \dfrac{1}{-x}(-1) = \dfrac{1}{x}$.

Таким образом, $\ln|x|$ является первообразной функции $\dfrac{1}{x}$ при любых $x \neq 0$.

Комментарии к # 1-9: Если a и b – константы, то $d(ax+b) = a\,dx$. Следовательно,

$$\int f(x)dx = F(x) + C \qquad \Rightarrow \qquad \int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C. \qquad (2)$$

В частности,

$$\int (x+b)^n dx = \frac{(x+b)^{n+1}}{n+1} + C, \qquad (3)$$

$$\int \frac{dx}{x+b} = \ln|x+b| + C, \qquad (4)$$

$$\int \sin(ax+b)\,dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C. \qquad (5)$$

Следствие из # 8. Обе функции, $\arcsin x$ и $(-\arccos x)$, являются первообразными функции $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Следовательно, их разность равна константе:

$$\arcsin x - (-\arccos x) = \arcsin x + \arccos x = C.$$

Для определения константы C выберем $x = 0$:

$$C = \arcsin 0 + \arccos 0 = 0 + \pi/2 = \pi/2.$$

Таким образом,

$$\arcsin x + \arccos x = \pi/2.$$

Следствие из # 9: Аналогичным образом можно показать, что

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \pi/2.$$

Советы.

– Свойства интегралов и таблицу интегралов нужно выучить наизусть. Многократное использование формул приводит к автоматическому их запоминанию, а знание формул вырабатывает способность их понимания.

– Следует иметь в виду, что результат интегрирования одной и той же функции может быть представлен в различных формах. С помощью элементарных преобразований от одной формы записи легко перейти к другой.

3.5. Методы интегрирования

Чтобы продифференцировать функцию, достаточно следовать простым правилам. При этом структура функции практически несущественна – с точки зрения самой возможности получения результата. Совсем не так обстоит дело с интегрированием функций. Например, легко продифференцировать функцию $1/\ln x$, однако интеграл от $1/\ln x$ является неберущимся – в том смысле, что его нельзя выразить через какую-либо конечную комбинацию элементарных функций.

Не существует универсальных рецептов, пригодных для интегрирования любых функций. В каких то случаях достаточно выполнить простые преобразования подынтегрального выражения или же разложить рациональную дробь на сумму простых дробей, например,

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\int \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right)dx = \frac{1}{2a}\left(\int \frac{dx}{x-a} - \int \frac{dx}{x+a}\right)$$

$$= \frac{1}{2a}(\ln|x-a| - \ln|x+a|) + C = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$$

В более сложных случаях требуется использование иных приемов, характер которых определяется типом интегрируемой функции, так что на передний план выходит классификация интегралов по различного вида признакам.

Особенно важное значение имеют: (1) метод замены переменной (другое название которого – метод подстановки) и (2) метод интегрирования по частям. Конечной целью применения этих методов – за редкими исключениями – является сведение данного интеграла к табличному виду.

3.5.1. Метод замены переменной

Из соображений удобства подстановки можно подразделить на два типа: 1) $u = g(x)$, 2) $x = u(t)$.

В обоих случаях речь идет о замене переменной, а различие заключается только в технике реализации этой замены. Например, интегралы вида $\int f(g(x))g'(x)dx$ в результате подстановки $u = g(x)$ (и с учетом равенства $du = g'(x)dx$) преобразуются к более простому виду:

$$\int f\big(g(x)\big)g'(x)dx = \int f(u)du .$$

Подобный эффект достигается применением подстановки $x = u(t)$ – интегралы одного вида $\int f(x)dx$ преобразуется к другому:

$$\int f(x)dx = \int f\big(u(t)\big)\,u'(t)\,dt .$$

Возможно, что другой интеграл окажется проще исходного. Если же нет, то следует подумать о других подстановках или же применить другой метод интегрирования.

3.5.1.1. Занимательные и поучительные упражнения

Упражнения 1-3. Рассмотрим табличный интеграл $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$.

Заменив в обеих частях переменную x на функцию $\ln x$, мы получаем новый результат,

$$\int \ln^2 x\, d(\ln x) = \int \frac{\ln^2 x}{x} dx = \frac{\ln^3 x}{3} + C.$$

Аналогично проявляют себя другие замены:

$$x \to \sin x \qquad \Rightarrow \qquad \int \sin^2 x\, d(\sin x) = \int \sin^2 x \cos x\, dx = \frac{\sin^3 x}{3} + C,$$

$$x \to \operatorname{arctg} x \qquad \Rightarrow \qquad \int \operatorname{arctg}^2 x\, d(\operatorname{arctg} x) = \int \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2} dx = \frac{\operatorname{arctg}^3 x}{3} + C.$$

Упражнения 4-6. Подобные манипуляции можно проделывать и с другими интегралами. Пусть, например, исходным интегралом является $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$. Тогда

$$x \to \ln x \qquad \Rightarrow \qquad \int \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \int \frac{dx}{x \ln x} = \ln|\ln x| + C,$$

$$x \to \sin x \qquad \Rightarrow \qquad \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = \int \frac{\cos x dx}{\sin x} = \int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C,$$

$$x \to \arcsin x \qquad \Rightarrow \qquad \int \frac{d(\arcsin x)}{\arcsin x} = \int \frac{dx}{\arcsin x \sqrt{1-x^2}} = \ln|\arcsin x| + C.$$

Взяв за основу простые интегралы (с известными ответами) и преобразовав их в “сложные”, мы окольным путем вычислили эти “сложные” интегралы.

Можно интерпретировать наши действия и как составление задач на интегрирование – тем более что в реальности это примерно так и происходит. Нам осталось только воспользоваться какой-нибудь фразой типа “Вычислить методом замены переменной следующие интегралы”, сами же интегралы у нас уже имеются: $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$, $\int \sin^2 x \cos x\, dx$, и т.д.

Подобный подход к составлению задач обладает целым рядом достоинств:

1) Ответ известен заранее.
2) Алгоритм решения проблемы известен заранее.
3) Простота искомого результата гарантирована.

Если продолжить игру в “занимательные упражнения”, то можно обнаружить, что добрая половина задач (в сборниках задач и упражнений) составлена именно по этому принципу.

Совет: Начните изучение методов интегрирования с составления задач.
Во-первых, это проще, чем решать задачи, предложенные другими составителями.
Во-вторых, процедура решения задач представляет собой цепочку обратных преобразований и рассуждений, в которой “вход” и “выход” меняются местами.
В третьих, умение составлять задачи формирует навыки их решения.

Упражнение 7. Сопоставим схему “От простого известного интеграла к сложному с известным ответом” с реальной процедурой решения задач. В качестве конкретного примера возьмем одно из упражнений,

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C \qquad \Rightarrow \qquad \int \frac{\ln^2 x}{x} dx = \frac{\ln^3 x}{3} + C\,,$$

где переход от одной формулы к другой осуществляется в результате цепочки преобразований, завершающихся логическим заключением. Формальная схема выглядит так:

1. $\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 \quad \overset{\text{Свойство5}}{\Rightarrow} \quad \int \ln^2 x\, d(\ln x) = \frac{1}{3}\ln^3 x$

2. $\int \ln^2 x\, d(\ln x) \quad \cup \quad \left\{ d(\ln x) = \frac{dx}{x} \right\} \quad \Rightarrow \quad \int \ln^2 x d(\ln x) = \int \frac{\ln^2 x}{x} dx$

3. $\int \ln^2 x\, d(\ln x) = \frac{1}{3}\ln^3 x \;\cup\; \int \ln^2 x d(\ln x) = \int \frac{\ln^2 x}{x} dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{\ln^2 x}{x} dx = \frac{1}{3}\ln^3 x$

Роль исходной посылки выполняет утверждение $\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3$, которое в соответствии со Свойством 5 может быть представлено в виде другого утверждения,

$$\int \ln^2 x\, d(\ln x) = \frac{1}{3}\ln^3 x\,. \qquad (6)$$

Затем в цепь логических рассуждений включается промежуточное звено “$d(\ln x) = \frac{dx}{x}$”, что позволяет сделать следующий шаг на пути преобразований исходного утверждения:

$$\int \ln^2 x d(\ln x) = \int \frac{\ln^2 x}{x} dx\,. \qquad (7)$$

Наконец, сравнение друг с другом равенств (6) и (7) приводит к логическому заключению

$$\int \frac{\ln^2 x}{x} dx = \frac{1}{3}\ln^3 x\,. \qquad (8)$$

Рассмотрим теперь в формализованном виде алгоритм вычисления интеграла $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$, который на первый взгляд представляется сложным, поскольку переменная интегрирования находится везде, где это только возможно: и под знаком логарифма, и в знаменателе дроби, и под знаком дифференциала.

1.	$\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$	$\cup$ $\left\{ \frac{dx}{x} = d(\ln x) \right\}$	$\Rightarrow$	$\int \frac{\ln^2 x}{x} dx = \int \ln^2 x d(\ln x)$
2.	$\int \ln^2 x\, d(\ln x)$	$\cup$ $z = \ln x$	$\Rightarrow$	$\int \ln^2 x\, d(\ln x) = \int z^2\, dz$
2.	$\int z^2 dz = \frac{1}{3} z^3$		$\Rightarrow$	$\int \ln^2 x\, d(\ln x) = \frac{1}{3} z^3 = \frac{1}{3} \ln^3 x$
3.	$\int \frac{\ln^2 x}{x} dx = \int \ln^2 x d(\ln x)$	$\cup$ $\int \ln^2 x\, d(\ln x) = \frac{1}{3} \ln^3 x$	$\Rightarrow$	$\int \frac{\ln^2 x}{x} dx = \frac{1}{3} \ln^3 x$

Здесь уже на первом этапе рассуждений используется решение вспомогательной проблемы, связанной с интегрированием, а именно: $\frac{dx}{x} = d(\ln x)$ потому, что $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$. В результате исходный интеграл представлен в таком виде, что переменная интегрирования входит только под знак логарифма: $\int \ln^2 x\, d(\ln x)$. Это обстоятельство сразу же указывает на заведомо хорошую подстановку $z = \ln x$, посредством которой интеграл приводится к табличному виду $\int z^2 dz$, что и решает проблему интегрирования.

Почему решение оказалось таким простым и гладким? Просто потому, что один из сомножителей подынтегральной функции $\ln^2 x \cdot \frac{1}{x}$ содержит только $\ln x$, а оставшийся множитель представляет собой производную от этого самого логарифма. Тем самым зависимость подынтегральной функции от x осуществляется через посредство $\ln x$, который играет роль новой переменной. Стоит только нарушить такую гармонию, изменив подынтегральную функцию соответствующим образом, и интеграл почти наверняка превратится в неберущийся.

Проанализируем под таким углом зрения некоторые из составленных задач.

Упражнение 8. Вычислить интеграл $\int \sin^2 x \cos x\, dx$.

Решение. Очевидно, что $\cos x = (\sin x)'$ и, следовательно, $\sin x$ следует взять за новую переменную:

$$\int \sin^2 x \cos x\, dx = \int \sin^2 x (\sin x)' dx = \int z^2\, dz = \frac{1}{3} z^3 + C .$$

Осталось сделать обратную замену $z = \sin x$ и записать ответ:

$$\int \sin^2 x \cos x \, dx = \frac{1}{3} \sin^3 x + C. \qquad (9)$$

Упражнение 9. Вычислить интеграл $\int \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2} dx$.

Решение. Здесь $\frac{1}{1+x^2} = (\operatorname{arctg} x)'$, что однозначно указывает на подстановку $z = \operatorname{arctg} x$.

Тогда

$$\int \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2} dx = \int z^2 \, dz = \frac{1}{3} z^3 + C = \frac{1}{3} \operatorname{arctg}^3 x + C. \qquad (10)$$

Многие задачи переходят из разряда “трудных” в категорию “элементарных” после одного или двух вынужденных шагов. В качестве еще одного примера проанализируем интеграл $\int \frac{dx}{\arcsin x \sqrt{1-x^2}}$, под знаком которого содержится обратная тригонометрическая функция и, одновременно, иррациональное выражение. В подобных случаях, как правило, возможны всего два варианта: либо интеграл вычисляется элементарно, либо является не берущимся. Среди табличных интегралов нет ни одного, содержащего арксинус (к тому же еще и в знаменателе). Уже этого обстоятельства достаточно для того, чтобы испытать подстановку $\arcsin x = z$, которая влечет $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = dz$ и, следовательно,

$$\int \frac{dx}{\arcsin x \sqrt{1-x^2}} = \int \frac{dz}{z}.$$

Подстановка была вынужденной, но оказалась удачной: интеграл приведен к табличному виду. Все оказалось внутренне согласованным – нужный радикал в нужном месте в комбинации с нужной функцией. Достаточно, например, заменить единицу под знаком корня на любое другое число или же изменить степень корня, чтобы превратить интеграл в не берущийся. Так, любой из нижеприведенных интегралов является не берущимся:

$$\int \frac{dx}{\arcsin x \sqrt{3-x^2}}, \qquad \int \frac{dx}{\arcsin(2x) \sqrt{1-x^2}},$$

$$\int \frac{dx}{\arcsin x \sqrt{1-x^4}}, \qquad \int \frac{dx}{\arcsin x \sqrt{1-5x^2}},$$

$$\int \frac{dx}{\arcsin x \sqrt[3]{1-x^2}}, \qquad \int \frac{x \, dx}{\arcsin x \sqrt{1-x^2}}.$$

3.5.1.2. Обобщение таблицы интегралов

Метод подстановки позволяет провести обобщение таблицы интегралов. Рассмотрим, например, интеграл от степенной функции,

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad (n \neq -1).$$

Выполнив постановку $x = u(t)$, где $u(t)$ – некоторая дифференцируемая функция, мы получаем новый интеграл

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C,$$

который внешне совпадает с исходным, но отличается от него по своей сути, поскольку символ u представляет собой функцию переменной t и поэтому $du = u'dt$. Таким образом, для любой дифференцируемой функции $u(t)$ справедливо следующее обобщенное правило:

$$\int u^n(t)u'(t)dt = \frac{u^{n+1}(t)}{n+1} + C \qquad (n \neq -1).$$

Подобным же образом можно интерпретировать каждый табличный интеграл, заменяя переменную интегрирования на любую дифференцируемую функцию:

$$\int e^{u(x)}u'(x)dx = e^{u(x)} + C, \qquad \int \sin u(x)u'(x)dx = -\cos u(x) + C, \quad \text{и т.д.}$$

3.5.1.3. Примеры применения метода

Пример 1. Вычислить интеграл $\int \frac{(\operatorname{arctg} x)^4}{1+x^2}dx$.

Решение. Подстановка $z = \operatorname{arctg} x$ влечет $dz = \frac{dx}{1+x^2}$ и, следовательно,

$$\int \frac{(\operatorname{arctg} x)^4}{1+x^2}dx = \int z^4 dz = \frac{z^5}{5} + C.$$

Теперь нужно вернуться к исходной переменной, подставляя $z = \operatorname{arctg} x$:

$$\int \frac{(\operatorname{arctg} x)^4}{1+x^2}dx = \frac{(\operatorname{arctg} x)^5}{5} + C.$$

Пример 2.

$$\int \frac{dx}{(\operatorname{arctg} x)(1+x^2)}\bigg|_{z=\operatorname{arctg} x} = \int \frac{dz}{z}$$

$$= \ln|z| + C = \ln|\operatorname{arctg} x| + C.$$

Пример 3.

$$\int e^{(\operatorname{arctg} x)} \frac{dx}{1+x^2}\bigg|_{z=\operatorname{arctg} x} = \int e^z dz = e^z + C = e^{\operatorname{arctg} x} + C .$$

Легко убедиться в правильности полученных результатов. Для этого нужно продифференцировать первообразные и сравнить их с подынтегральными функциями. Проверим, например, справедливость последнего результата:

$$(e^{\operatorname{arctg} x})' = e^{\operatorname{arctg} x}(\operatorname{arctg} x)' = \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} .$$

Проверили и убедились: все нормально.

Пример 4. Интегралы $\int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$ и $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}$ легко приводится к табличному виду с помощью подстановки $u = \ln x$:

$$\int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx = \int \sin u du = -\cos u + C = -\cos(\ln x) + C ,$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}} = \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + C = \arcsin(\ln x) + C .$$

Примеры 5-9. Нижеприведенные интегралы внешне не очень похожи друг на друга. Однако каждый из них легко приводится к одному и тому же табличному виду

$$\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C$$

с помощью подходящей замены переменной.

Выражения под знаком косинуса более чем прозрачно намекают на вид подстановки $u = u(x)$, решающей проблему интегрирования в каждом конкретном случае.

5) $\int \frac{dx}{\cos^2(3x-4)} = \frac{1}{3}\operatorname{tg}(3x-4) + C$ ($u = 3x-4$, $du = 3dx$).

6) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\cos^2(\sqrt{x})} = 2\operatorname{tg}(\sqrt{x}) + C$ ($u = \sqrt{x}$, $du = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$).

7) $\int \frac{x^4 dx}{\cos^2(x^5)} = \frac{1}{5}\operatorname{tg}(x^5) + C$ ($u = x^5$, $du = 5x^4 dx$).

8) $\int \frac{dx}{x\cos^2(\ln x)} = \operatorname{tg}(\ln x) + C$ ($u = \ln x$, $du = \frac{dx}{x}$).

9) $\int \frac{e^x dx}{\cos^2(e^x)} = \operatorname{tg} e^x + C$ ($u = e^x$, $du = e^x dx$).

Примеры 10-13.

10) $$\int \sin^4 x \cos x\, dx \Big|_{\text{подстановка } \sin x = t} \Big| = \int t^4 dt = \frac{t^5}{5} + C = \frac{\sin^5 x}{5} + C.$$

11) $$\int e^{x^3} x^2 dx \Big|_{\text{подстановка } x^3 = t} \Big| = \frac{1}{3}\int e^t dt = \frac{1}{3} e^t + C = \frac{1}{3} e^{x^3} + C.$$

12) $$\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx \Big|_{\text{подстановка } \arcsin x = z} \Big| = \int z dz = \frac{z^2}{2} + C = \frac{\arcsin^2 x}{2} + C.$$

13) $$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx \Big|_{\text{подстановка } x = \sin t} \Big| = \int \frac{\cos t}{\sin^2 t} \cos t\, dt = \int \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t} dt$$

$$= \int \frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t} dt = \int \frac{1}{\sin^2 t} dt - \int dt$$

$$= -\operatorname{ctg} t - t + C = -\frac{\cos t}{\sin t} - t + C$$

$$= -\frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin t} - t + C = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \arcsin x + C.$$

В простых и очевидных ситуациях можно сразу записать результат, мысленно сделав замену переменной. Например,

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C,$$

$$\int \frac{x dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{dx^2}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C.$$

3.5.2. Некоторые важные интегралы

Рассмотрим некоторые часто встречающиеся интегралы, имея в виду поместить их в таблицу основных интегралов и в дальнейшем использовать полученные результаты при решении других задач.

Проблема 1. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{a^2+x^2}$.

Решение: Сделаем подстановку $x = at$.
Тогда

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{a^2+x^2} &= \int \frac{a dt}{a^2+a^2t^2} = \frac{a}{a^2}\int \frac{dt}{1+t^2} \\ &= \frac{1}{a}\arctan t + C = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C.\end{aligned} \tag{11}$$

Проблема 2. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

Решение: Подстановка $x = at$ сразу преобразует интеграл к табличному виду:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{adt}{\sqrt{a^2-a^2t^2}} = \int \frac{adx}{a\sqrt{1-t^2}} \\ = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + C = \arcsin \frac{x}{a} + C. \tag{12}$$

Проблема 3. Доказать справедливость формулы

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}) + C. \tag{13}$$

Доказательство: Покажем, что производная от $\ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2})$ равна подынтегральной функции.

$$(\ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}))' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 \pm a^2}}(1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2 \pm a^2}} 2x) \\ = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 \pm a^2}} \frac{\sqrt{x^2 \pm a^2} + x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}.$$

Показали.

3.5.3. Интегрирование по частям

Формула интегрирования по частям имеет вид

$$\int udv = uv - \int vdu \tag{14}$$

где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ - любые дифференцируемые функции.

Формула (14) позволяет свести одну проблему интегрирования к другой. Так, если можно вычислить один из интегралов, $\int udv$ или $\int vdu$, то можно вычислить и другой, выразив его через известный. В этом и заключается суть метода интегрирования по частям.

Вывод формулы интегрирования по частям достаточно прост:

$$d(uv) = udv + vdu \quad \Rightarrow \quad udv = d(uv) - vdu \quad \Rightarrow$$
$$\int udv = \int d(uv) - \int vdu \quad \Rightarrow \quad \int udv = uv - \int vdu.$$

Процедура интегрирования по частям состоит из двух этапов.

Во-первых, подынтегральную функцию $f(x)$ нужно представить в виде произведения некоторых функций $u(x)$ и $v'(x)$:

$$\int f(x)dx = \int u(x)v'(x)dx = \int u(x)dv(x).$$

Например, можно положить $u = f(x)$, что означает $dv = dx$, т.е. $v'(x) = 1$.

Во-вторых, чтобы найти du и $v(x)$, нужно продифференцировать $u(x)$ и проинтегрировать $v'(x)$:

$$du = u'(x)dx, \qquad v(x) = \int v'(x)dx.$$

(Заметим, что в выражении для $v(x)$ постоянную интегрирования можно положить равной нулю.)
Затем пытаемся вычислить интеграл в правой части формулы интегрирования по частям.

Самым сложным этапом метода интегрирования по частям является выбор функций $u(x)$ и $v'(x)$, поскольку не существует универсального правила, применимого во всех случаях. Понимание приходит только с опытом. Поэтому на первых порах сделайте какой-нибудь выбор и посмотрите – будет ли полученный интеграл проще исходного. Если нет, то сделайте другой выбор, перебирая различные варианты до тех пор, пока не будет найден наилучший. Обычно достаточно решить несколько примеров, чтобы научиться сразу делать правильный выбор. В качестве ориентиров можно использовать следующие простые **критерии**.
(A): Интеграл от v' должен вычисляться достаточно просто.
(B): Производная от $u(x)$ должна быть достаточно простой функцией (желательно, более простой, чем сама функция $u(x)$).

3.5.3.1. Занимательные упражнения

Повторим путь, пройденный при обсуждении метода замены переменной, а именно: изучение метода интегрирования по частям начнем с составления задач. Это дело – не хитрое. Выбирается достаточно простой известный интеграл $\int udv$ и интегрируется по частям. В результате возникает новый интеграл $\int vdu$, про который заранее известно все: и метод его вычисления, и ответ, и даже то, что ответ простой. Теперь можно предложить вычислить этот интеграл тому, кто неискушен в хитростях подобного рода.

Упражнение 1. Представим простейший интеграл $\int dx = x + C$ в виде

$$\int dx = \int x\frac{dx}{x} = \int xd(\ln x).$$

Интегрируем по частям, выбрав $u = x, \quad v = \ln x$:

$$\int xd(\ln x) = x\ln x - \int \ln xdx \qquad \Rightarrow \qquad \int \ln xdx = x\ln x - \int dx.$$

Таким образом,

$$\int \ln xdx = x\ln x - x + C. \qquad (15)$$

Замечание. Если обратить вычисления и применить процедуру интегрирования по частям непосредственно к интегралу $\int \ln x dx$, то нужно поменять ролями *u* и *v*, выбрав $u = \ln x, \quad v = x$.

Вернемся к выражению (15) и преобразуем его, применив Свойство 5, которое позволяет заменить переменную интегрирования произвольной дифференцируемой функцией. Выполнив подстановку $x = e^t$ и учитывая очевидные равенства

$$\ln e^t = t, \qquad de^t = e^t dt,$$

получаем новый результат,

$$\int te^t dt = te^t - e^t + C. \qquad (16)$$

Сборник задач пополнился интегралом $\int te^t dt$, который можно поместить в раздел "Интегрирование по частям" и посоветовать выбрать $u = t$ и $v = e^t$.

Упражнение 2. Проделаем аналогичные преобразования с интегралом $\int x dx = \dfrac{x^2}{2} + C$, выбрав на этапе интегрирования по частям $u = x^2, \quad v = \ln x$ (тем самым, $du = 2x dx$):

$$\int x dx = \int x^2 \frac{dx}{x} = \int x^2 d(\ln x) = x^2 \ln x - 2\int x \ln x dx \quad \Rightarrow$$

$$2\int x \ln x dx = x^2 \ln x - \int x dx.$$

Таким образом,

$$\int x \ln x dx = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C. \qquad (17)$$

Как и в предыдущем примере, процедуру интегрирования по частям можно применить непосредственно к интегралу $\int x \ln x dx$, поменяв ролями *u* и *v*. В таком случае $u = \ln x, \quad v = x^2$.

Выполнив в выражении (17) подстановку $x = e^t$, получаем (в качестве бесплатного приложения) еще одну готовую задачу с известным ответом:

$$\int te^{2t} dt = \frac{1}{2} te^{2t} - \frac{1}{4} e^{2t} + C. \qquad (18)$$

Этот результат можно представить в более компактном виде, если сделать подстановку $2t = z$:

$$\int ze^z dz = ze^z - e^z + C. \qquad (19)$$

Замечание: Интегралы $\int x^n \ln x dx$ преобразуются к виду $\int te^{(n+1)t} dt$ подстановкой $x = e^t$. Следовательно, вычислив один из этих интегралов, мы одновременно находим и другой.

3.5.3.2. Примеры применения метода

Пример 1. Вычислить интеграл $\int x^2 \ln x\, dx$.

Решение. Обсудим различные варианты представления подынтегральной функции $u = x^2 \ln x$ в виде произведения udv.

1) $u = x$, $v' = x\ln x$ $\Rightarrow$ $du = dx$, $v = \int x\ln x\, dx$;

2) $u = x^2$, $v' = \ln x$ $\Rightarrow$ $du = 2xdx$, $v = \int \ln x\, dx$;

3) $u = x\ln x$, $v' = x$ $\Rightarrow$ $du = d(x\ln x)$, $v = \int xdx$;

4) $u = x^2\ln x$, $v' = 1$ $\Rightarrow$ $du = d(x^2\ln x)$, $v = \int dx$.

5) $u = \ln x$, $v' = x^2$ $\Rightarrow$ $du = \dfrac{dx}{x}$, $v = \int x^2 dx$;

Варианты 1) и 2) не удовлетворяют критерию (A), поскольку интегралы от $x\ln x$ и от $\ln x$ слишком сложны.
Варианты 3) и 4) противоречат критерию (B).

Только пятый вариант приемлем во всех отношениях.

Действительно, во-первых, степенная функция x^2 легко интегрируется:

$$v = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} \qquad (C = 0).$$

Во-вторых, производной от $\ln x$ является рационная функция

$$(\ln x)' = x^{-1},$$

которая, безусловно, значительно проще логарифмической функции.
Применим формулу интегрирования по частям:

$$\begin{aligned}\int x^2 \ln x dx &= \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\int x^3 \frac{dx}{x} \\ &= \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + C.\end{aligned} \tag{20}$$

Пример 2. Вычислить $\int xe^{3x} dx$.

Решение. Преобразуем исходный интеграл:

$$\int xe^{3x}dx\Big|_{x=\ln t} = \int t^3 \ln t \frac{dt}{t} = \int t^2 \ln t dt.$$

Учитывая результат, полученный в предыдущем примере, и выполнив обратную замену $t = e^x$, получаем

$$\int xe^{3x}dx = \frac{t^3}{3}\ln|t| - \frac{t^3}{9} + C = \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} + C. \tag{21}$$

Пример 3. Вычислить $\int \operatorname{arctg} x\, dx$.

Решение. Пусть $u = \operatorname{arctg} x$ и $v' = 1$. Тогда

$$du = \frac{dx}{1+x^2} \qquad \text{и} \qquad v = x.$$

Интегрируем по частям:

$$\int \operatorname{arctg} x dx = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2} dx.$$

Интеграл $\int \frac{x}{1+x^2} dx$ вычисляется элементарно:

$$\int \frac{xdx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \int \frac{dx^2}{1+x^2} = \frac{1}{2} \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = \frac{1}{2} \ln(1+x^2).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \int \operatorname{arctg} x dx &= x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2} dx \\ &= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C. \end{aligned} \tag{22}$$

Пример 4. Вычислить интеграл $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$.

Решение. Заметим, что $\frac{dx}{\cos^2 x} = d(\operatorname{tg} x)$. Испытаем подстановку $\operatorname{tg} x = z$, которая влечет за собой $x = \operatorname{arctg} z$. Тогда

$$\int \frac{x}{\cos^2 x} dx = \int \operatorname{arctg} z\, dz.$$

Учитывая равенство (22), получаем

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\cos^2 x} dx &= z \operatorname{arctg} z - \frac{1}{2} \ln(1+z^2) + C \\ &= x \operatorname{tg} x - \frac{1}{2} \ln(1+\operatorname{tg}^2 x) + C. \end{aligned}$$

Это выражение можно упростить, используя тригонометрическое тождество

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = \cos^{-2} x$$

и свойство логарифмов, согласно которому $\ln \cos^{-2} x = -2 \ln |\cos x|$.
Таким образом,

$$\int \frac{x}{\cos^2 x} dx = x \operatorname{tg} x + \ln |\cos x| + C. \tag{23}$$

Для вычисления некоторых интегралов требуется повторное применение процедуры интегрирования по частям.

Пример 5. Вычислить интеграл $\int x\ln^2 xdx$.

Решение. Пусть $u=\ln^2 x$ и $dv=xdx$. Тогда

$$du=\frac{2\ln xdx}{x} \qquad \text{и} \qquad v=\int xdx=\frac{x^2}{2}.$$

Интегрируем по частям:

$$\int x\ln^2 xdx=\frac{x^2}{2}\ln^2 x-\int x\ln xdx. \qquad (24)$$

Полученный интеграл имеет более простой вид, чем исходный, поскольку содержит меньшую степень логарифма. Естественно ожидать, что в результате повторного интегрирования по частям степень логарифма понизится еще на одну единицу.

Полагаем теперь $u=\ln x$ и $dv=xdx$, что влечет

$$du=\frac{dx}{x} \ \text{ и } \ v=\int xdx=\frac{x^2}{2}.$$

Следовательно,

$$\int x\ln xdx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{2}\int xdx$$

$$=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}.$$

Подставим полученный результат в равенство (24):

$$\int x\ln^2 xdx=\frac{x^2}{2}\ln^2 x-(\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4})+C \qquad \Rightarrow$$

$$\int x\ln^2 xdx=\frac{x^2}{2}(\ln^2 x-\ln x+\frac{1}{2})+C. \qquad (25)$$

Обобщение: Подобным образом можно интегрировать произведение любого многочлена $P(x)$ и логарифмической функции, а также произведение многочлена с одной из обратных тригонометрических функций.

Пример 6. Преобразуем выражение (25) подстановкой $z=\ln x$:

$$\int x\ln^2 xdx \quad \Rightarrow \quad \int z^2e^{2z}dz,$$

$$\frac{x^2}{2}(\ln^2 x-\ln x+\frac{1}{2}) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{2}e^{2z}(z^2-z+\frac{1}{2})=\frac{1}{4}(2z^2-2z+1)e^{2z}.$$

Следовательно,

$$\int z^2e^{2z}dz=\frac{1}{4}(2z^2-2z+1)e^{2z}.$$

Перепишем эту формулу в более компактном виде, выполнив замену $x=2z$:

$$\int x^2e^xdx=(x^2-2x+2)e^x. \qquad (26)$$

Пример 7. Вычислить $\int (x^2-3x)e^x dx$.

Решение. В качестве функции $u(x)$ выберем многочлен x^2-3x, поскольку дифференцирование многочлена понижает его степень и, следовательно, $u'(x)$ является многочленом более низкой степени. Тогда

$$\begin{cases} u = x^2-3x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = (2x-3)dx \\ v = e^x. \end{cases}$$

Интегрируем по частям:

$$\int x^2 e^x dx = (x^2-3x)e^x - \int (2x-3)e^x dx.$$

Полученный интеграл имеет более простой вид. Для его вычисления прибегнем к повторному интегрированию по частям.

$$\begin{cases} u = 2x-3 \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2dx \\ v = e^x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\int (2x-3)e^x dx = (2x-3)e^x - 2\int e^x dx$$

$$= (2x-3)e^x - 2e^x + C = 2xe^x - 5e^x + C.$$

Подставляя этот результат в выражение для искомого интеграла, получаем окончательно:

$$\int x^2 e^x dx = (x^2-3x)e^x - (2x-5)e^x + C$$

$$= (x^2-5x+5)e^x + C.$$

Подобным же образом вычисляются интегралы вида

$$\int P(x)\sin ax\, dx \quad \text{и} \quad \int P(x)\cos ax\, dx.$$

Пример 8. Вычислить $\int x\sin 2x\, dx$.

Решение. $\begin{cases} u = x \\ dv = \sin 2x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\dfrac{1}{2}\cos 2x \end{cases} \Rightarrow$

$$\int x\sin 2x\, dx = -\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{2}\int \cos 2x dx = -\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

Пример 9. Вычислить $\int (x-3)\cos 5x\, dx$.

Решение. $\begin{cases} u = x-3 \\ dv = \cos 5x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \dfrac{1}{5}\sin 5x \end{cases} \Rightarrow$

$$\int (x-3)\cos 5x\, dx = \frac{1}{5}(x-3)\sin 5x - \frac{1}{5}\int \sin 5x dx = \frac{1}{5}(x-3)\sin 5x + \frac{1}{25}\cos 5x + C.$$

Пусть $P(x)$ – многочлен целой степени относительно x.
Тогда интегралы вида

$$\int P(x)\arcsin x\,dx,\quad \int P(x)\arccos x\,dx,$$

$$\int P(x)\,\mathrm{arctg}\,x\,dx,\quad \int P(x)\,\mathrm{arcctg}\,x\,dx,\quad \int P(x)\ln x\,dx,$$

$$\int P(x)e^{ax}dx,\quad \int P(x)\sin ax\,dx,\quad \int P(x)\cos ax\,dx$$

вычисляется интегрированием по частям.

Таблица 2

Интегралы	$u(x)$ и $dv(x)$	$du(x)$ и $v(x)$
$\int P(x)\arcsin xdx$	$u=\arcsin x$ $dv=P(x)dx$	$du=\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ $v=\int P(x)dx$
$\int P(x)\arccos xdx$	$u=\arccos x$ $dv=P(x)dx$	$du=-\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ $v=\int P(x)dx$
$\int P(x)\,\mathrm{arctg}\,xdx$	$u=\mathrm{arctg}\,x$ $dv=P(x)dx$	$du=\dfrac{dx}{1+x^2}$ $v=\int P(x)dx$
$\int P(x)\,\mathrm{arcctg}\,xdx$	$u=\mathrm{arcctg}\,x$ $dv=P(x)dx$	$du=-\dfrac{dx}{1+x^2}$ $v=\int P(x)dx$
$\int P(x)\ln xdx$	$u=\ln x$ $dv=P(x)dx$	$du=\dfrac{dx}{x}$ $v=\int P(x)dx$
$\int P(x)e^{ax}dx$	$u=P(x)$ $dv=e^{ax}dx$	$du=P'(x)dx$ $v=\dfrac{1}{a}e^{ax}$
$\int P(x)\sin axdx$	$u=P(x)$ $dv=\sin axdx$	$du=P'(x)dx$ $v=-\dfrac{1}{a}\cos ax$
$\int P(x)\cos axdx$	$u=P(x)$ $dv=\cos axdx$	$du=P'(x)dx$ $v=\dfrac{1}{a}\sin ax$

Приведенная таблица имеет иллюстративный характер и ни в коей мере не претендует на исчерпывающий перечень интегралов, успешно вычисляемых методом интегрирования по частям. Следует также иметь в виду, что многие интегралы (в том числе и не представленные в таблице) могут быть выражены через вышеприведенные с помощью подходящей замены переменной, например,

$$\int \arcsin x\,dx\Big|_{\arcsin x = t} = \int t\cos t\,dt\,,$$

$$\int x\arccos x\,dx\Big|_{\arccos x = t} = -\int t\sin t\cos t\,dt = -\frac{1}{2}\int t\sin 2t\,dt\,.$$

3.5.3.3. Циклические интегралы

Рассмотрим следующие интегралы:

$$I_1 = \int e^{ax}\cos bx\,dx\,, \tag{27}$$

$$I_2 = \int e^{ax}\sin bx\,dx\,. \tag{28}$$

Преобразуем (27), используя метод интегрирования по частям:

$$\begin{cases} u = e^{ax} \\ dv = \cos bx dx \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} du = ae^{ax}dx \\ v = \dfrac{1}{b}\sin bx \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$I_1 = \int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx - \frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bx\,dx\,.$$

Учитывая (28), полученное равенство можно записать в виде

$$I_1 = \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx - \frac{a}{b}I_2\,. \tag{29}$$

Интеграл (27) оказался выраженным через интеграл (28).

Теперь выполним аналогичные преобразования применительно к интегралу I_2. Интегрируем по частям (28):

$$\begin{cases} u = e^{ax} \\ dv = \sin bx dx \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} du = ae^{ax}dx \\ v = -\dfrac{1}{b}\cos bx \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$I_2 = \int e^{ax}\sin bx\,dx = -\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bx\,dx\,.$$

Учитывая (27), полученное равенство представим в виде

$$I_2 = -\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b}I_1\,. \tag{30}$$

Любопытно отметить, что цикл, начавшийся с вычисления интеграла (27) и включающий в себя двукратное интегрирование по частям, привел вновь к исходному интегралу (27).

Составим из равенств (29) и (30) систему линейных уравнений относительно переменных I_1 и I_2:

$$\begin{cases} I_1 + \dfrac{a}{b} I_2 = \dfrac{1}{b} e^{ax} \sin bx, \\ \dfrac{a}{b} I_1 - I_2 = \dfrac{1}{b} e^{ax} \cos bx. \end{cases}$$

Выполнив простые алгебраические преобразования, получаем

$$I_1 = \frac{a\cos bx + b\sin bx}{a^2 + b^2} e^{ax},$$

$$I_2 = \frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax}.$$

Таким образом,

$$\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{a\cos bx + b\sin bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + C, \qquad (31)$$

$$\int e^{ax} \sin bx dx = \frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + C. \qquad (32)$$

Заметим, что к интегралам рассматриваемого вида сводятся некоторые другие интегралы.

Пример 1. Вычислить $\int \sin(b\ln x)dx$.

Решение. Сделаем замену переменной: $\ln x = t$.

Тогда $x = e^t$, $dx = e^t dt$ и, следовательно,

$$\int \sin(b\ln x)dx = \int e^t \sin bt\, dt.$$

Используя формулу (32) и возвращаясь к переменной *x*, получаем

$$\int \sin(b\ln x)dx = \frac{\sin bt - b\cos bt}{1 + b^2} e^t + C$$
$$= \frac{\sin(b\ln x) - b\cos(b\ln x)}{1 + b^2} x + C.$$

Пример 2. Вычислить $\int \cos(\ln x)dx$.

Решение. Сделаем подстановку $\ln x = t$ и воспользуемся формулой (31):

$$\int \cos(\ln x)dx = \int e^t \cos t\, dt = \frac{\cos t + \sin t}{2} e^t + C$$
$$= \frac{1}{2}(\cos(\ln x) + \sin(\ln x))x + C.$$

3.6. Расширенная таблица интегралов

№	Интегралы
1	$\int u^n(x)u'(x)dx = \frac{u^{n+1}(x)}{n+1} + C$
2	$\int \frac{dx}{x-a} = \ln\|x-a\| + C$
3	$\int \frac{u'(x)dx}{u(x)} = \ln\|u(x)\| + C$
4	$\int a^{u(x)}u'(x)dx = \frac{a^{u(x)}}{\ln a} + C$ $\int e^{u(x)}u'(x)dx = e^{u(x)} + C$
5	$\int \sin u(x)\,u'(x)dx = -\cos u(x) + C$
6	$\int \cos u(x)\,u'(x)dx = \sin u(x) + C$
7	$\int \frac{u'(x)\,dx}{\cos^2 u(x)} = \operatorname{tg} u(x) + C$
8	$\int \frac{u'(x)\,dx}{\sin^2 u(x)} = -\operatorname{ctg} u(x) + C$
9	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \begin{cases} \arcsin\frac{x}{a} + C \\ -\arccos\frac{x}{a} + C \end{cases}$
10	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}) + C$
11	$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \begin{cases} \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C \\ -\frac{1}{a}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a} + C \end{cases}$
12	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{x-a}{x+a}\right\| + C$
13	$\int e^{ax}\cos bx dx = \frac{a\cos bx + b\sin bx}{a^2 + b^2}e^{ax} + C$
14	$\int e^{ax}\sin bx dx = \frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2 + b^2}e^{ax} + C$

3.6. Интегрирование рациональных функций

3.6.1. Основные понятия

В этом разделе мы обсудим проблему интегрирования **рациональных функций**, т.е. выражений вида

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены целой степени x.

Говорят, что рациональная функция $\frac{P(x)}{Q(x)}$ является правильной дробью, если степень многочлена $P(x)$ в числителе меньше степени многочлена $Q(x)$ в знаменателе.

Примерами рациональных функций являются выражения

$$\frac{x^3}{2x+7}, \qquad \frac{x^2-1}{4x^2+3x-5}, \qquad \frac{3x-2}{5x^3+x-1}, \qquad \frac{1}{(x+5)^4},$$

два последних из которых представляют собой правильные дроби.

Если $\frac{P(x)}{Q(x)}$ не является правильной дробью, то делением многочлена $P(x)$ на многочлен $Q(x)$, их отношение можно представить в виде

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = P_1(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

где $P_1(x)$ – некоторый многочлен (называемый целой частью); $\frac{R(x)}{Q(x)}$ – правильная дробь (называемая остаточным членом).

Интегрирование многочлена $P_1(x)$ является вполне тривиальной задачей. Следовательно, проблема интегрирования произвольной рациональной функции сводится к проблеме интегрирования правильной дроби.

В одном из последующих параграфов мы рассмотрим простые алгоритмы, позволяющие представить любую правильную дробь в виде суммы **простых дробей**, т.е. выражений вида

1) $\dfrac{1}{(x-a)^n}$ $\qquad (n = 1, 2, 3, \dots)$,

2) $\dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$ $\qquad (n = 1, 2, 3, \dots)$,

где предполагается, что квадратный трехчлен x^2+px+q не имеет вещественных корней, т.е. его дискриминант $D = p^2 - 4q$ отрицателен.

Это означает, в конечном счете, что проблема интегрирования правильной дроби сводится к проблеме интегрированию простых дробей.

Таким образом, процедура интегрирования произвольной рациональной функции включает в себя три этапа:

1) Приведение рациональной функции к правильной дроби (выделением целой части) – если она таковой не является.
2) Представление правильной дроби в виде суммы простых дробей.
3) Интегрирование полученных дробей.

3.6.2. Интегрирование простых дробей

Интегрирование простой дроби первого типа выполняется элементарно:

$$I_1 = \int \frac{dx}{(x-a)^n} = \begin{cases} \ln|x-a| + C, & \text{если } n = 1; \\ \dfrac{1}{(-n+1)(x-a)^{n-1}} + C, & \text{если } n > 1. \end{cases} \qquad (33)$$

Перейдем к интегрированию простой дроби второго типа,

$$I_2 = \int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n} dx .$$

Преобразуем квадратный трехчлен $x^2 + px + q$, выделив полный квадрат:

$$x^2 + px + q = (x^2 + 2\frac{p}{2}x + \frac{p^2}{4}) + q - \frac{p^2}{4} = (x + \frac{p}{2})^2 + (q - \frac{p^2}{4}) .$$

Учитывая, что константа $q - \dfrac{p^2}{4} \equiv -D/4 > 0$, обозначим ее a^2.

Сделаем подстановку $t = x + p/2$. Тогда

$$x = t - p/2, \qquad dx = dt, \qquad Ax + B = At + (B - A\frac{p}{2}),$$

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n} dx = \int \frac{Ax+B}{((x+p/2)^2 + a^2)^n} dx$$

$$= \int \frac{At + (B - Ap/2)}{(t^2+a^2)^n} dt = A\int \frac{tdt}{(t^2+a^2)^n} + (B - \frac{p}{2})\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n}.$$

Первый интеграл в правой части полученного выражения легко приводится к табличному виду:

$$\int \frac{tdt}{(t^2+a^2)^n} = \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2)}{(t^2+a^2)^n}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^n} = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\ln(t^2+a^2) + C, & \text{если} \quad n = 1; \\ \dfrac{1}{2(-n+1)(t^2+a^2)^{n-1}} + C, & \text{если} \quad n > 1. \end{cases} \qquad (34)$$

К оставшемуся интегралу

$$K_n = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n} \qquad (n \geq 1). \qquad (35)$$

применим технику интегрирования по частям.

Пусть $\quad u = \dfrac{1}{(t^2+a^2)^n}, \qquad dv = dx.$

Тогда $\quad du = \dfrac{-2ntdt}{(t^2+a^2)^{n+1}}, \qquad v = x.$

Следовательно,

$$\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n} = \frac{t}{(t^2+a^2)^n} - (-2n)\int \frac{t^2}{(t^2+a^2)^{n+1}}dt$$

$$= \frac{t}{(t^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{(t^2+a^2)-a^2}{(t^2+a^2)^{n+1}}dt$$

$$= \frac{t}{(t^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n} - 2na^2\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{n+1}}.$$

Перепишем это равенство с учетом обозначений (35):

$$K_n = \frac{t}{(t^2+a^2)^n} + 2nK_n - 2na^2K_{n+1}.$$

Выразим K_{n+1} через K_n:

$$K_{n+1} = \frac{2n-1}{2na^2}K_n + \frac{1}{2na^2}\frac{t}{(t^2+a^2)^n}.$$

Перепишем полученный результат в интегральной форме:

$$\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{n+1}} = \frac{2n-1}{2na^2}\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n} + \frac{1}{2na^2}\frac{t}{(t^2+a^2)^n}. \qquad (36)$$

Формула (36) представляет собой цепочку равенств.

Подставляя в нее $n=1$, мы получаем выражение для интеграла K_2 через интеграл K_1. При $n=2$ формула (36) дает выражение для интеграла K_3 через интеграл K_2, и т.д.

Формулы подобного типа называются **рекуррентными соотношениями**.

Таким образом, проблема интегрирования простых дробей полностью решена.

Пример. Учитывая ранее полученное выражение для интеграла K_1,

$$K_1 = \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C,$$

и подставляя в рекуррентные соотношения (36) $n=1$, получаем:

$$K_2 = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^2} = \frac{1}{2a^2}\left(\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + \frac{t}{t^2+a^2}\right) + C. \qquad (37)$$

Для вычисления K_3 подставим в (36) $n = 2$ и воспользуемся формулой (37):

$$\int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^3} = \frac{3}{8a^5} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + \frac{3}{8a^4} \frac{t}{(t^2 + a^2)} + \frac{t}{4a^2(t^2 + a^2)^2} + C. \qquad (38)$$

3.6.3. Разложение на простые дроби

3.6.3.1. Основная идея метода

В простых случаях правильную дробь можно представить в виде суммы простых дробей с помощью элементарных алгебраических преобразований. Приведем несколько типичных примеров.

- $$\frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{b-a}{(b-a)(x-a)(x-b)} = \frac{b-a+x-x}{(b-a)(x-a)(x-b)}$$
$$= \frac{(x-a)-(x-b)}{(b-a)(x-a)(x-b)} = \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{x-b} - \frac{1}{x-a}\right).$$

- $$\frac{1}{(x^2-49)} = \frac{1}{(x-7)(x+7)} = \frac{1}{14}\left(\frac{1}{x-7} - \frac{1}{x+7}\right).$$

- $$\frac{1}{x(x^2+4)} = \frac{1}{4}\frac{4}{x(x^2+4)} = \frac{1}{4}\frac{(x^2+4)-x^2}{x(x^2+4)}$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{(x^2+4)}{x(x^2+4)} - \frac{x^2}{x(x^2+4)}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+4}\right).$$

В менее очевидных ситуациях можно использовать универсальный метод представления правильной дроби в виде суммы простых дробей, представляющий собой, по сути, операцию обратную приведению дробей к общему знаменателю.
Проиллюстрируем идею метода на примере.

Пример. Сумму простых дробей $\frac{2}{x-1}$ и $\frac{5}{x+4}$ можно представить одной дробью:

$$\frac{2}{x-1} + \frac{5}{x+4} = \frac{2(x+4)+5(x-1)}{(x-1)(x+4)} = \frac{7x+3}{(x-1)(x+4)}.$$

Когда мы читаем эту формулу слева направо, мы говорим о приведении дробей к общему знаменателю.
Эту же самую формулу можно прочитать справа налево:

$$\frac{7x+3}{(x-1)(x+4)}=\frac{2}{x-1}+\frac{5}{x+4}.$$

В этом случае мы говорим о разложении дроби на сумму простых дробей. Предположим, что нам нужно решить обратную задачу, т.е. разложить дробь $\frac{7x+3}{(x-1)(x+4)}$ на сумму простых дробей,

x

$$\frac{7x+3}{(x-1)(x+4)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+4}, \tag{39}$$

где A и B – некоторые константы.

Все, что нам нужно сделать это определить значения неопределенных коэффициентов A и B. Избавимся от знаменателей, умножая обе части равенства (39) на $(x-1)(x+4)$:

$$7x+3=A(x+4)+B(x-1). \tag{40}$$

Полученное уравнение (относительно A и B) должно тождественно выполняться для любых значений переменной x. Придавая переменой x конкретные значения, можно вычислить значения искомых коэффициентов.

Пусть $x=1$. Тогда $10=5A$, $\underline{A=2}$.

При $x=-4$ равенство (8) принимает вид $(-25)=-5B$, что влечет $\underline{B=5}$.

Подставляя найденные значения в (39), получаем ожидаемый результат:

$$\frac{7x+3}{(x-1)(x+4)}=\frac{2}{x-1}+\frac{5}{x+4}.$$

Итак, разложение правильной дроби на сумму простых дробей представляет собой процедуру обратную приведению к общему знаменателю.

3.6.3.2. Правила разложения на простые дроби

Правило 1: Пусть рациональная функция $f(x)=\frac{P(x)}{(x-a)Q_1(x)}$ является правильной дробью, где $Q_1(x)$ - многочлен целой степени x.

Тогда $f(x)$ можно представить, и притом единственным образом, в виде

$$\frac{P(x)}{(x-a)Q_1(x)}=\frac{A}{x-a}+\frac{P_1(x)}{Q_1(x)},$$

где $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ – правильная дробь; A – некоторая константа.

Правило позволяет перейти от одной дроби к другой, содержащей в знаменателе многочлен меньшей степени. Если знаменатель дроби $\frac{P_1}{Q_1}$

также содержит линейный множитель, т.е. $Q_1(x)=(x-b)\,Q_2(x)$, то правило можно применить повторно, что приводит к разложению

$$\frac{P(x)}{(x-a)(x-b)Q_2(x)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}.$$

Каждое такое преобразование понижает степень многочлена в знаменателе правильной дроби, что упрощает проблему.

Следствие: Если знаменатель $Q(x)$ правильной дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ может быть представлен в виде произведения различных линейных множителей, т.е. $Q(x)=(x-a_1)(x-a_2)...(x-a_n)$, то

$$\boxed{\frac{P(x)}{(x-a_1)(x-a_2)...(x-a_n)}=\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{x-a_2}+...+\frac{A_n}{x-a_n}.}$$

Можно сказать, что каждый линейный множитель $(x-a_k)$ в знаменателе правильной дроби порождает простую дробь $\frac{A_k}{x-a_k}$, где A_k - некоторые константы.

Структура разложения правильной дроби зависит только от множителей составляющих знаменатель. Дроби с одинаковыми знаменателями, но различными числителями имеют одну и ту же структуру разложения на простые дроби, например,

$$\frac{1}{x(x-3)(x+2)}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x-3}+\frac{A_3}{x+2}, \qquad (41)$$

$$\frac{5x-1}{x(x-3)(x+2)}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x-3}+\frac{A_3}{x+2}.$$

Числитель влияет только на числовые значения коэффициентов A_1, A_2, A_3.

Пример 1. Найти значения констант в разложении (41).

Для избавления от знаменателей умножим обе части равенства (41) на $x(x-3)(x+2)$. Тогда

$$1=A_1(x-3)(x+2)+A_2x(x+2)+A_3x(x-3).$$

Поочередно придадим x такие значения, которые обращают в нуль какое-нибудь слагаемое в полученном равенстве:

$$x=0 \quad\Rightarrow\quad 1=A_1(-3)2=-6A_1 \quad\Rightarrow\quad A_1=-1/6,$$

$$x=3 \quad\Rightarrow\quad 1=15A_2 \quad\Rightarrow\quad A_2=1/15,$$

$$x=-2 \quad\Rightarrow\quad 1=10A_3 \quad\Rightarrow\quad A_3=1/10.$$

Подставим полученные значения в исходное разложение (41):

$$\frac{1}{x(x-3)(x+2)} = -\frac{1}{6x} + \frac{1}{15(x-3)} + \frac{1}{10(x+2)}.$$

Правило 2: Пусть рациональная функция $f(x) = \dfrac{P(x)}{(x-a)^n Q_1(x)}$ является правильной дробью, где $Q_1(x)$ - многочлен целой степени x.
Тогда $f(x)$ можно представить, и притом единственным образом, в виде

$$\frac{P(x)}{(x-a)^n Q_1(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_n}{(x-a)^n} + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)},$$

где $\dfrac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ – правильная дробь; $A_1, A_2, \ldots, A_n$ - некоторые константы.

Заметим, что знаменатель дроби $\dfrac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ является многочленом меньшей степени по сравнению со знаменателем исходной дроби. Если $Q_1(x)$ содержит линейный множитель или множитель вида $(x-b)^n$, то к этой дроби можно повторно применить, соответственно, Правило 1 или Правило 2.

Пример 2: Пусть $P(x)$ – произвольный многочлен степени не выше 3. Тогда

$$\frac{P(x)}{(x-a)(x-b)^3} = \frac{A}{x-a} + \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \frac{B_3}{(x-b)^3}.$$

Пример 3: Разложить функцию $\dfrac{1}{(x+1)(x-4)^2}$ на простые дроби.

Решение: Применяя Правило 1 и Правило 2, данную дробь можно представить в виде следующее разложения:

$$\frac{1}{(x+1)(x-4)^2} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{x-4} + \frac{A_3}{(x-4)^2}.$$

Умножим обе части этого равенства на $(x+1)(x-4)^2$:

$$1 = A_1(x-4)^2 + A_2(x+1)(x-4) + A_3(x+1).$$

Для нахождения коэффициентов A_1, A_2 и A_3, придадим переменной x поочередно значения –1, 4 и 0:

$x=-1 \quad \Rightarrow \quad 1 = 25A_1 \quad \Rightarrow \quad \underline{A_1 = 1/25};$

$x=4 \quad \Rightarrow \quad 1 = 5A_3 \quad \Rightarrow \quad \underline{A_3 = 1/5};$

$x=0 \quad \Rightarrow \quad 1 = 16A_1 - 4A_2 + A_3 = 16/25 - 4A_2 + 1/5 \quad \Rightarrow \quad \underline{A_2 = -1/25}.$

Таким образом, $\dfrac{1}{(x+1)(x-4)^2}=\dfrac{1}{25}(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x-4}+\dfrac{5}{(x-4)^2})$.

Правило 3: Пусть рациональная функция $f(x)=\dfrac{P(x)}{(x^2+px+q)\,Q_1(x)}$ является правильной дробью, где (x^2+px+q) – квадратный трехчлен, не имеющий вещественных корней; $Q_1(x)$ - многочлен целой степени x.
Тогда $f(x)$ можно представить, и притом единственным образом, в виде

$$\frac{P(x)}{(x^2+px+q)Q_1(x)}=\frac{Ax+B}{x^2+px+q}+\frac{P_1(x)}{Q_1(x)},$$

где $\dfrac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ – правильная дробь; A и B – неопределенные коэффициенты.

Заметим, что степень многочлена $Q_1(x)$ меньше на две единицы степени многочлена в знаменателе исходной дроби.

Пример 4: Разложить $\dfrac{1}{(x-3)(x^2-x+2)}$ на простые дроби.

Решение: Правило 1 и Правило 3 позволяют записать искомое разложение в форме, содержащей неопределенные коэффициенты:

$$\frac{1}{(x-3)(x^2-x+2)}=\frac{A_1}{(x-3)}+\frac{A_2x+B_2}{(x^2-x+2)}.$$

Избавимся от знаменателей, умножая обе части равенства на $(x-3)(x^2-x+2)$:

$$1=A_1(x^2-x+2)+(A_2x+B_2)(x-3).$$

Найдем коэффициенты A_1, A_2 и B_2, придавая переменной x различные значения:

$x=3 \quad \Rightarrow \quad 1=8A_1 \quad \Rightarrow \quad \underline{A_1=1/8};$

$x=0 \quad \Rightarrow \quad 1=2A_1-3B_2 \quad \Rightarrow \quad 1-\dfrac{2}{8}=-3B_2 \quad \Rightarrow \quad \underline{B_2=-1/4};$

$x=1 \quad \Rightarrow \quad 1=2A_1+(A_2+B_2)(-2) \quad \Rightarrow \quad 1=\dfrac{1}{4}-2A_2+\dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \underline{A_2=-1/8}.$

Таким образом,

$$\frac{1}{(x-3)(x^2-x+2)} = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{(x-3)} - \frac{x+2}{(x^2-x+2)}\right).$$

Нам осталось рассмотреть случай, когда знаменатель правильной дроби содержит множитель целую степень неприводимого квадратичного многочлена (x^2+px+q).

Правило 4: Пусть рациональная функция $f(x) = \dfrac{P(x)}{(x^2+px+q)^n\, Q_1(x)}$ является правильной дробью, где (x^2+px+q) – квадратный трехчлен, не имеющий вещественных корней; $Q_1(x)$ - многочлен целой степени x.
Тогда $f(x)$ можно представить, и притом единственным образом, в виде

$$\frac{P(x)}{(x^2+px+q)^n Q_1(x)} = \frac{A_1x+B_1}{x^2+px+q} + \frac{A_2x+B_2}{(x^2+px+q)^2} + \ldots$$
$$+ \frac{A_nx+B_n}{(x^2+px+q)^n} + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)},$$

где $\dfrac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ – правильная дробь; $A_1, A_2, ..., A_n$ и $B_1, B_2, ..., B_n$ – неопределенные коэффициенты.

Заметим, что степень многочлена $Q_1(x)$ меньше на $2n$ единиц степени многочлена в знаменателе исходной дроби.

Пример 5.

$$\frac{1}{(x-3)(x^2-x+2)^2} = \frac{A_1x+B_1}{x^2-x+2} + \frac{A_2x+B_2}{(x^2-x+2)^2}$$
$$+ \frac{C_1}{x-3}.$$

Пример 6.

$$\frac{1}{(x+5)^3(x^2+x+1)^2} = \frac{A_1x+B_1}{x^2+x+1} + \frac{A_2x+B_2}{(x^2+x+1)^2}$$
$$+ \frac{C_1}{x+5} + \frac{C_2}{(x+5)^2} + \frac{C_3}{(x+5)^3}.$$

Пример 7.

$$\frac{1}{x^4(x^2+1)^3}=\frac{A_1x+B_1}{x^2+1}+\frac{A_2x+B_2}{(x^2+1)^2}+\frac{A_3x+B_3}{(x^2+1)^3}$$
$$+\frac{C_1}{x}+\frac{C_2}{x^2}+\frac{C_3}{x^3}+\frac{C_4}{x^4}.$$

Упражнения. Разложите на простые дроби рациональные выражения 1–9:

1) $\dfrac{1}{(x-3)(x+2)}$; 2) $\dfrac{1}{x(x-3)(x+2)}$; 3) $\dfrac{5x-1}{x(x-3)(x+2)}$;

4) $\dfrac{1}{x^2(x-3)}$; 5) $\dfrac{5x-1}{x^2(x-3)(x+2)}$; 6) $\dfrac{x-4}{x^3(x-3)^2(x+2)}$;

7) $\dfrac{1}{(x+1)(x^2+4)}$; 8) $\dfrac{1}{(x+1)(x^2+3x+4)^2}$; 9) $\dfrac{1}{(x+1)^2(x^2+3x+4)^2}$.

3.6.3.3. Разложение многочлена на множители

Один из этапов разложения правильной дроби на сумму простых дробей заключается в разложении на множители знаменателя $Q(x)$ этой дроби.

В соответствии с **основной теоремой алгебры**,

> Любой многочлен целой степени можно разложить на множители, каждый из которых является либо линейным, либо неприводимым квадратичным многочленом.

Примеры, иллюстрирующие основную теорему алгебры.

- В разложении кубического многочлена x^3+2x^2-x-2 содержатся только линейные множители:
$$\begin{aligned}x^3+2x^2-x-2&=(x^3-x)+2(x^2-1)\\&=x(x^2-1)+2(x^2-1)\\&=(x^2-1)(x+2)\\&=(x-1)(x+1)(x+2).\end{aligned}$$
- Кубический многочлен $x^3-5x^2+11x-15$ разлагается на линейный и неприводимый квадратичный многочлены:
$$\begin{aligned}x^3-5x^2+11x-15&=(x^3-3x^2)-(2x^2-6x)+(5x-15)\\&=x^2(x-3)-2x(x-3)+5(x-3)\\&=(x-3)(x^2-2x+5).\end{aligned}$$
- Квадратичный многочлен x^2+6x+9 представляет собой двукратно вырожденный линейный многочлен $x^2+6x+9=(x+3)^2$.

- Многочлен x^4+2x^2+1 представляет собой двукратно вырожденный квадратичный многочлен $x^4+2x^2+1=(x^2+1)^2$.
- Оба множителя в разложении многочлена x^4+1 являются неприводимыми многочленами второй степени:

$$x^4+1=(x^4+2x^2+1)-2x^2=(x^2+1)^2-2x^2$$
$$=(x^2+1-\sqrt{2}x)(x^2+1+\sqrt{2}x).$$

Квадратичный многочлен x^2+px+q, имеющий два различных вещественных корня x_1 и x_2, разлагается на линейные множители $(x-x_1)$ и $(x-x_2)$. Если $x_1=x_2$, то квадратичный многочлен можно представить в виде $(x-x_1)^2$.

Квадратичный многочлен, не имеющий корней, является неприводимым, т.е. не может быть разложен на линейные множители.

- Квадратичный многочлен x^2-5x+4 имеет два вещественных корня, $x_1=1$ и $x_2=4$. Следовательно, его можно представить в виде произведения двух линейных множителей:

$$x^2-5x+4=(x-1)(x-4).$$

- Корни квадратного трехчлена x^2-4x+4 совпадают друг с другом, $x_1=x_2=2$. Следовательно,

$$x^2-4x+4=(x-2)^2.$$

- Дискриминант квадратного трехчлена x^2-2x+4 отрицателен. Следовательно, многочлен является неприводимым.

3.6.3.4. Деление многочлена на многочлен

Пусть $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ - рациональная функция, а степень многочлена $P(x)$ больше или равна степени многочлена $Q(x)$. Тогда существуют, и притом единственные, многочлены $S(x)$ и $R(x)$ такие, что

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=S(x)+\frac{R(x)}{Q(x)},$$

где $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$ - правильная дробь.

Многочлен $S(x)$ называется целой частью функции *f*, а дробь $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$ – ее остаточным членом.

В частном случае, когда остаточный член равен нулю, говорят, что $P(x)$ делится нацело на $Q(x)$.

Продемонстрируем процедуру деления на конкретных примерах.

Пример 1: Выделить целую часть функции $f(x)=\dfrac{5x^3-x^2+4x+7}{x^2+3x-1}$.

Решение: Во-первых, сделаем заготовку для деления столбиком, располагая слагаемые в порядке убывания степеней:

$$\begin{array}{l|l} 5x^3-x^2+4x+7 & x^2+3x-1 \\ \cline{2-2} & \end{array}$$

Затем разделим член $5x^3$, содержащий старшую степень x в числителе, на аналогичный член x^2 знаменателя и запишем ответ $5x$ ниже линии:

$$\begin{array}{l|l} 5x^3-x^2+4x+7 & x^2+3x-1 \\ \cline{2-2} & 5x \end{array}$$

Теперь умножим $5x$ на делитель x^2+3x-1 и запишем результат

$$5x(x^2+3x-1)=5x^3+15x^2-5x$$

под многочленом числителя, располагая члены с одинаковыми степенями один под другим:

$$\begin{array}{l|l} 5x^3\quad -x^2+4x+7 & x^2+3x-1 \\ \cline{2-2} 5x^3+15x^2-5x & 5x \end{array}$$

Далее произведем вычитание:

$$\begin{array}{l|l} -\begin{array}{l} 5x^3\quad -x^2+4x+7 \\ 5x^3+15x^2-5x \end{array} & x^2+3x-1 \\ \cline{2-2} \quad\quad -16x^2+9x+7 & 5x \end{array}$$

Затем повторяем процедуру: член $(-16x^2)$ со старшей степенью многочлена $-16x^2+9x+7$ делим на член x^2 делителя, а полученное число (-16) прибавляем к $5x$:

$$\begin{array}{l|l} -\begin{array}{l} 5x^3\quad -x^2+4x+7 \\ 5x^3+15x^2-5x \end{array} & x^2+3x-1 \\ \cline{2-2} \quad\quad -16x^2+9x+7 & 5x-16 \end{array}$$

Умножаем (-16) на делитель x^2+3x-1, записывая результат

$$-16(x^2+3x-1)=-16x^2-48x+16$$

под многочленом числителя, один член под другим с такой же степенью:

$$\begin{array}{l|l} -\begin{array}{l} 5x^3\quad -x^2+4x+7 \\ 5x^3+15x^2-5x \end{array} & x^2+3x-1 \\ \cline{2-2} \quad\quad -16x^2\quad +9x+7 & 5x-16 \\ \quad\quad -16x^2-48x+16 & \end{array}$$

Производим вычитание:

$$
\begin{array}{r|l}
-\begin{array}{r} 5x^3 \quad -x^2+4x+7 \\ 5x^3+15x^2-5x \quad\quad \end{array} & x^2+3x-1 \\ \cline{2-2}
\overline{\quad -\begin{array}{r} -16x^2 \quad +9x+7 \\ -16x^2-48x+16 \end{array}} & 5x-16 \\
\overline{\quad\quad 57x-9} &
\end{array}
$$

Степень полученного многочлена $57x-9$ меньше степени делителя x^2+3x-1. Следовательно, процедура деления завершена и, таким образом,

$$\frac{5x^3-x^2+4x+7}{x^2+3x-1}=(5x-16)+\frac{57x-9}{x^2+3x-1}. \qquad (42)$$

Целая часть данной функции равна $(5x-16)$.

Чтобы проверить справедливость полученного результата, умножим обе части равенства (42) на знаменатель; затем раскроем скобки и приведем подобные члены:

$$5x^3-x^2+4x+7=(5x-16)(x^2+3x-1)+(57x-9) \qquad \Rightarrow$$

$$5x^3-x^2+4x+7=5x^3+15x^2-5x-16x^2-48x+16+57x-9 \quad \Rightarrow$$

$$5x^3-x^2+4x+7=5x^3-x^2+4x+7.$$

Полученное тождество свидетельствует о правильности разложения (42).

Пример 2. Дано рациональное выражение $\dfrac{x^3-4x^2-x-6}{x^2-x+2}$. Разделить столбиком многочлен на многочлен.

Решение.

$$
\begin{array}{r|l}
-\begin{array}{r} x^3-4x^2-x-6 \\ x^3 \ -x^2+2x \quad\ \end{array} & x^2-x+2 \\ \cline{2-2}
\overline{\quad -\begin{array}{r} -3x^2+3x-6 \\ -3x^2+3x-6 \end{array}} & x-3 \\
\overline{\quad\quad 0} &
\end{array}
$$

Остаточный член равен нулю.

Таким образом,

$$\frac{x^3-4x^2-x-6}{x^2-x+2}=x-3.$$

Поскольку многочлен x^3-4x^2-x-6 делится без остатка на x^2-x+2, делитель и результат деления являются множителями делимого:

$$x^3-4x^2-x-6=(x^2-x+2)(x-3).$$

3.6.4. Примеры и упражнения

Пример 1. Вычислить интеграл $\int \frac{x^4+1}{x^3-9x}dx$.

Решение.

1) Выделяем целую часть рационального выражения:

$$\frac{x^4+1}{x^3-9x} = x + \frac{9x^2+1}{x^3-9x}.$$

2) Разлагаем знаменатель на множители:

$$x^3 - 9x = x(x^2-9) = x(x-3)(x+3).$$

3) Представляем дробь $\frac{9x^2+1}{x^3-9x}$ в виде суммы простых дробей:

$$\frac{9x^2+1}{x(x-3)(x+3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{x+3}.$$

4) Для нахождения коэффициентов *A*, *B* и *C* преобразуем последнее выражение к виду

$$9x^2 + 1 = A(x-3)(x+3) + Bx(x+3) + Cx(x-3).$$

5) Определяем коэффициенты *A*, *B* и *C*, придавая переменной *x* различные значения:

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 = -9A \quad \Rightarrow \quad A = -1/9;$$

$$x = 3 \quad \Rightarrow \quad 82 = 18B \quad \Rightarrow \quad B = 41/9,$$

$$x = -3 \quad \Rightarrow \quad 82 = 18c \quad \Rightarrow \quad C = 41/9.$$

6) Записываем искомое разложение дроби $\frac{9x^2+1}{x^3-9x}$:

$$\frac{9x^2+1}{x^3-9x} = \frac{1}{9}(-\frac{1}{x} + \frac{41}{x-3} + \frac{41}{x+3}).$$

7) Записываем подынтегральную функцию в виде:

$$\frac{x^4+1}{x^3-9x} = x + \frac{9x^2+1}{x^3-9x} = x + \frac{1}{9}(-\frac{1}{x} + \frac{41}{x-3} + \frac{41}{x+3}).$$

8) Используем свойства интегралов и таблицу интегралов:

$$\int \frac{x^4+1}{x^3-9x}dx = \int (x - \frac{1}{9x} + \frac{41}{9(x-3)} + \frac{41}{9(x+3)})dx$$

$$= \int xdx - \frac{1}{9}\int \frac{dx}{x} + \frac{41}{9}(\int \frac{dx}{x-3} + \int \frac{dx}{x+3})$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{1}{9}\ln|x| + \frac{41}{9}(\ln|x-3| + \ln|x+3|) + C$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{1}{9}\ln|x| + \frac{41}{9}\ln|x^2-9| + C.$$

9) Проверяем результат дифференцированием:

$$(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{9}\ln|x|+\frac{41}{9}\ln|x^2-9|)' = x-\frac{1}{9x}+\frac{82x}{9(x^2-9)}$$

$$=\frac{9x^2(x^2-9)-(x^2-9)+82x^2}{9x(x^2-9)}=\frac{9x^4+9}{9x(x^2-9)}=\frac{x^4+1}{x^3-9x},$$

что завершает решение задачи.

Пример 2. Вычислить интеграл $\int\frac{xdx}{x^2+2x-3}$.

Решение.

1) Разлагаем знаменатель рационального выражения на множители:

$$\frac{x}{x^2+2x-3}=\frac{x}{(x-1)(x+3)}.$$

3) Представляем дробь $\frac{x}{(x-1)(x+3)}$ в виде суммы простых дробей:

$$\frac{x}{(x-1)(x+3)}=\frac{(x+3)+3(x-1)}{4(x-1)(x+3)}=\frac{1}{4}(\frac{1}{x-1}+\frac{3}{x+3}).$$

4) Используем свойства интегралов и таблицу интегралов:

$$\int\frac{xdx}{x^2+2x-3}=\frac{1}{4}\int(\frac{1}{x-1}+\frac{3}{x+3})dx$$

$$=\frac{1}{4}(\int\frac{dx}{x-1}+3\int\frac{dx}{x+3})$$

$$=\frac{1}{4}(\ln|x-1|+3\ln|x+3|)$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|(x-1)(x+3)^3\right|+C.$$

Проверка:

$$\frac{1}{4}(\ln|x-1|+3\ln|x+3|=\frac{1}{4}(\frac{1}{x-1}+\frac{3}{x+3})$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{x+3+3x-3}{(x-1)(x+3)}$$

$$=\frac{x}{(x-1)(x+3)}.$$

О.К.

Пример 3. Вычислить интеграл $\int\frac{(x-1)dx}{(x^2+2x+5)^2}$.

Решение.

1) Выделяем полный квадрат в знаменателе рационального выражения:
$$x^2+2x+5=(x+1)^2+4.$$

2) Делаем подстановку $x+1=t \qquad \Rightarrow \qquad x=t-1, \qquad dx=dt$,
$$\int\frac{(x-1)dx}{(x^2+2x+5)^2}=\int\frac{(t-2)dt}{(t^2+4)^2}.$$

3) Представляем результат в виде разности двух интегралов:
$$\int\frac{(t-2)dt}{(t^2+4)^2}=\int\frac{tdt}{(t^2+4)^2}-2\int\frac{dt}{(t^2+4)^2}.$$

4) Первый из полученных интегралов вычисляем с помощью подстановки $z=t^2+4$, которая влечет $tdt=\frac{1}{2}dz$ и, следовательно,
$$\int\frac{tdt}{(t^2+4)^2}=\frac{1}{2}\int\frac{dz}{z^2}=-\frac{1}{2z^3}=-\frac{1}{2(t^2+4)^3}.$$

5) Оставшийся интеграл $\int\frac{dt}{(t^2+4)^2}$ вычисляем по формуле (37), полученной с помощью рекуррентных соотношений (36):
$$\int\frac{dt}{(t^2+4)^2}=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2}+\frac{t}{t^2+4}\right).$$

Таким образом,
$$\int\frac{(x-1)dx}{(x^2+2x+5)^2}=-\frac{1}{2(t^2+4)^3}-\frac{1}{8}\operatorname{arctg}\frac{t}{2}-\frac{1}{4}\frac{t}{t^2+4})+C\Bigg|_{t=x+1}$$
$$=-\frac{t+2}{4(t^2+4)}-\frac{1}{8}\operatorname{arctg}\frac{t}{2}+C\Bigg|_{t=x+1}$$
$$=-\frac{x+3}{4(x^2+2x+5)}-\frac{1}{8}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+C.$$

Проверьте правильность полученного результата дифференцированием.

Упражнения.

Вычислите интегралы от рациональных выражений 10–19:

10) $\frac{1}{4x^2-9}$; 11) $\frac{1}{x^2-x-6}$;

12) $\frac{5x-1}{x(x^2-x-6)}$; 13) $\frac{x^2}{x^2-x-6}$;

14) $\dfrac{1}{(x-3)(x^2+4)}$;

15) $\dfrac{x}{(x-3)^2(x^2+4)}$;

16) $\dfrac{x+3}{x^2-4x+8}$;

17) $\dfrac{x+3}{x^2-4x+4}$;

18) $\dfrac{x+3}{x^2-4x+3}$;

19) $\dfrac{x+3}{(x^2-4x+8)^2}$.

Проверьте результаты интегрирования дифференцированием.

3.7. Интегрирование тригонометрических выражений

3.7.1. Интегралы вида $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$

1. Предположим, что оба показателя степени m и n – четные числа, $m = 2k$ и $n = 2l$, где k и l – неотрицательные целые числа.
Тогда для понижения степеней синуса и косинуса можно воспользоваться тригонометрическими тождествами

$$2\cos^2 x = 1 + \cos 2x,$$
$$2\sin^2 x = 1 - \cos 2x,$$
$$2\sin x \cos x = \sin 2x.$$

Действительно,

$$\int \sin^{2k} x \cos^{2l} x dx = \int (\sin^2 x)^k (\cos^2 x)^l dx$$
$$= \frac{1}{4}\int (1-\cos 2x)^k (1+\cos 2x)^l dx.$$

Если раскрыть скобки, то мы получим сумму более простых интегралов, часть из которых – табличные, а другие могут быть упрощены повторным понижением степеней.

2. Предположим, что n – нечетное число, $n = 2k+1$.
Тогда для любого числа m,

$$\int \sin^m x \cos^{2k+1} x dx = \int \sin^m x \cos^{2k} x \cos x dx$$
$$= \int \sin^m x (1-\sin^2 x)^k \cos x dx.$$

Используя подстановку $t = \sin x$ ($dt = \cos x dx$), получаем элементарно вычисляемый интеграл:

$$\int \sin^m x \cos^{2k+1} x dx = \int t^m (1-t^2)^k dt.$$

Если m – нечетное число, то нужно применить подстановку $t = \cos x$:

$$\int \sin^{2k+1} x \cos^n x dx = \int (1-\cos^2 x)^k \cos^n x \sin x dt = -\int (1-t^2)^k t^n dt.$$

Примеры:

- $$\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2x) dx = \frac{1}{2}(x + \frac{1}{2}\sin 2x) + C.$$
- $$\int \sin^2 x \cos^3 x dx = \int \sin^2 x (1-\sin^2 x) \cos x \, dx \Big|_{\sin x = t}$$
$$= \int t^2 (1-t^2) dt = \int (t^2 - t^4) dt$$
$$= \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{5}t^5 + C = \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^5 x + C.$$

- $$\int \sin^2 3x \cos^2 3x dx = \frac{1}{4}\int (2\sin 3x \cos 3x)^2 dx = \frac{1}{4}\int \sin^2 6x dx$$
$$= \frac{1}{8}\int (1-\cos 12x)dx = \frac{1}{8}(x - \frac{1}{12}\sin 12x) + C.$$
- $$\int \cos^5 x dx = \int (1-\sin^2 x)^2 \cos x dx\Big|_{\sin x = t}$$
$$= \int (1-2t^2+t^4)dt = t - \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 + C$$
$$= \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + C.$$
- $$\int \frac{\sin^5 x}{\cos x}dx = \int \frac{(1-\cos^2 x)^2}{\cos x}\sin x dx\Bigg|_{\cos x = t}$$
$$= -\int \frac{(1-t^2)^2}{t}dt = -\int (\frac{1}{t} - 2t + t^3)dt$$
$$= -\ln|t| + t^2 - \frac{t^4}{4} + C$$
$$= -\ln|\cos x| + \cos^2 x - \frac{\cos^4 x}{4} + C.$$

3.7.2. Интегралы вида $\int \frac{dx}{\sin^n x}$, $\int \frac{dx}{\cos^n x}$

1. Предположим, что n – нечетное число, $n = 2k-1$.
Тогда посредством подстановок $\cos x = t$ (или, соответственно, $\sin x = t$) проблема интегрирования тригонометрических функций сводится к проблеме интегрирования рационального выражения:

$$\int \frac{dx}{\sin^{2k-1} x} = \int \frac{\sin x dx}{\sin^{2k} x} = \int \frac{\sin x dx}{(1-\cos^2 x)^k}$$
$$= -\int \frac{d(\cos x)}{(1-\cos^2 x)^k} = -\int \frac{dt}{(1-t^2)^k} \qquad |\text{подстановка } t = \cos x|,$$
$$\int \frac{dx}{\cos^{2k-1} x} = \int \frac{\cos x dx}{(1-\sin^2 x)^k} = \int \frac{dt}{(1-t^2)^k} \qquad |\text{подстановка } t = \sin x|.$$

2. Предположим, что n – четное число, $n = 2k$.
Тогда для понижения степени синуса можно воспользоваться тригонометрическим тождеством

$$\frac{1}{\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = 1 + \mathrm{ctg}^2 x.$$

Тогда для любого натурального числа k,

$$\frac{1}{\sin^{2k} x} = \left(\frac{1}{\sin^2 x}\right)^{k-1} \frac{1}{\sin^2 x} = (1+\operatorname{ctg}^2 x)^{k-1} \frac{1}{\sin^2 x} \qquad \Rightarrow$$

$$\int \frac{dx}{\sin^{2k} x} = \int (1+\operatorname{ctg}^2 x)^{k-1} \frac{dx}{\sin^2 x}.$$

Далее подстановка $t = \operatorname{ctg} x$ сразу приводит к элементарно вычисляемому интегралу:

$$\int (1+\operatorname{ctg}^2 x)^{k-1} \frac{dx}{\sin^2 x} = -\int (1+t^2)^{k-1} dt.$$

Аналогичным образом решается проблема вычисления интеграла $\int \frac{dx}{\cos^{2k} x}$: сначала используем тригонометрические тождества

$$\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x,$$

$$\frac{1}{\cos^{2k} x} = \left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)^{k-1} \frac{1}{\cos^2 x} = (1+\operatorname{tg}^2 x)^{k-1} \frac{1}{\cos^2 x},$$

а затем применяем подстановку $t = \operatorname{tg} x$:

$$\int \frac{dx}{\cos^{2k} x} = \int (1+\operatorname{tg}^2 x)^{k-1} \frac{dx}{\cos^2 x} = \int (1+t^2)^{k-1} dt. \qquad (43)$$

Примеры:

- $$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin x\, dx}{\sin^2 x} = -\int \frac{d(\cos x)}{1-\cos^2 x}\bigg|_{\cos x = t}$$
  $$= \int \frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{2}\ln\frac{1-t}{1+t} + C = \frac{1}{2}\ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x} + C.$$

- $$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\cos x\, dx}{\cos^2 x} = \int \frac{d(\sin x)}{1-\sin^2 x}\bigg|_{\sin x = t}$$
  $$= \int \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+t}{1-t} + C = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x} + C.$$

- $$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dx}{\sin(x+\pi/2)} = \int \frac{d(x+\pi/2)}{\sin(x+\pi/2)}$$
  $$= \frac{1}{2}\ln\frac{1-\cos(x+\pi/2)}{1+\cos(x+\pi/2)} + C = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x} + C.$$

- $$\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int (1+\operatorname{tg}^2 x) \frac{dx}{\cos^2 x}$$
  $$= \int (1+t^2)dt = t + \frac{t^3}{3} + C = \operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + C.$$

3.7.3. Интегралы вида $\int \mathrm{tg}^n x\,dx$, $\int \mathrm{ctg}^n x\,dx$

При $n=1$ и $n=2$ интегралы берутся элементарно, например,

$$\int \mathrm{tg}\,x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C, \qquad (44)$$

$$\int \mathrm{tg}^2 x dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \mathrm{tg}\,x - x + C. \qquad (45)$$

Если $n = 2, 3, \ldots$, то нужно предварительно понизить степень, используя тригонометрическое тождество

$$\mathrm{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1.$$

Тогда

$$\int \mathrm{tg}^n x dx = \int \mathrm{tg}^{n-2} x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx = \int \mathrm{tg}^{n-2} x \frac{dx}{\cos^2 x} - \int \mathrm{tg}^{n-2} x dx,$$

где

$$\int \mathrm{tg}^{n-2} x \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \mathrm{tg}^{n-2} x d(\mathrm{tg}\,x) = \frac{\mathrm{tg}^{n-1} x}{n-1} + C.$$

Следовательно,

$$\int \mathrm{tg}^n x dx = \frac{\mathrm{tg}^{n-1} x}{n-1} - \int \mathrm{tg}^{n-2} x dx. \qquad (46)$$

Проблема интегрирования $\mathrm{tg}^n x$ сведена к проблеме интегрирования $\mathrm{tg}^{n-2} x$. Повторным применением формулы (46) можно понизить степень тангенса до 1 или 2.

Аналогично,

$$\mathrm{ctg}^n x = \mathrm{ctg}^{n-2} x\ \mathrm{ctg}^2 x = \mathrm{ctg}^{n-2} x \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right) \qquad \Rightarrow$$

$$\int \mathrm{ctg}^n x dx = \int \mathrm{ctg}^{n-2} x \frac{dx}{\sin^2 x} - \int \mathrm{ctg}^{n-2} x dx \qquad \Rightarrow$$

$$\int \mathrm{ctg}^n x dx = -\frac{\mathrm{ctg}^{n-1} x}{n-1} - \int \mathrm{ctg}^{n-2} x dx. \qquad (47)$$

В частности,

$$\int \mathrm{ctg}^3 x dx = -\frac{\mathrm{ctg}^2 x}{2} - \int \mathrm{ctg} x\,dx$$

$$= -\frac{\mathrm{ctg}^2 x}{2} - \int \frac{\cos x}{\sin x}dx + C = -\frac{\mathrm{ctg}^2 x}{2} - \ln|\sin x| + C,$$

$$\int \mathrm{tg}^4 x dx = \frac{1}{3}\mathrm{tg}^3 x - \int \mathrm{tg}^2 x dx$$

$$= \frac{1}{3}\mathrm{tg}^3 x - (\mathrm{tg}\,x - x) + C = \frac{1}{3}\mathrm{tg}^3 x - \mathrm{tg}\,x + x + C.$$

3.7.4. Интегралы вида $\int \sin ax \cos bx dx$, $\int \sin ax \sin bx dx$, $\int \cos ax \cos bx dx$

Интегралы такого типа легко вычисляются с помощью тригонометрических тождеств

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)), \qquad (48)$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)), \qquad (49)$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)). \qquad (50)$$

Примеры.

- $\int \sin 2x \cos x dx = \frac{1}{2}\int(\sin 3x + \sin x)dx = -\frac{1}{6}\cos 3x - \frac{1}{2}\cos x + C$.
- $\int \sin 5x \sin 3x dx = \frac{1}{2}\int(\cos 2x - \cos 8x)dx = \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{16}\sin 8x + C$.
- $\int \cos 4x \cos 2x dx = \frac{1}{2}\int(\cos 2x + \cos 6x)dx = \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{12}\sin 6x + C$.

Иногда для преобразования подынтегральной функции нужно повторно воспользоваться тождествами (48) – (50). Так, чтобы вычислить интеграл

$$\int \sin 2x \cos 3x \cos 4x dx,$$

нужно преобразовать произведение синусов и косинусов в их аддитивную комбинацию.

Преобразуем произведение косинусов с помощью тождества (50):

$$\cos 3x \cos 4x = \frac{1}{2}(\cos x + \cos 7x).$$

Затем воспользуемся тождеством (48):

$$\begin{aligned}\sin 2x \cos 3x \cos 4x &= \frac{1}{2}\sin 2x(\cos x + \cos 7x)\\ &= \frac{1}{2}(\sin 2x \cos x + \sin 2x \cos 7x)\\ &= \frac{1}{4}(\sin x + \sin 3x + \sin(-5x) + \sin 9x).\end{aligned}$$

Проинтегрируем каждое слагаемое:

$$\begin{aligned}\int \sin 2x \cos 3x \cos 4x dx &= \frac{1}{4}\int(\sin x + \sin 3x - \sin 5x + \sin 9x)dx\\ &= -\frac{1}{4}\cos x - \frac{1}{12}\cos 3x + \frac{1}{20}\cos 5x - \frac{1}{36}\cos 9x + C.\end{aligned}$$

3.7.5. Универсальная тригонометрическая подстановка $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$

Рассмотрим рациональную функцию $R(\sin x, \cos x) = \dfrac{P(\sin x, \cos x)}{Q(\sin x, \cos x)}$, где $P(\sin x, \cos x)$ и $Q(\sin x, \cos x)$ – многочлены, содержащие только целые степени синуса и косинуса.

Такими функциями, в частности, являются выражения

$$\frac{2-3\sin x}{7-4\cos^2 x+2\sin x}, \qquad \frac{1}{1+\sqrt{3}\cos^5 x}, \qquad \frac{\cos x}{2+5\cos^3 x\sin x},$$

тогда как выражение $\dfrac{1}{1+\sqrt{\cos x}}$ не относится к их числу.

Теорема. Пусть $R(\sin x, \cos x)$ – рациональная функция относительно синуса и косинуса. Тогда подстановка $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$ преобразует $\int R(\sin x, \cos x)dx$ в интеграл от рациональной функции $f(t)$,

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int f(t)dt.$$

Замечание. Интегрирование рациональной функции не выходит за рамки применения соответствующей методики. Следовательно, теорема утверждает, что проблема интегрирования выражения $R(\sin x, \cos x)$ сводится к ранее изученной.

Доказательство. Пусть $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$. Чтобы выразить $\sin x$ и $\cos x$ через переменную t, воспользуемся тригонометрическими тождествами

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}, \tag{51}$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}, \tag{52}$$

$$\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2} = 1. \tag{53}$$

Тогда

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \tag{54}$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\operatorname{tg}^2(\frac{x}{2})}{1+\operatorname{tg}^2(\frac{x}{2})} = \frac{1-t^2}{1+t^2}. \tag{55}$$

Выразим дифференциал dx через dt: $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{2} = \operatorname{arctg} t \quad \Rightarrow$

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}. \tag{56}$$

Следовательно,

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2})\frac{2dt}{1+t^2} = \int f(t)dt,$$

где $f(t) = R(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2})\frac{2}{1+t^2}$ – некоторая рациональная функция.

Пример 1. Найти $\int \frac{dx}{\sin x}$, применив универсальную тригонометрическую подстановку $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

Решение. Используя формулы (54) и (56), получаем:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}} \frac{2dt}{(1+t^2)} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\operatorname{tg}\frac{x}{2}| + C.$$

Пример 2. Вычислить $\int \frac{dx}{2+\cos x - \sin x}$.

Решение: Пусть $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$. Тогда с учетом формул (54) – (56), получаем

$$\int \frac{dx}{2+\cos x-\sin x} = \int \frac{1}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2} - \frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2}$$

$$= 2\int \frac{dt}{2(1+t^2)+1-t^2-2t} = 2\int \frac{dt}{t^2-2t+3} = 2\int \frac{dt}{(t+1)(t-3)}.$$

Разлагаем рациональную функцию на простые дроби и интегрируем:

$$2\int \frac{dt}{(t+1)(t-3)} = \frac{1}{2}(\int \frac{dt}{t-3} - \int \frac{dt}{t+1})$$

$$= \frac{1}{2}(\ln|t-3| - \ln|t+1|) + C = \frac{1}{2}\ln|\frac{t-3}{t+1}| + C.$$

Делаем обратную подстановку $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$:

$$\int \frac{dx}{2+\cos x-\sin x} = \frac{1}{2}\ln|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-3}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}| + C.$$

3.7.6. Другие тригонометрические подстановки

Универсальная тригонометрическая подстановка $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ формально решает проблему интегрирования любых рациональных выражений $R(\sin x, \cos x)$. Однако существует несколько частных случаев, когда применение других подстановок преобразует $\int R(\sin x, \cos x)dx$ в интегралы от более простых рациональных функций $f(t)$, что заметно понижает трудоемкость вычислений. Рассмотрим такие случаи.

1. Если
$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$
то $\int R(\sin x, \cos x)dx \quad \Rightarrow \quad \int f(t)dt$ подстановкой $t = \cos x$.

2. Если
$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$
то $\int R(\sin x, \cos x)dx \quad \Rightarrow \quad \int f(t)dt$ подстановкой $t = \sin x$.

3. Если
$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x),$$
то $\int R(\sin x, \cos x)dx \quad \Rightarrow \quad \int f(t)dt$ подстановкой $t = \operatorname{tg} x$ (или $t = c\operatorname{tg} x$).

Доказательство.
Пусть $R(\sin x, \cos x)$ является нечетной функцией относительно $\sin x$,
$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x).$$
Тогда
$$R(\sin x, \cos x) = \sin x \frac{R(\sin x, \cos x)}{\sin x} = \sin x \cdot R_1(\sin x, \cos x), \qquad (57)$$
где $R_1(\sin x, \cos x) = \dfrac{R(\sin x, \cos x)}{\sin x}$ – рациональная четная функция относительно $\sin x$. Следовательно, $R_1(x)$ содержит только четные степени синусов и поэтому представляет собой некоторую рациональную функцию относительно $\cos x$:
$$R_1(\sin x, \cos x) = R_2(\sin^2 x, \cos x) = R_2(1 - \cos^2 x, \cos x) = f(\cos t). \qquad (58)$$
Учитывая (57) и (58) и выполнив подстановку $\cos x = t$, получаем
$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int f(\cos x)\sin x\, dx = \int f(t)dt,$$
что и требовалось доказать.

Доказательство утверждений, сформулированных в пунктах 2 и 3, предоставляется читателю.

Пример 1. Вычислить $\int \frac{\sin^3 x}{4-\cos^2 x} dx$.

Решение. Подынтегральная функция обладает симметрией типа

$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$

что указывает на подстановку $t = \cos x$.

Учитывая, равенства $dt = -\sin x dx$ и

$$\sin^3 x dx = \sin^2 x \sin x dx = (1-\cos^2 x)\sin x dx = -(1-t^2)dt,$$

получаем:

$$\int \frac{\sin^3 x}{4-\cos^2 x} dx = -\int \frac{1-t^2}{4-t^2} dt = \int (-1+\frac{3}{4-t^2})dt = -t + 3\int \frac{dt}{4-t^2}$$

$$= -t + \frac{3}{4}\ln\left|\frac{t+2}{t-2}\right| + C = -\cos x + \frac{3}{4}\ln\left|\frac{\cos x+2}{\cos x-2}\right| + C.$$

Пример 2. Вычислить $\int \frac{\sin x \cos x}{3\sin x+1} dx$.

Решение. Здесь мы имеем дело со Случаем 2.

Следовательно, заведомо хорошей подстановкой является $t = \sin x$, которая влечет за собой $dt = \cos x dx$ и, таким образом,

$$\int \frac{\sin x \cos x}{3\sin x+1} dx = \int \frac{t}{3t+1} dt = \frac{1}{3}\int (1-\frac{1}{3t+1})dt$$

$$= \frac{1}{3}(t - \frac{1}{3}\ln|3t+1|) + C = \frac{1}{3}(\sin x - \frac{1}{3}\ln|3\sin x+1|) + C.$$

Пример 3. Вычислить $\int \frac{dx}{2\sin x \cos x - 4\sin^2 x + 5}$.

Решение. Подынтегральная функция остается неизменной при одновременном изменении знаков перед $\sin x$ и $\cos x$, что соответствует Случаю 3.

Преобразуем подынтегральное выражение:

$$\frac{dx}{2\sin x\cos x - 4\sin^2 x + 5} = \frac{dx}{2\sin x\cos x - 4\sin^2 x + 5(\sin^2 x + \cos^2 x)}$$

$$= \frac{dx}{\sin^2 x + 2\sin x\cos x + 5\cos^2 x} = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x + 5}\cdot\frac{dx}{\cos^2 x}.$$

Сделаем подстановку $t = \operatorname{tg} x$ и проинтегрируем полученное рациональное выражение:

$$\int \frac{dx}{2\sin x\cos x - 4\sin^2 x + 5} = \int \frac{dt}{t^2+2t+5}$$

$$= \int \frac{d(t+1)}{(t+1)^2+4} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t+1}{2} + C = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} x+1}{2} + C.$$

Таблица 4. Интегрирование выражений вида $R(\sin x, \cos x)$: подстановки и сопутствующие формулы.

N	Свойства симметрии	Подстановки	Формулы
1	$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$	$\cos x = t$	$-\sin x dx = dt$ $\sin^2 x = 1 - t^2$
2	$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$	$\sin x = t$	$\cos x dx = dt$ $\cos^2 x = 1 - t^2$
3	$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$	$\operatorname{tg} x = t$	$\frac{dx}{\cos^2 x} = dt$ $\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$ $\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$
		$\operatorname{ctg} x = t$	$\frac{dx}{\sin^2 x} = -dt$ $\sin^2 x = \frac{1}{1+t^2}$ $\cos^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$
4	Отсутствие симметрии четности-нечетности	$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$	$dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

Упражнения. Вычислить следующие интегралы:

1) $\int \sin^2 3x dx$; 2) $\int \cos^3 2x dx$; 3) $\int \frac{\cos^3 5x}{\sin 5x} dx$;

4) $\int \frac{dx}{\sin 7x}$; 5) $\int \frac{dx}{\sin^4 3x}$; 6) $\int \operatorname{tg}^3 4x dx$;

7) $\int \cos x \cos 4x dx$; 8) $\int \cos 5x \sin 2x dx$; 9) $\int \frac{\cos^3 x}{25 + \sin^2 x} dx$;

10) $\int \frac{\sin 4x \cos 4x}{2 - \cos 4x} dx$; 11) $\int \frac{dx}{\cos x + \sin x}$; 12) $\int \frac{dx}{3 + \cos x + 2\sin x}$;

13) $\int \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x} dx$; 14) $\int \frac{dx}{6\sin x \cos x + 8\cos^2 x + 1}$.

3.8. Интегрирование выражений, содержащих радикалы

3.8.1. Иррациональности вида $\sqrt[n]{ax+b}$, $\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$

1. Избавление от иррациональности вида $\sqrt[n]{ax+b}$ достигается подстановкой $ax+b=t^n$. При этом $\sqrt[n]{ax+b}=t$ и $dx=\dfrac{1}{a}nt^{n-1}dt$.

Пример 1. Вычислить $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x}+3}$.

Решение. Подстановка $x=t^2$ дает $\sqrt{x}=t$ и $dx=2tdt$. Тогда

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}+3}=2\int\frac{tdt}{t+3}=2\int\frac{(t+3-3)dt}{t+3}$$

$$=2\int dt-6\int\frac{dt}{t+3}=2t-6\ln|t+3|+C=2\sqrt{x}-6\ln|\sqrt{x}+3|+C.$$

2. Чтобы одновременно избавиться от радикалов $\sqrt[k]{x}$ и $\sqrt[m]{x}$, достаточно сделать подстановку $x=t^n$, где n – наименьшее общее кратное показателей степени k и m.

Пример 2. Вычислить $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

Подстановка $x=t^6$ дает $\sqrt{x}=t^3$, $\sqrt[3]{x}=t^2$ и $dx=6t^5dt$. Тогда

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}=6\int\frac{t^5dt}{t^3+t^2}=6\int\frac{t^3dt}{t+1}.$$

Приведем рациональное выражение $\dfrac{t^3}{t+1}$ к правильной дроби:

$$\frac{t^3}{t+1}=\frac{((t+1)-1)^3}{t+1}=(t+1)^2-3(t+1)+3-\frac{1}{t+1}.$$

Интегрируем почленно и затем возвращаемся к исходной переменной x:

$$\int\frac{t^3dt}{t+1}=\frac{(t+1)^3}{3}-\frac{3(t+1)^2}{2}+3t-\ln|t+1|+C$$

$$=\frac{(\sqrt[6]{x}+1)^3}{3}-\frac{3(\sqrt[6]{x}+1)^2}{2}+3\sqrt[6]{x}-\ln|\sqrt[6]{x}+1|+C.$$

Таким образом, $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}=2(\sqrt[6]{x}+1)^3-9(\sqrt[6]{x}+1)^2+18\sqrt[6]{x}-6\ln|\sqrt[6]{x}+1|+C$.

3. Избавление от иррациональности вида $\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$ достигается подстановкой $\dfrac{ax+b}{cx+d}=t^n$. При этом $x=\dfrac{t^nd-b}{a-t^nc}$.

3.8.2. Интегралы, содержащие радикалы вида $\sqrt{a^2 \pm x^2}$, $\sqrt{x^2 - a^2}$

3.8.2.1. Тригонометрические подстановки

1. Чтобы избавиться от радикалов вида $\sqrt{a^2 - x^2}$, можно применить тригонометрическую подстановку $x = a\sin t$. При этом

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2 - x^2} &= \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t} \\ &= \sqrt{a^2(1-\sin^2 t)} = \sqrt{a^2\cos^2 t} = a\cos t,\end{aligned} \tag{59}$$

$$dx = a\cos t dt.$$

Тот же эффект достигается с помощью подстановки $x = a\cos u$. В этом случае $\sqrt{a^2 - x^2} = a\sin t$ и $dx = -a\sin t dt$.

2. Иррациональность вида $\sqrt{a^2 + x^2}$ устраняется использованием подстановки $x = a\operatorname{tg} t$ благодаря тригонометрическому тождеству

$$1 + \operatorname{tg}^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}. \tag{60}$$

При этом

$$\sqrt{a^2 + x^2} = \sqrt{a^2 + a^2\operatorname{tg}^2 t} = \sqrt{a^2(1 + \operatorname{tg}^2 t)} = \sqrt{\frac{a^2}{\cos^2 t}} = \frac{a}{\cos t}, \tag{61}$$

$$dx = \frac{adt}{\cos^2 t}.$$

Другой возможной подстановкой является $x = a\operatorname{ctg} t$, которая влечет

$$\sqrt{a^2 + x^2} = \sqrt{a^2(1 + \operatorname{ctg}^2 t)} = \sqrt{\frac{a^2}{\sin^2 t}} = \frac{a}{\cos t}, \tag{62}$$

$$dx = -\frac{adt}{\sin^2 t}$$

3. Тригонометрическое тождество (60) позволяет также избавиться от радикалов вида $\sqrt{x^2 - a^2}$. Формула (60), записанная в виде

$$\frac{1}{\cos^2 t} - 1 = \operatorname{tg}^2 t,$$

показывает, что разность $x^2 - a^2$ представляет собой полный квадрат, если $x = \dfrac{a}{\cos t}$. При этом $dx = \dfrac{a\sin t}{\cos^2 t}dt$,

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{\frac{a^2}{\cos^2 t} - a^2} = \sqrt{a^2\operatorname{tg}^2 t} = a\operatorname{tg} t. \tag{63}$$

Другой возможной подстановкой является $x=\dfrac{a}{\sin t}$, которая дает

$$\sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{\frac{a^2}{\sin^2 t}-a^2}=\sqrt{a^2\operatorname{ctg}^2 t}=a\operatorname{ctg} t, \qquad (64)$$

$$dx=-\frac{a\cos t}{\sin^2 t}dt.$$

Пример 1. Вычислить $\int\dfrac{\sqrt{3-x^2}}{x^2}dx$.

Решение. Подстановка $x=\sqrt{3}\sin t$ дает

$$\int\frac{\sqrt{3-x^2}}{x^2}dx=\int\frac{\sqrt{3}\cos t}{3\sin^2 t}\sqrt{3}\cos t dt$$

$$=\int\operatorname{ctg}^2 t dt=\int\left(\frac{1}{\sin^2 t}-1\right)dt=-\operatorname{ctg} t-t+C.$$

Решение выражено в терминах переменной t. Чтобы записать его в терминах переменной x, выполним следующие преобразования:

$$x=\sqrt{3}\sin t \qquad \Rightarrow \qquad t=\arcsin\frac{x}{\sqrt{3}},$$

$$\operatorname{ctg} t=\frac{\cos t}{\sin t}=\frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin t}=\frac{\sqrt{1-\sin^2\arcsin\frac{x}{\sqrt{3}}}}{\sin\arcsin\frac{x}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{1-\frac{x^2}{3}}}{\frac{x}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3-x^2}}{x}.$$

Таким образом,

$$\int\frac{\sqrt{3-x^2}}{x^2}dx=-\frac{\sqrt{3-x^2}}{x}-\arcsin\frac{x}{\sqrt{3}}+C.$$

Пример 2. Вычислить $\int\dfrac{\sqrt{9+x^2}}{x^4}dx$.

Решение. Пусть $x=3\operatorname{tg} t$. Тогда $dx=\dfrac{3dt}{\cos^2 t}$ и $\sqrt{9+x^2}=\dfrac{3}{\cos t}$ $\Rightarrow$

$$\int\frac{\sqrt{9+x^2}}{x^4}dx=\frac{9}{81}\int\frac{dt}{\operatorname{tg}^4 t\cos^3 t}$$

$$=\frac{1}{9}\int\frac{\cos t dt}{\sin^4 t}=\frac{1}{9}\int\frac{d(\sin t)}{\sin^4 t}=-\frac{1}{27\sin^3 t}+C.$$

Осталось записать решение в терминах исходной переменной x.

Учитывая равенство $t=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{3}$ и тождество $\operatorname{tg} t=\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}\dfrac{x}{3})=\dfrac{x}{3}$, находим

$$\sin t = \frac{\sin t}{\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t}} = \frac{\operatorname{tg} t}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 t}} = \frac{x/3}{\sqrt{1 + (x/3)^2}} = \frac{x}{\sqrt{9 + x^2}} .$$

Следовательно,

$$\int \frac{\sqrt{9 + x^2}}{x^4} dx = -\frac{(9 + x^2)\sqrt{9 + x^2}}{27x^3} + C .$$

Пример 3. Вычислить $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 - 5}}$.

Решение. Подстановка $x = \frac{\sqrt{5}}{\sin t}$ влечет $dx = -\frac{\sqrt{5}\cos t}{\sin^2 t} dt$ и $\sqrt{x^2 - 5} = \sqrt{5} \operatorname{ctg} t$.

Тогда

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 - 5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5\sqrt{5}} \int \frac{\cos t \sin^2 t dt}{\operatorname{ctg} t \sin^2 t} = -\frac{1}{5}\int \sin t dt = \frac{\cos t}{5} + C .$$

Выразим $\cos t$ через переменную x: $x = \frac{\sqrt{5}}{\sin t} \quad \Rightarrow \quad \sin t = \frac{\sqrt{5}}{x} \quad \Rightarrow$

$$\cos u = \sqrt{1 - \sin^2 t} = \sqrt{1 - (\frac{\sqrt{5}}{x})^2} = \frac{\sqrt{x^2 - 5}}{x} .$$

Окончательно имеем: $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 - 5}} = \frac{\sqrt{x^2 - 5}}{5x} + C$.

Замечание. Чтобы избавиться от радикалов $\sqrt{\pm x^2 + bx + c}$, нужно предварительно выделить полный квадрат в выражении под знаком радикала, преобразовав его к виду $\sqrt{\pm (x - a)^2 + \text{const}}$. Затем подстановка $y = x - a$ сводит проблему к одной из вышерассмотренных.

3.8.2.2. Гиперболические подстановки

1. Гиперболическое тождество $1 - \operatorname{th}^2 z = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 z}$ (см. Приложение 1) подсказывает сразу две подстановки, $x = a \operatorname{th} z$ и $x = \frac{a}{\operatorname{ch} z}$, которые позволяют устранить радикалы вида $\sqrt{a^2 - x^2}$.

   Действительно, полагая $x = a \operatorname{th} z$, мы имеем

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 z} = \frac{a}{\operatorname{ch} z}, \qquad dx = \frac{a}{\operatorname{ch}^2 z} dz .$$

   Аналогично, подстановка $x = \frac{a}{\operatorname{ch} z}$ дает

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a\sqrt{1 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 z}} = a\sqrt{\operatorname{th}^2 z} = a \operatorname{th} z , \qquad dx = -\frac{a \operatorname{sh} z}{\operatorname{ch}^2 z} dz .$$

2. Иррациональность вида $\sqrt{a^2+x^2}$ может быть устранена подстановкой $x = a\,\mathrm{sh}\,z$ (благодаря тождеству $1+\mathrm{sh}^2 z = \mathrm{ch}^2 z$), равно как и подстановкой $x = \dfrac{a}{\mathrm{sh}\,z}$ (благодаря тождеству $1+\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 z} = \mathrm{cth}^2 z$).

3. Гиперболическое тождество $\mathrm{ch}^2 z - 1 = \mathrm{sh}^2 z$ указывает на подстановку $x = a\,\mathrm{ch}\,z$, позволяющую избавиться от радикалов вида $\sqrt{x^2-a^2}$.

Пример. Вычислить $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$.

Решение. Полагаем $x = a\,\mathrm{sh}\,z$, что влечет $dx = a\,\mathrm{ch}\,z\,dz$. Тогда

$$\sqrt{x^2+a^2} = a\sqrt{\mathrm{sh}^2 z+1} = a\,\mathrm{ch}\,z \;\Rightarrow\; \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \int dz = z + C.$$

Чтобы выразить z через x, нужно предварительно решить уравнение $x = a\,\mathrm{sh}\,z$ относительно $e^z = t$:

$$x = \frac{a}{2}(e^z - e^{-z}) \quad\Rightarrow\quad \frac{2x}{a} = e^z - \frac{1}{e^z} \quad\Rightarrow\quad \frac{2x}{a} = t - \frac{1}{t} \quad\Rightarrow$$

$$t^2 - \frac{2x}{a}t - 1 = 0 \quad\Rightarrow\quad t = \frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2}+1} = \frac{1}{a}(x+\sqrt{x^2+a^2}).$$

Равенство $e^z = \dfrac{1}{a}(x+\sqrt{x^2+a^2})$ означает, что $z = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) - \ln a$.

Таким образом, $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = z + C = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + \mathrm{const}$.

3.8.3. Интегралы вида $\int x^m (a+bx^n)^p\,dx$

Теорема Чебышева. Пусть *m*, *n* и *p* – рациональные числа. Тогда интеграл $\int x^m (a+bx^n)^p\,dx$ может быть представлен в виде конечной комбинации элементарных функций, если и только если среди чисел p, $\dfrac{m+1}{n}$ и $\dfrac{m+1}{n}+p$ имеется целое число.

Доказательство. Докажем достаточность условий теоремы.

1) Предположим, что число p – целое. Обозначим через s наименьшее общее кратное знаменателей дробей $m = m_1/m_2$ и $n = n_1/n_2$. Тогда подстановкой $x = t^s$ интеграл преобразуется к интегралу от рациональной функции, что решает проблему его вычисления.

2) Сделаем подстановку $x^n = z$. Тогда

$$\int x^m (a+bx^n)^p\,dx = \int z^{\frac{m}{n}} (a+bz)^p \frac{1}{n} z^{\frac{1}{n}-1} dz = \frac{1}{n}\int z^{\frac{m+1}{n}-1} (a+bz)^p\,dz. \quad (65)$$

Если $\frac{m+1}{n}$ – целое число, то подстановка $a+bz=t^k$ (где k – знаменатель дроби рационального числа p) приводит (65) к интегралу от рациональной функции.

3) Выполнив тождественное преобразование, представим интеграл (65) в виде

$$\int z^{\frac{m+1}{n}-1} (a+bz)^p\,dz = \int z^{\frac{m+1}{n}+p-1} \left(\frac{a+bz}{z}\right)^p dz. \quad (66)$$

Если $\frac{m+1}{n}+p$ – целое число, то подстановкой $\frac{a+bz}{z}=t^s$ (где k – знаменатель дроби рационального числа p) интеграл (66) преобразуется к интегралу от рациональной функции.

Таблица 5. Подстановки Чебышева.

$\int x^m (a+bx^n)^p\,dx$	
Целые	Подстановки
p	$x=t^s$, где s – наименьшее общее кратное знаменателей рациональных дробей m и n
$\frac{m+1}{n}$	$a+bx^n=t^k$, где k – знаменатель дроби рационального числа p
$\frac{m+1}{n}+p$	$\frac{a}{x^n}+b=t^k$, где k – знаменатель дроби рационального числа p

---

Пример 1. Вычислить $\int \sqrt[4]{1+x^2}\,dx$.

Решение. Здесь $p=\frac{1}{4}$, $\frac{m+1}{n}=\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2}$, $\frac{m+1}{n}+p=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$.

Ни одно из этих чисел не является целым.

Следовательно, интеграл не выражается через конечные комбинации элементарных функций.

Пример 2. Вычислить $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}dx$.

Решение. Запишем интеграл в виде $\int x^{-1}(1+x^2)^{1/2}dx$.

Очевидно, что $p=\dfrac{1}{2}$, $m=-1$, $n=2$ $\quad\Rightarrow\quad$ $\dfrac{m+1}{n}=\dfrac{-1+1}{2}=0$.

Поскольку число $\dfrac{m+1}{n}$ является целым, то следует применить подстановку $x^2+1=t^2$.

Вычисления будут упрощены, если предварительно преобразовать подынтегральное выражение, выделив комбинацию x^2+1 в явном виде:

$$\int\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}dx=\int\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}xdx=\frac{1}{2}\int\frac{\sqrt{1+x^2}}{(x^2+1)-1}d(x^2+1)$$

$$=\frac{2}{2}\int\frac{t}{t^2-1}tdt=\int\frac{t^2}{t^2-1}dt$$

$$=\int(1+\frac{1}{t^2-1})dt=t+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C.$$

Чтобы вернуться к переменной *x*, нужно сделать обратную подстановку $t=\sqrt{x^2+1}$. Окончательный результат имеет вид

$$\int\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}dx=\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}\right|+C\,.$$

Пример 3. Преобразовать $\int x\sqrt[3]{1+x^3}dx$ к интегралу от рациональной функции.

Решение. Перепишем интеграл в виде $\int x^1(1+x^3)^{1/3}dx$.

В данном случае $p=\dfrac{1}{3}$, $m=1$, $n=2$.

Проверим выполнение условий интегрируемости:

$$\frac{m+1}{n}=\frac{2}{3},\qquad \frac{m+1}{n}+p=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=1.$$

Число $\dfrac{m+1}{n}+p$ является целым, что диктует подстановку $\dfrac{1}{x^3}+1=t^3$.

Преобразуем подынтегральное выражение, выделив комбинацию $\dfrac{1}{x^3}+1=t^3$ в явном виде.

$$\int x\sqrt[3]{1+x^3}dx=\int\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}+1}\;x^2dx=\frac{1}{3}\int\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}+1}\;d(x^3)\,.$$

Учитывая равенства $x^3=(t^3-1)^{-1}$ и $d(x^3)=-(t^3-1)^{-2}3tdt$, приводим интеграл к заданному виду:

$$\int x\sqrt[3]{1+x^3}dx=\int\frac{t^2}{(t^3-1)^2}dt\,.$$

3.9. Таблица наиболее важных интегралов

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad (n \neq -1)$	$\int \frac{dx}{x-a} = \ln\lvert x-a \rvert + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
$\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$	$\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$
$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + C$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x + C$
$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \begin{cases} \arcsin\frac{x}{a} + C \\ -\arccos\frac{x}{a} + C \end{cases}$	$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \begin{cases} \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + C \\ -\frac{1}{a}\mathrm{arcctg}\frac{x}{a} + C \end{cases}$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}) + C$	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\frac{x-a}{x+a} + C$
$\int \mathrm{tg}\, x\, dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + C$	$\int \mathrm{ctg}\, x dx = \ln\lvert\sin x\rvert + C$
$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left\lvert \mathrm{tg}\frac{x}{2} \right\rvert + C$	$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left\lvert \mathrm{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right\rvert + C$
$\int e^{ax} \sin bx dx = \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + C$	
$\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{a \cos bx + b \sin bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + C$	
$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{n+1}} = \frac{2n-1}{2a^2}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} + \frac{1}{2a^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^n}$	
$\int \mathrm{tg}^n x dx = \frac{\mathrm{tg}^{n-1} x}{n-1} - \int \mathrm{tg}^{n-2} x\, dx$	
$\int \mathrm{ctg}^n x\, dx = -\frac{\mathrm{ctg}^{n-1} x}{n-1} - \int \mathrm{ctg}^{n-2} x\, dx$	

3.10. Примеры неберущихся интегралов

Любой из нижеприведенных интегралов не может быть выражен через конечную комбинацию элементарных функций.

$$\int e^{x^2}dx, \qquad \int x^2 e^{x^2}dx, \qquad \int x^{2n}e^{x^2}dx \text{ (где } n=1,2,\ldots\text{)},$$

$$\int \frac{e^x}{x}dx, \qquad \int \frac{e^x}{x^2}dx, \qquad \int \frac{e^x}{x^n}dx \text{ (где } n=1,2,\ldots\text{)},$$

$$\int \sin x^2 dx, \quad \int \cos x^2 dx, \quad \int x^2 \sin x^2 dx, \qquad \int x^2 \cos x^2 dx, \qquad \ldots,$$

$$\int \frac{\sin x}{x}dx, \qquad \int \frac{\cos x}{x}dx, \qquad \int \frac{\sin x}{x^2}dx, \qquad \int \frac{\cos x}{x^2}dx, \quad \ldots,$$

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{x}}dx, \qquad \int \frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx, \qquad \int \frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx, \quad \ldots,$$

$$\int \frac{dx}{\ln x}, \qquad \int x^x dx, \qquad \int \frac{\operatorname{arctg} x}{x}dx, \qquad \int \frac{\ln x}{x+1}dx.$$

Некоторые из этих интегралов имеют свои названия и относятся к числу специальных функций, другие интегралы – выражаются через специальные функции.

По-существу, специальные функции мало чем отличаются от элементарных функций. Например, специальная функция $\operatorname{erf}(x)$, называемая интегралом вероятностей, представляет собой (с точностью до постоянного множителя) первообразную элементарной функции e^{-x^2}, то есть,

$$\frac{d}{dx}\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}.$$

Интегральная показательная функция $E_1(x)$ является первообразной функции $-\frac{e^{-x}}{x}$, т.е., $\frac{d}{dx}E_1(x) = -\frac{e^{-x}}{x}$. Через эту функцию можно выразить, в частности, интеграл $\int \frac{e^x}{a^2+x^2}dx$.

Интегральный синус обозначается символом $\operatorname{Si}(x)$ и является первообразной функции $\frac{\sin x}{x}$, и т.д.

Подобным же образом можно было бы определить и обычные элементарные функции. Так, $\ln x$ представляет собой первообразную функции $1/x$:

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}.$$

4. ОПРЕДЕЛЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

4.1. Определение

Пусть функция $f(x)$ определена на интервале $[a,b]$. Разобьем интервал $[a,b]$ на n элементов $\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n$.

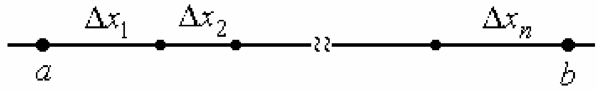


Рис. 1. Разбиение интервала $[a,b]$ на элементы.

Внутри каждого промежутка Δx_k выберем произвольным образом точку $x_k \in \Delta x_k$, вычислим значения функции в этих точках и составим произведения $f(x_k)\Delta x_k$. Сумма полученных произведений называется **интегральной суммой**,

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k \,. \qquad (1)$$

Выполним предельный переход $n \to \infty$ так, чтобы все $\Delta x_k \to 0$.

Если существует предел интегральной суммы, который не зависит от способа разбиения интервала $[a,b]$ и выбора точек x_k, то этот предел называется **определенным интегралом** от функции $f(x)$ по промежутку $[a,b]$ и обозначается тем же символом, что и неопределенный интеграл, $\int_a^b f(x)dx$, но с указанием границ a и b.

Таким образом,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x \to o} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k \,. \qquad (2)$$

(Заметим, что если $\max \Delta x \to 0$, то все $\Delta x_k \to 0$ и $n \to \infty$.)

Числа a и b называются, соответственно, нижним и верхним пределами. Процедура вычисления интеграла называется интегрированием.

4.2. Геометрическая интерпретация

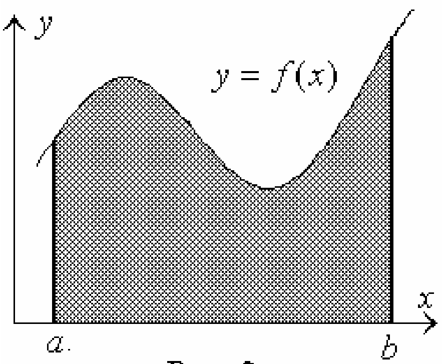


Рис. 2

Рассмотрим задачу о вычислении площади области, ограниченной сверху кривой $y = f(x)$, снизу – осью $0x$, а с боков – вертикальными отрезками $x = a$ и $x = b$ (как это показано на Рис. 2).

Идея решения заключается в том, чтобы выразить полную площадь через бесконечно малые ее части.

Разобьем интервал $[a,b]$ на элементы $\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n$, которые будем рассматривать как основания прямоугольников.

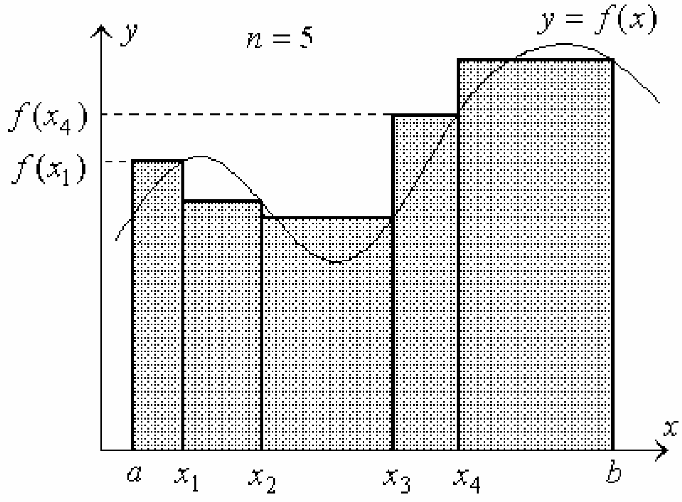


Рис. 3

За высоту k-го прямоугольника примем $y_k = f(x_k)$, где $x_k \in \Delta x_k$.
Тогда по формуле $f(x_k)\Delta x_k$ можно вычислить площадь каждого прямоугольника.
В результате мы получаем n маленьких площадей, которые в сумме приближенно дадут всю искомую площадь, $\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k$.

Точность вычисления площади этим методом будет возрастать, если брать все меньшие и меньшие основания Δx_k, т.е. если разбивать промежуток $[a,b]$ на все большее число все меньших частей, увеличивая тем самым число аппроксимирующих прямоугольников.

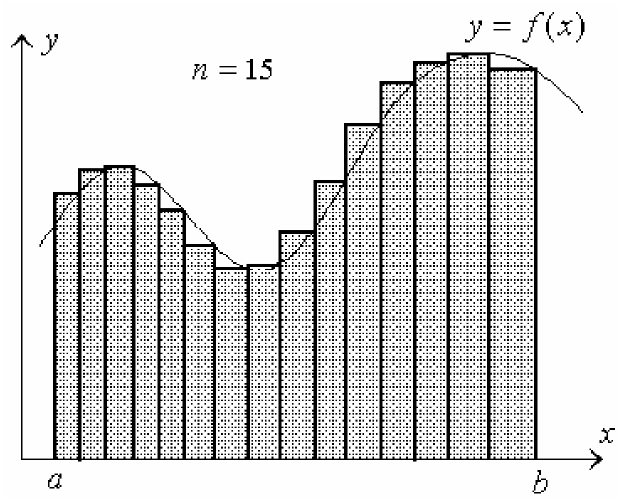


Рис. 4

В конце концов мы придем к следующему, теперь уже точному выражению для площади:

$$S = \lim_{\max \Delta x \to o} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)dx. \qquad (3)$$

Таким образом,

> Если $f(x) \ge 0$ на промежутке $[a,b]$, то
> интеграл $\int_a^b f(x)dx$ равен площади области,
> ограниченной сверху кривой $y = f(x)$,
> снизу – осью $0x$,
> а с боков – вертикальными отрезками $x = a$ и $x = b$.

4.3. Физическая интерпретация

Рассмотрим задачу о вычислении пути, пройденному частицей за промежуток времени от t_1 до t_2, если частица движется с переменной скоростью $v(t)$.

Чтобы выразить полное расстояние s через бесконечно малые части, разобьем промежуток $[t_1,t_2]$ на такие малые интервалы $\Delta t_1, \Delta t_2, \cdots, \Delta t_n$, что изменением скорости частицы в пределах каждого интервала можно пренебречь. Пусть $v_k = v(t_k)$ – скорость частицы на промежутке времени Δt_k. Тогда расстояние Δs_k, пройденное за время Δt_k, можно найти по формуле $\Delta s_k = v_k\, \Delta t_k$. Полный путь s представляет собой сумму маленьких расстояний Δs_k:

$$s \approx \sum_{k=1}^{n} v_k\, \Delta t_k\,. \qquad (4)$$

Равенство (4) является приближенным, поскольку скорость частицы хотя и немножко, но изменяется за время Δt. Разбивая интервал $[t_1,t_2]$ на все меньшие отрезки и выполнив предельный переход $n \to \infty$ и все $\Delta t \to 0$, мы получаем следующую точную формулу:

$$s = \lim_{\max \Delta t \to 0} \sum_{k=1}^{n} v_k\, \Delta t_k = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt\,. \qquad (5)$$

4.4. Свойства интегралов

1. Интеграл не зависит от символа, используемого для обозначения переменной интегрирования:
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt\,.$$
2. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:
$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx\,.$$
3. Интеграл от алгебраической суммы интегрируемых функций равен алгебраической сумме интегралов:
$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx\,.$$
4. $$\int_a^a f(x)dx = 0\,.$$
5. $$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx\,.$$

6. $$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Это свойство вполне очевидно, если $c \in [a, b]$ (см. Рис. 5).

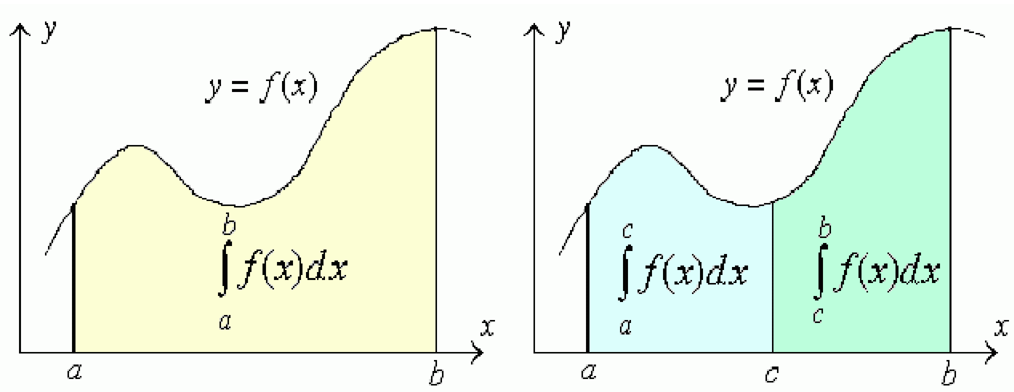


Рис. 5a. Свойство 6 (случай $c \in [a, b]$).

Однако оно остается справедливым и в случае, когда $c \notin [a, b]$ – при условии, что существуют интегралы $\int_a^c f(x)dx$ и $\int_c^b f(x)dx$:

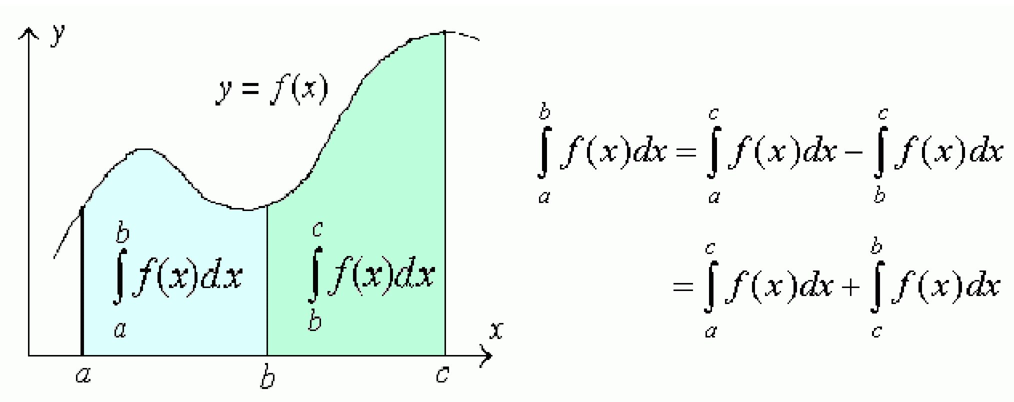


Рис. 5b. Свойство 6 (случай $c \notin [a, b]$).

7. $$\int_a^b f(x)dx = f(\bar{x})\,(b-a), \qquad (a < \bar{x} < b). \qquad \text{(Теорема о среднем.)}$$

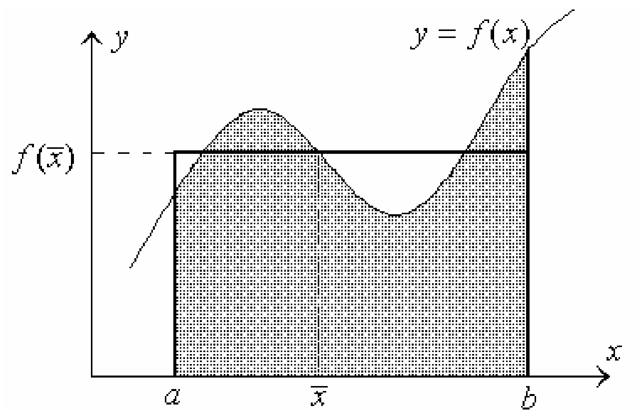


Рис. 6. Площадь под кривой $y = f(x)$ на интервале [a, b] равна площади прямоугольника с основанием b - a и высотой $f(\bar{x})$.

8. $$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx, \quad (a<b).$$

9. Если $g(x) \le f(x)$ на $[a,b]$, то
$$\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)dx.$$

10. Если $m \le f(x) \le M$ на $[a,b]$, то
$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

4.5. Основные теоремы

Докажем 2 теоремы, устанавливающие связь между определенными и неопределенными интегралами.

Теорема 1. Если функция $f(x)$ непрерывна на (a,b), то $\int_a^x f(t)dt$ является первообразной для $f(x)$:
$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x). \qquad (6)$$

Доказательство. Согласно определению производной,
$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x}.$$
Тогда (с учетом Свойства 6)
$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt}{\Delta x}.$$
Применяя теорему о среднем к промежутку $[x, x+\Delta x]$, представим интеграл в числителе в виде
$$\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = f(\bar{x})\Delta x,$$
где $\bar{x} \in (x, x+\Delta x)$ и $\bar{x} \to x$ при $\Delta x \to 0$.
Следовательно,
$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\bar{x})\Delta x}{\Delta x} = f(x),$$

что и требовалось доказать.

Теорема 2. Пусть функция $f(x)$ является непрерывной на интервале $[a,b]$ и пусть $F(x)$ – первообразная для $f(x)$ на $[a,b]$. Тогда

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b . \qquad (7)$$

Заметим, что формула (7) называется **формулой Ньютона–Лейбница**.

Доказательство. В соответствии с Теоремой 1, первообразную $F(x)$ можно представить в виде

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt + C . \qquad (8)$$

Полагая $x = a$, находим значение постоянной C:

$$F(a) = \int_a^a f(t)dt + C \qquad \Rightarrow \qquad C = F(a).$$

Полагая $x = b$ в равенстве (8), получаем ожидаемый результат:

$$F(b) = \int_a^b f(t)dt + F(a) \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

Таким образом, чтобы вычислить определенный интеграл от $f(x)$ по промежутку $[a,b]$, нужно найти первообразную $F(x)$, вычислить ее в точках a и b и вычесть $F(a)$ из $F(b)$.

Примеры.

1) $$\int_0^{\pi/12} \cos 2x dx = \frac{1}{2}\sin 2x\Big|_0^{\pi/12} = \frac{1}{2}(\sin\frac{\pi}{6} - \sin 0) = \frac{1}{4}.$$

2) $$\int_2^5 (3x^2 - \frac{7}{x})dx = 3\int_2^5 x^2 dx - 7\int_2^5 \frac{dx}{x} = (x^3 - 7\ln x)\Big|_2^5$$

$$= (5^3 - 7\ln 5) - (2^3 - 7\ln 2) = 117 - 7\ln\frac{5}{2}.$$

3) $$\int_0^{\ln 3} e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x}\Big|_0^{\ln 3} = \frac{1}{2}(e^{2\ln 3} - e^0)$$

$$= \frac{1}{2}(e^{\ln 3^2} - 1) = \frac{1}{2}(9-1) = 4.$$

4) $$\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \sqrt{3} - 1.$$

4.6. Методы интегрирования

4.6.1. Интегрирование заменой переменной

Теорема. Пусть функция $f(x)$ является непрерывной на промежутке $[a, b]$ относительно переменной x, которая в свою очередь является функцией $x = \varphi(t)$ переменной t на промежутке $[\alpha, \beta]$ и имеет на нем непрерывную производную.
Если $\varphi(\alpha) = a$ и $\varphi(\beta) = b$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \qquad (9)$$

Доказательство. Используя формулу Ньютона–Лейбница, определение первообразной и учитывая условия теоремы, получаем

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = \int_\alpha^\beta dF(\varphi(t))$$

$$= \int_\alpha^\beta F'(\varphi(t))d\varphi(t) = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))d\varphi(t) = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Пример 1. Вычислить $\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx$.

Решение. Сделаем подстановку $\ln x = t$. Тогда

$$\begin{cases} x = 1 \\ x = e \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} t = \ln 1 = 0 \\ t = \ln e = 1. \end{cases}$$

Замена переменной изменяет заданный интервал интегрирования $[1, e]$ на интервал $[0, 1]$. Таким образом,

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx = \int_0^1 tdt = \frac{1}{2}t^2\Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Заметим, что нет необходимости возвращаться к исходной переменной x.

Пример 2. Вычислить $\int_2^3 x^2 e^{x^3} dx$.

Решение. Подставляя $t = x^3$, получаем $dt = 3x^2 dx$.
Найдем пределы интегрирования по переменной t:

$$\begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} t = 2^3 = 8 \\ t = 3^3 = 27. \end{cases}$$

Тогда $$\int_2^3 x^2 e^{x^3} dx = \frac{1}{3}\int_8^{27} e^t dt = \frac{1}{3}e^t\Big|_8^{27} = \frac{1}{3}(e^{27} - e^8) = \frac{1}{3}e^8(e^{19} - 1).$$

4.6.2. Интегрирование по частям

Формула интегрирования по частям для определенных интегралов вытекает из соответствующей формулы для неопределенных интегралов и имеет вид

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du, \qquad (10)$$

где $u(x)$ и $v(x)$ – любые дифференцируемые функции.

Пример. Вычислить $\int_{1/2}^{1} \arcsin x dx$.

Решение. Пусть $u = \arcsin x$ и $dv = dx$.

Тогда $du = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ и $v = x$.

Применим формулу (10):

$$\int_{1/2}^{1} \arcsin x dx = x \arcsin x\Big|_{1/2}^{1} - \int_{1/2}^{1} \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Вычислим выражение $x \arcsin x\Big|_{1/2}^{1}$ в правой части полученного равенства:

$$x \arcsin x\Big|_{1/2}^{1} = \arcsin 1 - \frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} = \frac{5\pi}{6}.$$

Преобразуем интеграл $\int_{1/2}^{1} \dfrac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$:

$$\int_{1/2}^{1} \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}\int_{1/2}^{1} \frac{d(x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2}\int_{1/2}^{1} \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Сделаем подстановку $t^2 = 1 - x^2$ и найдем пределы интегрирования по переменной *t*:

если $x = 1/2$, то $t = \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1\text{-}(1/2)^2} = \sqrt{3/4} = \sqrt{3}/2$;

если $x = 1$, то $t = \sqrt{1-x^2} = 0$.

Таким образом,

$$\int_{1/2}^{1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\int_{\sqrt{3}/2}^{0} \frac{tdt}{t} = \int_{0}^{\sqrt{3}/2} dt = t\Big|_0^{\sqrt{3}/2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

и, следовательно,

$$\int_{1/2}^{1} \arcsin x dx = \frac{5\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

4.7. Задачи и упражнения

В заданиях 1–8 найдите производные от заданных функций, применяя Теорему 1.

Подсказки: В задачах 4–5 используйте Свойство 5.
В задачах 4–8 используйте Свойство 6, затем Свойство 5.
В задачах 1–8 используйте правило дифференцирования сложной функции.

1) $F(x)=\int\limits_e^{x^5}\frac{t}{\ln t}dt$; 2) $F(x)=\int\limits_1^{x^2}\sqrt{1-t^3}dt$;

3) $F(x)=\int\limits_0^{\sqrt{x}}e^{-t^3}dt$; 4) $F(x)=\int\limits_x^1\sqrt{2+t^4}dt$;

5) $F(x)=\int\limits_{1/x}^1\ln t dt$; 6) $F(x)=\int\limits_{x^2}^x e^{-t^2}dt$;

7) $F(x)=\int\limits_{1/x}^{1/x^2}\cos t^2 dt$; 8) $F(x)=\int\limits_{1/x}^{\sqrt{x}}\cos t^2 dt$.

Пример.

$$\frac{d}{dx}\int\limits_e^{x^5}\frac{t}{\ln t}dt=\frac{x^5}{\ln x^5}5x^4=\frac{5x^9}{5\ln x}=\frac{x^9}{\ln x}.$$

В заданиях 9–20 вычислить интегралы непосредственным интегрированием.

9) $\int\limits_0^{\pi}\sin\frac{x}{3}dx$; 10) $\int\limits_3^4\frac{dx}{2x-1}$; 11) $\int\limits_{\pi/16}^{\pi/8}\frac{dx}{\sin^2 4x}$;

12) $\int\limits_4^9(3t^2-\frac{7}{t}+\sqrt{t})dt$; 13) $\int\limits_0^{2\sqrt{3}}\frac{dx}{4+x^2}$; 14) $\int\limits_0^{1/4}\frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$;

15) $\int\limits_0^1 e^{-2x}dx$; 16) $\int\limits_{-x}^x e^t dx$; 17) $\int\limits_4^9\frac{1+\sqrt{z}}{z^2}dz$;

18) $\int\limits_3^4(y-2)^{99}dy$; 19) $\int\limits_0^1\frac{dx}{x^2-4x+5}$; 20) $\int\limits_{-3}^3\frac{dx}{x^2-4}$.

Пример.

$$\int\limits_0^{\pi}\sin\frac{x}{3}dx=3\int\limits_0^{\pi}\sin\frac{x}{3}d(\frac{x}{3})=-3\cos\frac{x}{3}\Big|_0^{\pi}$$

$$=-3(\cos\frac{\pi}{3}-\cos 0)=-3(\frac{1}{2}-1)=\frac{3}{2}.$$

В заданиях 21–28 вычислить интегралы, применяя указанные подстановки.

21) $\int_1^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$; $\quad (x=t^2)$

22) $\int_0^5 \frac{dx}{2x+\sqrt{3x+1}}$; $\quad (3x+1=t^2)$

23) $\int_0^{\ln 6} \sqrt{e^t+3}dt$; $\quad (e^t+3=y^2)$

24) $\int_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx$; $\quad (e^x-1=t^2)$

25) $\int_{1/\sqrt{2}}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$; $\quad (x=\sin t)$

26) $\int_1^2 \frac{\sqrt{y^2-1}}{y}dy$; $\quad (y^2-1=t^2)$

27) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{5-\cos^2 x-2\sin^2 x}$; $\quad (\sin x=t)$

28) $\int_0^{\pi} \frac{dx}{3+2\cos x}$. $\quad (\tan\frac{x}{2}=t)$

Пример.

21) Подстановка $x=t^2 \Rightarrow dx=2tdt$; $\begin{cases} x=1 \\ x=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=2 \end{cases}$;

$$\int_1^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \int_1^2 \frac{2tdt}{1+t} = 2\int_1^2 \frac{(t+1-1)dt}{1+t} = 2(\int_1^2 dt - \int_1^2 \frac{dt}{1+t})$$

$$= 2(t-\ln(t+1))\Big|_1^2 = 2(2-\ln 3)-2(1-\ln 2) = 2(1-\ln\frac{3}{2}).$$

В заданиях 29–36 вычислить интегралы, применяя формулу интегрирования по частям.

29) $\int_1^e \ln x dx$; 30) $\int_e^{e^2} x^5 \ln x dx$; 31) $\int_0^{\pi/6} x\sin 3x dx$;

32) $\int_0^1 x^3 e^{-2x}dx$; 33) $\int_1^e (x+3)\ln^2 x dx$; 34) $\int_0^{\pi/2} x^2\cos x dx$;

35) $\int_0^1 \arctan x dx$; 36) $\int_0^1 \arcsin x dx$.

4.8. Геометрические приложения определенных интегралов

4.8.1. Вычисление площади плоской области

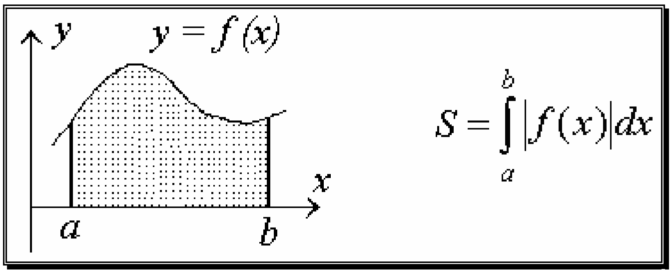


Рис. 7. Площадь области, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью $0x$ и вертикальными отрезками.

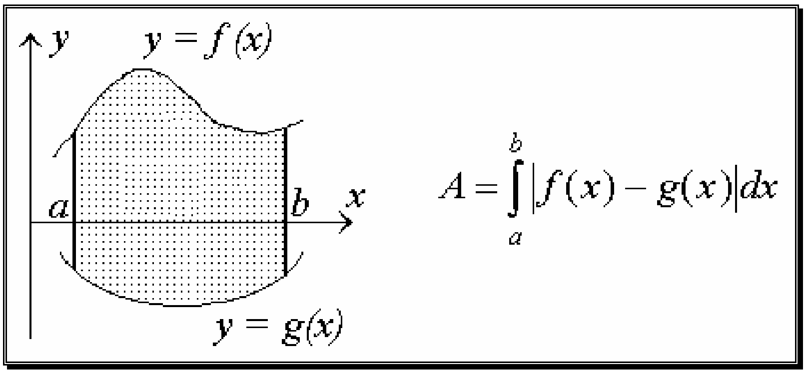


Рис. 8. Площадь области, ограниченной кривыми $y = f(x)$ и $y = g(x)$.

Чтобы найти площадь области, ограниченной графиком функции $r = r(\varphi)$, заданной в полярной системе координат (см. Приложение 2), и лучами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$, нужно разбить эту область на бесконечное число элементов, представляющих собой круговые секторы (см. Рис. 9). Площадь каждого кругового сектора равна половине произведения сторон на угол между ними (выраженный в радианной мере). Стороны бесконечно узкого сектора совпадают друг с другом и равны расстоянию от соответствующей точки кривой до начала координат. Следовательно, $dS = \frac{1}{2}r^2 d\varphi$ и $S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2 d\varphi$.

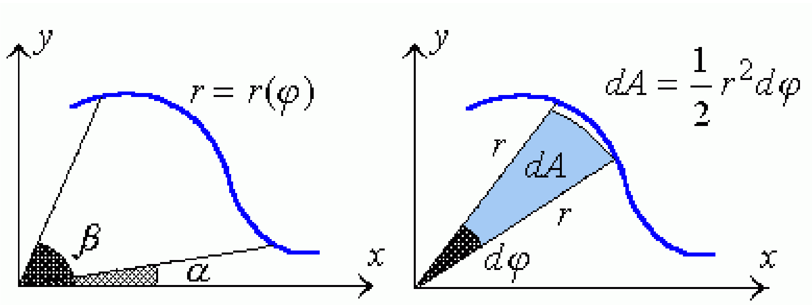


Рис. 9. Площадь области, ограниченной кривой $r = r(\varphi)$, заданной в полярной системе координат, и лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$.

Пример 1. Найти площадь области, заключенной между линиями $y = 3x$ и $y = x^2$.

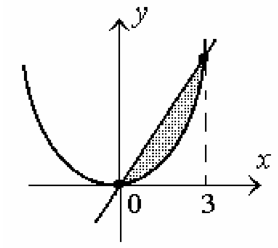


Рис. 10

Решение. Абсциссы точек пересечения заданных линий являются пределами интегрирования и представляют собой решения уравнения $3x = x^2$: $x_1 = 0$ и $x_2 = 3$. Используя формулу, приведенную на Рис. 8, получаем

$$S = \int_0^3 (3x - x^2)dx = \left(\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^3 = \frac{27}{2} - 9 = \frac{9}{2}.$$

Пример 2. Найти площадь фигуры, ограниченной графиком функции $r = 1 + \cos\varphi$.

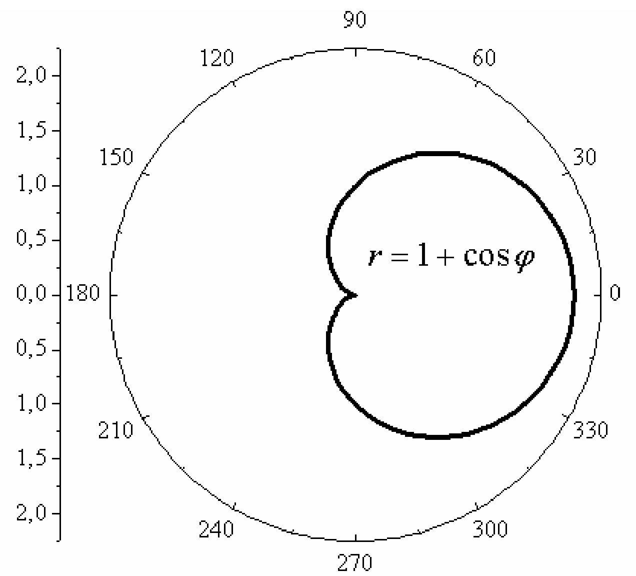


Рис. 11

Решение.

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2 d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1 + \cos\varphi)^2 d\varphi$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi)d\varphi$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1 + 2\cos\varphi + \frac{1}{2}(1 + \cos 2\varphi))d\varphi$$

$$= \left(\frac{3}{4}\varphi + \sin\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{3}{2}\pi.$$

Пример 3. Найти площадь фигуры, ограниченной осью *0x* и одной аркой циклоиды $\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t). \end{cases}$

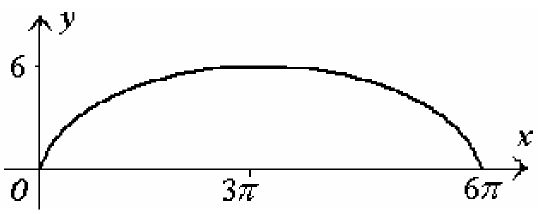


Рис. 12

Решение. Фигура схематически показана на Рис. 12. Ее площадь вычисляется по формуле $S = \int_0^{6\pi} y dx$. Представим этот интеграл в терминах переменной *t*.

Учитывая, что $x(0) = 0$, $x(2\pi) = 6\pi$ и $dx = d(t - \sin t) = (1 - \cos t)dt$, получаем

$$S = 9\int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt = 9\int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t)dt = 27\pi.$$

Пример 4. Найти площадь круга радиуса *R*.

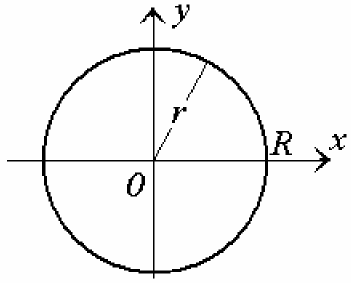


Рис. 12

Решение. Уравнение окружности $x^2+y^2=R^2$ принимает наиболее простой вид при переходе к полярной системе координат: $r=R$.
Тогда

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2 d\varphi=\frac{1}{2}R^2\int_0^{2\pi} d\varphi=\pi R^2.$$

Пример 5. Найти площадь эллипса с полуосями *a* и *b*.

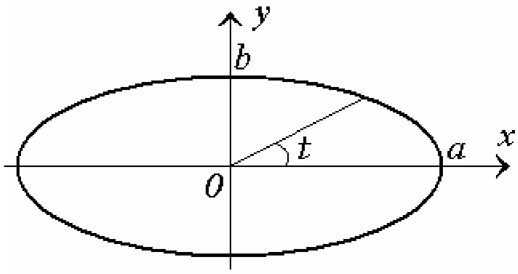


Рис. 13

Решение. Очевидно, что $S=2\int_{-a}^{a} ydx$.

Представим уравнение эллипса в параметрическом виде: $\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=b\sin t. \end{cases}$

Найдем пределы интегрирования: $x=-a$ при $t=\pi$, $x=a$ при $t=0$. Учитывая, что $dx=--a\sin t\,dt$ и меняя местами пределы интегрирования, вычисляем площадь:

$$S=2\int_{-a}^{a} ydx=2ab\int_0^{\pi}\sin^2 t\,dt=ab\int_0^{\pi}(1-\cos 2t)\,dt=ab(t-\frac{1}{2}\sin 2t)\Big|_0^{\pi}=\pi ab.$$

Пример 6. Вычислить площадь фигуры, заключенной между параболой $x=3+2y-y^2$ и осью ординат.

Решение. Поскольку переменные *x* и *y* поменялись ролями, то площадь вычисляется по формуле $S=\int_{y_1}^{y_2} x(y)dy$, где $y_1=-1$ и $y_2=3$ – точки пересечения параболы с осью ординат:

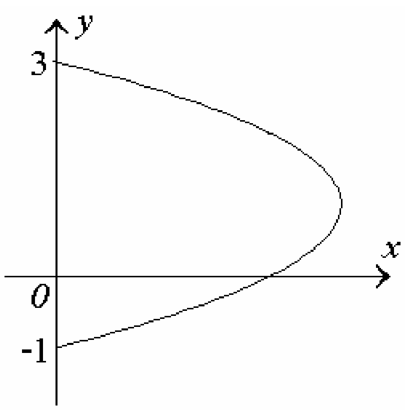


Рис. 14

$$S=\int_{-1}^{3}(3+2y-y^2)dy$$

$$=(3y+y^2-\frac{1}{3}y^3)\Big|_{-1}^{3}=\frac{32}{3}.$$

4.8.2. Вычисление длины дуги кривой

Проблема 1. Пусть кривая лежит в плоскости $x0y$ и описывается уравнением $y = f(x)$. Найти длину дуги кривой, заключенной между точками с абсциссами a и b.

Решение. Разобьем данную дугу на элементы, каждый из которых аппроксимируем прямолинейным участком (см. Рис. 15).

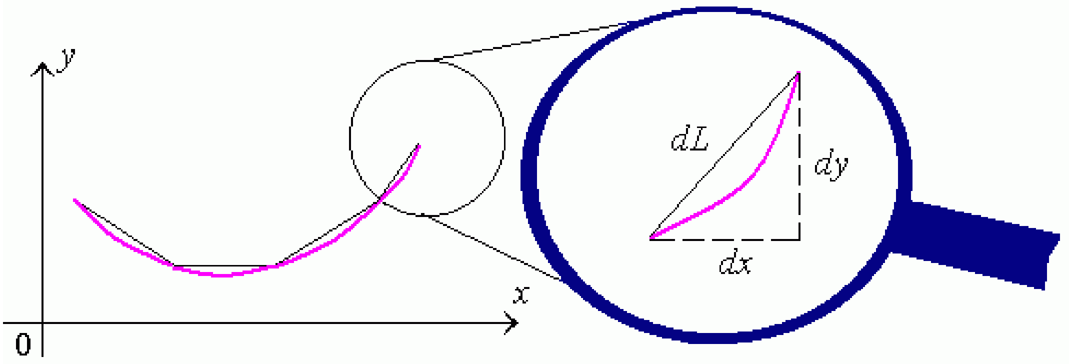


Рис. 15.

Длину dL бесконечно малого участка можно выразить через его координаты dx и dy с помощью теоремы Пифагора и представить в виде

$$dL = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}\, dx = \sqrt{1 + (y')^2}\, dx ,$$

где y' – производная функции $y = f(x)$ по переменной x.

Длина всей дуги равна сумме длин составляющих ее элементов:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\, dx . \qquad (11)$$

Проблема 2. Пусть пространственная кривая задана уравнениями в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t). \end{cases}$$

Найти длину дуги кривой, заключенной между точками, которым соответствуют значения t_1 и t_2 параметра t.

Решение. Длина пространственного отрезка описывается формулой

$$dL = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} .$$

Преобразуем это выражение, умножив и поделив его на dt:

$$dL = \sqrt{\frac{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}{(dt)^2}} dt .$$

Затем поделим каждое слагаемое в числителе на знаменатель и представим результат в следующем виде:

$$dL = \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2 + (\frac{dz}{dt})^2}\, dt \qquad \Rightarrow \qquad dL = \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}\, dt ,$$

где x', y' и z' – производные функций $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ по переменной t.

Следовательно,

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}\, dt . \qquad (12)$$

Полученная формула включает в себя формулу (11) как частный случай. Действительно, если кривая лежит в плоскости $x0y$, то рассматривая переменную x в качестве параметра t, мы имеем $x = x$, $y = y(x)$ и $z = 0$, что возвращает нас от формулы (12) к (11).

Проблема 3. Пусть кривая лежит в плоскости $x0y$ и описывается уравнением $r = r(\varphi)$ в полярных координатах. Найти длину дуги кривой, заключенной между значениями φ_1 и φ_2 полярного угла.

Решение. По теореме Пифагора $dL = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$.

Запишем это выражение в виде $dL = \sqrt{(\frac{dx}{d\varphi})^2 + (\frac{dy}{d\varphi})^2}\, d\varphi$.

Выразим декартовые координаты x и y через полярные координаты r и φ:

$$x = r(\varphi)\cos\varphi ,$$

$$y = r(\varphi)\sin\varphi .$$

Продифференцируем эти выражения по переменной φ:

$$\frac{dx}{d\varphi} = (r(\varphi)\cos\varphi)' = r'\cos\varphi - r\sin\varphi ,$$

$$\frac{dy}{d\varphi} = (r(\varphi)\sin\varphi)' = r'\sin\varphi + r\cos\varphi .$$

Нетрудно показать, что

$$(\frac{dx}{d\varphi})^2 + (\frac{dy}{d\varphi})^2 = (r')^2 + r^2 .$$

Следовательно,

$$L = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{(r')^2 + r^2}\, d\varphi . \qquad (13)$$

Пример 1. Найти длину дуги кривой $y = \ln x$, содержащейся между $x = \sqrt{3}$ и $x = \sqrt{15}$.

Решение. Очевидно, что $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$. В соответствии с формулой (11)

$$L = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{15}} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\, dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{15}} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} dx$$

$$= \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{15}} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2} x dx = \frac{1}{2} \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{15}} \frac{\sqrt{x^2+1}}{(x^2+1)-1} d(x^2+1) \Bigg|_{x^2+1=z^2} .$$

$$= \int_2^4 \frac{z^2}{z^2-1} dz = \int_2^4 (1 + \frac{1}{z^2-1}) dz = (z + \frac{1}{2} \ln \frac{z-1}{z+1}) \Bigg|_2^4 = 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{9}{5}.$$

Пример 2. Найти длину одной арки циклоиды $\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t). \end{cases}$

Решение. Заметим, что концам первой арки соответствуют значения $t_1 = 0$ и $t_2 = 2\pi$ параметра t. Кроме того, $x' = 3(1 - \cos t)$ и $y' = 3\sin t$.
Тогда по формуле (12)

$$L = 3\int_0^{2\pi} \sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t}\, dt$$

$$= 3\int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t}\, dt = 6\int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = -12 \cos \frac{t}{2} \Bigg|_0^{2\pi} = 24.$$

Пример 3. Найти длину первого витка спирали Архимеда $r = \varphi$.
Решение. Концам первого витка соответствуют значения $\varphi_1 = 0$ и $\varphi_2 = 2\pi$ полярного угла φ. Тогда по формуле (13)

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \varphi^2}\, d\varphi .$$

Интегрируем по частям, положив $u = \sqrt{1+\varphi^2}$ и $dv = d\varphi$. Отсюда следует, что $du = \dfrac{\varphi}{\sqrt{1+\varphi^2}} d\varphi$ и $v = \varphi$. Таким образом,

$$L = \varphi\sqrt{1+\varphi^2}\Bigg|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{\varphi^2}{\sqrt{1+\varphi^2}} d\varphi = 2\pi\sqrt{1+4\pi^2} - \int_0^{2\pi} \sqrt{1+\varphi^2}\, d\varphi + \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{1+\varphi^2}} d\varphi$$

$$= 2\pi\sqrt{1+4\pi^2} - L + \ln(\varphi + \sqrt{1+\varphi^2})\Bigg|_0^{2\pi} = 2\pi\sqrt{1+4\pi^2} - L + \ln(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2}).$$

Следовательно, $L = \pi\sqrt{1+4\pi^2} + \dfrac{1}{2}\ln(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2})$.

4.8.3. Вычисление объемов тел

Рассмотрим задачу о нахождении объема тела по известному поперечному сечению $S(x)$ плоскостью, перпендикулярной оси абсцисс. Разобьем тело на тонкие слои. Каждый слой представляет собой цилиндр, а его объем можно вычислить по формуле $dV = S(x)dx$, где dx – толщина слоя (т.е. высота цилиндра) (см. Рис. 16). Объем всего тела, заключенного между абсциссами a и b, равен сумме образующих его объемов.

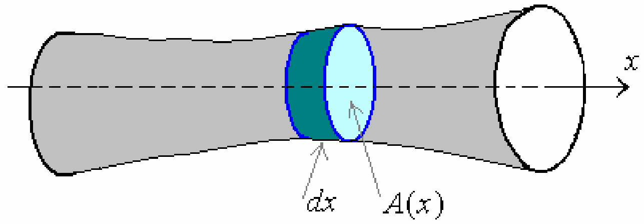


Рис. 16

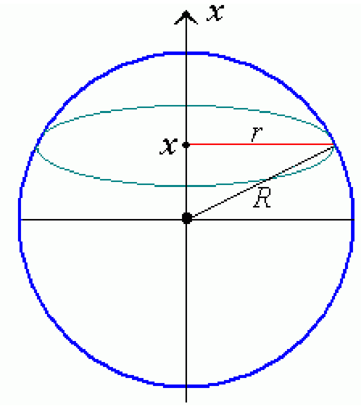
Следовательно,

$$V = \int_a^b S(x)dx \qquad (14)$$

Если тело образовано вращением дуги кривой $y = f(x)$ (заданной на интервале $[a,b]$) вокруг оси $0x$, то площадь поперечного сечения тела плоскостью, перпендикулярной оси абсцисс, представляет собой круг радиуса $y = f(x)$. Тогда $S(x) = \pi y^2$ и, таким образом,

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx. \qquad (15)$$

Пример 1. Найти объем сферы радиуса R.



Решение. $S(x) = \pi r^2 = \pi(R^2 - x^2) \Rightarrow$

$$V = \pi \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2)dx$$

$$= \pi(R^2 x - \frac{x^3}{3})\Big|_{-R}^{R} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Рис. 17

Пример 2. Найти объем параболоида вращения $x = y^2 + z^2$ высотой H.

Решение. $V = \pi \int_0^H y^2 dx = \pi \int_0^H x dx = \frac{1}{2}\pi H^2$.

4.8.4. Задачи и упражнения

В каждом из заданий 37–40 найти площадь области, ограниченной графиками заданных функций.

37) $y = 4x - x^2$ и ось абсцисс;

38) $y = \ln x$, $x = e$ и ось абсцисс;

39) $y^2 = 4x$ и $x^2 = 4y$;

40) $r = 2\cos\varphi$.

В каждом из заданий 41–47 найти длину дуги указанной кривой, содержащейся между заданными точками.

41) $y^2 = x^3$, $\quad 0 \le x \le 4$;

42) $y = e^x$, $\quad 0 \le x \le 1$;

43) $y = \ln x$, $\quad \sqrt{3} \le x \le \sqrt{8}$;

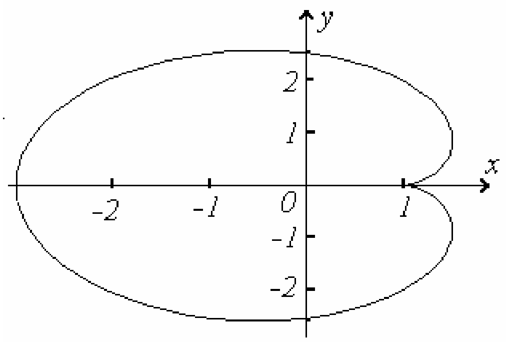
44) $\begin{cases} x = 2\cos t - \cos 2t, \\ y = 2\sin t - \sin 2t; \end{cases}$

45) $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi$;

46) $r = 5(1 + \cos\varphi)$;

47) $r = 4\varphi$, $\quad 0 \le \varphi \le 2\pi$.

Подсказка к задаче 44:



В заданиях 48–50 найти объемы указанных тел.

48) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2 + z^2}{b^2} = 1$;

49) $x^2 = \dfrac{H^2}{R^2}(y^2 + z^2)$;

50) Параболоид вращения, радиус основания которого R, а высота H.

5. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

5.1. Основные понятия

К **несобственным интегралам** относятся:

1) интегралы, у которых хотя бы один из пределов интегрирования равен бесконечности;
2) интегралы от неограниченных функций (на промежутке интегрирования).

Примеры несобственных интегралов:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx, \quad \int_{-\infty}^{b} f(x)dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx, \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}, \quad \int_1^2 \frac{dx}{2-x}, \quad \int_2^5 \frac{dx}{(x-3)^2}.$$

Несобственные интегралы можно выразить через обычные определенные интегралы, используя предельный переход. В частности,

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{c\to+\infty}\int_a^c f(x)dx, \tag{1}$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{c\to-\infty}\int_c^b f(x)dx. \tag{2}$$

Аналогичным образом можно выразить интегралы от неограниченных функций. Пусть, например, $f(x)\to\infty$ при $x\to a$. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\to a}\int_c^b f(x)dx. \tag{3}$$

Несобственный интеграл называется сходящимся, если существует конечный предел соответствующего определенного интеграла. В противном случае говорят, что несобственный интеграл расходится.

Примеры сходящихся интегралов:

- $$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2} = \lim_{c\to\infty}\int_1^c \frac{dx}{x^2} = \lim_{c\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^c = \lim_{c\to\infty}\left(1-\frac{1}{c}\right) = 1.$$
- $$\int_0^{+\infty} e^{-5x}dx = \lim_{c\to+\infty}\int_0^c e^{-5x}dx = \lim_{c\to+\infty}\left(-\frac{1}{5}e^{-5x}\right)\Bigg|_0^c = \frac{1}{5}\lim_{c\to+\infty}(1-e^{-5c}) = \frac{1}{5}.$$
- $$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\Big|_0^1 = 2.$$

Примеры расходящихся интегралов:

- $$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x} = \lim_{c\to\infty}\int_1^c \frac{dx}{x} = \lim_{c\to\infty}\ln|c|\Bigg|_1^c = \lim_{c\to\infty}\ln|c| = \infty.$$
- $$\int_0^{\infty}\cos x dx = \lim_{c\to\infty}\int_0^c \cos x dx = \lim_{c\to\infty}\sin x\Bigg|_0^c = \lim_{c\to\infty}\sin c$$ – не существует.

5.2. Признаки сходимости

Существуют различные способы исследования несобственных интегралов на сходимость, к простейшим из которых относятся признаки сравнения.

Признак сравнения 1

Пусть $0 \le f(x) \le g(x)$ для всех $x \in (a,b)$. Тогда

сходимость интеграла $\int_a^b g(x)dx$ влечет сходимость интеграла $\int_a^b f(x)dx$.

Если интеграл $\int_a^b f(x)dx$ расходится, то расходится и интеграл $\int_a^b g(x)dx$.

Здесь a и b – любые числа (не обязательно конечные); функция $f(x)$ может быть неограниченной в окрестности любой из точек, a или b.

На практике применение этого признака сводится к простой процедуре: исследуемый на сходимость интеграл сравнивается с одним из эталонных. Если эталонный интеграл больше исследуемого и сходится, то сходится и исследуемый. Если же эталонный интеграл меньше исследуемого и расходится, то расходится и исследуемый.

Необходимым условием сходимости интегралов вида $\int_a^\infty f(x)dx$ является стремление к нулю функции $f(x)$ при $x \to \infty$. В противном случае интеграл расходится. Однако это условие не является достаточным для сходимости интеграла. Например, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$, тогда как интеграл $\int_1^\infty \frac{dx}{x}$ расходится.

Существует другой признак сравнения, в основе которого лежит сопоставление быстроты изменения функций в окрестности соответствующей точки (в том числе и бесконечно удаленной).

Признак сравнения 2

Пусть выполняется одно из условий – или функции $f(x)$ и $g(x)$ являются неограниченными в окрестности точки b, или $b = \infty$.

Если $\quad 0 < \lim\limits_{x\to b}\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < \infty, \quad$ то интегралы

$$\int_a^b f(x)dx \quad \text{и} \quad \int_a^b g(x)dx$$

сходятся или расходятся одновременно.

Признак сравнения остается в силе, если источником “несобственности” интеграла является точка a. Единственное, что нужно сделать в этом случае это заменить в формулировке точку b на точку a.

С геометрической точки зрения сходимость интеграла вида $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ означает, что площадь области, заключенной между кривой $y = f(x)$ и осью абсцисс, конечна. При этом поведение функции $y = f(x)$ при не очень больших значениях x является несущественным, а определяющее значение для сходимости интеграла имеет лишь быстрота приближения кривой к оси $0x$ при $x \to \infty$.

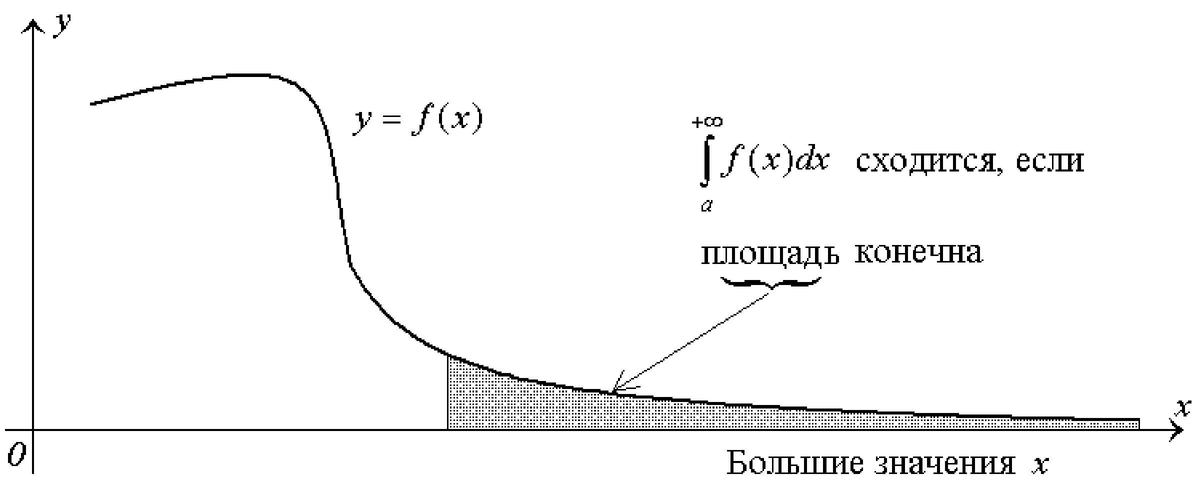


Рис. 1

С этих позиций Признак сравнения 2 выглядит вполне очевидным. Действительно, если $\lim\limits_{x\to b}\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right| = \lambda$, где λ – конечное число, то (начиная с некоторого достаточно большого значения x) выполняется приближенное равенство $f(x) \approx \lambda\, g(x)$. Тогда и площади соответствующих областей отличаются друг от друга в конечное число раз λ; если одна из них конечна, то конечна и другая.

Обсудим теперь случаи, когда $\lim\limits_{x\to b}\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right|$ равен нулю или бесконечности.

Если $\lim\limits_{x\to b}\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right| = 0$, то из сходимости эталонного интеграла $\int\limits_a^{\infty} g(x)dx$ следует сходимость исследуемого интеграла $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$. Заметим, что обратное утверждение уже не справедливо – сходимость интеграла от $f(x)$ не влечет за собой никаких последствий относительно интеграла от $g(x)$.

Если $\lim\limits_{x\to b}\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right| = \infty$, то из сходимости интеграла $\int\limits_a^{\infty} g(x)dx$ не следует ничего. Однако, расходимость интеграла от $g(x)$ влечет за собой расходимость интеграла от $f(x)$.

Аналогичным образом можно интерпретировать интегралы $\int\limits_a^b f(x)dx$ от функций, неограниченных в окрестности точки a (или b): интеграл сходится, если конечна площадь области, заключенной между кривой $y = f(x)$ и осью ординат. При этом единственно существенным для сходимости интеграла является поведение функции $y = f(x)$ в достаточно малой окрестности точки разрыва, а именно быстрота приближения кривой к оси $0y$ при $x \to a$ (или при $x \to b$, если b является точкой разрыва).

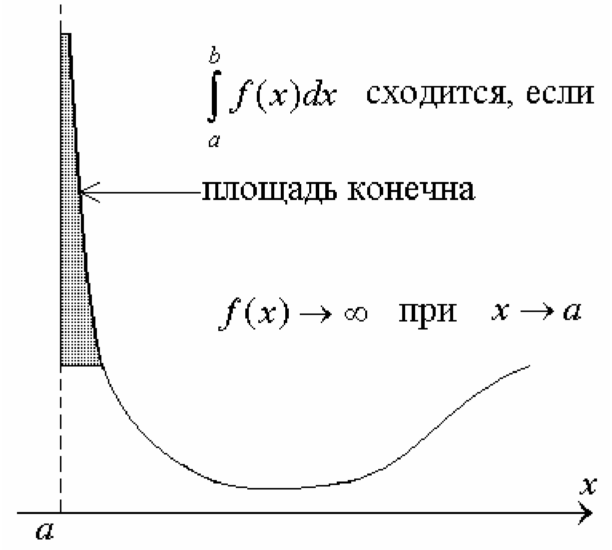


Рис. 2

Таблица 1.

Значение предела $\lambda = \lim\limits_{\substack{x\to b \\ \text{или } x\to\infty}}\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right|$	Эталонные интегралы $\int\limits_a^b g(x)dx$, $\int\limits_a^{\infty} g(x)dx$	Исследуемые интегралы $\int\limits_a^b f(x)dx$, $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$
$0 < \lambda < \infty$	сходится	сходится
	расходится	расходится
$\lambda = 0$	сходится	сходится
	расходится	вывод сделать нельзя
$\lambda = \infty$	сходится	вывод сделать нельзя
	расходится	расходится

5.2.1. Эталонные интегралы

При исследования на сходимость несобственных интегралов вида $\int_a^\infty f(x)dx$ важное значение имеют (в качестве эталонных) *p*-интегралы $\int_a^\infty \frac{dx}{x^p}$, для которых справедливо следующее утверждение:

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^p} \begin{cases} \text{сходится,} & \text{если} \quad p > 1 \\ \text{расходится,} & \text{если} \quad p \le 1 \end{cases} \tag{4}$$

Для доказательства выполним непосредственное интегрирование.
Пусть $p \neq 1$. Тогда

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^p} = \left. \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right|_a^\infty \Rightarrow \begin{cases} \text{сходится,} & \text{если} \quad (-p+1) < 0, \\ \text{расходится,} & \text{если} \quad (-p+1) > 0. \end{cases}$$

Если $p = 1$, то $\int_a^\infty \frac{dx}{x} = \ln|\frac{\infty}{a}| = \infty$.

Аналогичную роль играют *p*-интегралы $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}$ и $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}$ при исследования на сходимость интегралов от неограниченных функций (в окрестности точки *a* или точки *b*, соответственно).
В этом случае интегралы

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p} \quad \text{и} \quad \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p} \quad \begin{cases} \text{сходятся,} & \text{если} \quad p < 1, \\ \text{расходятся,} & \text{если} \quad p \ge 1. \end{cases} \tag{5}$$

Докажем это утверждение непосредственным интегрированием.
Рассмотрим, например, первый интеграл.
Пусть $p \neq 1$. Тогда

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p} = \left. \frac{(x-a)^{-p+1}}{-p+1} \right|_a^b \Rightarrow \begin{cases} \text{сходится,} & \text{если} \quad (-p+1) > 0, \\ \text{расходится,} & \text{если} \quad (-p+1) < 0. \end{cases}$$

Если показатель степени $(-p+1) < 0$, то $(x-a)^{-p+1} = \frac{1}{(x-a)^{p-1}}$ и при подстановке нижнего предела интегрирования в знаменателе возникает 0. Это и означает, что при $p > 1$ интеграл расходится.

Интеграл также расходится при $p = 1$, поскольку

$$\int_a^b \frac{dx}{x-a} = \infty.$$

5.3. Примеры исследования интегралов на сходимость

Пример 1. Интеграл $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2}$ сходится, поскольку результат интегрирования

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}\Big|_1^{\infty}=1$$

является конечным числом.

Пример 2. Интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{\ln x dx}{x}$ расходится, поскольку расходится интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}$ и $\frac{\ln x}{x}>\frac{1}{x}$ при $x\to+\infty$.

Пример 3. Исследовать на сходимость $\int_1^{+\infty}\frac{\ln x dx}{x^3}$.

Решение. Сравним данный интеграл со сходящимся интегралом $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$.

Применим Признак сравнения 2:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x/x^3}{1/x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0.$$

Предел легко вычисляется по правилу Лопиталя и равняется нулю. Следовательно, данный интеграл сходится.

Пример 4. Исследовать на сходимость $\int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{2x^4+5}dx$.

Решение. Выполним простые преобразования, чтобы сравнить данный интеграл с p-интегралом:

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{2x^4+5}dx<\int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{2x^4}dx=\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{7/2}}.$$

Поскольку $p>1$, то интеграл сходится.

Пример 4. Исследовать на сходимость $\int_2^{5}\frac{dx}{x(x^2-4)}$.

Решение. Функция $\frac{1}{x(x^2-4)}$ является неограниченной в окрестности точки $x=2$. Поэтому для сравнения выберем расходящийся p-интеграл $\int_2^{5}\frac{dx}{x-2}$.

Найдем предел отношения подынтегральных функций:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x(x^2-4)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x(x+2)}=\frac{1}{8}.$$

Предел не равен нулю. Следовательно, данный интеграл расходится.

Пример 5. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_2^{+\infty}\frac{dx}{x^2-1}$.

Решение.

$$\int\limits_2^{+\infty}\frac{dx}{x^2-1}=\frac{1}{2}\int\limits_2^{+\infty}(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1})dx$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\int\limits_2^{b}(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1})dx=\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}(\int\limits_2^{b}\frac{dx}{x-1}-\int\limits_2^{b}\frac{dx}{x+1})$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\ln\frac{x-1}{x+1}\bigg|_2^b=\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\ln\frac{b-1}{b+1}-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\ln 3.$$

Комментарии. Заметим, что $\int\limits_2^{+\infty}(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1})dx$ нельзя представить в виде разности двух расходящихся интегралов $\int\limits_2^{+\infty}\frac{dx}{x-1}$ и $\int\limits_2^{+\infty}\frac{dx}{x+1}$ – именно по причине их расходимости. В таких случаях бесконечный предел нужно заменить параметром, сводя тем самым проблему вычисления несобственного интеграла к стандартной проблеме вычисления определенного интеграла. На заключительной стадии нужно выполнить предельный переход, устремив параметр к бесконечности.

Пример 6. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty}e^{kx}dx$.

Решение. Очевидно, что при $k=0$ интеграл расходится. Если же $k\neq 0$, то

$$\int\limits_0^{+\infty}e^{kx}dx=\frac{1}{k}e^{kx}\Big|_0^{+\infty}=\begin{cases}\frac{1}{k}, & \text{если } k<0\\ \infty, & \text{если } k>0\end{cases}$$

Таким образом, интеграл расходится при $k\geq 0$.

Пример 7. Исследовать на сходимость $\int\limits_0^{\infty}e^{-x^2}dx$.

Решение. При больших значениях x выполняется неравенство $e^{-x^2}<e^{-x}$.

Поскольку интеграл $\int\limits_0^{\infty}e^{-x}dx$ сходится, то сходится и интеграл $\int\limits_0^{\infty}e^{-x^2}dx$.

5.4. Задачи и упражнения

В заданиях с 1 по 10 исследовать на сходимость данные интегралы.

1) $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4+5}}$;

2) $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2+\sqrt[3]{x^4+5}}$;

3) $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x+\sqrt[3]{x^4+5}}$;

4) $\int\limits_0^\infty \frac{xdx}{\sqrt{x^5+3}}$;

5) $\int\limits_0^{+\infty} xe^{-x}dx$;

6) $\int\limits_0^{+\infty} x^{20}e^{-x/10}dx$;

7) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^4}}$;

8) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^2}}$

9) $\int\limits_1^e \frac{dx}{\ln x}$;

10) $\int\limits_1^{+\infty} \sin x dx$.

В заданиях 11–22 вычислить данные интегралы или установить их расходимость.

11) $\int\limits_2^\infty \frac{dx}{x+5}$

12) $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2}$

13) $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+1}$

14) $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+4x+5}$

15) $\int\limits_0^{1/2} \frac{dx}{x\ln x}$

16) $\int\limits_0^{1/2} \frac{dx}{x\ln^2 x}$

17) $\int\limits_{-\infty}^0 e^x dx$

18) $\int\limits_4^{+\infty} \frac{dx}{x^2-9}$

19) $\int\limits_{-2}^1 \frac{dx}{x}$

20) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$

21) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

22) $\int\limits_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2}$

Пример. Интеграл $\int\limits_2^\infty \frac{dx}{x+5}$ расходится, так как расходится интеграл $\int\limits_2^\infty \frac{dx}{x}$, и при $x\to\infty$ подынтегральные функции $\frac{1}{x+5}$ и $\frac{1}{x}$ являются эквивалентными бесконечно малыми.

Другое решение. $\int\limits_2^\infty \frac{dx}{x+5} = \ln(x+5)\Big|_2^\infty = \ln\infty = \infty$.

Приложение 1. Гиперболические функции

Гиперболический синус: $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

Гиперболический косинус: $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

Гиперболический тангенс: $\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

Гиперболический котангенс: $\operatorname{cth} x = \dfrac{1}{\operatorname{th} x} = \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$.

Формулы для гиперболических функций весьма похожи на соответствующие формулы для тригонометрических функций.

Таблица 1. Сопоставление основных формул для гиперболических и тригонометрических функций.

$\operatorname{sh}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sh}\alpha\ \operatorname{ch}\beta \pm \operatorname{sh}\beta\ \operatorname{ch}\alpha$ $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha$	
$\operatorname{ch}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{ch}\alpha\ \operatorname{ch}\beta \pm \operatorname{sh}\alpha\ \operatorname{sh}\beta$ $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$	
$\operatorname{sh} 2\alpha = 2\operatorname{sh}\alpha\ \operatorname{ch}\alpha$ $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$	$\operatorname{ch} 2\alpha = \operatorname{ch}^2\alpha + \operatorname{sh}^2\alpha$ $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$
$2\operatorname{sh}^2\dfrac{\alpha}{2} = \operatorname{ch}\alpha - 1$ $2\sin^2\dfrac{\alpha}{2} = 1 - \cos\alpha$	$2\operatorname{ch}^2\dfrac{\alpha}{2} = 1 + \operatorname{ch}\alpha$ $2\cos^2\dfrac{\alpha}{2} = 1 + \cos\alpha$
$\operatorname{ch}^2\alpha - \operatorname{sh}^2\alpha = 1$ $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$	$1 - \operatorname{th}^2 x = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$, $\operatorname{cth}^2 x - 1 = \dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$ $1 + \operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $\operatorname{ctg}^2 x + 1 = \dfrac{1}{\sin^2 x}$
$\operatorname{sh}\alpha \pm \operatorname{sh}\beta = 2\operatorname{sh}\dfrac{\alpha \pm \beta}{2}\operatorname{ch}\dfrac{\alpha \mp \beta}{2}$ $\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha \pm \beta}{2}\cos\dfrac{\alpha \mp \beta}{2}$	
$\operatorname{ch}\alpha + \operatorname{ch}\beta = 2\operatorname{ch}\dfrac{\alpha + \beta}{2}\operatorname{ch}\dfrac{\alpha - \beta}{2}$ $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha + \beta}{2}\cos\dfrac{\alpha - \beta}{2}$	

Продолжение **Таблицы 1.**

$\mathrm{ch}\alpha - \mathrm{ch}\beta = 2\mathrm{sh}\dfrac{\alpha+\beta}{2}\,\mathrm{sh}\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$
$2\mathrm{sh}\alpha\,\mathrm{sh}\beta = \mathrm{ch}(\alpha+\beta) - \mathrm{ch}(\alpha-\beta)$ $2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$
$2\mathrm{ch}\alpha\,\mathrm{ch}\beta = \mathrm{ch}(\alpha+\beta) + \mathrm{ch}(\alpha-\beta)$ $2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)$
$2\mathrm{sh}\alpha\,\mathrm{ch}\beta = \mathrm{sh}(\alpha+\beta) + \mathrm{sh}(\alpha-\beta)$ $2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)$

Приведем, для примера, доказательство формулы $\mathrm{ch}^2\alpha - \mathrm{sh}^2\alpha = 1$:

$$\mathrm{ch}^2\alpha - \mathrm{sh}^2\alpha = \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2 - \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})^2$$
$$= \frac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x}) - \frac{1}{4}(e^{2x} - 2 + e^{-2x}) = 1.$$

Формулы для производных и интегралов от гиперболических функций также выглядят похожими на соответствующие формулы для тригонометрических функций.

Таблица 2. Сопоставление формул дифференцирования и интегрирования гиперболических и тригонометрических функций

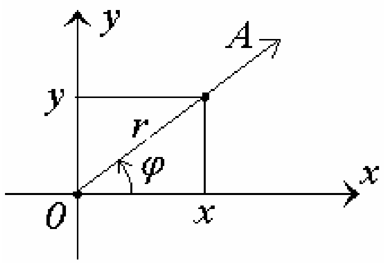
$(\mathrm{sh}\,x)' = \mathrm{ch}\,x$ $(\mathrm{ch}\,x)' = \mathrm{sh}\,x$ $(\mathrm{th}\,x)' = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$ $(\mathrm{cth}\,x)' = -\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$	$(\sin x)' = \cos x$ $(\cos x)' = -\sin x$ $(\mathrm{tg}\,x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ $(\mathrm{ctg}\,x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
$\int \mathrm{sh}\,x\,dx = \mathrm{ch}\,x + C$ $\int \mathrm{ch}\,x\,dx = \mathrm{sh}\,x + C$ $\int \dfrac{dx}{\mathrm{ch}^2 x} = \mathrm{th}\,x + C$ $\int \dfrac{dx}{\mathrm{sh}^2 x} = -\mathrm{cth}\,x + C$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$ $\int \cos x dx = \sin x + C$ $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\,x + C$ $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}\,x + C$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2. Полярная система координат

Полярная система координат на плоскости задается точкой *0*, называемой полюсом, и осью *0x* (называемой полярной осью). Каждой точке плоскости можно поставить в соответствие полярные координаты r и φ. Полярный радиус r представляет собой расстояние от точки до начала координат, а полярный угол φ образуется лучом, проходящим через точку из начала координат, и полярной осью. Угол отсчитывается в радианной мере от положительного направления полярной оси против часовой стрелки.

$$0 \le r < \infty, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \quad (\text{или } -\pi \le \varphi \le \pi).$$

Между прямоугольными и полярными координатами точки можно записать простые соотношения, если совместить начала координатных систем, а полярную ось выбрать так, чтобы она совпадала с осью *0x* прямоугольной системы координат.



$$x = r\cos\varphi \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$y = r\sin\varphi \qquad \tan\varphi = \frac{y}{x}$$

Рис. 1

Уравнения некоторых кривых существенно упрощаются при переходе от прямоугольной системы координат в полярную.

1) Уравнение окружности радиуса R с центром в начале координат
   в прямоугольной системе координат: $x^2 + y^2 = R^2$;
   в полярной системе координат: $r = R$.

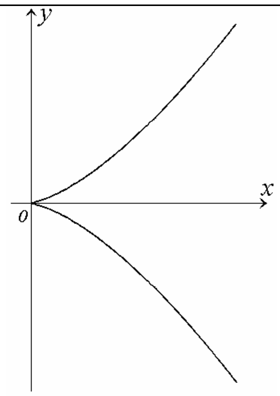
2) Уравнение прямой, проходящей через начало координат
   в прямоугольной системе координат в форме с угловым коэффициентом: $y = k\,x$, где $k = \mathrm{tg}\,\varphi$;
   в полярной системе координат: $\varphi = \mathrm{const}$.

3) Уравнение кардиоиды
   в декартовой системе координат: $(x^2 + y^2 - ax)^2 = a^2(x^2 + y^2)$;
   в полярной системе координат: $r = a(1 + \cos\varphi)$.

4) Уравнение лемнискаты Бернулли
   в декартовой системе координат: $(x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2) = 0$;
   в полярной системе координат: $r^2 = a^2\cos 2\varphi$.

5) Уравнение улитки Паскаля
   в декартовой системе координат: $(x^2 + y^2 - ax)^2 = b^2(x^2 + y^2)$;
   в полярной системе координат: $r = b + a\cos\varphi$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 3. Некоторые алгебраические кривые

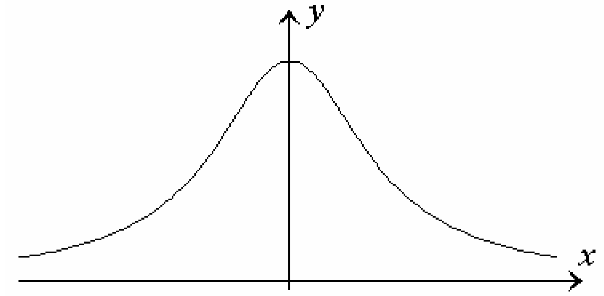


Полукубическая парабола:

$$y^2 = x^3$$

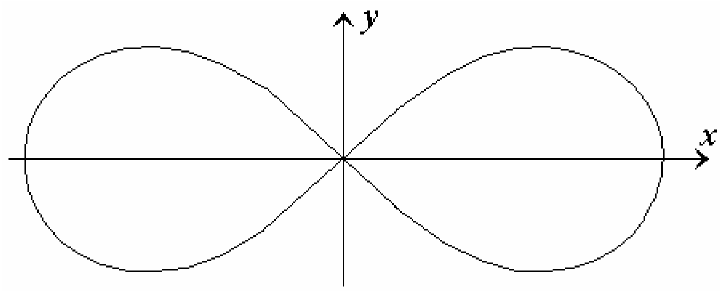
или

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$$



Локон Аньези:

$$x^2 y = 4a^2(2a - y)$$

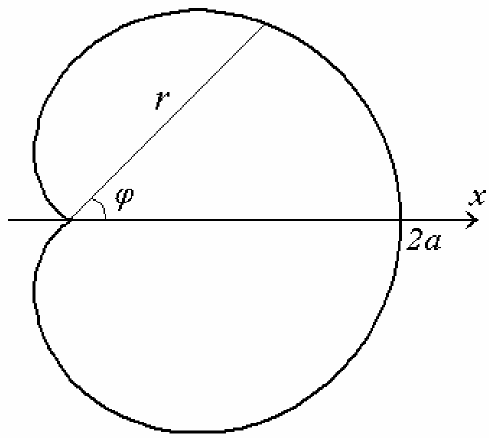


Лемниската Бернулли:

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$$

или

$$r^2 = a^2 \cos 2\varphi$$

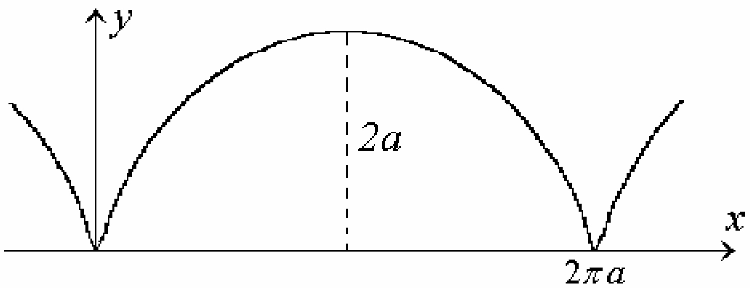


Кардиоида

$$(x^2 + y^2 - ax)^2 = a^2(x^2 + y^2)$$

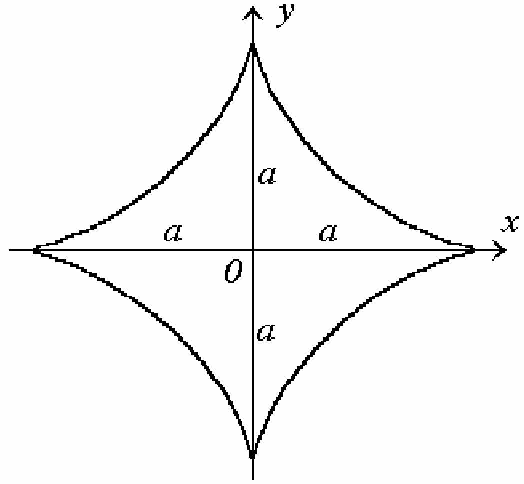
или

$$r = a(1 + \cos\varphi)$$



Циклоида

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

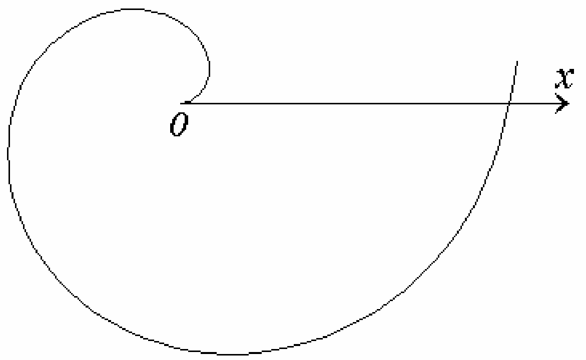


Астроида

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

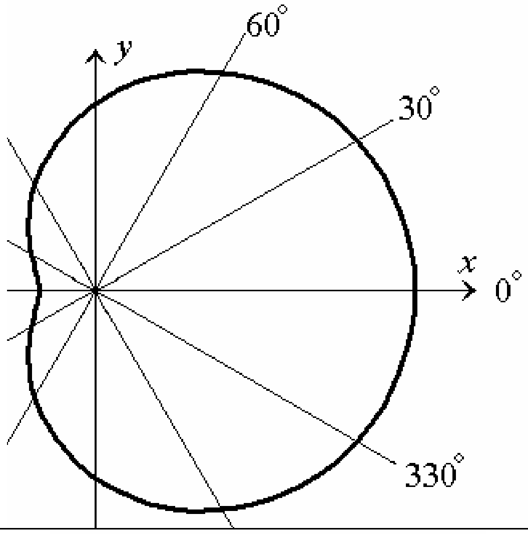
или

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$$



Спираль Архимеда

$$r = a\varphi$$



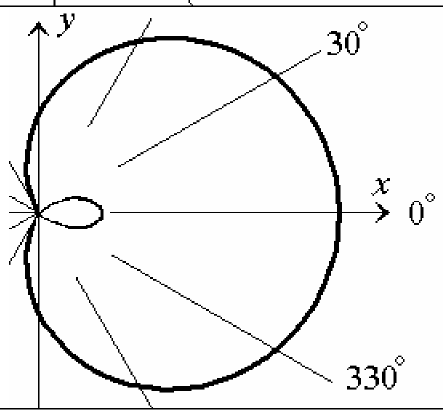
Улитка Паскаля

$$(x^2 + y^2 - ax)^2 = b^2(x^2 + y^2)$$

или

$$r = b + a\cos\varphi$$

$$a < b$$



Улитка Паскаля

$$(x^2 + y^2 - ax)^2 = b^2(x^2 + y^2)$$

или

$$r = b + a\cos\varphi$$

$$a > b$$

Литература

1. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа. – М. Наука, 1971.
2. Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа. – М., Наука, 1989.
3. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление (в 2-х томах). – М. Наука, 1985.
4. Кудрявцев ВА, Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. – М. Наука, 1986.
5. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. – М.: Высшая школа, 1980, 366 с.
6. Сборник задач по математике для втузов (под ред. А.В.Ефимова, Б.П. Демидовича) в 3-х томах. – М. Наука, 1986.
7. Каплан Н.А. Практические занятия по высшей математике (в 3-х томах). – Харьков: Изд-во ХГУ, т. 1—1965.
8. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М. Наука, 1977.
9. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М. Наука, 1985.