

Обыкновенные дифференциальные уравнения. Лекционные наброски. Конев В.В.

Содержание

Часть 1. Основные понятия.	2
1.1. Введение	2
1.2. Начальные условия	4
1.3. Составление дифференциальных уравнений	5
1.4. Особые решения	6
1.5. Поле направлений. Изоклины.	8
1.6. Упражнения.	9
Часть 2. Дифференциальные уравнения первого порядка.	10
2.1. Непосредственно интегрируемые уравнения	10
2.2. Уравнения с разделяющимися переменными	12
2.3. Однородные уравнения	15
2.4. Уравнения, приводящиеся к однородным	17
2.5. Линейные уравнения	18
2.5.1 Интегрирование линейного уравнения подстановкой.	19
2.5.2 Метод вариации постоянной.	21
2.6. Уравнение Бернулли	22
2.7. Уравнения в полных дифференциалах	23
2.7.1 Интегрирующий множитель.	27
2.8. Отыскание особых решений.	32
2.9. Уравнения, не разрешенные относительно производной.	34
2.9.1. Примеры.	36
2.10. Уравнения Лагранжа и Клеро.	40
2.11. Итоговая таблица подстановок (суперкраткий справочник).	46
2.12. Смешанные задачи	48

Часть 1. Основные понятия

1.1. Введение

Дифференциальные уравнения находят широкое применение при решении разнообразных задач физики, техники, химии, биологии, экономики и т.д. Это связано с тем, что многие законы естествознания, описывающие фундаментальные процессы и явления, протекающие в природе, формулируются на языке дифференциальных уравнений.

Например, математическим выражением второго закона Ньютона, описывающего движение тела под действием приложенных к нему сил, является равенство между собой производной импульса тела по времени и равнодействующей приложенных сил.

К другим приложениям дифференциальных уравнений относятся:

- 1) изучение процессов, протекающих в микромире;
- 2) исследование взаимодействий заряженных частиц с электрическими и магнитными полями;
- 3) вычисление траекторий движения спутников и планет;
- 4) расчет теплопроводности твердых тел и газов;
- 5) выяснение характера протекания химических реакций;
- 6) описание эволюции биологических объектов;
- 7) разработка математических моделей в экономике;
- 8) создание теории оптимального управления.

Вышеперечисленные примеры отнюдь не исчерпывают всего многообразия процессов, изучение которых связано с исследованием и решением дифференциальных уравнений.

Под **обыкновенным дифференциальным уравнением (ОДУ)** понимается уравнение для функции одной переменной, содержащее производную этой функции. При этом сама функция и независимая переменная могут и не входить в уравнение явным образом.

Порядок дифференциального уравнения определяется порядком старшей производной, содержащейся в уравнении.

Наиболее общий вид обыкновенного дифференциального **уравнения n -го порядка** задается уравнением

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (1)$$

где x – независимая переменная; $y = y(x)$ – искомая функция;

$$y' = \frac{dy}{dx}; \quad y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

В первой части этого курса рассматриваются только дифференциальные уравнения 1-го порядка:

$$F(x, y, y') = 0. \quad (2)$$

Дифференциальное уравнение вида

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}), \quad (3)$$

где f – заданная функция, называется **разрешенным относительно старшей производной**. В частности, дифференциальное уравнение 1-го порядка, разрешенное относительно производной, имеет вид

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \quad (4)$$

Это уравнение может быть также представлено в симметрической форме

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \quad (5)$$

где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ – некоторые заданные функции.

Решением дифференциального уравнения первого порядка называется функция $y = \varphi(x)$, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество относительно переменной x .

Процедура нахождения решений дифференциального уравнения называется **интегрированием** уравнения.

Любое дифференциальное уравнение имеет бесконечное множество решений. **Общим решением** дифференциального уравнения (2) называется непрерывно дифференцируемая функция

$$y = \varphi(x, C), \quad (6)$$

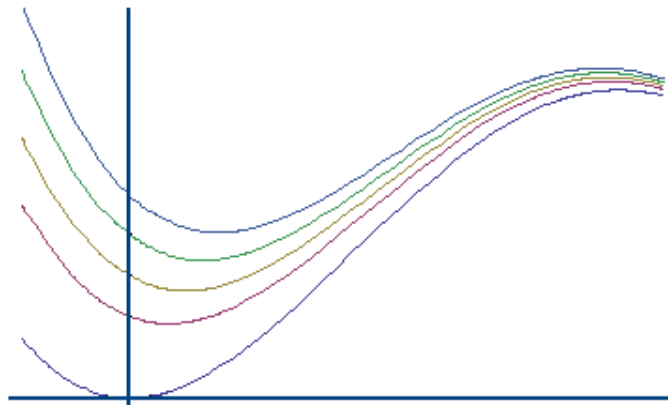
зависящая от переменной x и от произвольного параметра C , которая является решением уравнения в некоторой области при любых допустимых значениях параметра C :

$$F(x, \varphi(x, C), \varphi'(x, C)) \equiv 0. \quad (7)$$

Подстановка вместо C конкретного значения дает **частное решение** уравнения:

$$y = \varphi(x). \quad (8)$$

График функции $y = \varphi(x, C)$, построенный при некотором фиксированном значении параметра C , называется **интегральной кривой**. Общему решению уравнения (2) соответствует семейство интегральных кривых, полученных при различных значениях параметра C .



1.2. Начальные условия

Обычно наибольший интерес представляет решение, удовлетворяющее дополнительному условию или условиям. Такие условия называются **начальными условиями** и заключаются в указании поведения решения в некоторой точке или в непосредственной окрестности точки. В частности, уравнение 1-го порядка может быть дополнено одним начальным условием вида

$$y(x_0) = y_0, \quad (9)$$

которое из семейства интегральных кривых выделяет линию, проходящую через заданную точку. Начальные условия используются для нахождения значения параметра C , подстановка которого в общее решение дает соответствующее **частное решение**.

Задача о нахождении решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданным начальным условиям (или условию), называется **задачей Коши**:

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \quad (10)$$

Если вся область покрыта интегральными кривыми, которые нигде не пересекаются между собой, то задача Коши имеет единственное решение.

Решить (или **проинтегрировать**) дифференциальное уравнение означает найти его общее решение или же решить задачу Коши. Уравнение

$$\Phi(x, y, C) = 0, \quad (11)$$

определяющее общее решение в виде неявно заданной функции, называется **общим интегралом** дифференциального уравнения. Подстановка вместо константы C числового значения приводит к **частному интегралу**:

$$\Phi(x, y) = 0. \quad (12)$$

1.3. Составление дифференциальных уравнений

Формула (11) описывает семейство кривых и является следствием дифференциального уравнения (2). Обратной задачей является построение дифференциального уравнения, соответствующего заданному семейству линий. Для решения такой задачи можно использовать следующий алгоритм.

- 1) Продифференцировать уравнение (11) по x , полагая, что переменная y является дифференцируемой функцией переменной x .
- 2) Составить систему уравнений

$$\begin{cases} \Phi(x, y, C) = 0, \\ \frac{\partial \Phi(x, y, C)}{\partial x} + \frac{\partial \Phi(x, y, C)}{\partial y} y' = 0. \end{cases} \quad (13)$$

- 3) Исключить из этой системы параметр C .

Пример 1. Рассмотрим семейство парабол, которое описывается уравнением

$$4 + (x + C)^2 - 4y = 0. \quad (14)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, C) &= 4 + (x + C)^2 - 4y = 0, \\ \frac{\partial \Phi(x, y, C)}{\partial x} + \frac{\partial \Phi(x, y, C)}{\partial y} y' &= 2(x + C) - 4y' = 0. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} x + C &= 2y', \quad 1 + y'^2 - y = 0, \\ y' &= \pm \sqrt{y - 1}. \end{aligned} \quad (15)$$

Пример 2. Рассмотрим семейство окружностей

$$(x - C)^2 + y^2 = C^2. \quad (16)$$

В этом случае имеем

$$\Phi(x, y, C) = (x - C)^2 + y^2 - C^2 = 0, \quad (17)$$

$$\frac{\partial \Phi(x, y, C)}{\partial x} + \frac{\partial \Phi(x, y, C)}{\partial y} y' = 2(x - C) + 2yy' = 0. \quad (18)$$

Подставляя $C = x + yy'$ в уравнение (17), получим

$$2xyy' = y^2 - x^2. \quad (19)$$

Пример 3. Составить дифференциальное уравнение, описывающее семейство окружностей единичного радиуса, центры которых расположены на прямой $y = x$.

Решение. Указанное семейство линий удовлетворяет уравнению

$$(x - C)^2 + (y - C)^2 = 1. \quad (20)$$

Дифференцируем обе части этого равенства по переменной x :

$$x - C + (y - C)y' = 0.$$

Исключая параметр C , получим

$$(y - x)^2(y'^2 + 1) - (y' + 1)^2 = 0.$$

1.4. Особые решения

Хотя общее решение уравнения объединяет все частные решения, некоторые дифференциальные уравнения имеют еще и **особые решения**, которые не получаются из общего решения ни при каких значениях параметра C (включая $C = \pm\infty$).

Кривая, соответствующая особому решению, является огибающей семейства интегральных кривых. Это означает, что график особого решения имеет точку касания с каждой кривой этого семейства.

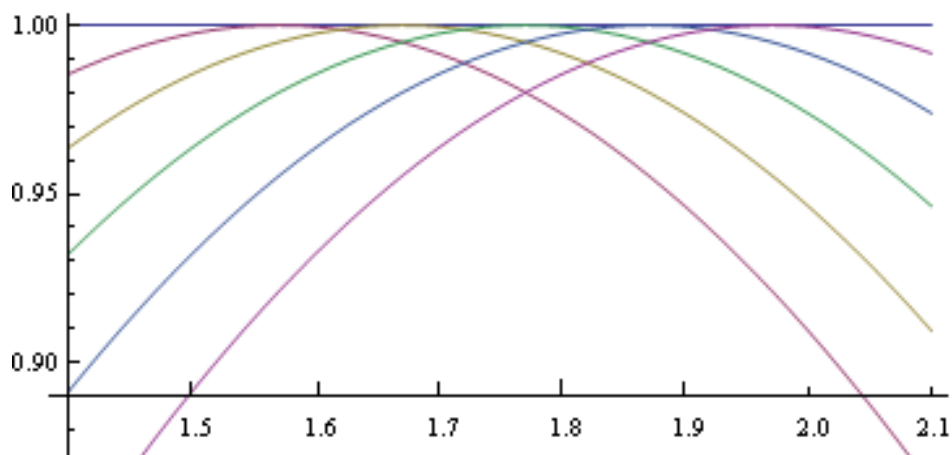


Рис. 1. Прямая $y = 1$ является огибающей семейства кривых $y = \sin(x + C)$.

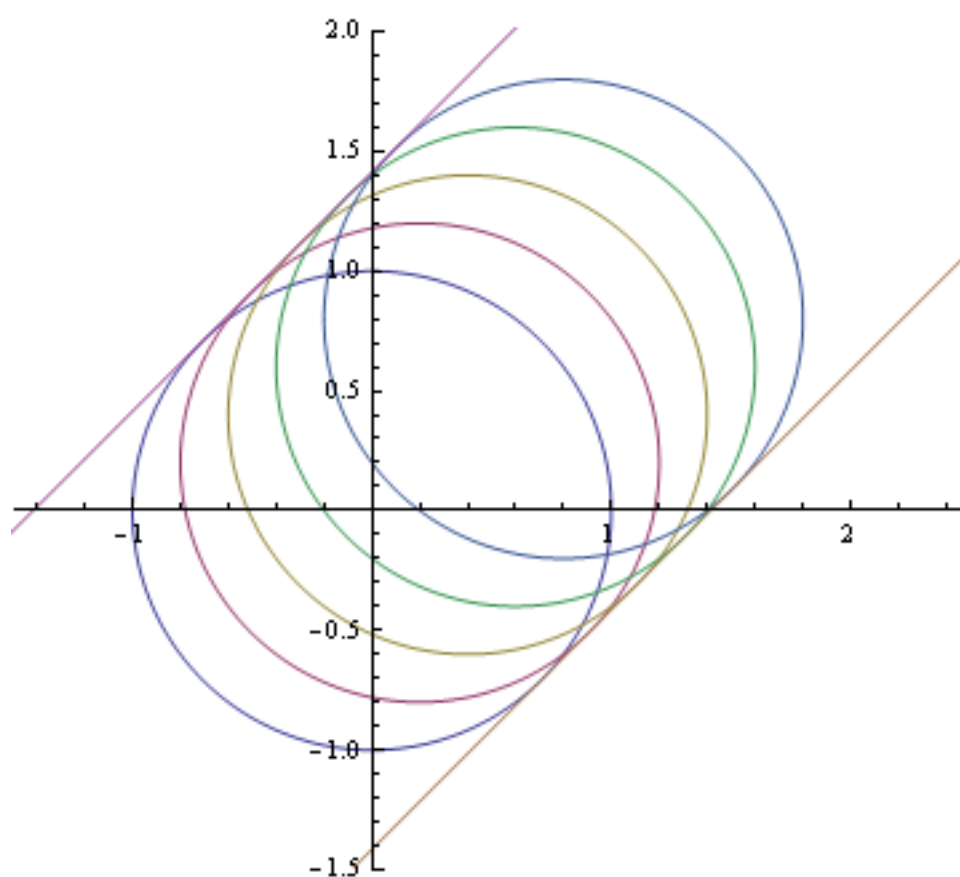


Рис. 2. Прямые $y = x \pm \sqrt{2}$ являются огибающими семейства интегральных кривых $(x - C)^2 + (y - C)^2 = 1$.

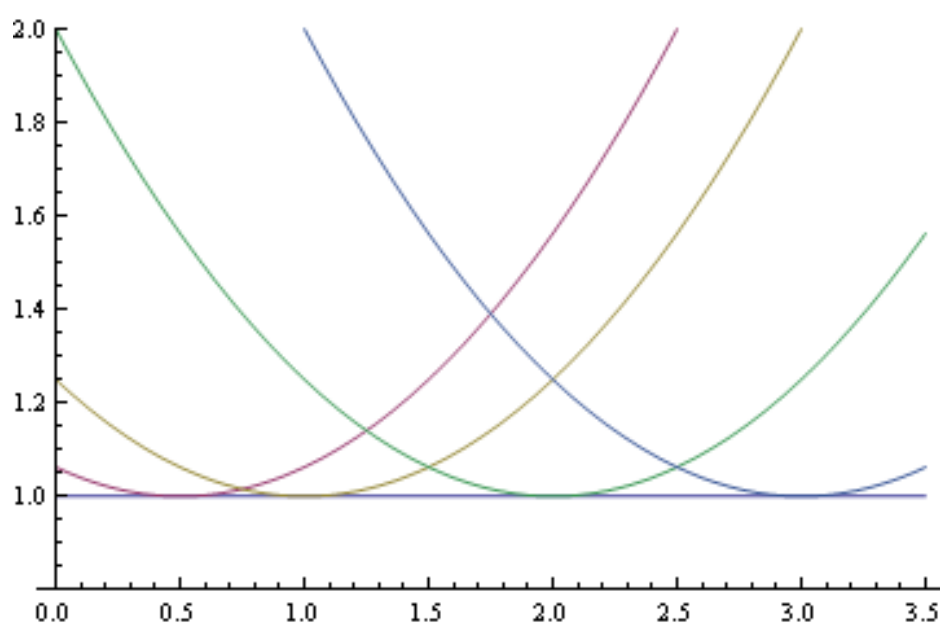


Рис. 3. Прямая $y = 1$ является огибающей семейства интегральных кривых $y = 1 + (x + C)^2/4$, описывающих общее решение уравнения $y' = \pm\sqrt{y-1}$.

1.5. Поле направлений. Изоклины.

Для наглядного изображения решений дифференциального уравнения (4) используется также совокупность направленных отрезков малой длины с угловыми коэффициентами $y' = f(x, y)$, проведенных в точках некоторой области плоскости (x, y) . Семейство таких отрезков называется **полем направлений**, соответствующим уравнению (4), или полем направлений функции $f(x, y)$. Любая интегральная кривая уравнения (4) имеет в каждой своей точке касательную, предписанную полем направлений.

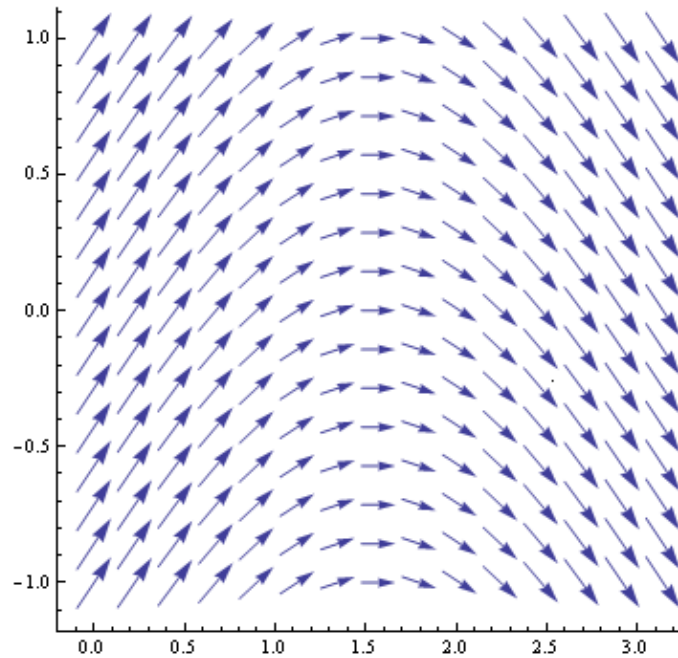


Рис. 4. Поле направлений уравнения $y' = \cos x$.

Совокупность точек плоскости, которым дифференциальное уравнение (4) ставит в соответствие одно и то же направление, образует кривую, называемую **изоклиной**.

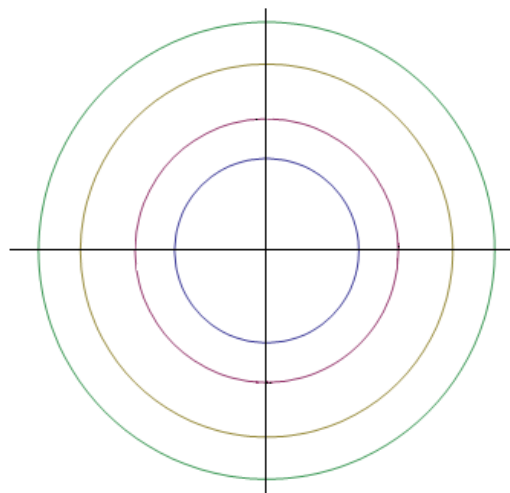


Рис. 5. Изоклины уравнения $y' = x^2 + y^2$.

Все интегральные кривые, пересекающие некоторую изоклину, в точках пересечения наклонены к оси абсцисс под одним и тем же углом.

Для иллюстрации на рисунке 5 показаны интегральные кривые и изоклина уравнения

$$y' = \frac{y}{x} - x.$$

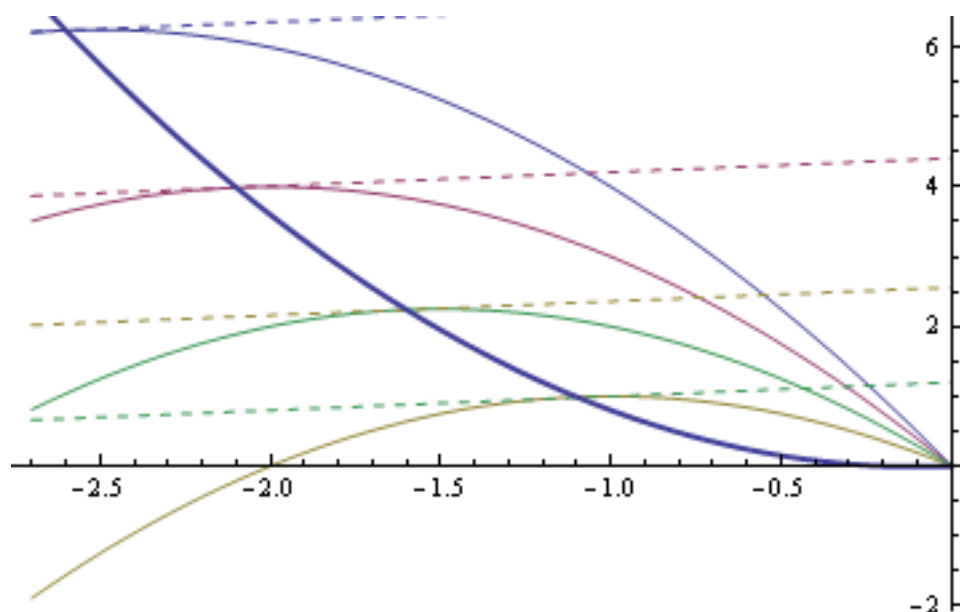


Рис. 5. Тонкие разноцветные линии - интегральные кривые; сплошная толстая линия – изоклина $y/x - x = C$; пунктирные прямые - касательные к интегральным кривым в точках пересечения с изоклиной.

1.6. Упражнения.

Установить, какие из нижеприведенных функций являются решениями соответствующих дифференциальных уравнений.

- 1) $y' = 2y/x$, $y = 5x^2$.
- 2) $y'' = x^2 + y^2$, $y = 1/x$.
- 3) $(x + y)dx + xdy = 0$, $y = C/2x - x/2$.
- 4) $y'' + y = 0$, $y = 3 \sin x - 4 \cos x$.
- 5) $x''(t) + \omega^2 x(t) = 0$, $x = A \cos \omega t + B \sin \omega t$.
- 6) $y'' - 2y' + y = 0$; а) $y = xe^x$, б) $y = x^2 e^x$.
- 7) $y'' - (a + b)y' + aby = 0$, $y = Ae^{ax} + Be^{bx}$.

Показать, что приведенные соотношения являются интегралами соответствующих дифференциальных уравнений.

- 8) $(x - 2y)y' = 2x - y$, $x^2 - xy + y^2 = C^2$.

9) $(x - y + 1)y' = 1, \quad y = x + Ce^y.$

10) $x(y - 1)y'' + xy'^2 + yy' - 2y' = 0, \quad y = \ln xy.$

Найти линии, удовлетворяющие заданным условиям.

11) $x^2 - y^2 = C, \quad y(0) = 4.$

12) $y = (C_1 + C_2 x)e^{2x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

13) $y = C_1 \sin(x - C_2), \quad y(\pi) = 1, \quad y'(\pi) = 0.$

14) $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x + C_3 e^{2x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = -2.$

Часть 2. Дифференциальные уравнения первого порядка

2.1 Непосредственно интегрируемые уравнения

К такому типу относят уравнения вида $y' = f(x)$, где $f(x)$ – заданная функция. Очевидно, что

$$y = \int f(x) dx.$$

Пример 1. Пусть $(x + 1)y' = x$. Тогда общее решение уравнения имеет вид

$$y = \int \frac{x}{x+1} dx = x - \ln|x+1| + C.$$

Полагая $C = 0$, получим частное решение $y_1 = x - \ln|x+1|$.

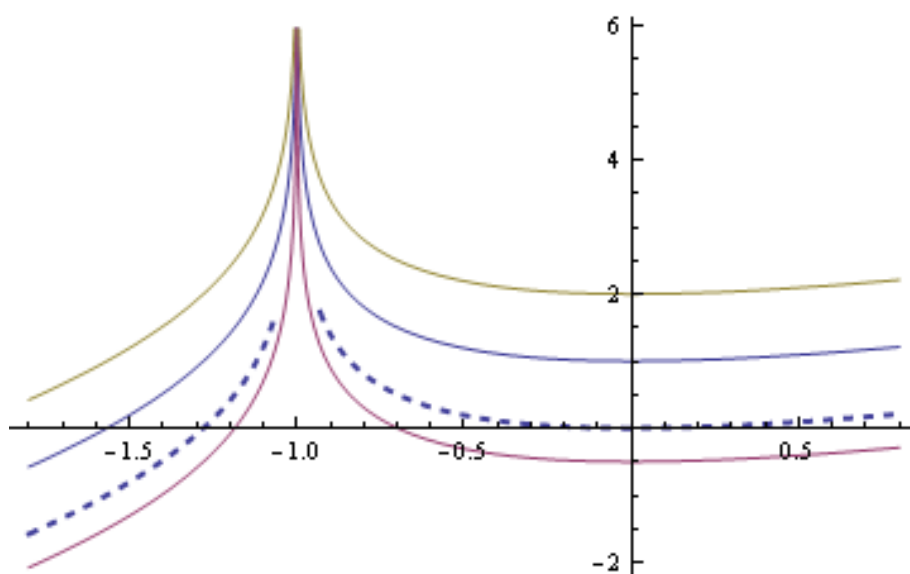


Рис. 1. Семейство интегральных кривых дифференциального уравнения $(x + 1)y' = x$. Частное решение y_1 показано пунктирной линией.

Пример 2. Найти частное решение уравнения

$$y' = \frac{1}{(x+3)^2} + 1,$$

удовлетворяющее начальному условию

$$y\left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Другими словами, требуется решить задачу Коши:

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{(x+3)^2} + 1, \\ y(1) = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Решение.

$$y = \int \left(\frac{1}{(x+3)^2} + 1 \right) dx = -\frac{1}{(x+3)} + x + C.$$

Используя начальное условие, получим

$$\frac{1}{2} = -2 - \frac{5}{2} + C, \quad C = 5.$$

Таким образом,

$$y = -\frac{1}{(x+3)} + x + 5.$$

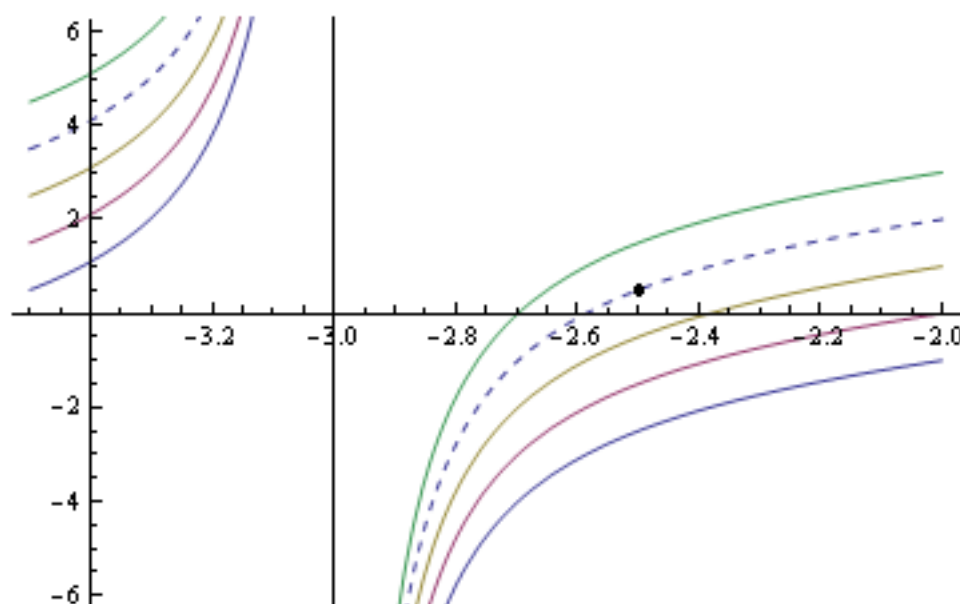


Рис. 2. Семейство интегральных кривых дифференциального уравнения

$$y' = \frac{1}{(x+3)^2} + 1.$$

Частное решение показано пунктирной линией.

2.2 Уравнения с разделяющимися переменными

Уравнения вида

$$y' = f(x)g(y), \quad (1)$$

где $f(x)$ и $g(y)$ – заданные функции, каждая из которых зависит только от одной переменной, называются уравнениями с разделяющимися переменными.

После разделения переменных уравнение (1) принимает вид

$$f(x)dx = g_1(y)dy. \quad (2)$$

Тогда

$$\int f(x)dx = \int g_1(y)dy + C.$$

Пример 1. В уравнении

$$xy' = y^2 - 4 \quad (3)$$

переменные легко разделяются:

$$\frac{dy}{y^2 - 4} = \frac{dx}{x}.$$

Далее получаем

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{y^2 - 4} &= \int \frac{dx}{x} + C, \\ \frac{1}{4} \ln \left| \frac{y+2}{y-2} \right| &= \ln |x| + \frac{1}{4} \ln C, \\ \left| \frac{y+2}{y-2} \right| &= Cx^4. \end{aligned} \quad (4)$$

Заметим, что при делении обеих частей исходного уравнения (3) на $(y^2 - 4)$ могли быть потеряны решения $y = \pm 2$. Но эти решения содержатся в общем интеграле (3): при $C = \infty$ и $C = 0$ соответственно.

Пример 2. Пусть

$$y' = \sqrt{y-1}. \quad (5)$$

Тогда

$$\frac{dy}{\sqrt{y-1}} = dx, \quad 2\sqrt{y-1} = x + 2C,$$

$$y = \left(\frac{x}{2} + C\right)^2 + 1. \quad (6)$$

Очевидно, что $y = 1$ является решением уравнения (5), но это решение не описывается формулой (6) и было потеряно при делении обеих частей уравнения (5) на $\sqrt{y-1}$. Поэтому общее решение (6) должно быть дополнено потерянным решением.

Ответ: $y = (x/2 + C)^2 + 1$ и $y = 1$.

К уравнениям с разделяющимися переменными приводятся уравнения вида

$$y' = f(ax + by), \quad (7)$$

где a и b – числовые коэффициенты; f – заданная функция.

Действительно, введем новую переменную u , определив ее уравнением

$$u = ax + by. \quad (8)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{b}u' - \frac{a}{b} &= f(u), \quad u' = bf(u) + a, \\ \frac{du}{bf(u) + a} &= dx, \quad \int \frac{du}{bf(u) + a} = x + C. \end{aligned}$$

На завершающей стадии интегрирования дифференциального уравнения нужно подставить вместо новой переменной u ее выражение (8).

Пример 3. Рассмотрим уравнение

$$y' = \sin(x + y) - 1. \quad (9)$$

Введем новую переменную:

$$u = x + y.$$

Тогда уравнение (9) приводится к уравнению с разделяющимися переменными, которое легко интегрируется:

$$\begin{aligned} u' &= \sin u, \quad \frac{du}{\sin u} = dx, \\ \ln \left| \operatorname{tg} \frac{u}{2} \right| &= x + \ln C, \quad \operatorname{tg} \frac{u}{2} = Ce^x, \\ \operatorname{tg} \frac{x+y}{2} &= Ce^x. \end{aligned} \quad (10)$$

В процессе интегрирования дифференциального уравнения (9) могли быть потеряны решения

$$y = \pi n - x, \quad (11)$$

где n – целое число.

Однако такая потеря не произошла, поскольку общий интеграл (10) включает в себя все решения (11) при соответствующих значениях параметра C :

$$C = \begin{cases} 0, & \text{если } n = 2k, \\ +\infty, & \text{если } n = 2k + 1 > 0, \\ -\infty, & \text{если } n = 2k + 1 < 0. \end{cases}$$

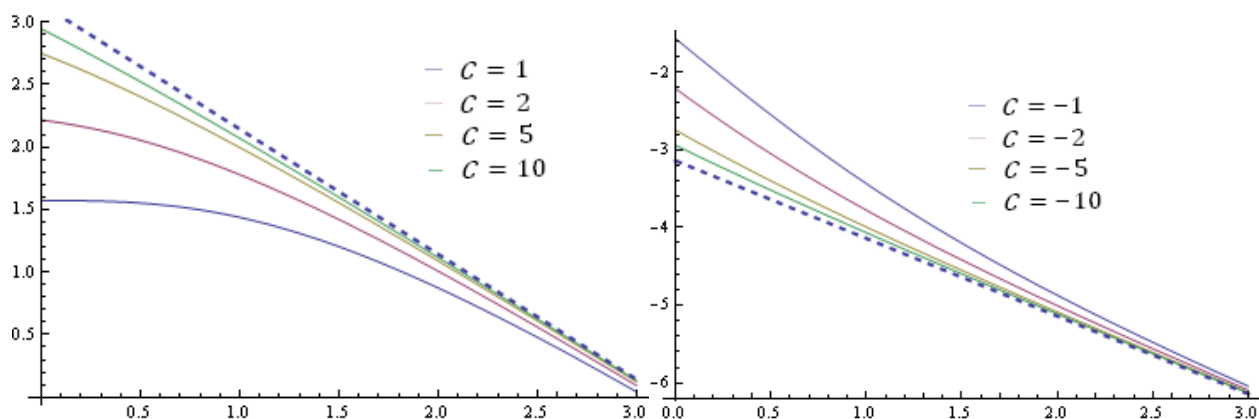


Рис. 3-4. Семейства интегральных кривых уравнения (9).

Решения $y = \pi - x$ и $y = -\pi - x$ показаны пунктирными линиями (на левом и правом рисунках соответственно).

Пример 4. Преобразуем уравнение

$$y' = \cos(x + y), \quad (12)$$

выполнив подстановку $u = x + y$:

$$\begin{aligned} u' &= \cos u + 1, & \frac{du}{\cos u + 1} &= dx, \\ \int \frac{du}{2 \cos^2 \frac{u}{2}} &= x + C, & \operatorname{tg} \frac{u}{2} &= x + C, \\ \operatorname{tg} \frac{x + y}{2} &= x + C. \end{aligned} \quad (13)$$

Решения вида

$$y = (2n + 1)\pi - x$$

содержатся в общем интеграле (13) дифференциального уравнения (12) при $C = \pm\infty$.

2.3 Однородные уравнения

Дифференциальное уравнение называется однородным, если оно может быть представлено в виде

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right), \quad (1)$$

где f – заданная функция.

Выполним замену переменной и преобразуем уравнение (1):

$$\begin{aligned} u &= \frac{y}{x}, \quad y = ux, \\ y' &= u'x + u, \\ u'x &= f(u) - u, \\ \frac{du}{f(u) - u} &= \frac{dx}{x}, \quad \int \frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x}, \\ \int \frac{du}{f(u) - u} &= x + C. \end{aligned} \quad (2)$$

Хотя формула (2) решает проблему интегрирования однородного дифференциального уравнения, нет никакой необходимости ее запоминать; достаточно просто воспроизвести вышеприведенный алгоритм в каждой конкретной задаче.

Пример 1. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} (x + y)dx + (x - y)dy = 0, \\ y(0) = 2. \end{cases} \quad (3)$$

Решение. Уравнение (3) является однородным, поскольку оно приводится к виду

$$y' = \frac{y + x}{y - x}, \quad y' = \frac{\frac{y}{x} + 1}{\frac{y}{x} - 1}.$$

Замена переменной $y = ux$ приводит к уравнению с разделяющимися переменными:

$$\begin{aligned} u'x &= \frac{u + 1}{u - 1} - u, \\ u'x &= -\frac{u^2 - 2u - 1}{u - 1}, \end{aligned}$$

$$\frac{(u-1)du}{u^2-2u-1} = -\frac{dx}{x}, \quad \frac{1}{2} \int \frac{d(u^2-2u-1)}{u^2-2u-1} = -\int \frac{dx}{x}.$$

Тогда

$$\ln|u^2-2u-1| = -2\ln|x| + \ln C = 0,$$

$$u^2-2u-1 = \frac{C}{x^2},$$

$$y^2-2xy-x^2 = C \Rightarrow \quad (4)$$

$$y = x + \sqrt{2x^2 + C} \quad (5)$$

или

$$y = x - \sqrt{2x^2 + C}. \quad (6)$$

Начальному условию (3) можно удовлетворить, используя решение (5):

$$2 = \sqrt{C}, \quad C = 4.$$

Таким образом, решение задачи Коши (3) имеет вид

$$y = x + \sqrt{2x^2 + 4}. \quad (7)$$

Другое решение. Представим уравнение (3) в виде

$$xdx + ydx + xdy - ydy = 0,$$

что влечет

$$d(x^2 + 2xy - y^2) = 0,$$

$$y^2 - 2xy - x^2 = C.$$

Этот общий интеграл совпадает с ранее полученным результатом (4).

Совет. Удача всегда где-то рядом. И она обычно улыбается тем, кто готов дерзать, экспериментировать, искать новые для себя подходы, откладывая шаблонные решения на крайний случай, когда не удалось с ходу осчастливить всё Человечество (или хотя бы себя самого).

Пример 2. Решить уравнение

$$yy' = 6xy - 4x^3. \quad (8)$$

Решение. В таком виде уравнение (8) не является однородным. Однако оно приводится к однородному, заменой

$$y = z^2. \quad (9)$$

Действительно,

$$yy' = z^2 \cdot 2zz',$$

$$6xy - 4x^3 = 6xz^2 - 4x^3.$$

Следовательно,

$$z^3 z' = 3xz^2 - 2x^3,$$

$$z' = \frac{3x}{z} - 2\left(\frac{x}{z}\right)^3.$$

Затем предстоит реализовать стандартный алгоритм решения однородного уравнения: произвести замену переменной, преобразовать уравнение и так далее:

$$z = ux, \quad z' = u'x + u,$$

$$u'x = \frac{3}{u} - \frac{2}{u^3} - u,$$

$$u'x = -\frac{u^4 - 3u^2 + 2}{u^3},$$

$$\frac{u^3 du}{u^4 - 3u^2 + 2} = -\frac{dx}{x},$$

$$\frac{u^3 du}{(u^2 - 1)(u^2 - 2)} = -\frac{dx}{x},$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{u^2 d(u^2)}{(u^2 - 1)(u^2 - 2)} = -\ln|x| + \ln C.$$

Далее осталось выполнить только технические преобразования.

2.4 Уравнения, приводящиеся к однородным

Рассмотрим уравнение вида

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right), \quad (1)$$

где a_1, b_1, c_1 и a_2, b_2, c_2 – числовые коэффициенты; f – заданная функция.

Если $a_1b_2 = a_2b_1$, то правая часть уравнения (10) представляет собой некоторую функцию g линейной комбинации $a_1x + b_1y$. В этом случае уравнение (1) сводится к уравнению с разделяющимися переменными (заменой переменной ($u = a_1x + b_1y$)):

$$f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) = g(a_1x + b_1y),$$

$$y' = g(a_1x + b_1y),$$

$$u' = b_1 g(u) + a_1,$$

$$\frac{du}{b_1 g(u) + a_1} = dx.$$

В противном случае следует перейти в другую прямоугольную систему координат $(\tilde{x}, \tilde{y})$, которая отличается от исходной только положением начало координат:

$$\begin{cases} x = \tilde{x} + \alpha, \\ y = \tilde{y} + \beta. \end{cases} \quad (2)$$

Тогда

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}},$$

$$a_1 x + b_1 y + c_1 = a_1 \tilde{x} + b_1 \tilde{y} + (a_1 \alpha + b_1 \beta + c_1),$$

$$a_2 x + b_2 y + c_2 = a_2 \tilde{x} + b_2 \tilde{y} + (a_2 \alpha + b_2 \beta + c_2).$$

Параметры α и β определяются из системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_1 \alpha + b_1 \beta + c_1 = 0, \\ a_2 \alpha + b_2 \beta + c_2 = 0. \end{cases}$$

В результате уравнение (1) приводится к однородному:

$$\frac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}} = f\left(\frac{a_1 \tilde{x} + b_1 \tilde{y}}{a_2 \tilde{x} + b_2 \tilde{y}}\right) = f\left(\frac{a_1 + b_1 \frac{\tilde{y}}{\tilde{x}}}{a_2 + b_2 \frac{\tilde{y}}{\tilde{x}}}\right). \quad (3)$$

2.5 Линейные уравнения

Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$y' + P(x)y = Q(x), \quad (1)$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ – заданные функции переменной x .

Если функция $Q(x) = 0$, то соответствующее уравнение называется линейным однородным:

$$y' + P(x)y = 0. \quad (2)$$

Разделив переменные, получим общее решение уравнения (2):

$$\frac{dy}{y} = -P(x)dx, \quad \int \frac{dy}{y} = - \int P(x)dx,$$

$$y = Ce^{-\int P(x) dx} = Cv(x), \quad (3)$$

где $\int P(x) dx$ – одна из первообразных функции $P(x)$; C – постоянная интегрирования.

Теорема. Пусть функция $y_0(x)$ является общим решением линейного однородного уравнения (2), а $y_1(x)$ – частное решение линейного уравнения (1). Тогда общее решение $y(x)$ линейного уравнения (1) имеет вид

$$y(x) = y_0(x) + y_1(x). \quad (3)$$

Доказательство. Покажем сначала, что функция (3) удовлетворяет уравнению (1). Действительно,

$$\begin{aligned} (y_0 + y_1)' + P(x)(y_0 + y_1) &= \\ &= (y_0' + P(x)y_0) + (y_1' + P(x)y_1). \end{aligned}$$

Согласно условиям теоремы,

$$\begin{aligned} y_0'(x) + P(x)y_0(x) &\equiv 0, \\ y_1'(x) + P(x)y_1(x) &\equiv Q(x) \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$(y_0 + y_1)' + P(x)(y_0 + y_1) = Q(x),$$

что и требовалось доказать.

Осталось показать, что можно подобрать такое значение параметра C , чтобы функция (3) удовлетворяла начальному условию

$$y(x_0) = A$$

при любых допустимых значениях x_0 и A .

Учитывая равенство (3), получим

$$\begin{aligned} Cv(x_0) + y_1(x_0) &= A, \\ C &= \frac{A - y_1(x_0)}{v(x_0)}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

2.5.1 Интегрирование линейного уравнения подстановкой.

Определим новую переменную $u(x)$ формулой

$$y(x) = u(x)v(x), \quad (4)$$

где $v(x)$ – вспомогательная функция.

Тогда

$$\begin{aligned}y' &= u'v + uv', \\u'v + uv' + P(x)uv &= Q(x), \\u'v + u(v' + P(x)v) &= Q(x).\end{aligned}\tag{5}$$

Потребуем, чтобы вспомогательная функция $v(x)$ удовлетворяла уравнению

$$v' + P(x)v = 0.\tag{6}$$

Разделяя переменные, получим

$$\begin{aligned}\frac{dv}{v} &= -P(x)dx, \quad \int \frac{dv}{v} = -\int P(x)dx, \\v(x) &= e^{-\int P(x)dx}.\end{aligned}\tag{7}$$

Далее возвращаемся к уравнению (5), подставляя в него полученное выражение для функции $v(x)$:

$$u' = \frac{Q(x)}{v(x)}, \quad u(x) = \int \frac{Q(x)}{v(x)} dx + C.$$

Таким образом,

$$y(x) = \left(\int \frac{Q(x)}{v(x)} dx + C \right) e^{-\int P(x)dx}.\tag{8}$$

Пример. Найти общее решение уравнения

$$y' - \frac{y}{x} = x^3.\tag{9}$$

Решение. Замена переменной:

$$\begin{aligned}y(x) &= u(x)v(x), \\y' &= u'v + uv', \\u'v + uv' - \frac{1}{x}uv &= x^3, \\u'v + u\left(v' - \frac{1}{x}v\right) &= x^3.\end{aligned}$$

Решаем вспомогательное уравнение

$$v' - \frac{1}{x}v = 0.$$

Получаем

$$\frac{dv}{v} = \frac{dx}{x}, \quad \ln v = \ln x, \quad v(x) = x.$$

(Постоянная интегрирования выбрана равной нулю.)

Тогда

$$u'x = x^3, \quad u' = x^2,$$

$$u(x) = \frac{1}{3}x^3 + C.$$

Таким образом,

$$y(x) = u(x)v(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 + C\right)x,$$

$$y(x) = \frac{1}{3}x^4 + Cx.$$

Другое решение. Рассмотрим линейное однородное уравнение

$$y' - \frac{y}{x} = 0.$$

Найдем его общее решение y_0 :

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}, \quad \ln y = \ln x + \ln C, \quad y_0 = Cx.$$

Частное решение уравнения (9) будем искать в виде

$$y_1 = Ax^n.$$

Имеем

$$Anx^{n-1} - Ax^{n-1} = x^3,$$

$$Ax^{n-1}(n-1) = x^3,$$

$$n = 4, \quad A = \frac{1}{3},$$

$$y_1 = \frac{1}{3}x^3.$$

Опираясь на доказанную теорему, получим общее решение уравнения (9):

$$y(x) = y_0 + y_1 = Cx + \frac{1}{3}x^4.$$

2.5.2 Метод вариации постоянной.

Процедура решения включает в себя два шага.

Запишем общее решение линейного однородного уравнения (2):

$$y = Ce^{-\int P(x) dx}.$$

Далее постоянную интегрирования будем рассматривать в качестве неизвестной функции $u(x)$, а решение линейного уравнения (1) будем искать в виде

$$y = u(x)e^{-\int P(x) dx}.$$

Подставляя это выражение в уравнение (1), получим

$$\begin{aligned} (ue^{-\int P(x) dx})' + P(x)ue^{-\int P(x) dx} &= Q(x), \\ u'e^{-\int P(x) dx} - ue^{-\int P(x) dx} + ue^{-\int P(x) dx} &= Q(x). \end{aligned}$$

Обозначим

$$v(x) = e^{-\int P(x) dx}.$$

Тогда

$$u' = \frac{Q(x)}{v(x)}, \quad u(x) = \int \frac{Q(x)}{v(x)} dx + C.$$

Таким образом,

$$y(x) = \left(\int \frac{Q(x)}{v(x)} dx + C \right) e^{-\int P(x) dx},$$

что в точности совпадает с формулой (8).

2.6 Уравнение Бернулли

Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ – заданные функции переменной x . Уравнение вида

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n \tag{1}$$

называется уравнением Бернулли. Предполагается, что показатель степени n представляет собой рациональное число за исключением $n = 0$ и $n = 1$, поскольку в первом случае уравнение (1) совпадает с линейным, а во втором является уравнением с разделяющимися переменными.

Заменой переменной $y = z^{1-n}$ уравнение (1) приводится к линейному уравнению. Для решения уравнения Бернулли используются метод подстановки $y = u(x)v(x)$ или метод вариации постоянной.

Пример. Рассмотрим уравнение

$$y' + \frac{y}{x} = -xy^2. \tag{2}$$

Выполним подстановку $y = u(x)v(x)$:

$$\begin{aligned}
 u'v + uv' + \frac{1}{x}uv &= -xu^2v^2, \\
 u'v + u\left(v' + \frac{1}{x}v\right) &= -xu^2v^2.
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

Условие

$$v' + \frac{1}{x}v = 0$$

выполняется, если

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}, \quad v = \frac{1}{x}.$$

Тогда из равенства (3) получаем

$$\begin{aligned}
 u' \frac{1}{x} &= -xu^2 \frac{1}{x^2}, \\
 u' &= -u^2, \quad \frac{du}{u^2} = -dx, \\
 \frac{1}{u} &= x + C, \quad u = \frac{1}{x + C}.
 \end{aligned}$$

Общее решение уравнения (2) имеет вид

$$y = \frac{1}{x + C} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x^2 + Cx}.$$

2.7 Уравнения в полных дифференциалах

Дифференциальное уравнение

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \tag{1}$$

в котором функции $P(x, y)$, $Q(x, y)$ удовлетворяют условию

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \tag{2}$$

называется **уравнением в полных дифференциалах**.

Напомним формулу для полного дифференциала функции $u(x, y)$ двух переменных:

$$du(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy. \tag{3}$$

Если функция $u(x, y)$ непрерывна вместе со своими частными производными, то смешанные производные не зависят от порядка дифференцирования:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}. \quad (4)$$

Поэтому условие (2) означает, что выражение в левой части уравнения (1) представляет собой полный дифференциал некоторой функции $u(x, y)$:

$$du = P(x, y)dx + Q(x, y)dy. \quad (5)$$

Общим интегралом уравнения $du = 0$ является

$$u(x, y) = C. \quad (6)$$

Формула (5) допускает простую интерпретацию, а именно: векторное поле

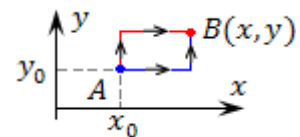
$$A(x, y) = \mathbf{i}P(x, y) + \mathbf{j}Q(x, y)$$

является потенциальным, а функция $u(x, y)$ – потенциалом этого векторного поля.

Для нахождения функции $u(x, y)$ можно использовать криволинейный интеграл по дуге, соединяющей точки $A(x_0, y_0)$ и $B(x, y)$:

$$u(x, y) = \int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy. \quad (7)$$

Обычно в качестве линии AB выбирается ломаная, состоящая из горизонтального и вертикального отрезков. Тогда



$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_{x_0}^x P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^y Q(x, y)dy = \\ &= \int_{x_0}^x P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^y Q(x, y)dy \end{aligned} \quad (8)$$

Другой метод нахождения функции $u(x, y)$ основан на решении системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y), \\ \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y). \end{cases} \quad (9)$$

Интегрируя первое из этих уравнений по переменной x и фиксируя при этом переменную y , получим

$$u(x, y) = \int P(x, y) dx + \varphi(y), \quad (10)$$

где $\varphi(y)$ – постоянная интегрирования.

Подставив выражение (10) во второе уравнение системы (9), получим обыкновенное дифференциальное уравнение для функции $\varphi(y)$.

Пример 1. Найти общий интеграл уравнения

$$(x^2 + y^2 + 2x)dx + 2xydy = 0. \quad (11)$$

Решение. Проверим выполнение условия (4):

$$\begin{aligned} P(x, y) &= x^2 + y^2 + 2x, & \frac{\partial P}{\partial y} &= 2y, \\ Q(x, y) &= 2xy, & \frac{\partial Q}{\partial x} &= 2y, \\ & & \frac{\partial Q}{\partial x} &= \frac{\partial P}{\partial y}. \end{aligned}$$

Следовательно, уравнение (11) является уравнением в полных дифференциалах:

$$du(x, y) = 0, \quad u(x, y) = C.$$

Найдем функцию $u(x, y)$ из системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = x^2 + y^2 + 2x, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 2xy. \end{cases} \quad (12)$$

Интегрируя второе из этих уравнений по переменной y (при фиксированном значении x), получим

$$u = xy^2 + \varphi(x), \quad (13)$$

где $\varphi(x)$ – постоянная интегрирования.

Дифференцируя это выражение по переменной x и подставляя результат в первое уравнение системы (12), получим

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= y^2 + \frac{d\varphi(x)}{dx} = x^2 + y^2 + 2x, \\ \frac{d\varphi(x)}{dx} &= x^2 + 2x, \\ \varphi(x) &= \frac{1}{3}x^3 + x^2.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}u &= xy^2 + \frac{1}{3}x^3 + x^2, \\ xy^2 + \frac{1}{3}x^3 + x^2 &= C.\end{aligned}\tag{14}$$

Тот же результат получается при использовании криволинейного интеграла (8). В качестве начальной точки пути интегрирования можно выбрать начало координат:

$$\begin{aligned}u(x, y) &= \int_0^x (x^2 + y^2 + 2x)dx = \\ &= \frac{1}{3}x^3 + xy^2 + x^2.\end{aligned}$$

Неформальное решение. Тот факт, что выражение

$$(x^2 + y^2 + 2x)dx + 2xydy$$

представляет собой полный дифференциал некоторой функции $u(x, y)$ порождает надежду “догадаться” о виде этой функции.

Действительно,

$$\begin{aligned}x^2 dx + 2x dx &= d\left(\frac{1}{3}x^3 + x^2\right), \\ y^2 dx + 2xy dy &= d(xy^2), \\ (x^2 + y^2 + 2x)dx + 2xy dy &= \\ &= d\left(\frac{1}{3}x^3 + x^2 + xy^2\right).\end{aligned}$$

Следовательно,

$$u = \frac{1}{3}x^3 + xy^2 + x^2.$$

Пример 2. Найти общий интеграл уравнения

$$(x^3 - 3xy^2 + 2)dx - (3x^2y - y^2)dy = 0. \quad (15)$$

Решение. Заметим, что

$$\begin{aligned}(x^3 + 2)dx + y^2dy &= d\left(\frac{1}{4}x^4 + 2x + \frac{1}{3}y^3\right), \\ -3xy^2dx - 3x^2ydy &= -\frac{3}{2}d(x^2y^2).\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}(x^3 - 3xy^2 + 2)dx - (3x^2y - y^2)dy &= \\ = d\left(\frac{1}{4}x^4 + 2x + \frac{1}{3}y^3 - \frac{3}{2}x^2y^2\right) &= 0,\end{aligned}$$

что влечет

$$\frac{1}{4}x^4 + 2x + \frac{1}{3}y^3 - \frac{3}{2}x^2y^2 = C.$$

Пример 3. Найти общий интеграл уравнения

$$\frac{2x}{y^3}dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy = 0. \quad (16)$$

Решение. Перегруппируем слагаемые в этом уравнении:

$$\begin{aligned}\frac{2x}{y^3}dx - \frac{3x^2}{y^4}dy + \frac{1}{y^2}dy &= \\ = d\left(\frac{x^2}{y^3}\right) - d\left(\frac{1}{y}\right) &= d\left(\frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y}\right).\end{aligned}$$

Следовательно,

$$d\left(\frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y}\right) = 0, \quad \frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} = C.$$

2.7.1 Интегрирующий множитель.

Сошлёмся на теорему, которая устанавливает, что при выполнении вполне разумных условий (почти необременительных) существует интегрирующий множитель $\mu(x, y)$, после умножения на который выражение вида $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ превращается в полный дифференциал некоторой функции $u(x, y)$. Тогда

$$\frac{\partial(\mu Q)}{\partial x} = \frac{\partial(\mu P)}{\partial y}. \quad (1)$$

Преобразуем это равенство:

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial Q}{\partial x} + Q \frac{\partial \mu}{\partial x} &= \mu \frac{\partial P}{\partial y} + P \frac{\partial \mu}{\partial y} \\ \frac{1}{\mu} \left(P \frac{\partial \mu}{\partial y} - Q \frac{\partial \mu}{\partial x} \right) &= \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}. \end{aligned} \quad (2)$$

Рассмотрим 98 частных случаев, в которых уравнение (2) в частных производных преобразуется в обыкновенное дифференциальное уравнение для μ . Для компактности записи формул введем обозначение

$$D(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}.$$

- 1) Предположим, что существует множитель μ , который удовлетворяет уравнению (2) и зависит только от переменной x . Тогда уравнение (2) принимает вид

$$-Q \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dx} = D, \quad (\ln \mu(x))' = -\frac{1}{Q(x, y)} D(x, y) = F_1.$$

Если выражение F_1 в правой части этого равенства зависит от переменной y , то выдвинутая гипотеза является несостоятельной. В противном случае

$$\mu(x) = \exp \left(\int F_1(x) dx \right). \quad (3)$$

- 2) Если $\mu = \mu(y)$, то из уравнения (2) вытекает обыкновенное дифференциальное уравнение

$$P \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dy} = D, \quad (\ln \mu(y))' = \frac{1}{P(x, y)} D(x, y) = F_2.$$

Если функция F_2 в правой части этого равенства зависит от переменной x , то не существует интегрирующего множителя $\mu = \mu(y)$. Иначе

$$\mu(y) = \exp \left(\int F_2(y) dy \right) \quad (4)$$

- 3) Предположим, что существует функция вида $\mu = \mu(x + y)$ одной переменной, удовлетворяющая уравнению (2). Тогда

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu', \quad \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu',$$

где μ' – обыкновенная производная функции μ по её аргументу.

В этом случае из уравнения (2) получаем следующее обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{1}{\mu} \mu' (P - Q) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y},$$

$$(\ln \mu)' = \frac{1}{P - Q} D = F_3.$$

Если выражение F_3 в правой части этого равенства зависит только от комбинации $(x + y)$, то

$$\mu(t) = \exp\left(\int F_3(t) dt\right), \quad t = x + y. \quad (5)$$

- 4) Рассмотрим вариант существования интегрирующего множителя вида $\mu = \mu(xy)$.

Тогда

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu' y, \quad \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu' x,$$

$$(\ln \mu)' = \frac{1}{xP - yQ} D = F_4,$$

$$\mu(t) = \exp\left(\int F_4(t) dt\right), \quad t = xy. \quad (6)$$

Все вышерассмотренные случаи объединяет одна общая идея, суть которой заключается в нахождении интегрирующего множителя, зависящего от одной переменной. Структура этой переменной не имеет значения, а успех определяется только тем обстоятельством, существует ли функция $\mu(\alpha(x, y))$, где $\alpha(x, y)$ – некоторая функция комбинации переменных x и y такая, что уравнение (2) сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$(\ln \mu)' = \frac{1}{P \frac{\partial \alpha}{\partial y} - Q \frac{\partial \alpha}{\partial x}} D, \quad (7)$$

правая часть которого зависит только от переменной $\alpha(x, y)$. При этом

$$\mu(\alpha) = \exp\left(\int F(\alpha) d\alpha\right), \quad \alpha = \alpha(x, y). \quad (8)$$

В частности,

$$\begin{aligned}\alpha = x &\Rightarrow (\ln \mu)' = -\frac{D}{Q}, \\ \alpha = y &\Rightarrow (\ln \mu)' = \frac{D}{P}, \\ \alpha = x + y &\Rightarrow (\ln \mu)' = \frac{D}{P - Q}, \\ \alpha = xy &\Rightarrow (\ln \mu)' = \frac{D}{xP - yQ},\end{aligned}$$

что совпадает с ранее полученными результатами.

Обсуждение остальных 94 случаев предоставляется читателю ☺.
Рекомендуемые комбинации для аргумента функции μ :

$$\frac{x}{y}, \quad x - y, \quad ax + by, \quad \dots$$

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$\left(\frac{x^2}{y^2} + 1 + \frac{2x}{y^2}\right)dx + \frac{2x}{y}dy = 0, \quad (9)$$

где

$$P = \frac{x^2}{y^2} + 1 + \frac{2x}{y^2}, \quad Q = \frac{2x}{y}.$$

Составим выражения

$$\begin{aligned}-F_1 &= \frac{1}{Q} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = \frac{y}{2x} \left(\frac{2}{y} + \frac{2}{y^3} (x^2 + 2x) \right) = \\ &= \frac{1}{x} + \frac{1}{y^2} (x + 2)\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}F_2 &= \frac{1}{P} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = \frac{1}{\frac{x^2}{y^2} + 1 + \frac{2x}{y^2}} \left(\frac{2}{y} + \frac{2}{y^3} (x^2 + 2x) \right) = \\ &= \frac{2}{y(x^2 + y^2 + 2x)} (y^2 + x^2 + 2x) = \frac{2}{y}.\end{aligned}$$

Первое из этих выражений зависит от обеих переменных, тогда как второе представляет собой функцию только от переменной y , что соответствует частному случаю 2 и влечет за собой

$$\mu = \exp \left(\int F_2(y) dy \right) =$$

$$= \exp\left(\int \frac{2}{y} dy\right) = \exp(2 \ln|y|) = \\ = \exp(\ln y^2) = y^2.$$

После умножения обеих частей уравнения (9) на y^2 получаем уравнение в полных дифференциалах, рассмотренное в примере параграфа 5.7:

$$(x^2 + y^2 + 2x)dx + 2xydy = 0.$$

Пример 2. Вновь обратимся к уравнению

$$(x^2 + y^2 + 2x)dx + 2xydy = 0, \quad (10)$$

рассмотренному в параграфе 5.7. Модифицируем его делением обеих частей на произведение xy :

$$\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{2}{y}\right)dx + 2dy = 0. \quad (11)$$

Здесь

$$P(x, y) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{2}{y}, \quad Q(x, y) = 2.$$

Разумеется, что уравнение (10) не является уравнением в полных дифференциалах. Однако нам заранее известен интегрирующий множитель $\mu = xy$, умножение на который приведет уравнение (10) к уравнению в полных дифференциалах. Осталось только завершить игру и убедиться в разумности вышеприведенной “теоретической базы”. Мы знаем, что интегрирующий множитель следует искать в виде $\mu = \mu(xy)$. В соответствии с формулой (6),

$$\mu(t) = \exp\left(\int F_4(t)dt\right), \quad t = xy,$$

где

$$F_4(t) = F_4(xy) = \frac{1}{xP - yQ} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = \\ = \frac{1}{\frac{1}{y}x^2 + y + \frac{2}{y}x - 2y} \left(\frac{x+2}{y^2} - \frac{1}{x} \right) = \\ = \frac{y}{x^2 - y^2 + 2x} \left(\frac{x^2 + 2x - y^2}{xy^2} \right) = \frac{1}{xy} = \frac{1}{t}.$$

Тогда $\mu(xy) = xy$, как того и следовало ожидать.

Убедимся в том, что другие гипотезы относительно структуры множителя μ приводят к противоречиям. Попробуем, например, отыскать интегрирующий множитель вида $\mu = \mu(x)$.

В соответствии с равенством (3),

$$\mu(x) = \exp\left(\int F_1(x)dx\right),$$

где

$$F_1(x) = -\frac{1}{Q(x,y)}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{x+2}{y^2} - \frac{1}{x}\right).$$

Правая часть этого равенства зависит от y . Возникшее противоречие отвергает выдвинутую гипотезу о существовании интегрирующего множителя, зависящего только от переменной x .

2.8 Отыскание особых решений.

Пусть функция

$$y = \varphi(x) \tag{1}$$

определена в некоторой области D и является решением дифференциального уравнения

$$F(x, y, y') = 0. \tag{2}$$

Если в каждой точке области D нарушается единственность решения (1), то $y = \varphi(x)$ называется **особым решением** уравнения (2). Геометрически это означает, график особого решения представляет собой огибающую семейства интегральных кривых, то есть через любую точку этого графика проходит другая касающаяся его интегральная кривая данного уравнения.

Обсудим некоторые способы отыскания особых решений.

1. Исследование p -дискриминанта дифференциального уравнения.

Пусть функция $F(x, y, y')$ и ее частные производные F'_x, F'_y непрерывны в области определения дифференциального уравнения (2). Обозначим $p = y'$ и составим систему уравнений

$$\begin{cases} F(x, y, p) = 0, \\ \frac{\partial F(x, y, p)}{\partial p} = 0. \end{cases}$$

Исключая из этой системы p , получим решение

$$\Psi_p(x, y) = 0, \tag{3}$$

называемое **p -дискриминантом** уравнения (2), а кривая, определяемая этим уравнением, называется **p -дискриминантной кривой**.

Затем необходимо

– проверить является ли p -дискриминант (3) интегралом уравнения (2);

– убедиться в том, что p -дискриминант (3) не является частным интегралом уравнения (2) (то есть не представляет собой частный случай общего интеграла);

– проверить является ли p -дискриминантная кривая огибающей семейства интегральных кривых уравнения (2). Не вдаваясь в детали, отметим, что для этого следует проверить выполнение условий касания графика особого решения с семейством интегральных кривых уравнения (2).

2. Исследование C -дискриминанта дифференциального уравнения

Если известен общий интеграл

$$\Phi(x, y, C) = 0 \quad (4)$$

уравнения (2), то для описания огибающей семейства интегральных кривых (4) можно использовать систему уравнений

$$\begin{cases} \Phi(x, y, C) = 0, \\ \frac{\partial \Phi(x, y, C)}{\partial C} = 0, \end{cases} \quad (5)$$

из которой следует исключить параметр C . Полученное решение

$$\Psi_C(x, y) = 0 \quad (6)$$

называется **C -дискриминантом** уравнения (2).

Далее нужно выполнить проверку того, что

- C -дискриминант действительно является интегралом дифференциального уравнения (2);
- C -дискриминант не является частным интегралом уравнения (2);
- C -дискриминантная кривая является огибающей соответствующего семейства интегральных кривых.

Пример 1. Найти особые решения уравнения

$$y' = 4x\sqrt{y-3}. \quad (7)$$

Решение. Разделяя переменные, получим

$$\frac{dy}{\sqrt{y-3}} = 4x dx, \quad \sqrt{y-3} = x^2 + C.$$

Исключая из системы уравнений

$$\begin{cases} y - 3 = (x^2 + C)^2, \\ 0 = 2(x^2 + C) \end{cases}$$

параметр C , получим C -дискриминант уравнения (7):

$$y = 3.$$

Очевидно, что $y = 3$ является решением уравнения (7), но не является частным решением.

Заметим, что при делении уравнения (7) на $\sqrt{y-3}$ следовало проверить возможность решения $y = 3$. И это привело бы нас другим путем к особому решению.

Ответ. Общее решение:

$$y = (x^2 + C)^2 + 3;$$

Особое решение: $y = 3.$

2.9 Уравнения, не разрешенные относительно производной.

1. К простейшим уравнениям такого типа относятся уравнения

$$F(x, y, y') = 0 \quad (1)$$

второй степени относительно производной y' , которые приводятся к виду

$$(y' - f_1(x, y))(y' - f_2(x, y)) = 0.$$

Это означает, что через точку $M(x_0, y_0)$ некоторой области D могут проходить две интегральные кривые, а общий интеграл уравнения (1) имеет вид

$$\Phi_1(x, y, C) \cdot \Phi_2(x, y, C) = 0. \quad (2)$$

2. Рассмотрим уравнение

$$y = f(y'), \quad (3)$$

где f – непрерывно дифференцируемая функция на некотором интервале. Полагая $y' = p$ и дифференцируя уравнение (3) по переменной x , получим уравнение с разделяющимися переменными:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = p &= f'(p) \frac{dp}{dx}, \\ p dx &= f'(p) dp, \\ dx &= \frac{f'(p)}{p} dp, \quad x = F_1(p) + C, \end{aligned}$$

где $F_1(p)$ – одна из первообразных функции $f'(p)/p$.

Считая p параметром, систему уравнений

$$\begin{cases} y = f(p), \\ x = F_1(p) + C \end{cases} \quad (4)$$

можно рассматривать как параметрическое задание функции $y(x)$.

3. Если уравнение разрешено относительно переменной y ,

$$y = f(x, y'), \quad (5)$$

то дифференцированием по переменной x оно сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению 1-го порядка:

$$\frac{dy}{dx} = p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{dp}{dx}. \quad (6)$$

Ситуация заметно улучшилась, поскольку уравнение

$$p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p} p'$$

легко может быть разрешено относительно производной p' . Если его общее решение представить в виде

$$x = \varphi(p, C)$$

и подставить это выражение в (5), то система уравнений

$$\begin{cases} x = \varphi(p, C), \\ y = f(\varphi(p, C), p) \end{cases} \quad (7)$$

определяет общий интеграл уравнения (5) в параметрическом виде, где p выступает в качестве параметра.

4. Пусть теперь уравнение задано формулой

$$x = f(y'), \quad (8)$$

где f – непрерывно дифференцируемая функция на некотором интервале.

Полагая $y' = p$ и дифференцируя уравнение (8) по переменной y , получим уравнение с разделяющимися переменными:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dy} = \frac{1}{p} &= f'(p) \frac{dp}{dy}, \\ \frac{dy}{p} &= f'(p) dp, \\ dy &= p f'(p) dp, \quad y = F_2(p) + C, \end{aligned}$$

где $F_2(p)$ – одна из первообразных функции $pf'(p)$.

Система уравнений

$$\begin{cases} x = f(p), \\ y = F_2(p) + C \end{cases} \quad (9)$$

определяет функцию $y(x)$ в параметрическом виде.

5. Рассмотрим обобщение уравнения (8):

$$x = f(y, y'). \quad (10)$$

Вводя переменную $p = y'$ и дифференцируя уравнение (10) по переменной y , получим обыкновенное дифференциальное уравнение 1-го порядка:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{p} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{dp}{dy}.$$

Если общее решение уравнения

$$\frac{1}{p} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial p} p'$$

представить в виде

$$y = \psi(p, C),$$

то система уравнений

$$\begin{cases} y = \psi(p, C), \\ x = f(\psi(p, C), p) \end{cases} \quad (11)$$

определяет общий интеграл уравнения (10) в параметрическом виде.

2.9.1 Примеры

Пример 1. Найти общий интеграл уравнения

$$y'^2 - (2x + y)y' + 2xy = 0. \quad (1)$$

Решение. Используя формулу корней квадратного уравнения, получим

$$\begin{aligned} y'_{1,2} &= x + \frac{1}{2}y \pm \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 - 2xy} = \\ &= x + \frac{1}{2}y \pm \left|x - \frac{1}{2}y\right|, \\ y'_1 &= 2x, \quad y'_2 = y, \\ y_1 &= x^2 + C, \quad y_2 = Ce^x, \end{aligned}$$

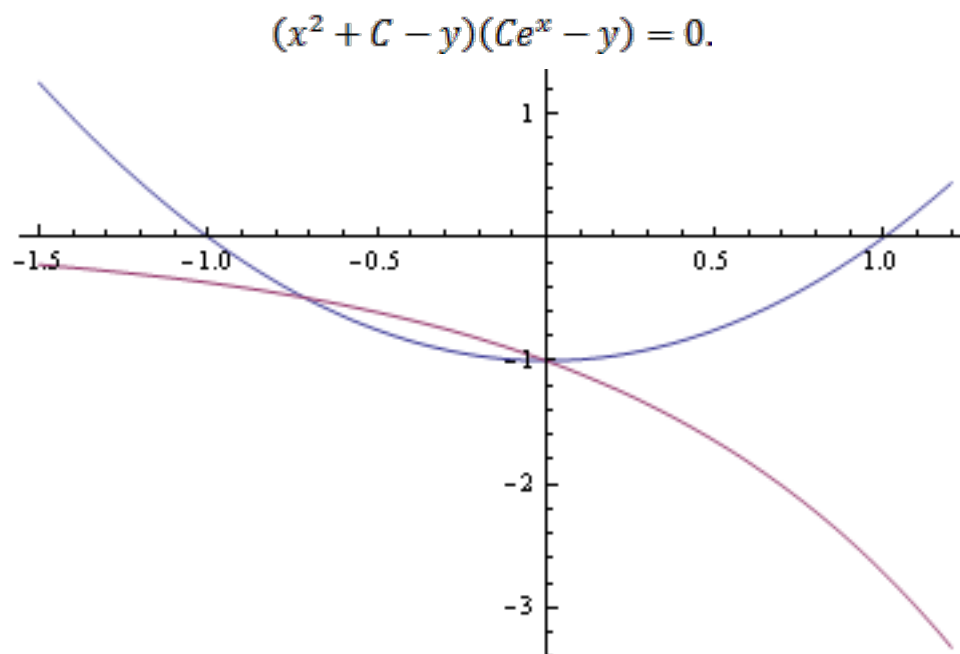


Рис. 1. Интегральные кривые уравнения (1), полученные при $C = -1$.
В точке $(0; -1)$ нарушается единственность решения.

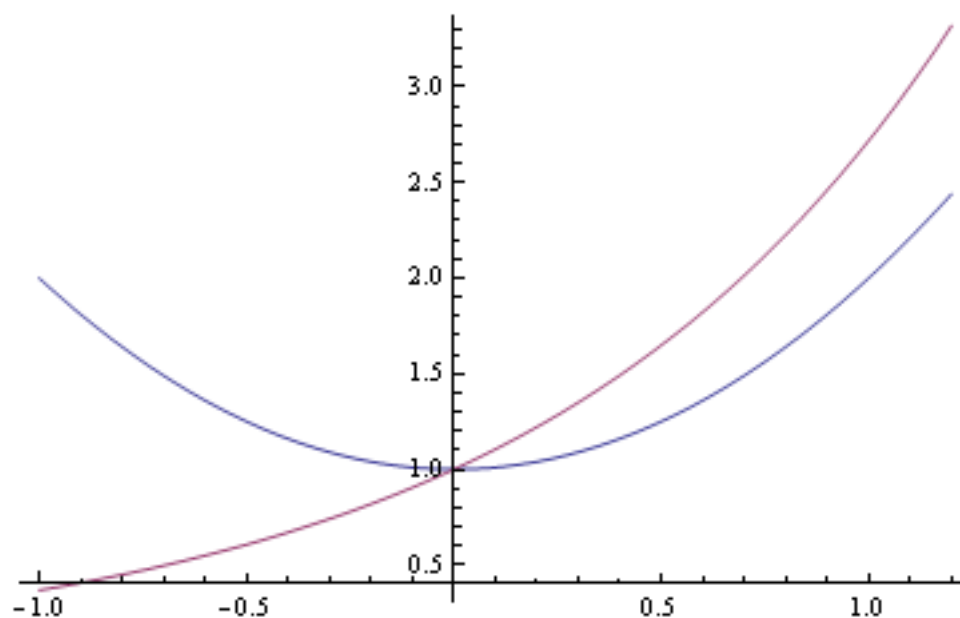


Рис. 2. Интегральные кривые уравнения (1), полученные при $C = -1$.
В точке $(0; 1)$ нарушается единственность решения.

Пример 2. Проинтегрировать уравнение

$$y = 1 + y' + y'^3. \quad (2)$$

Решение. Согласно формуле (4) параграфа 4.9 общий интеграл уравнения (2) описывается системой уравнений

$$\begin{cases} x = \int \frac{1+3p^2}{p} dp, \\ y = 1+p+p^3, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \ln|p| + \frac{3}{2}p^2 + C, \\ y = 1+p+p^3. \end{cases} \quad (3)$$

Дополнительно, из уравнения (2) вытекает очевидное решение $y = 1$.

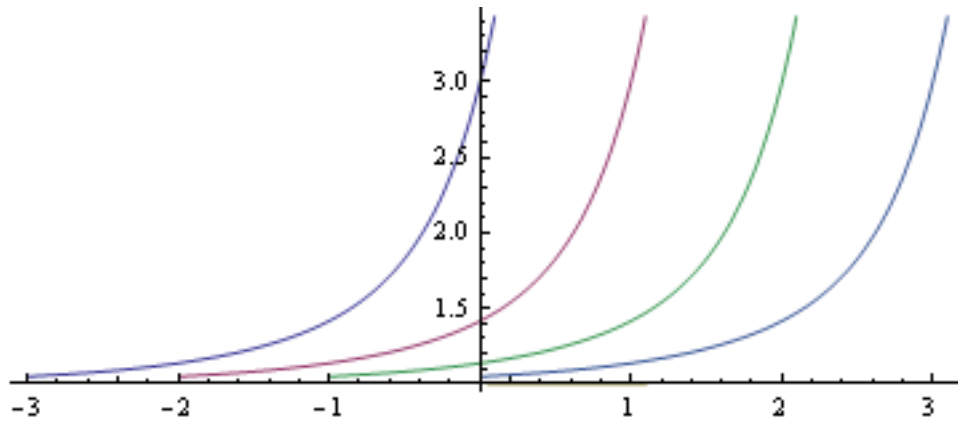


Рис. 3. Интегральные кривые уравнения (2) при различных значениях параметра $p > 0$. Линия $y = 1$ является огибающей этого семейства кривых.

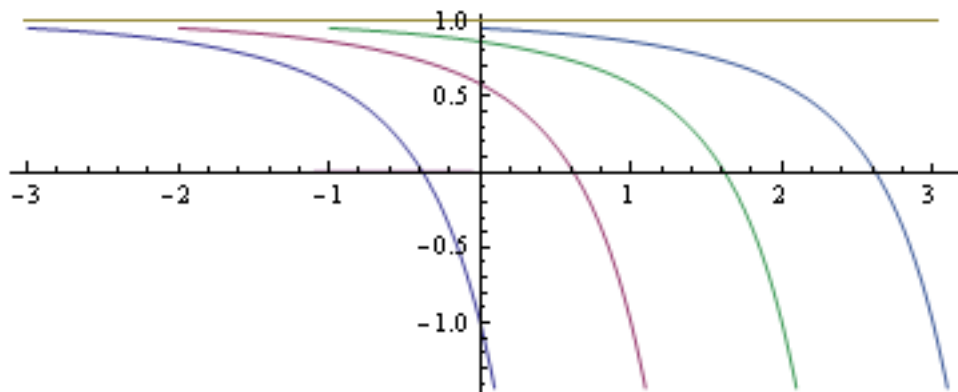


Рис. 4. Интегральные кривые уравнения (2) при различных значениях параметра $p < 0$. Линия $y = 1$ является огибающей этого семейства кривых.

Пример 3. Найти общий интеграл уравнения

$$y = xy'^2 + y'^2. \quad (4)$$

Решение 1. Полагая $y' = p$ и дифференцируя обе части этого уравнения по переменной x , получим

$$\begin{aligned} y &= p^2(x+1) \Rightarrow \\ p &= 2(x+1)pp' + p^2, \end{aligned}$$

$$p(2(x+1)p' + p - 1) = 0.$$

Если $p = 0$, то $y = \text{const}$. Из уравнения (4) находим значение этой константы:

$$y = 0.$$

Далее рассмотрим уравнение

$$2(x+1)p' + p - 1 = 0.$$

Разделяя переменные, получим

$$\begin{aligned} -\frac{2dp}{p-1} &= \frac{dx}{x+1}, \\ \ln \frac{1}{(p-1)^2} &= \ln|x+1| - \ln C^2, \\ x+1 &= \left(\frac{C}{p-1}\right)^2. \end{aligned}$$

Таким образом, общий интеграл уравнения (4) имеет вид

$$\begin{cases} x = \left(\frac{C}{p-1}\right)^2 - 1, \\ y = \left(\frac{C}{p-1}\right)^2 p^2, \end{cases} \quad (5)$$

к которому нужно добавить решение $y = 0$.

Если в системе (5) избавиться от параметра p , то получим общее решение уравнения (4) в виде

$$y = (\sqrt{x+1} + C)^2. \quad (6)$$

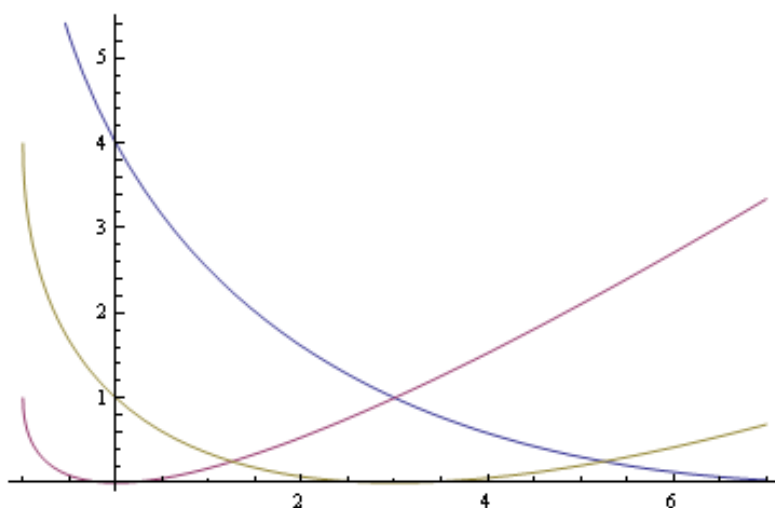


Рис. 4. Интегральные кривые уравнения (4), полученные при различных значениях $C < 0$. Прямая $y = 0$ является огибающей этого семейства кривых.

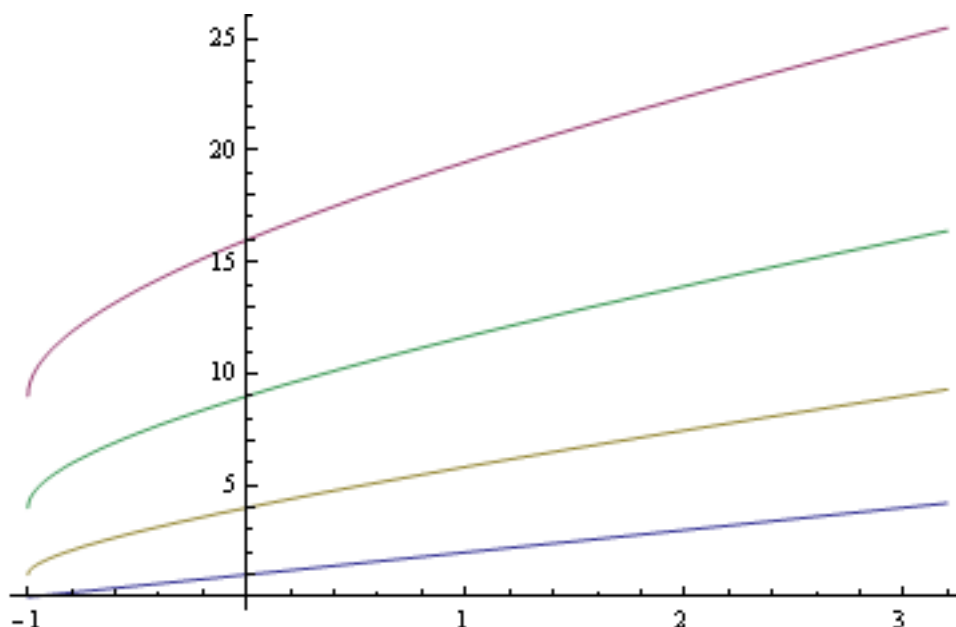


Рис. 5. Интегральные кривые уравнения (4), полученные при различных значениях $C > 0$.

Решение 2. Разрешая уравнение (4) относительно производной y' , получим уравнение с разделяющимися переменными:

$$y' = \pm \sqrt{\frac{y}{x+1}}, \quad \frac{dy}{\sqrt{y}} = \pm \frac{dx}{\sqrt{x+1}},$$

$$\sqrt{y} = \pm \sqrt{x+1} + C, \quad y = (\sqrt{x+1} + C)^2. \quad (6)$$

2.10 Уравнения Лагранжа и Клеро.

Уравнение вида

$$y = xf(y') + g(y') \quad (1)$$

называется **уравнением Лагранжа**, где $f(y') \neq y'$; f и g - заданные функции.

Если же $f(y') = y'$, то соответствующее уравнение

$$y = xy' + g(y') \quad (2)$$

называется **уравнением Клеро** (g - заданная функция).

Общее и особые решения уравнения Лагранжа. Выполним в уравнении (1) замену $y' = p$ и продифференцируем полученное уравнение по переменной x :

$$y = xf(p) + g(p), \quad (3)$$

$$p = f(p) + xf'(p)p' + g'(p)p' =$$

$$= f(p) + (xf'(p) + g'(p))p'. \quad (4)$$

Если результат интегрирования уравнения (4) записать в виде $x = \varphi(p, C)$ и подставить выражение для x в уравнение (3), то мы получим систему уравнений, описывающую **общее решение уравнения Лагранжа** в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = \varphi(p, C), \\ y = \varphi(p, C)f(p) + g(p). \end{cases} \quad (5)$$

Особые решения уравнения Лагранжа можно получить с помощью p -дискриминанта уравнения (3). Для этого нужно найти частные производные по переменной p от обеих частей этого уравнения:

$$xf'(p) + g'(p) = 0. \quad (6)$$

Чтобы выразить p , подставим этот результат в уравнение (4). Тогда

$$p = f(p). \quad (7)$$

Обозначим корни уравнения (7) символом p_k . Подставляя их поочередно в уравнение (3), получим **особые решения уравнения Лагранжа**:

$$y = xf(p_k) + g(p_k). \quad (8)$$

Общее и особое решения уравнения Клеро. Подставим в уравнение (2) $y' = p$:

$$y = xp + g(p). \quad (9)$$

Затем продифференцируем это уравнение по переменной x :

$$\begin{aligned} p &= p + xp' + g'(p)p', \\ p'(x + g'(p)) &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Равенство $p' = 0$ влечет за собой $p = C$. Подставляя это значение p в уравнение (9), получим **общее решение уравнения Клеро**:

$$y = Cx + g(C). \quad (11)$$

Сравнение с уравнением (2) приводит к простому правилу: для нахождения общего решения уравнения Клеро нужно в этом уравнении заменить y' на произвольную константу C .

Еще одно решение уравнения (10) имеет вид

$$x = -g'(p).$$

Подставляя это выражение в уравнение Клеро, получим систему

$$\begin{cases} x = -g'(p), \\ y = -pg'(p) + g(p), \end{cases} \quad (12)$$

которая определяет **особое решение уравнения Клеро** в параметрической форме.

Примеры 1-5. Найти общие решения уравнений Клеро:

$$y = xy' + y'^3, \quad (13)$$

$$y = xy' + \sin y'. \quad (14)$$

$$y = xy' + \sqrt{y'}, \quad (15)$$

$$y = xy' + y'^5, \quad (16)$$

$$y = xy' + y'^{\text{ля-ля-ля}}. \quad (17)$$

Решение. Используя формулу (11), получим

$$y = xy' + y'^3 \Rightarrow y = Cx + C^3, \quad (13a)$$

$$y = xy' + \sin y' \Rightarrow y(x) = Cx + \sin C, \quad (14a)$$

$$y = xy' + \sqrt{y'} \Rightarrow y(x) = Cx + \sqrt{C}, \quad (15a)$$

$$y = xy' + y'^5 \Rightarrow y(x) = Cx + C^5, \quad (16a)$$

$$y = xy' + y'^{\text{ля-ля-ля}} \Rightarrow y(x) = Cx + C^{\text{ля-ля-ля}}. \quad (17a)$$

Примеры 6-10. Найти особые решения уравнений Клеро (13)-(16).

Решение. Формула (12) позволяет записать особое решение в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = -g'(p), \\ y = -pg'(p) + g(p). \end{cases}$$

Подставляя в уравнение (13) $y' = p$, получим

$$y = xy' + y'^3 \Rightarrow \begin{cases} x = -3p^2 \\ y = -3p^3 + p^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3p^2 \\ y = -2p^3 \end{cases}$$

Здесь можно легко исключить параметр p , что приводит к общему интегралу уравнения (13):

$$\left(\frac{x}{3}\right)^3 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 0. \quad (18)$$

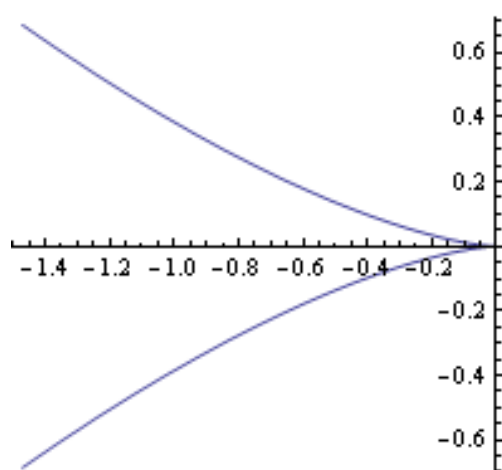


Рис. 1. График особого решения (14) уравнения (9).

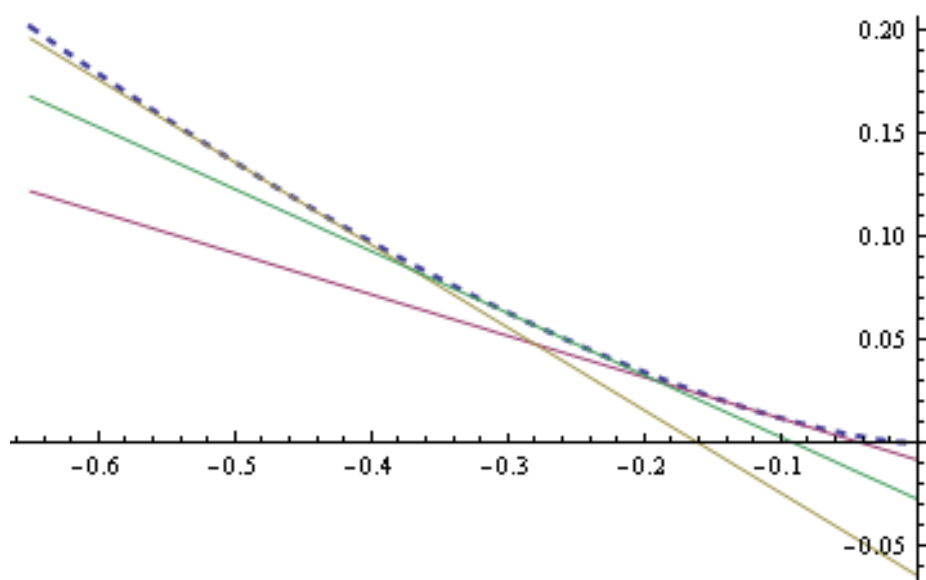


Рис. 2. График особого решения (пунктирная линия) является огибающей семейства интегральных кривых (14) уравнения (9) (при $C > 0$).

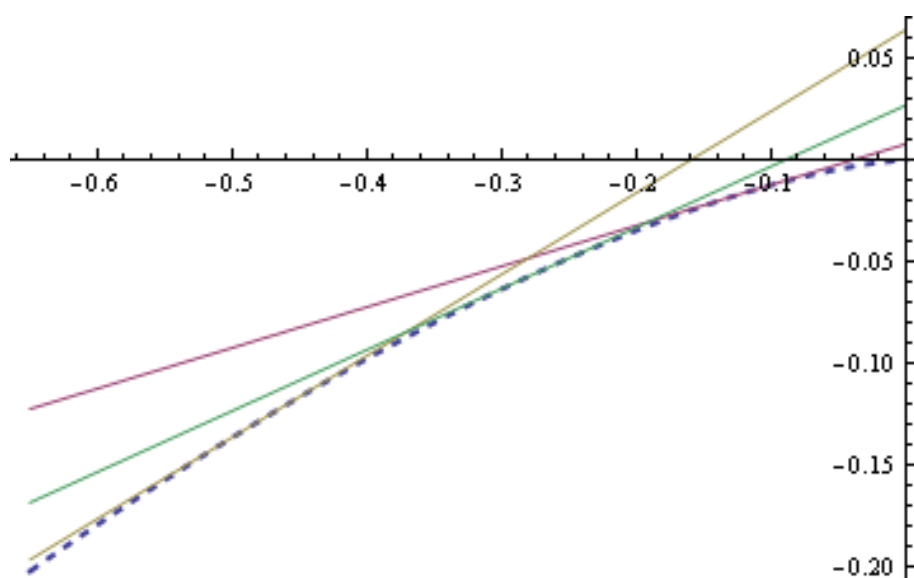


Рис. 3. График особого решения (пунктирная линия) является огибающей семейства интегральных кривых (14) уравнения (9) (при $C < 0$).

Аналогично,

$$\begin{aligned}
 y = xy' + \sin y' &\Rightarrow \begin{cases} x = -\cos p \\ y = -p \cos p + \sin p \end{cases} \\
 y = xy' + \sqrt{y'} &\Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2\sqrt{p}} \\ y = -p \frac{1}{2\sqrt{p}} + \sqrt{p} \end{cases} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2\sqrt{p}} \\ y = \frac{1}{2}\sqrt{p} \end{cases} \Rightarrow xy = -\frac{1}{4} \quad (x < 0, y > 0)
 \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned}
 y = xy' + y'^5 &\Rightarrow \begin{cases} x = -5p^4 \\ y = -5p^5 + p^5 \end{cases} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \begin{cases} x = -5p^4 \\ y = -4p^5 \end{cases} \Rightarrow \left(-\frac{x}{5}\right)^{\frac{5}{4}} + \left(\frac{y}{4}\right)^{\frac{4}{5}} = 0.
 \end{aligned}$$

Пример 11. Найти особые решения уравнения Лагранжа

$$y = xy'^2 + y'^3. \quad (19)$$

Решение. Особые решения определяются формулой (8). Тогда

$$y = xp_k^2 + p_k^3, \quad (20)$$

где p_k – корни уравнения

$$p^2 = p,$$

что влечет

$$p = 0 \quad \text{или} \quad p = 1.$$

Тогда

$$y = 0 \quad \text{и} \quad y = x + 1. \quad (21)$$

Пример 12. Найти общий интеграл уравнения (19).

Решение. Полагая в (19) $y' = p$ и дифференцируя обе части полученного уравнения по переменной x , получим

$$\begin{aligned}
 p &= p^2 + 2pxp' + 3p^2p', \\
 p(p + 2xp' + 3pp' - 1) &= 0.
 \end{aligned}$$

Случай $p = 0$ приведет нас к особым решениям (21). Рассмотрим второй случай,

$$\begin{aligned} p + 2xp' + 3pp' - 1 &= 0, \\ (p - 1)dx + (2x + 3p)dp &= 0. \end{aligned}$$

Нетрудно показать, что это уравнение приводится к уравнению в полных дифференциалах с помощью интегрирующего множителя $\mu = p - 1$:

$$(p - 1)^2 dx + (p - 1)(2x + 3p)dp = 0.$$

Представим полученное уравнение в виде

$$\begin{aligned} (p - 1)^2 dx + 2x(p - 1)dx + (3p^2 - 3p)dp &= \\ = d(x(p - 1)^2) + d\left(p^3 - \frac{3}{2}p^2\right) &= \\ = d\left(x(p - 1)^2 + p^3 - \frac{3}{2}p^2\right) &= 0, \\ x(p - 1)^2 + p^3 - \frac{3}{2}p^2 &= C + 3. \end{aligned} \quad (22)$$

(Отметим, что константа записана в виде $(C + 3)$ для упрощения записи конечной формулы.) Выражая x и подставляя результат в уравнение (19), получим его общий интеграл в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = \frac{C + 3 - p^3 + \frac{3}{2}p^2}{(p - 1)^2}, \\ y = \frac{C + 3 - p^3 + \frac{3}{2}p^2}{(p - 1)^2} p^2 + p^3, \end{cases} \quad (23)$$

$$\begin{cases} x = \frac{C}{(p - 1)^2} - p - \frac{1}{2}, \\ y = \frac{C}{(p - 1)^2} p^2 - \frac{1}{2}p^2. \end{cases}$$

Примеры 13-14. Запишем особые решения некоторых уравнений Лагранжа:

$$\begin{aligned} 13) \quad y = xy'^3 + y'^2 &\Rightarrow p^3 = p \Rightarrow p_1 = 0, p_{2,3} = \pm 1 \Rightarrow \\ y = 0, \quad y = x + 1, \quad y = -x + 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 14) \quad y = -xy'^4 + y' &\Rightarrow -p^3 = p \Rightarrow p = 0 \Rightarrow \\ y = 0. \end{aligned}$$

2.11 Итоговая таблица подстановок (суперкраткий справочник).

Тип уравнения	Подстановка	Формулы (которые нет смысла запоминать)
$y' = f(ax + by)$	$u = ax + by$	$\int \frac{du}{bf(u) + a} = x + C$
$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$	$y = ux$	$\int \frac{du}{f(u) - u} = x + C$
$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$	$\begin{cases} x = \tilde{x} + \alpha, \\ y = \tilde{y} + \beta. \end{cases}$ $\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0, \\ a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0. \end{cases}$	$\frac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}} = f\left(\frac{a_1 + b_1\frac{\tilde{y}}{\tilde{x}}}{a_2 + b_2\frac{\tilde{y}}{\tilde{x}}}\right) = g\left(\frac{\tilde{y}}{\tilde{x}}\right)$
$y' + P(x)y = Q(x)$	$y(x) = u(x)v(x),$ $v(x) = e^{-\int P(x)dx}$	$y(x) = \left(\int \frac{Q(x)}{v(x)} dx + C\right) v(x)$
$y' + P(x)y = Q(x)y^n$	$y(x) = u(x)v(x),$ $v(x) = e^{-\int P(x)dx}$	$\int \frac{du}{u^n} = \int Q(x)v^{n-1}dx + C,$ $y(x) = u(x)v(x)$
$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$	Условие: $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$	$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y), \\ \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y). \end{cases}$ $u(x, y) = C$
$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$	Условие: $\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = F(x)$	Уравнение для интегрирующего множителя: $(\ln \mu(x))' = -\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$
$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$	Условие: $\frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = F(y)$	Уравнение для интегрирующего множителя: $(\ln \mu(y))' = \frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$
$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$	Условие: $\frac{1}{P - Q}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = F(x + y)$	Уравнение для интегрирующего множителя: $(\ln \mu(x + y))' = \frac{D}{P - Q}$

$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$	Условие: $\frac{1}{xP - yQ} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = F(xy)$	Уравнение для интегрирующего множителя: $(\ln \mu(xy))' = \frac{D}{xP - yQ}$
$F(x, y, y') = 0$	Пусть $p = y'$. Для нахождения p -дискриминанта уравнения нужно исключить p из системы	$\begin{cases} F(x, y, p) = 0, \\ \frac{\partial F(x, y, p)}{\partial p} = 0. \end{cases}$
Общий интеграл $\Phi(x, y, C) = 0$.	Для нахождения C -дискриминанта уравнения нужно исключить p из системы	$\begin{cases} \Phi(x, y, C) = 0, \\ \frac{\partial \Phi(x, y, C)}{\partial C} = 0. \end{cases}$
$y = f(y')$	Полагаем $y' = p$ и дифференцируем уравнение по x .	$\begin{cases} y = f(p), \\ x = F(p) + C, \\ F(p) = \int f'(p)/p \end{cases}$
$y = f(x, y')$	Полагаем $y' = p$ и дифференцируем уравнение по x .	$\begin{aligned} p &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p} p' \Rightarrow \\ \begin{cases} x = \varphi(p, C), \\ y = f(\varphi(p, C), p) \end{cases} \end{aligned}$
$x = f(y')$	Полагаем $y' = p$ и дифференцируем уравнение по y .	$\begin{aligned} dy &= p f'(p) dp \Rightarrow \\ \begin{cases} x = f(p), \\ y = F(p) + C, \\ F(p) = \int p f'(p) \end{cases} \end{aligned}$
$x = f(y, y')$	Полагаем $y' = p$ и дифференцируем уравнение по y .	$\begin{aligned} \frac{1}{p} &= \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial p} p' \Rightarrow \\ \begin{cases} y = \psi(p, C), \\ x = f(\psi(p, C), p) \end{cases} \end{aligned}$
$y = xf(y') + g(y')$	Особые решения	$y = xf(p_k) + g(p_k),$ где $p_k = f(p_k)$
$y = xy' + g(y')$	Общее решение	$y = Cx + g(C)$
$y = xy' + g(y')$	Особое решение	$\begin{cases} x = -g'(p), \\ y = -pg'(p) + g(p). \end{cases}$

2.12 Смешанные задачи.

1. Уравнение

$$y' = \cos(y + x)$$

приводится к уравнению с разделяющимися переменными заменой

$$u = y + x.$$

Тогда

$$\begin{aligned} u' &= 1 + \cos u, \quad \frac{du}{dx} = 2 \cos^2 \frac{u}{2}, \\ \frac{du}{2 \cos^2 \frac{u}{2}} &= dx, \quad \operatorname{tg} \frac{u}{2} = x + C, \\ \operatorname{tg} \frac{y + x}{2} &= x + C. \end{aligned}$$

2. Уравнение

$$y' = \frac{y + x}{y - x} \tag{1}$$

относится к однородным и интегрируется заменой

$$u = \frac{y}{x},$$

что влечет

$$\begin{aligned} u'x &= \frac{u + 1}{u - 1} - u, \\ \frac{(u - 1)du}{u^2 - 2u - 1} &= -\frac{dx}{x}, \\ \frac{d(u^2 - 2u - 1)}{u^2 - 2u - 1} &= -\frac{2dx}{x}, \\ \ln|u^2 - 2u - 1| &= \ln \frac{1}{x^2} + \ln C, \\ u^2 - 2u - 1 &= \frac{C}{x^2} \Rightarrow x^2(u - 1)^2 - 2x^2 = C \Rightarrow \\ (y - x)^2 - 2x^2 &= C. \end{aligned} \tag{2}$$
$$\tag{3}$$

Общий интеграл уравнения найден. Заметим, однако, что уравнение (1) можно классифицировать иначе, проверив его на принадлежность к уравнениям, приводящимся к уравнению в полных дифференциалах. С этой целью запишем уравнение (2) в виде

$$(u^2 - 2u - 1)dx + x(u - 1)du = 0. \quad (4)$$

Обозначим

$$P(x, u) = u^2 - 2u - 1, \\ Q(x, u) = x(u - 1).$$

Очевидно, что

$$-\frac{1}{Q} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = \frac{u - 1}{x(u - 1)} = \frac{1}{x}.$$

Следовательно, существует интегрирующий множитель, зависящий только от переменной x и удовлетворяющий уравнению

$$(\ln \mu)' = \frac{1}{x},$$

что влечет $\mu = x$.

Таким образом, уравнение (4) принимает вид

$$x(u^2 - 2u - 1)dx + x^2(u - 1)du = 0 \quad (5)$$

и является уравнением в полных дифференциалах.

Заметим, что

$$u^2 - 2u - 1 = (u - 1)^2 - 2.$$

Тогда уравнение (4) принимает вид

$$\begin{aligned} x(u - 1)^2 dx + x^2(u - 1)du - 2x dx &= 0 \quad \Rightarrow \\ \frac{1}{2} d(x^2(u - 1)^2) - d(x^2) &= 0 \quad \Rightarrow \\ x^2(u - 1)^2 - 2x^2 &= C \quad \Rightarrow \\ (y - x)^2 - 2x^2 &= C, \end{aligned}$$

что совпадает с общим интегралом (3).

Вывод: Прежде чем приступать к решению дифференциального уравнения следует проанализировать варианты его принадлежности к тому или иному типу; и только потом реализовывать соответствующий алгоритм.