

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ  
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования  
«ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

---

**V.V. Konev**

## **THE ELEMENTS OF MATHEMATICS**

Workbook  
Part 2

*Рекомендовано в качестве учебного пособия  
Редакционно-издательским советом  
Томского политехнического университета*

Издательство  
Томского политехнического университета  
2009

UDC 517

V.V. Konev. The Elements of Mathematics. Workbook, Part 2. Tomsk:  
TPU Press, 2009, 40 pp.

Reviewed by: V.A. Kilin, Professor of the Higher Mathematics  
Department, TPU, D.Sc.

© Konev V.V. 2001-2009

© Tomsk Polytechnic University, 2001-2009

## To the Student

This workbook is written to introduce you to pre-calculus mathematics and advanced college-level mathematics. Pre-calculus mathematics topics include algebraic, logarithmic, exponential, and trigonometric functions; discrete algebra, complex numbers. Advanced college-level mathematics calculus topics include limits, maxima and minima, points of inflection, asymptotes, evaluation and application of derivatives and integrals.

Prerequisites: you must be able:

- to solve a linear equation or system of linear equations in one, two, or three variables;
- to expand products of binomials;
- to factor a quadratic polynomial;
- to solve a quadratic equation in one variable;
- to substitute either numerical values or algebraic expressions in place of a specified variable;

Also, you should be able to read Cartesian (rectangular) graphs, and use them to locate the approximate position of the  $x$ -intercepts.

After you complete this supplement you should be able:

- to use the properties of algebraic, trigonometric, logarithmic, and exponential functions in solving problems;
- to analyze the properties of functions and their graphs, namely, to find out the extreme values of a function; to determine the domain, range, intercepts, symmetry, intervals of increasing or decreasing, points of discontinuity, asymptotes;
- to use standard differentiation and integration techniques;
- to calculate the area of a region in the plane.

The author would welcome your suggestions on the improvements of the teaching materials of this workbook.

# Contents

To the Student .....	3
Contents.....	4
1. Functions .....	6
1.1. Problems .....	6
1.2. Graphs of the Most Important Functions .....	11
1.2.1. Problems.....	15
2. Discrete Algebra .....	21
2.1. Arithmetic and Geometric Progressions: Basic Formulas ...	21
2.2. Problems .....	21
3. Complex Numbers .....	23
3.1. Basic Relationships.....	23
3.2. Problems .....	23
3.3. Trigonometric Applications of the Euler Formula .....	25
4. Limits of Functions .....	26
4.1. The Most Important Formulas .....	26
4.2. Problems .....	26
5. Derivatives of Functions.....	28
5.1. A Common Table of Derivatives.....	28
5.2. Problems .....	28
5.3. Investigation of Functions.....	30
6. Integrals.....	37
6.1. A Common Table of Integrals.....	37
6.2. Problems .....	37
References.....	40

## Содержание

Студенту .....	3
Содержание.....	4
1. Функции .....	6
1.1. Задачи .....	6
1.2. Графики наиболее важных функций .....	11
1.2.1. Задачи.....	15
2. Дискретная алгебра .....	21
2.1. Арифметическая и геометрическая прогрессии: основные формулы .....	21
2.2. Задачи .....	21
3. Комплексные числа .....	23
3.1. Основные соотношения .....	23
3.2. Задачи .....	23
3.3. Тригонометрические приложения формулы Эйлера ...	25
4. Пределы функций.....	26
4.1. Наиболее важные формулы .....	26
4.2. Задачи .....	26
5. Производные функций.....	28
5.1. Таблица производных.....	28
5.2. Задачи .....	28
5.3. Исследование функций.....	30
6. Интегралы.....	37
6.1. Таблица интегралов.....	37
6.2. Задачи .....	37
Список литературы.....	40

# 1. Функции

## 1.1. Задачи

**Задачи 1 – 15:** Найти области определения и области изменения функций

1)  $f(x) = \frac{4x+3}{2x-1}$ ,

3)  $f(x) = \frac{|x|}{x}$ ,

5)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-9}}$ ,

7)  $f(x) = \sqrt{x^2-9}$ ,

9)  $f(x) = \frac{5x^2}{x^2-3x-4}$ ,

11)  $f(x) = \ln|x|$ ,

13)  $f(x) = |\ln x|$ ,

15)  $f(x) = \frac{1}{\ln(x+1)}$ .

**Решение/ Solution:**

1)  $f(x) = \frac{4x+3}{2x-1} \Rightarrow$

Domain:

2)  $f(x) = \frac{4x-3}{2x+1} \Rightarrow$

Domain:

3)  $f(x) = \frac{|x|}{x} \Rightarrow$

Domain:

4)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}} \Rightarrow$

Domain:

# Functions

## Problems

**Problems 1 - 15:** Find the domain and range of the functions

2)  $f(x) = \frac{4x-3}{2x+1}$ ,

4)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$ ,

6)  $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2+9}}$ ,

8)  $f(x) = \frac{1}{(x-1)(x+2)}$ ,

10)  $f(x) = \ln x$ ,

12)  $f(x) = \ln|x-2|$ ,

14)  $f(x) = \frac{1}{\ln x + 1}$ ,

Range:

Range:

Range:

Range:

$$5) f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 9}} \Rightarrow$$

Domain:

Range:

$$6) f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2 + 9}} \Rightarrow$$

Domain:

Range:

$$7) f(x) = \sqrt{x^2 - 9} \Rightarrow$$

Domain:

Range:

$$8) f(x) = \frac{1}{(x-1)(x+2)} \Rightarrow$$

Domain:

Range:

$$9) f(x) = \frac{5x^2}{x^2 - 3x - 4} \Rightarrow$$

Domain:

Range:

$$10) f(x) = \ln x \Rightarrow$$

Domain:

Range:

$$11) f(x) = \ln |x| \Rightarrow$$

Domain:

Range:

$$12) f(x) = \ln |x - 2| \Rightarrow$$

Domain:

Range:

$$13) f(x) = |\ln x| \Rightarrow$$

Domain:

Range:

$$14) f(x) = \frac{1}{\ln x + 1} \Rightarrow$$

Domain:

Range:

$$15) f(x) = \frac{1}{\ln(x+1)} \Rightarrow$$

Domain:

Range:

**Задача 16:** Какая из формул выражает соотношение между значениями  $x$  и  $y$  в нижеприведенной таблице?

**Problem 16:** Which of the following formulas expresses the relationship between values of  $x$  and  $y$  in the table below?

- a)  $y = |x - 2|$ ,
- b)  $y = x^2 + 2$ ,
- c)  $y = |x| + 2$ ,
- d)  $y = x + 2$ .

$x$	- 1	0	1	2
$y$	3	2	3	4

**Решение/ Solution:**

- a)  $y(-1) =$                        $y(0) =$                        $y(1) =$                        $y(2) =$
- b)  $y(-1) =$                        $y(0) =$                        $y(1) =$                        $y(2) =$
- c)  $y(-1) =$                        $y(0) =$                        $y(1) =$                        $y(2) =$
- d)  $y(-1) =$                        $y(0) =$                        $y(1) =$                        $y(2) =$

**Задачи 17 - 22:** Найти обратные функции:

**Problems 17 - 22:** Find the inverse functions of the following ones:

- 17)  $f(x) = 4x - 1$ ;
- 18)  $f(x) = \frac{3x - 8}{5x + 2}$ ;
- 19)  $f(x) = x^2 - 6x + 8, x > 3$ ;
- 20)  $f(x) = 3^{5x}$ ;
- 21)  $f(x) = \ln \frac{x}{2}$ ;
- 22)  $f(x) = 4 \ln x$ .

<sup>1</sup>**Подсказка:** Функции  $f(x)$  и  $f^{-1}(x)$  являются взаимно-обратными, если

**Hint:** The functions  $f(x)$  and  $f^{-1}(x)$  are the inverse ones of each other if

$$f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x.$$

**Решение/ Solution:**

17)  $f(x) = 4x - 1 \Rightarrow$   
 $f^{-1}(x) =$

**Проверка / Check-up:**  $f(f^{-1}(x)) =$   
 $f^{-1}(f(x)) =$

<sup>1</sup> См. [1], Глава 4, стр. 84. | See [1], Chapter 4, p. 84.



$$18) f(x) = \frac{3x-8}{5x+2} \Rightarrow$$

$$f^{-1}(x) =$$

$$\text{Проверка / Check-up: } f(f^{-1}(x)) =$$

$$f^{-1}(f(x)) =$$

$$19) f(x) = x^2 - 6x + 8, (x > 3) \Rightarrow$$

$$f^{-1}(x) =$$

$$\text{Проверка / Check-up: } f(f^{-1}(x)) =$$

$$f^{-1}(f(x)) =$$

$$20) f(x) = 3^{5x} \Rightarrow$$

$$f^{-1}(x) =$$

$$\text{Проверка / Check-up: } f(f^{-1}(x)) =$$

$$f^{-1}(f(x)) =$$

$$21) f(x) = \ln \frac{x}{2} \Rightarrow$$

$$f^{-1}(x) =$$

$$\text{Проверка / Check-up: } f(f^{-1}(x)) =$$

$$f^{-1}(f(x)) =$$

$$22) f(x) = 4 \ln x \Rightarrow$$

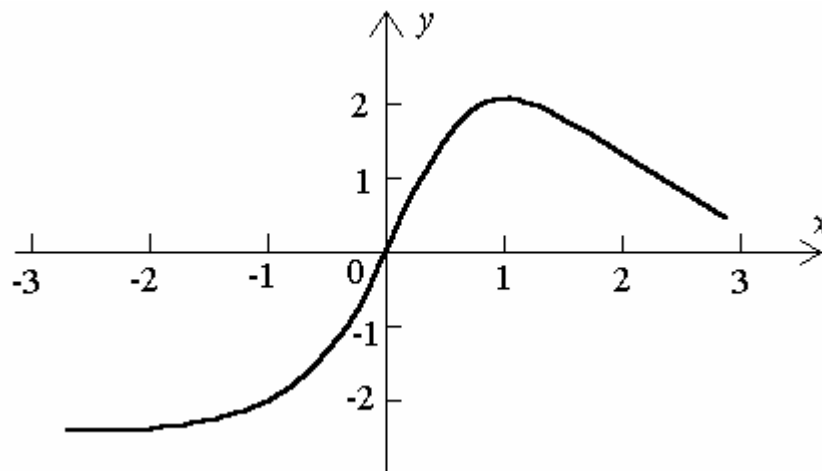
$$f^{-1}(x) =$$

$$\text{Проверка / Check-up: } f(f^{-1}(x)) =$$

$$f^{-1}(f(x)) =$$

**Задачи 23 - 27:** График функции  $y = f(x)$  имеет следующий вид:

**Problems 23 - 27:** The graph of a function  $y = f(x)$  is shown in Fig.1:



**Рис. 1 | Fig. 1**

Используя этот график, построить графики следующих функций:

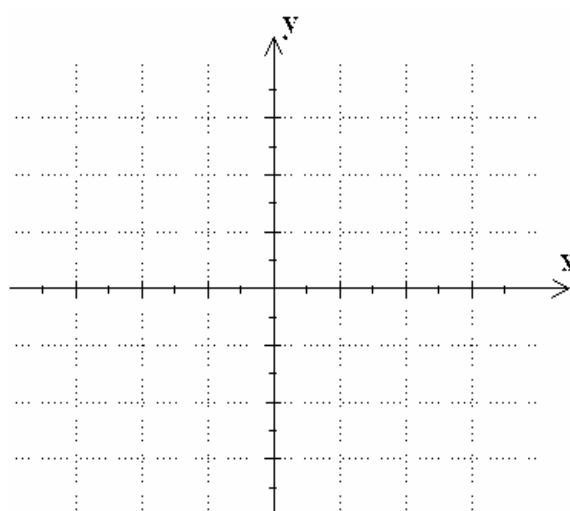
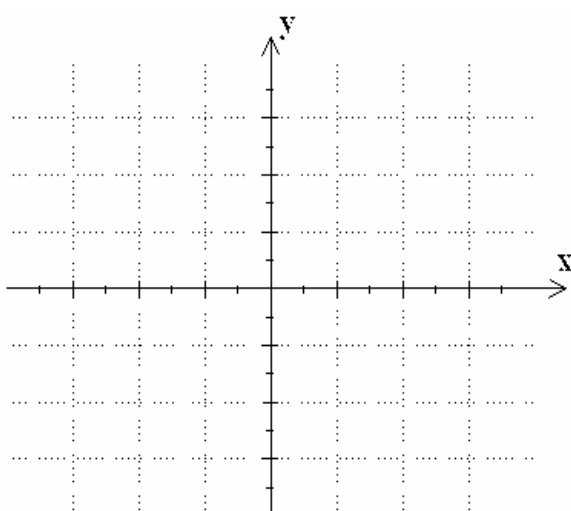
Using this graph plot the graphs of the following functions:

- 23)  $y = f(|x|)$ ,
- 24)  $y = |f(x)|$ ,
- 25)  $y = f(x - 2)$ ,
- 26)  $y = f(x + 3)$ ,
- 27)  $y = f(x) - 1$ .

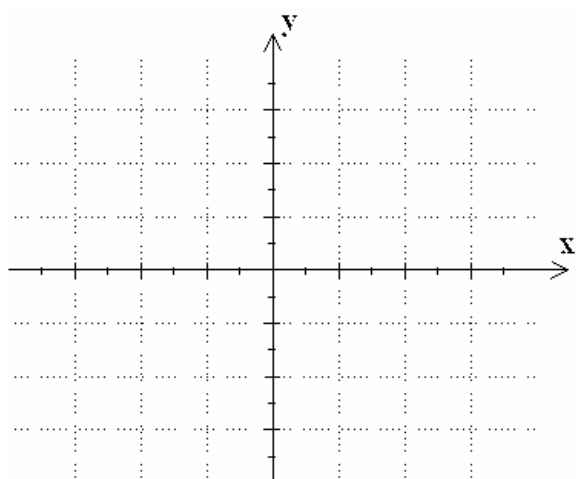
**Решение/ Solution:**

$y = f(|x|)$

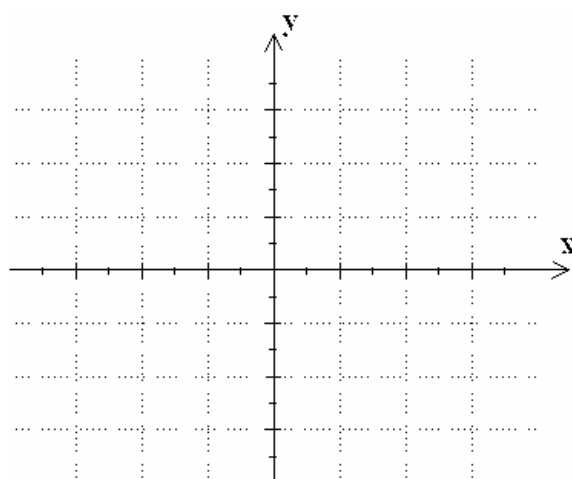
$y = |f(x)|$



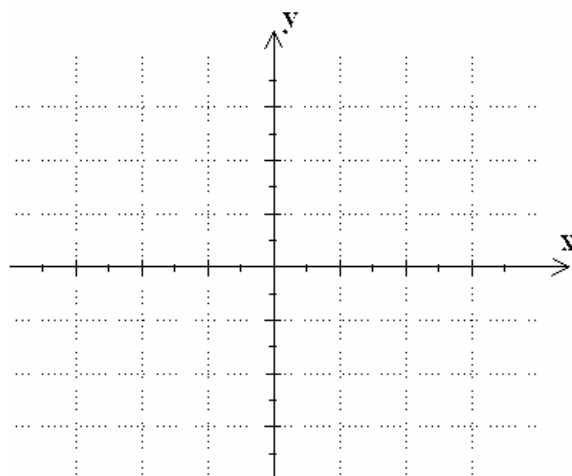
$$y = f(x - 2)$$



$$y = f(x + 3)$$

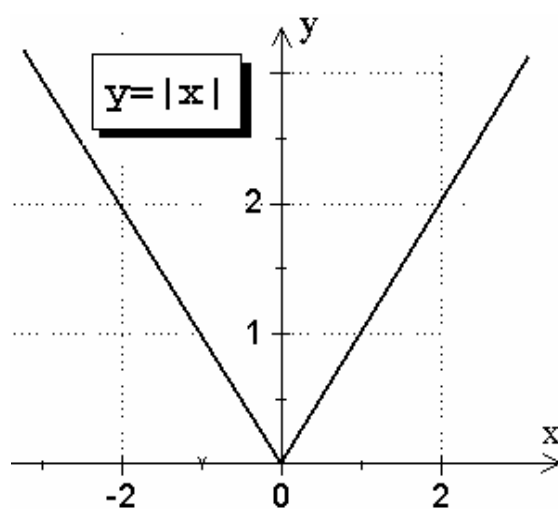


$$y = f(x) - 1$$



**1.2. Графики наиболее  
важных функций**

**Graphs of the Most Important  
Functions**



**Рис. 2 | Fig. 2**

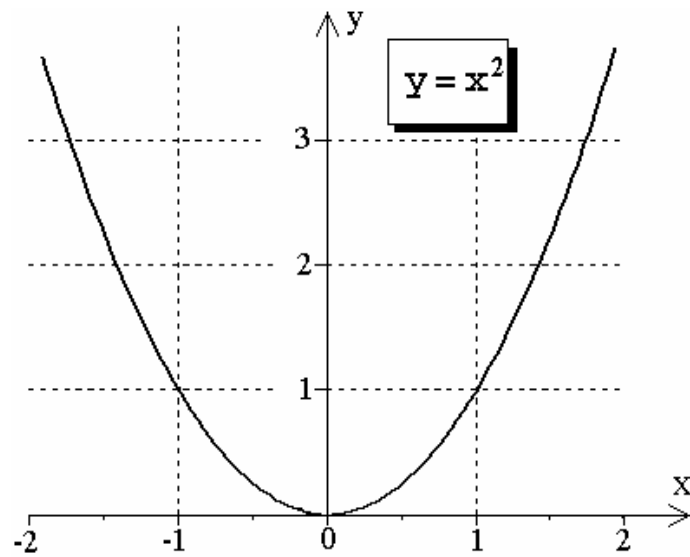


Рис. 3 | Fig. 3

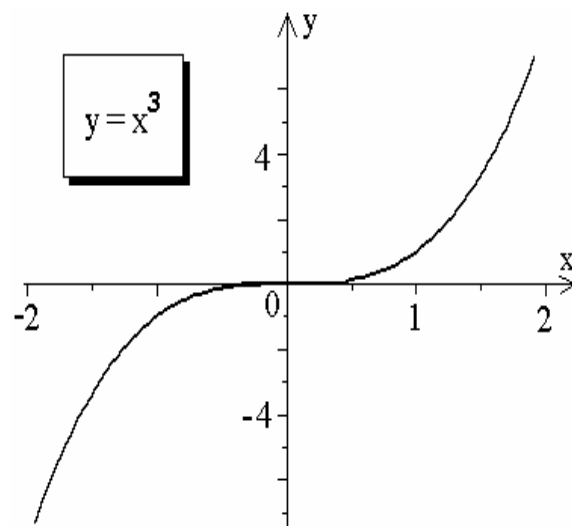


Рис. 4 | Fig. 4

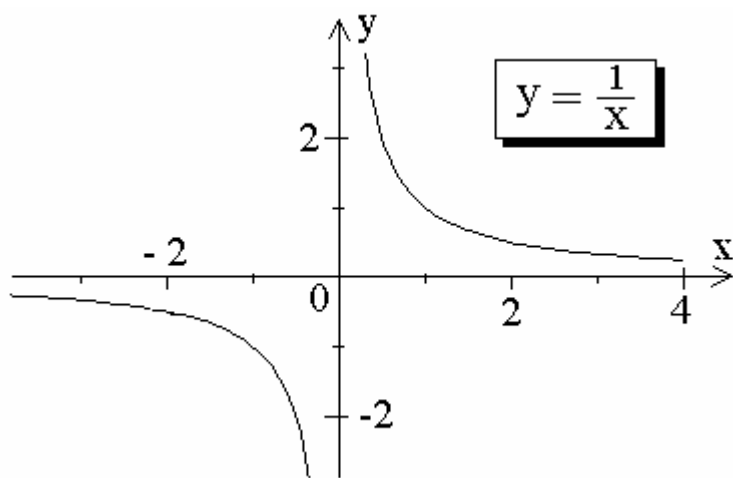


Рис. 5 | Fig. 5

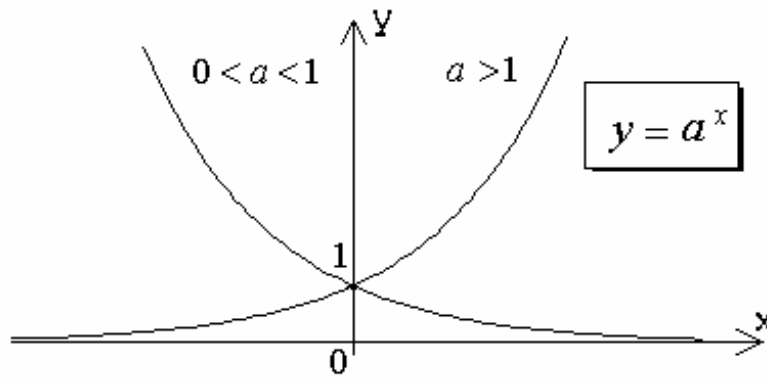


Рис. 6 | Fig. 6

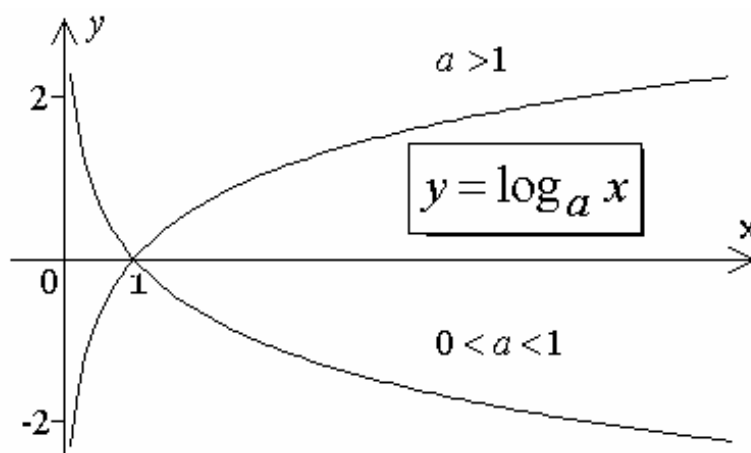


Рис. 7 | Fig. 7

**1.2.1. Задачи**

**Задачи 28 - 37:** Изобразите схематически графики функций:

**Problems**

**Problems 28 – 37:** Sketch the graphs of the functions:

28)  $y = |x + 3| + 1,$

29)  $y = x^2 + 4x - 5,$

30)  $y = \sqrt{-x},$

31)  $y = 4 - x^3,$

32)  $y = \sqrt[3]{x},$

33)  $y = \frac{x}{x - 2},$

34)  $y = -\frac{1}{x},$

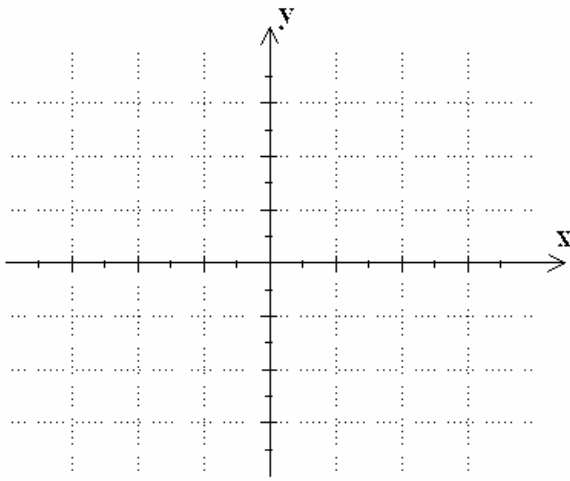
35)  $y = 2^{1-x},$

36)  $y = \frac{1}{3^{x+1}},$

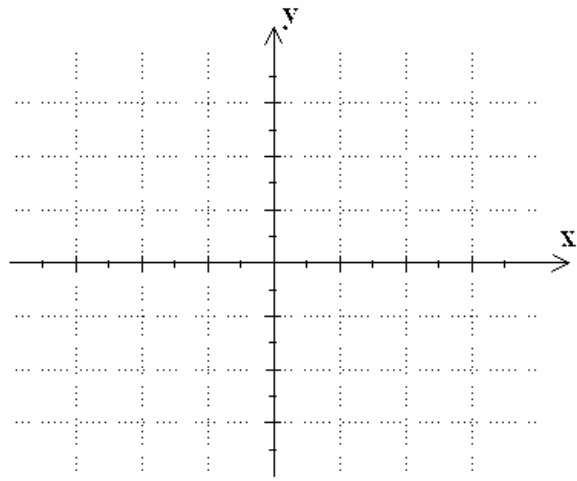
37)  $y = \ln(x - 4).$

**Решение/ Solution:**

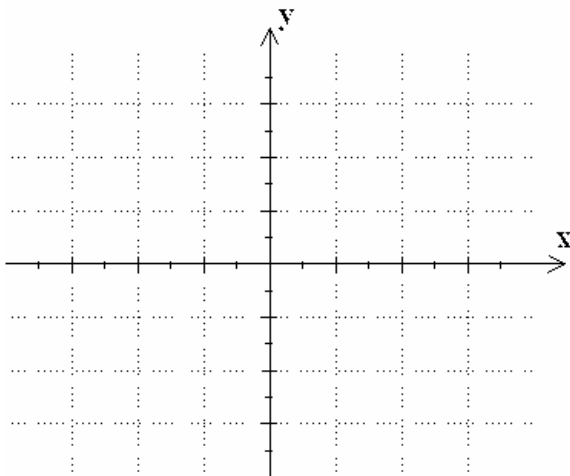
$$y = |x + 3| + 1$$



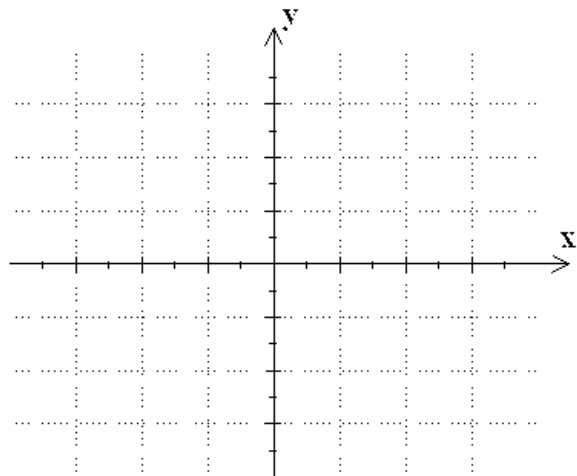
$$y = x^2 + 4x - 5$$



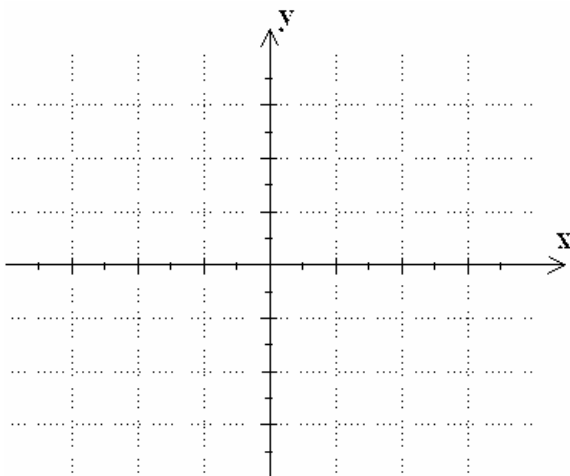
$$y = \sqrt{-x}$$



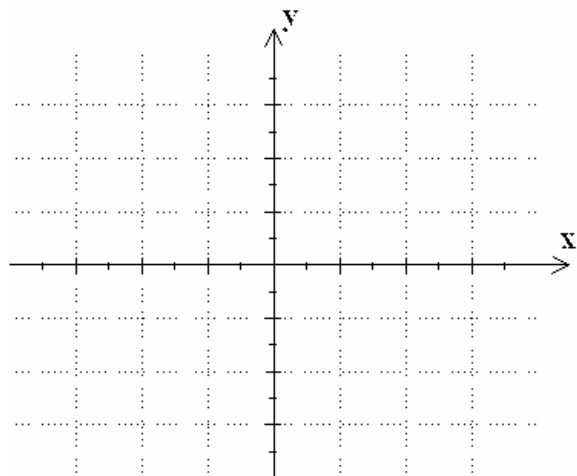
$$y = 4 - x^3$$



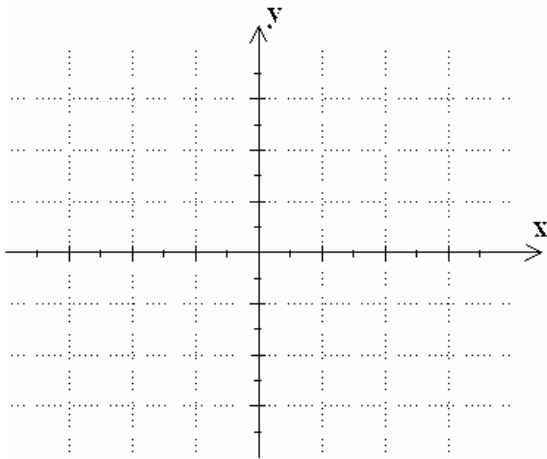
$$y = \sqrt[3]{x}$$



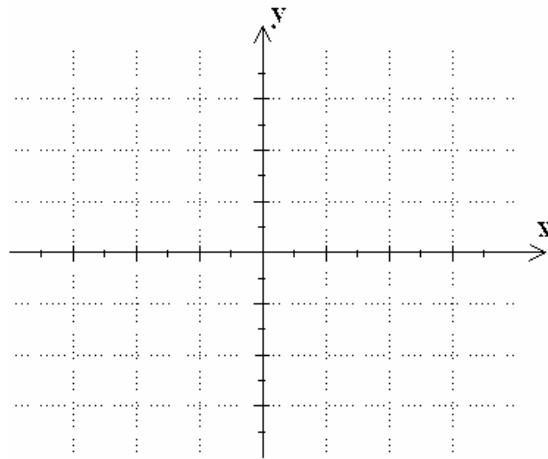
$$y = \frac{x}{x - 2}$$



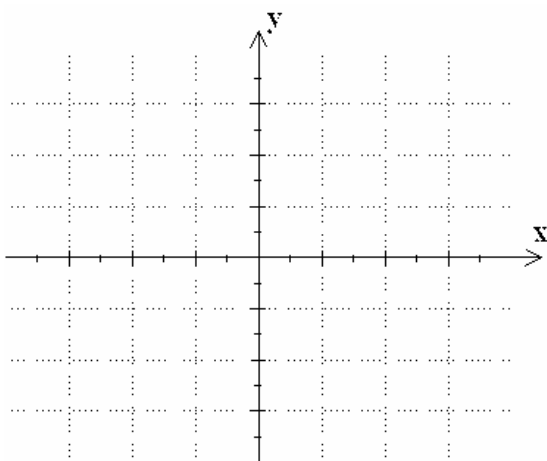
$$y = -\frac{1}{x}$$



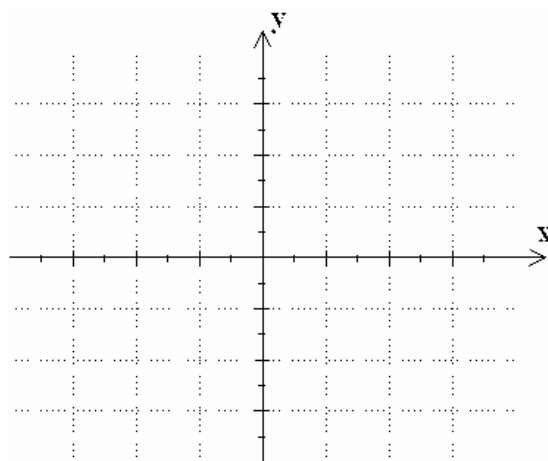
$$y = 2^{1-x}$$



$$y = \frac{1}{3^{x+1}}$$



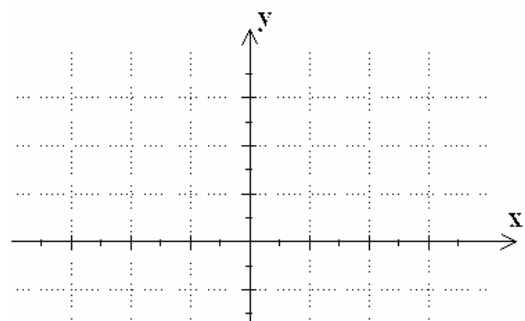
$$y = \ln(x - 4)$$



**Задачи 38:** Составить уравнение прямой, проходящей через точки  $A(-1, 3)$  и  $B(1, 1)$ . Покажите на графике точки пересечения прямой с координатными осями.

**Problems 38:** Find the equation of the straight going through the points  $A(-1, 3)$  and  $B(1, 1)$ .

Sketch the graph of this line and show the intercepts.



**Задачи 39:** Составить уравнение прямой, проходящей через точку  $A(2, 1)$  под прямым углом к прямой  $x + 4y = 5$ .

**Problems 39:** Find the equation of the straight line passing through the point  $A(2, 1)$  at the right angle to the line  $x + 4y = 5$ .

**Решение/ Solution:**

**Задачи 40:** Составить уравнение прямой, проходящей через точку  $A(1, 2)$  параллельно прямой  $2x - 3y = 6$ .

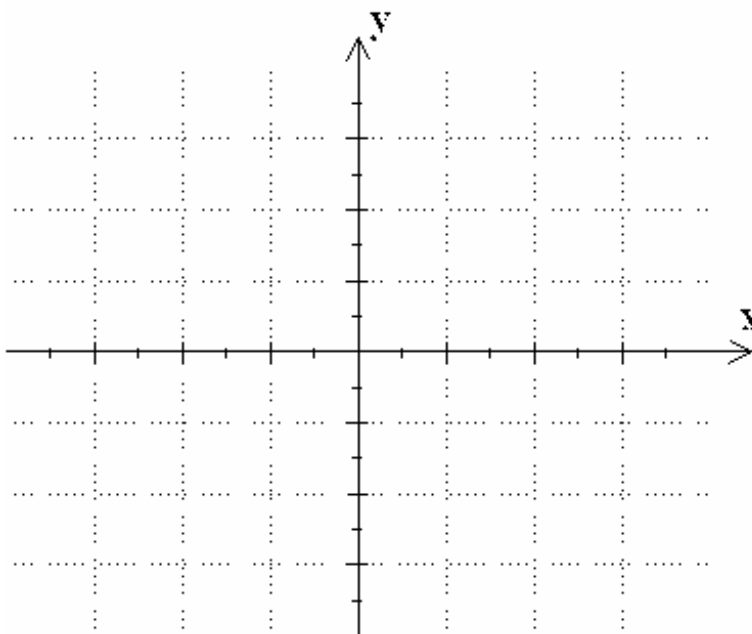
a) **Problems 40:** Find the equation of the line passing through the point  $A(1, 2)$  and being parallel to the line  $2x - 3y = 6$ .

**Решение/ Solution:**

**Задача 41:** Построить график функции  $y = -x^2 + 2x + 3$ , указав положение вершины и точек пересечения с координатными осями.

**Problem 41:** Carefully sketch the graph of  $y = -x^2 + 2x + 3$ , showing the location of the vertex and intercepts.

**Решение/ Solution:**





**Задача 42:** График функции  $y = f(x)$  показан на Рис. 1.

Используйте этот график, чтобы вычислить приближенно  $f(1)$ ,  $f(-2)$  и  $f(2.5)$ .

**Problem 42:** Let  $y = f(x)$  be the function whose graph is shown above in Fig. 1

Use the graph to approximate the following values:  $f(1)$ ,  $f(-2)$  and  $f(2.5)$ .

**Решение/ Solution:**

$$f(1) = \qquad \qquad \qquad f(-2) = \qquad \qquad \qquad f(2.5) =$$

**Задача 43:** Найти точки пересечения прямых  $x - 3y = -5$  и  $2x + 7y = 3$ .

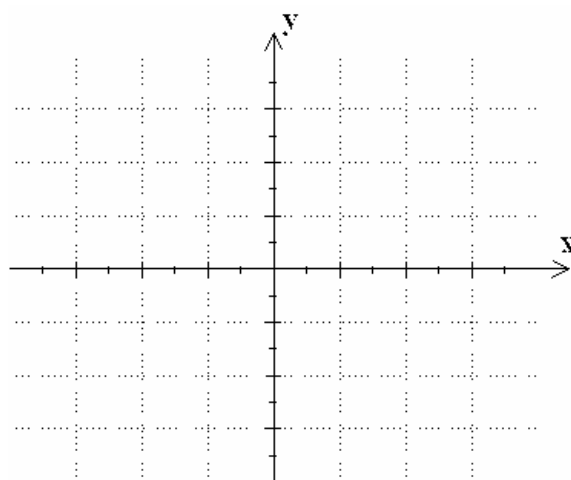
**Problem 43:** Find the point of intersection of the lines  $x - 3y = -5$  and  $2x + 7y = 3$ .

**Решение/ Solution:**

**Задача 44:** Построить кривую  $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 1 = 0$ .

**Problem 44:** Draw the curve  $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 1 = 0$ .

**Решение/ Solution:**



**Задачи 45 - 47:** Сколько точек пересечения имеют графики следующих пар функций?

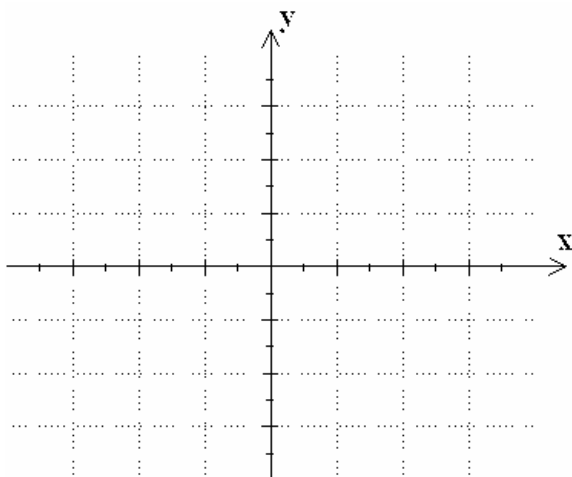
- a)  $y = |\log |x+1||$  и  $y = 1$ ;
- b)  $y = x^2 - 4|x| + 3$  и  $y = \frac{1}{2}$ ;
- c)  $y = 2^{\frac{|x|}{x}}$  и  $y = |x+1|$ .

**Problems 45 - 47:** How many points of intersection have the graphs of the following couples of functions?

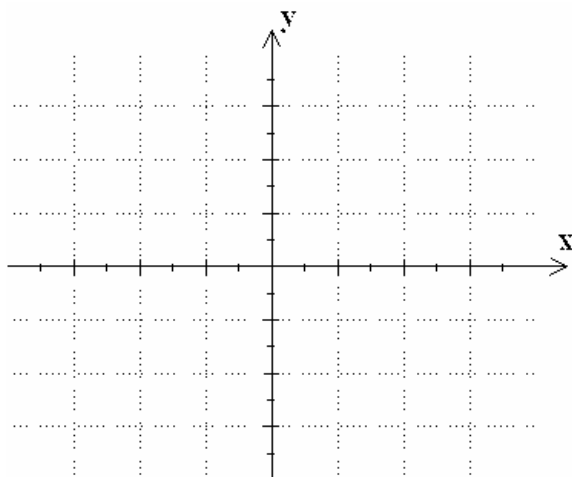
- a)  $y = |\log |x+1||$  and  $y = 1$ ;
- b)  $y = x^2 - 4|x| + 3$  and  $y = \frac{1}{2}$ ;
- c)  $y = 2^{\frac{|x|}{x}}$  and  $y = |x+1|$ .

**Решение/ Solution:**

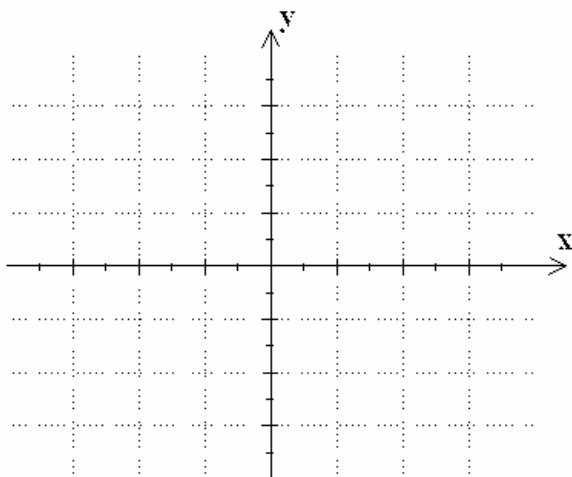
$$y = \log x, \quad y = \log |x + 1|$$



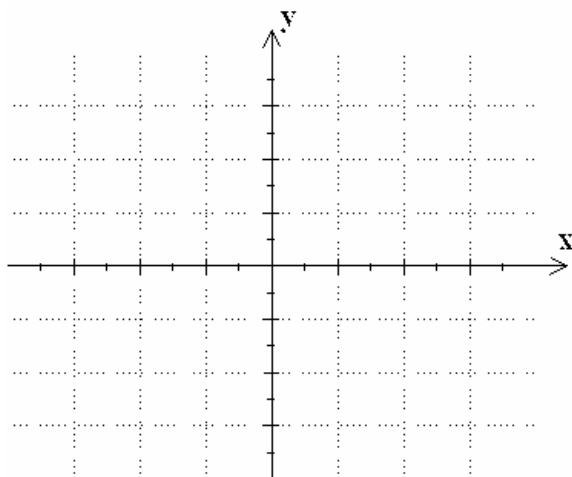
$$y = |\log |x + 1||, \quad y = 1$$



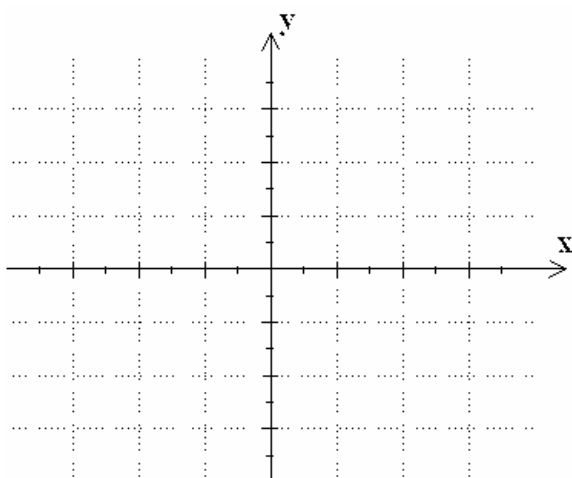
$$y = x^2 - 4x + 3, \quad y = x^2 + 4x + 3$$



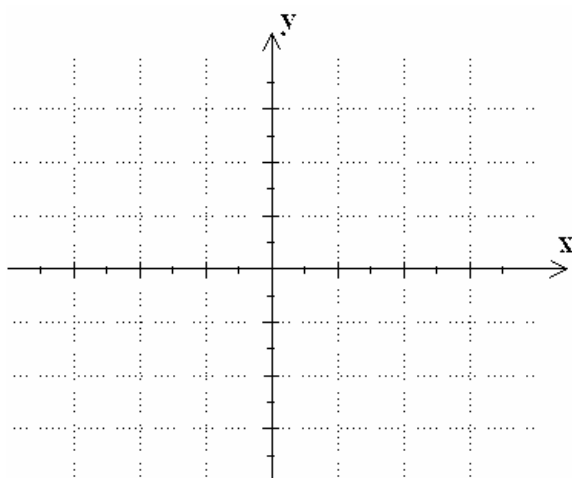
$$y = x^2 - 4|x| + 3, \quad y = 1/2$$



$$y = x + 1, \quad y = 2$$



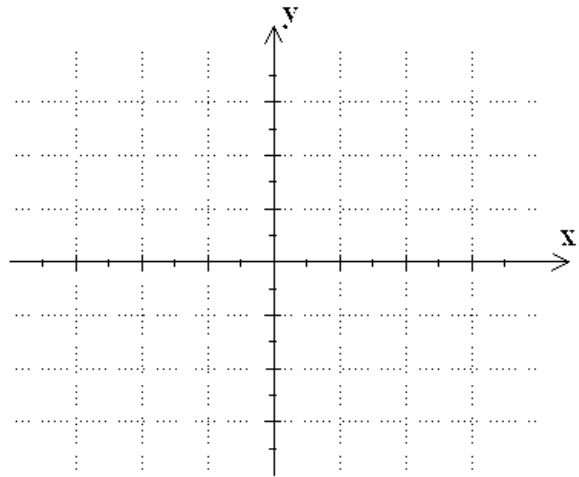
$$y = |x + 1|, \quad y = 2^{|x|/x}$$



**Задача 48:** В плоскости  $xOy$  | **Problem 48:** Shade the region in the

изобразите область, описываемую неравенствами  $3x - y - 7 < 0$  и  $x + 5y + 3 \geq 0$ . |  $xy$ -plane which is described by the inequalities  $3x - y - 7 < 0$  and  $x + 5y + 3 \geq 0$ .

**Решение/ Solution:**



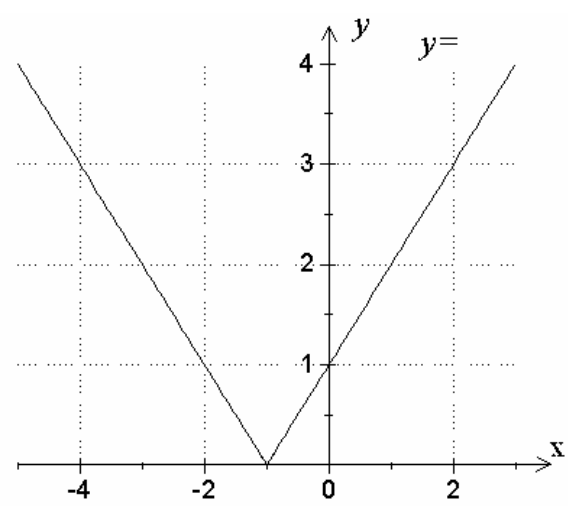
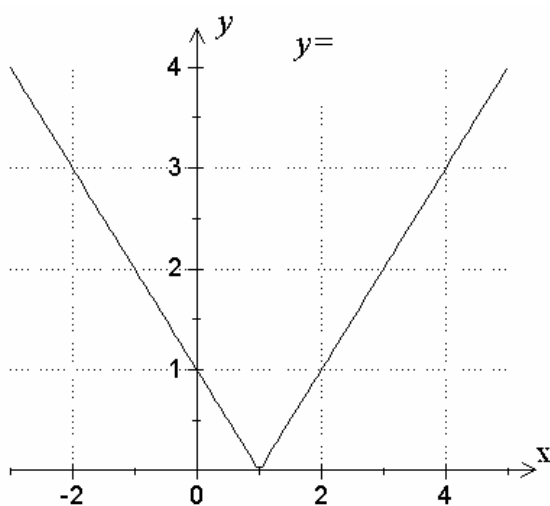
**Задача 49:** Найдите соответствие между функциями и их графиками. | **Problem 49:** Match the following functions with their graphs.

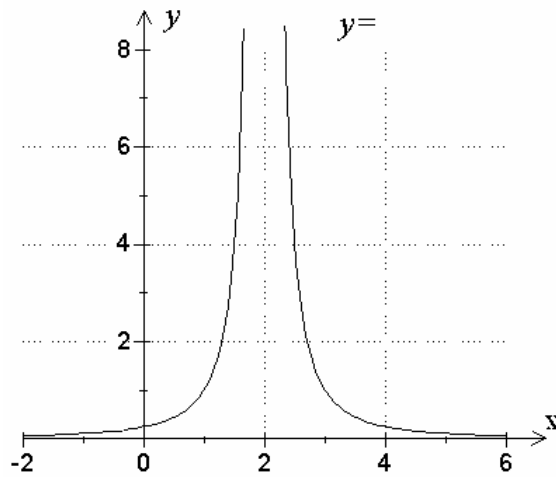
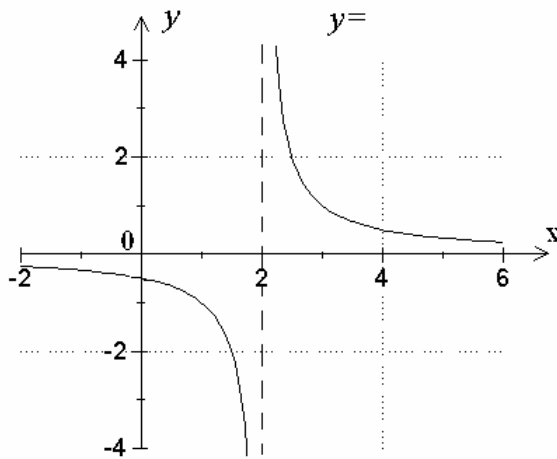
a)  $y = |x + 1|$ ,

b)  $y = \frac{1}{(x - 2)}$ ,

c)  $y = \frac{1}{(x - 2)^2}$ ,

d)  $y = |x - 1|$ .





**Задача 50:** Найти радиус и координаты центра окружности  $x^2 + y^2 + 8x - 4y - 5 = 0$ .

**Problem 50:** Find the radius and center of the circle  $x^2 + y^2 + 8x - 4y - 5 = 0$ .

**Решение/ Solution:**

**Задача 51:** График параболы пересекает ось  $Ox$  в точках  $-1$  и  $3$ . Определить вид квадратичной функции, если областью ее значений являются все вещественные числа, не превышающие  $4$ .

**Problem 51:** The graph of a parabola has  $x$ -intercepts, which are equal to  $(-1)$  and  $3$ . Determine an expression for the corresponding quadratic function if its range consists of all numbers less than or equal to  $4$ .

**Решение/ Solution:**

## 2. Дискретная алгебра

### 2.1. <sup>1</sup>Арифметическая и геометрическая прогрессии: основные формулы

## Discrete Algebra

### Arithmetic Progressions (1)-(3) and Geometric Progression (4)-(7): Basic Formulas

$$a_{n+1} = a_n + d, \quad (1)$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d, \quad (2)$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n (a_1 + (k-1)d) = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}, \quad (3)$$

---

$$a_{n+1} = a_n q, \quad (4)$$

$$a_n = a_1 q^{n-1}, \quad (5)$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n a_1 q^{k-1} = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}, \quad (6)$$

$$S_\infty = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \frac{a_1}{1-q}. \quad (7)$$

### 2.2. Задачи

**Задача 1:** Найти первый член  $a_1$  арифметической прогрессии, если  $a_6 = 5$  и  $a_8 = 11$ .

**Решение/ Solution:**

**Задача 2:** Найти разность  $d$  арифметической прогрессии, если  $a_3 = 2$  и  $a_7 = -18$ .

**Решение/ Solution:**

**Задача 3:** Найти второй  $a_2$  и десятый  $a_{10}$  члены арифметической прогрессии, если  $a_5 = 32$  и  $d = 5$ .

**Решение/ Solution:**

### Problems

**Problem 1:** Find the first term  $a_1$  of the arithmetic progression, if  $a_6 = 5$  and  $a_8 = 11$ .

**Problem 2:** Find the difference  $d$  of the arithmetic progression, if  $a_3 = 2$  and  $a_7 = -18$ .

**Problem 3:** Find the second term  $a_2$  and the tenth term  $a_{10}$  of the arithmetic progression, if  $a_5 = 32$  and  $d = 5$ .

---

<sup>1</sup> См. [4], Глава 5, стр. 102. | See [4], Chapter 5, p. 102.

**Задача 4:** Найти сумму  $S_{20}$  первых 20 членов арифметической прогрессии, если  $a_4 = 1$  и  $a_9 = 16$ .

**Решение/ Solution:**

**Problem 4:** Find the sum  $S_{20}$  of the first 20 terms of the arithmetic progression, if  $a_4 = 1$  and  $a_9 = 16$ .

**Задача 5:** Найти знаменатель  $q$  геометрической прогрессии, если  $a_3 = 81$  и  $a_6 = 3$ .

**Решение/ Solution:**

**Problem 5:** Find the common ratio  $q$  of the geometric progression, if  $a_3 = 81$  and  $a_6 = 3$ .

**Задача 6:** Найти шестой член  $a_6$  геометрической прогрессии, если  $a_1 = 256$  и  $a_3 = 64$ .

**Решение/ Solution:**

**Problem 6:** Find the sixth term  $a_6$  of the geometric progression, if  $a_1 = 256$  and  $a_3 = 64$ .

**Задача 7:** Вычислить сумму  $S_{15}$  первых 15 членов геометрической прогрессии и найти ее второй член  $a_2$ , если сумма первых трех членов  $S_3 = 15$ , а знаменатель прогрессии  $q = -2$ .

**Решение/ Solution:**

**Problem 7:** Find the sum  $S_{15}$  of the first 15 terms of the geometric progression and find its second term  $a_2$ , if the sum  $S_3$  of the first three terms equals 15 and the common ratio  $q$  equals  $-2$ .

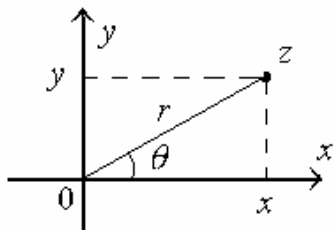
**Задача 8:** Вычислить сумму бесконечного числа членов убывающей геометрической прогрессии, если  $a_3 = 125$ , а знаменатель прогрессии  $q = 1/5$ .

**Решение/ Solution:**

**Problem 8:** Find the sum of an infinite number of terms of decreasing geometric progression, if  $a_3 = 125$  and the common ratio is  $q = 1/5$ .

### 3. <sup>2</sup>Комплексные числа

#### 3.1. Основные соотношения



### Complex Numbers

#### Basic Relationships

$$z = x + iy,$$

$$z^* = x - iy,$$

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta,$$

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan \theta = \frac{y}{x},$$

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta),$$

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta,$$

$$z = r e^{i\theta},$$

$$z^n = r^n e^{in\theta},$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{i \frac{\theta + 2\pi m}{n}}, \quad (m = 0, 1, \dots, n-1),$$

$$\frac{1}{z} = \frac{z^*}{|z|^2}.$$

#### 3.2. Задачи

**Задача 1:** Пусть  $z_1$  и  $z_2$  - комплексные числа. Найти сумму  $z_1 + z_2$ , разность  $z_1 - z_2$ , произведение  $z_1 z_2$  и частное  $z_1 / z_2$ , если  $z_1 = 3 - 4i$  и  $z_2 = 2 + i$ .

**Решение/ Solution:**

$$z_1 + z_2 =$$

$$z_1 z_2 =$$

$$z_1 - z_2 =$$

$$z_1 / z_2 =$$

**Задача 2:** Извлечь квадратный корень из числа  $z = 1 + i\sqrt{3}$ .

**Решение/ Solution:**  $r =$

$$(\sqrt{z})_1 =$$

$$(\sqrt{z})_2 =$$

#### Problems

**Problem 1:** Let  $z_1$  and  $z_2$  be complex numbers. Find the sum  $z_1 + z_2$ , difference  $z_1 - z_2$ , product  $z_1 z_2$  and quotient  $z_1 / z_2$ , if  $z_1 = 3 - 4i$  and  $z_2 = 2 + i$ .

**Problem 2:** Find the square roots of the complex number  $z = 1 + i\sqrt{3}$ .

$\theta =$

<sup>2</sup> См. [4], Глава 6, стр. 109. | See [4], Chapter 6, p. 109.

**Задача 3:** Найти  $z^{2001}$ , если  $z = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

**Решение/ Solution:**  $|z| =$   
 $z^{2001} =$

**Problem 3:** Find  $z^{2001}$  if  $z = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

$\arg z =$

**Задача 4 - 7:** Решите приведенные ниже уравнения: и изобразите решения на окружности в комплексной плоскости:

4.  $z^2 + 1 = 0,$

6.  $z^4 + 1 = 0,$

**Решение/ Solution:**

4.  $z^2 + 1 = 0 \Rightarrow z =$

5.  $z^3 - 1 = 0 \Rightarrow z =$

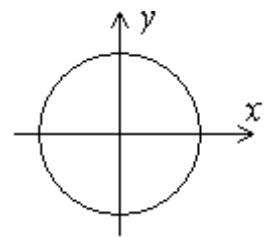
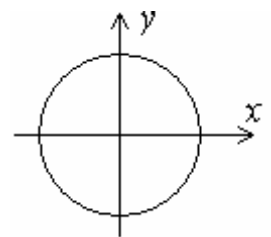
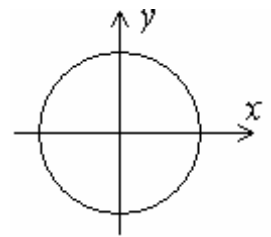
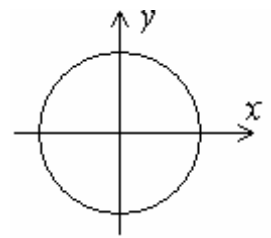
6.  $z^4 + 1 = 0 \Rightarrow z =$

7.  $z^8 - 1 = 0 \Rightarrow z =$

**Problem 4 - 7:** Solve the below equations and show the roots on the circle in the complex plane.

5.  $z^3 - 1 = 0,$

7.  $z^8 - 1 = 0.$





### 3.3. Тригонометрические приложения формулы Эйлера

### Trigonometric Applications of the Euler Formula

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta ,$$
$$\sin \theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) = \operatorname{Im} e^{i\theta} ,$$
$$\cos \theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \operatorname{Re} e^{i\theta} .$$

**Задачи 8 -11:** Доказать следующие формулы для синусов и косинусов суммы и разности углов:

**Problems 8 - 11:** Prove the following addition and subtraction formulas:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha , \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha , \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta .\end{aligned}$$

**Решение/ Solution:**

$$\begin{aligned}8) - 9) \quad e^{i(\alpha+\beta)} &= \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta) , \\ e^{i(\alpha+\beta)} &= e^{i\alpha} e^{i\beta} =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}10) - 11) \quad e^{i(\alpha-\beta)} &= \cos(\alpha - \beta) + i \sin(\alpha - \beta) , \\ e^{i(\alpha-\beta)} &= e^{i\alpha} e^{-i\beta} =\end{aligned}$$

**Задача 12:** Доказать следующие тождества: для синусов и косинусов двойных углов:

**Problem 12:** Prove the following double-angle identities:

$$\begin{aligned}\sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha , \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha .\end{aligned}$$

**Решение/ Solution:**

$$\begin{aligned}(e^{i\alpha})^2 &= e^{i2\alpha} = \\ (e^{i\alpha})^2 &= (\cos \alpha + i \sin \alpha)^2 =\end{aligned}$$

## 4. <sup>3</sup>Пределы функций

### 4.1. Наиболее важные формулы

## Limits of Functions

### The Most Important Formulas

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1. \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1. \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e. \quad (4)$$

### 4.2. Задачи

**Задачи 1 - 10:** Вычислить следующие пределы:

### Problems

**Problems 1 - 10:** Evaluate the following limits:

1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{8x},$

2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x^2}{3x^2},$

3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{6x},$

4)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2},$

5)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 7x}{\sin 3x},$

6)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x},$

7)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 4x - 5},$

8)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x},$

9)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 + 5x - 2}{3x^2 - 4x + 100},$

10)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - 3x^2)}{4x^2}.$

**Решение/ Solution:**

1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{8x} =$

2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x^2}{3x^2} =$

<sup>3</sup> См. [4], Глава 7, стр. 119. | See [4], Chapter 7, p. 119.

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{6x} =$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2} =$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 7x}{\sin 3x} =$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x} =$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 4x - 5} =$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x} =$$

$$9) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 + 5x - 2}{3x^2 - 4x + 100} =$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - 3x^2)}{4x^2} =$$

## 5. <sup>4</sup>Производные функций

### 5.1. Таблица производных

## Derivatives of Functions

### A Common Table of Derivatives

$(x^n)' = nx^{n-1}$	$(a^x)' = a^x \ln a$
$(e^x)' = e^x$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\cos x)' = -\sin x$
$(\operatorname{tg} x)' = (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\operatorname{ctg} x)' = (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\operatorname{arctg} x)' = (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$(\operatorname{arcctg} x)' = (\cot^{-1} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

### 5.2. Задачи

**Задача 1:** Пусть  $f(x) = x^3 - 5x + 4$ .  
Найти среднюю скорость изменения  $f(x)$  на интервале  $[2; 3]$ .

**Решение/ Solution:**

**Задачи 2 - 11:** Найти производные следующих функций:

2)  $f(x) = x^3,$

4)  $f(x) = \frac{5}{x} - 4\sqrt[3]{x} + 2x^8,$

6)  $f(x) = \ln(x + 2),$

8)  $f(x) = \ln\left(\frac{x\sqrt{x-3}}{x+2}\right),$

10)  $f(x) = \frac{x \sin x - \cos x}{x^2},$

### Problems

**Problem 1:** Let  $f(x) = x^3 - 5x + 4$ .  
Find the average rate of change of  $f(x)$  over the interval  $[2, 3]$ .

**Problems 2 - 11:** Find the derivatives of the functions:

3)  $f(x) = \sqrt{x},$

5)  $f(x) = \sin^2 2x,$

7)  $f(x) = \ln(x \cos x),$

9)  $f(x) = 3 \tan x - 3 \cot x,$

11)  $f(x) = \ln e^x + \sin^2 x + \cos^2 x.$

<sup>4</sup> См. [4], Глава 8, стр. 123. | See [4], Chapter 8, p. 123.

**Решение/ Solution:**

2)  $(x^3)' =$

3)  $(\sqrt{x})' =$

4)  $(\frac{5}{x} - 4\sqrt[3]{x} + 2x^8)' =$

5)  $(\sin^2 2x)' =$

6)  $(\ln(x + 2))' =$

7)  $(\ln(x \cos x))' =$

8)  $(\ln(\frac{x\sqrt{x-3}}{x+2}))' =$

9)  $(3 \tan x - 3 \cot x)' =$

10)  $(\frac{x \sin x - \cos x}{x^2})' =$

11)  $(\ln e^x + \sin^2 x + \cos^2 x)' =$

### 5.3. Исследование функций

Чтобы исследовать функцию  $f(x)$ , нужно:

- Найти область ее определения.
- Установить обладает ли функция свойствами симметрии.
- Найти критические точки, т.е. точки, в которых производная  $f'(x)$  обращается в нуль или не существует.
- Проверить имеются ли среди критических точек точки экстремума; если таковые имеются, то вычислить максимумы и минимумы функции.
- Найти интервалы монотонного возрастания и убывания функции.
- Найти все точки, в которых вторая производная  $f''(x)$  обращается в нуль или же не существует. Проверить какие из найденных точек являются точками перегиба.
- Найти интервалы выпуклости и вогнутости кривой  $y = f(x)$ .
- Найти асимптоты функции.

**Задача 12:** Найти интервалы монотонности функции

$$f(x) = 3x^4 + 16x^3 - 6x^2 - 48x + 1.$$

**Решение/ Solution:**

$$(f(x))' = (3x^4 + 16x^3 - 6x^2 - 48x + 1)' =$$

### Investigation of Functions

In order to investigate a function  $f(x)$  you can follow the algorithm below:

- Find the domain of the function.
- Determine whether the function has a symmetry.
- Determine critical points by solving the equation  $f'(x) = 0$  and finding the points in which the derivative  $f'(x)$  does not exist.
- Check each critical point whether it is an extreme point or not. Calculate the value of the function in each extreme point.
- Find the intervals of monotonicity of the function.
- Determine the points of inflection, that is, find the solution of the equation  $f''(x) = 0$ . Also it is necessary to find the points, where the second derivative  $f''(x)$  does not exist. Each of these points must be checked whether it is a point of inflection or not.
- Find the intervals where the curve  $y = f(x)$  is concave, and where it is convex.
- Find the asymptotes for the function.

**Problem 12:** Find the intervals of monotonicity of the function

**Задача 13:** Какие из нижеприведенных функций являются четными, какие – нечетными и какие из них не обладают свойствами четности?

**Problem 13:** Which of the following functions are even, odd, neither even nor odd?

$$\begin{array}{ccccccc}
 |x|, & x^2, & x^3, & x^4, & x^5, & \sqrt[3]{x}, & (x+1), \\
 \sin x, & \cos x, & \sin^2 x, & \sin^{-1} x, & \tan^7 x, & x \cos x, & \\
 \ln x, & |\ln x|, & \ln|x|, & \ln(x^2+1), & \ln(x+1), & & \\
 e^{-x^2}, & e^x, & e^{-x}, & & & & 
 \end{array}$$

**Решение/ Solution:**

Четные функции / Even functions:

Нечетные функции / Odd functions:

Не являются ни четными, ни нечетными / Neither even nor odd functions:

**Задачи 14 – 19:** Разбить области определения следующих функций на конечное число интервалов возрастания и убывания функции.

**Problems 14 – 19:** Divide the domains of the following functions into a finite number of intervals for which the functions are strictly monotone. Indicate the intervals where the functions are increasing and where they are decreasing.

14)  $f(x) = x^2(x-3),$

15)  $f(x) = (x-3)\sqrt{x},$

16)  $f(x) = x \ln x,$

17)  $f(x) = e^{x^2-4x},$

18)  $f(x) = \frac{e^{-x}}{x},$

19)  $f(x) = \frac{x}{x+4}.$

**Решение/ Solution:**

14)  $(x^2(x-3))' =$

Следовательно / Therefore:

15)  $((x-3)\sqrt{x})' =$

Следовательно / Therefore:

16)  $(x \ln x)' =$

Следовательно / Therefore:

17)  $(e^{x^2-4x})' =$

Следовательно / Therefore:

18)  $(\frac{e^x}{x})' =$

Следовательно / Therefore:

19)  $(\frac{x}{x+4})' =$

Следовательно / Therefore:

**Задачи 20 – 22:** Найти локальные экстремумы функции  $f(x)$  и классифицировать их по признакам максимума или минимума:

**Problems 20 - 22:** Find all local extrema of  $f(x)$  and determine which of them are local minima and which are local maxima:

20)  $f(x) = x^2 - 6x + 7,$

21)  $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x-1},$

22)  $f(x) = x - \ln(1+x).$



**Решение/ Solution:**

20)  $(x^2 - 6x + 7)' =$

21)  $(\frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1})' =$

22)  $(x - \ln(1 + x))' =$

**Задачи 23 - 26:** Найдите асимптоты следующих функций. Изобразите схематически графики функций и их асимптоты, не обращая внимания на экстремумы, вогнутость и т.д.

**Problems 23 - 26:** Find the asymptotes for the following functions. Sketch the graphs of these functions and indicate their asymptotes. No need to determine extrema, concavity, and so on.

23)  $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 9},$

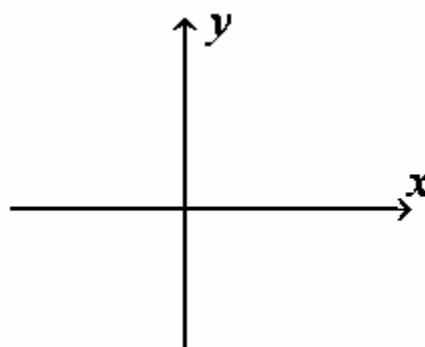
24)  $f(x) = \frac{x^2 + 4}{\sqrt{x^2 - 4}},$

25)  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 9},$

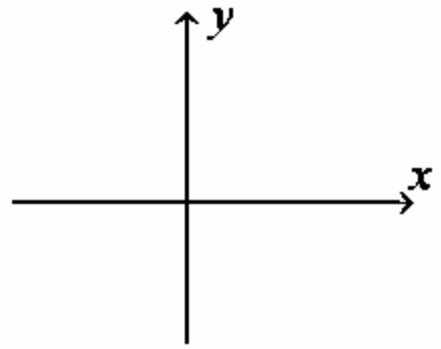
26)  $f(x) = e^{2x}.$

**Решение/ Solution:**

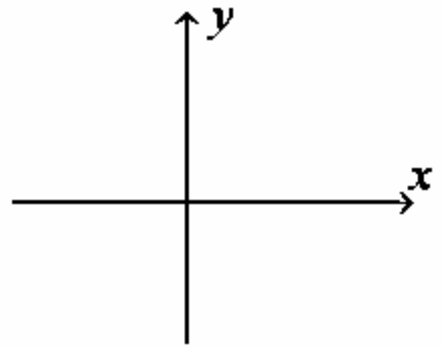
23)  $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 9} \Rightarrow$



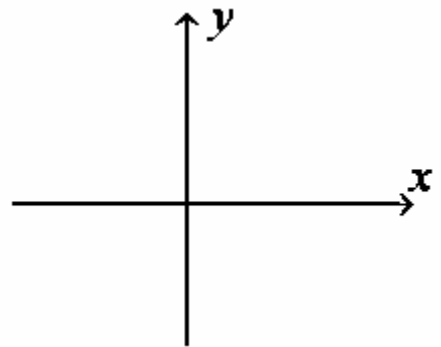
24)  $f(x) = \frac{x^2 + 4}{\sqrt{x^2 - 4}} \Rightarrow$



25)  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 9} \Rightarrow$



26)  $f(x) = e^{2x} \Rightarrow$



**Задачи 27 – 30:** Построить графики функций, предварительно исследовав:

- Область определения.
- Симметрию.
- Интервалы возрастания и убывания.
- Промежутки вогнутости и выпуклости.
- Точки экстремума и перегиба.
- Асимптоты.

For **Problems 27 – 30**, sketch the graphs of the functions. Extract as much information about the function as you can:

- Domain.
- Symmetry.
- Intervals of increasing, decreasing, concaving, convexity.
- Extreme points and points of inflection.
- Are there asymptotes? How does

Масштабы на координатных осях  $Ox$  и  $Oy$  можно выбирать независимо, сообразуясь с соображениями наглядности.

Не поленитесь найти точки пересечения графика функции с координатными осями.

Промежуточные результаты удобно представить в виде таблиц. Один из примеров таблицы приведен ниже – для функции, определенной на интервале  $[a, \infty)$  и имеющей критические точки  $x_1$  и  $x_2$ .

the function approach them?  
Do not decide on a scale for axes until you have come to a picture of the function. It is not necessary to use the same scales for the  $x$ - and  $y$ -axes.

Try to find the  $x$ - and  $y$ -intercepts.  
It is convenient to place the calculated results in the tables.

An example of the table is given below. The function  $y = f(x)$  is assumed to be defined in the interval  $[a, \infty)$ ;  $x_1$  and  $x_2$  are some critical points.

$x$	$a$	$[a, x_1)$	$x_1$	$(x_1, x_2)$	$x_2$	$(x_2, +\infty)$
$y$	9	↘	2	↗	$\pm\infty$	↗
$y'$	-	-	0	+	does not exist	+
ВЫВОД / conclusion		$f(x)$ убывает/ is decreasing	min	$f(x)$ возрастает/ is increasing	разрыв/ discontinuity	$f(x)$ возрастает/ is increasing

$$27) f(x) = x^2 + \frac{2}{x},$$

$$28) f(x) = \frac{x}{x^2 + 4},$$

$$29) f(x) = (2 + x^2)e^{-x^2},$$

$$30) f(x) = x \ln x^2.$$

**Решение/ Solution:**

$$27) f(x) = x^2 + \frac{2}{x}. \quad \text{Domain:}$$

Symmetry:

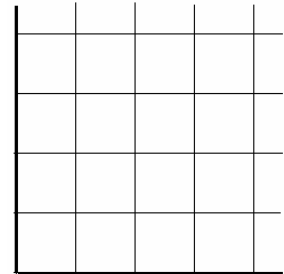
Critical points:


$$28) f(x) = \frac{x}{x^2 + 4}$$

Domain:

Symmetry:

Critical points:

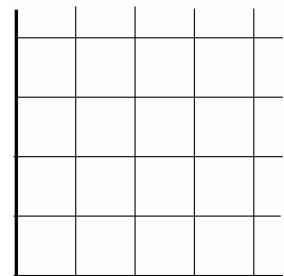


$$29) f(x) = (2 + x^2)e^{-x^2}$$

Domain:

Symmetry:

Critical points:

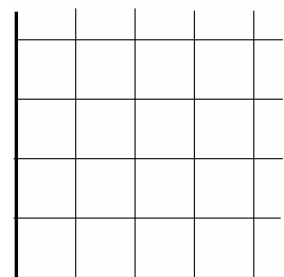


$$30) f(x) = x \ln x^2$$

Domain:

Symmetry:

Critical points:



**6. <sup>5</sup>Интегралы**  
**6.1. Таблица интегралов**

**Integrals**  
**A Table of Common Integrals**

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad (n \neq -1)$	$\int \frac{dx}{x} = \ln  x  + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int e^x dx = e^x + C$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \cos x dx = \sin x + C$
$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C = \operatorname{tg} x + C$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C = -\operatorname{ctg} x + C$
$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C = \operatorname{arctg} x + C$

**6.3. Задачи**

**Задачи 1 - 8:** Вычислите неопределенные интегралы и проверьте результаты с помощью дифференцирования.

**Problems**

**Problems 1 - 8:** Evaluate the following indefinite integrals. Check up the results by differentiating.

1) $\int (4x^3 - 6x^2 + x + 3)dx,$	2) $\int \sqrt{x}dx,$
3) $\int \frac{dx}{2x+5},$	4) $\int \cos(1-4x)dx,$
5) $\int \cos^2 x dx,$	6) $\int \sin 4x \cos 4x dx,$
7) $\int \cos^3 x dx,$	8) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+1}.$

**Решение/ Solution:**

1)  $\int (4x^3 - 6x^2 + x + 3)dx =$

Check-up:

<sup>5</sup> См. [4], Глава 9, стр. 129. | See [4], Chapter 9, p. 129.

$$2) \int \sqrt{x} dx =$$

Check-up:

$$3) \int \frac{dx}{2x+5} =$$

Check-up:

$$4) \int \cos(1-4x) dx =$$

Check-up:

$$5) \int \cos^2 x dx =$$

Check-up:

$$6) \int \sin 3x \cos 3x dx =$$

Check-up:

$$7) \int \sin^3 x dx =$$

Check-up:

$$8) \int \frac{dx}{\sqrt{x}+3} =$$

Check-up:

**Задачи 9 - 10:** Вычислить точно следующие интегралы, если они существуют:

**Problems 9 - 10:** Evaluate the following integrals exactly, if they exist:

$$9) \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx,$$

$$10) \int_0^1 (3x-4)^7 dx.$$

**Решение/ Solution:**

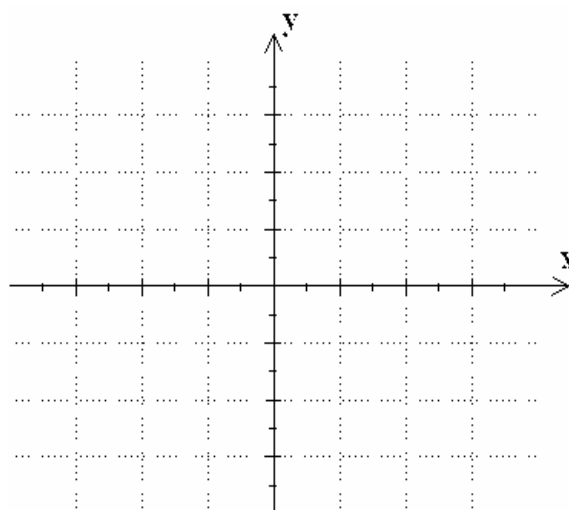
$$9) \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx =$$

$$10) \int_0^1 (3x-4)^7 dx =$$

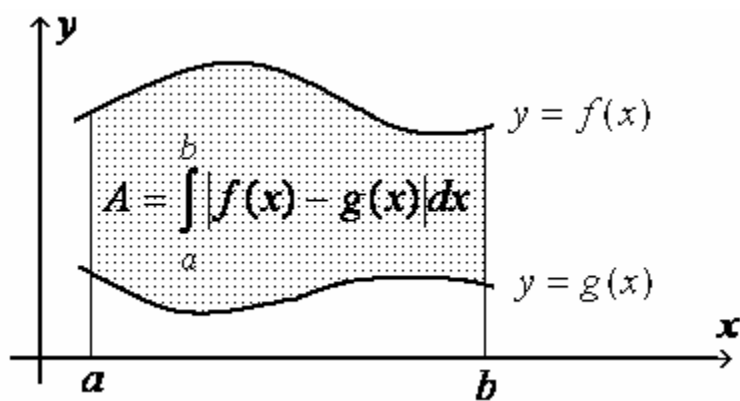
**Задача 11:** Найти площадь области, ограниченной графиками функций  $y = 3x$  и  $y = x^2$ .

**Problem 11:** Find the area of the region bounded by the graphs of the functions  $y = 3x$  and  $y = x^2$ .

**Решение/ Solution:**



Подсказка / Hint:



## Список литературы | References

1. V.V. Konev, Mathematics: Preparatory Course. Textbook. Tomsk. TPU Press, 2009, 104p.
2. V.V. Konev, Mathematics: Algebra, Exercise Book. TPU Press, 2009, 60p.
3. V.V. Konev, Mathematics: Geometry and Trigonometry, Exercise Book. Tomsk. TPU Press, 2009, 34p.
4. V.V. Konev, The Elements of Mathematics. Textbook. Tomsk. TPU Press, 2009, 140p.
5. V.V. Konev, The Elements of Mathematics. Workbook, Part 1. Tomsk. TPU Press, 2009, 54p.
6. V.V. Konev, Higher Mathematics, Part 2. Textbook. Tomsk. TPU Press, 2009. 114p.
7. K.P. Arefiev, O.V. Boev, A.I. Nagornova, G.P. Stoljarova, A.N. Harlova, Higher Mathematics, Part 1. Textbook. Tomsk, TPU Press, 1998, 97p.



Valery V. Konev, Associate Professor of the Higher Mathematics Department,  
TPU, Ph.D.

## The Elements of Mathematics

### Workbook Part 2

Editor: Victor A. Kilin, Professor of the Higher Mathematics Department, TPU,  
D.Sc.