

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ  
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования  
«ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

---

**V.V. Konev**

# **THE ELEMENTS OF MATHEMATICS**

Workbook  
Part 1

*Рекомендовано в качестве учебного пособия  
Редакционно-издательским советом  
Томского политехнического университета*

Издательство  
Томского политехнического университета  
2009

UDC 517

V.V. Konev. The Elements of Mathematics. Workbook, Part 1. Tomsk:  
TPU Press, 2009, 53 pp.

Reviewed by: V.A. Kilin, Professor of the Higher Mathematics  
Department, TPU, D.Sc.

© Konev V.V. 2001-2009

© Tomsk Polytechnic University, 2001-2009

## To the Student

This workbook has been written to help you in your study of Mathematics. The key concepts and ideas of mathematics are explained and illustrated by means of examples and figures. You are also recommended to use relevant textbooks when you solve problems. The workbook will help you to develop problem-solving skills and to focus your attention on important problems. In this workbook topics are presented in the same order as in the textbook [4]. Besides, in each chapter you will find summary and examples with explanations. The problems presented in this workbook should be solved either on your own or with teacher's help.

The 244 test questions and problems cover two content areas: basic mathematics and pre-calculus mathematics. Basic algebra topics include the following themes: ratio and proportion; operations with polynomials; linear, quadratic and higher degree equations; inequalities; radicals and exponents.

The final tests will estimate your knowledge and skills, your abilities in interpreting symbols, justifying statements and constructing proofs.

You will pass any basic algebra test if you are able: to recognize equivalent forms of a number, including square roots and powers of a number; to perform the basic operations on numbers and algebraic expressions; to solve simple equations and inequalities, including those involving absolute values.

Pre-calculus mathematics topics include: fractional and negative exponents; quadratic inequalities; algebraic, logarithmic, and exponential functions.

To pass pre-calculus mathematics test, you have to be able: to operate on functions and to plot their graphs; to determine such properties of a function as the domain, range, intercepts, symmetry.

### Scoring scale

5	A student clearly demonstrates full understanding of all topics required, answers all given questions, and gives correct and complete answers. Minor calculation errors are admissible.
4	A student gives a complete response that contains a minor mathematical error or misstatement, or gives a correct but slightly incomplete answer.
3	A student demonstrates the ability to determine an appropriate strategy for answering; gives a significant portion of the answer successfully; makes substantial progress toward a correct complete response to that portion of the question.
2	A student demonstrates a limited understanding of the question or makes only minimal progress toward a correct and complete response.
1	A student demonstrates a very limited understanding of the question and makes little or no progress toward a correct and complete response.
0	Blank or off topic answer.

## Contents

To the Student .....	3
Contents.....	4
1. The Real Number System .....	6
1.1. Self-testing Tasks .....	6
1.1.1. Quiz 1 .....	6
1.1.2. Quiz 2 .....	7
1.1.3. Quiz 3 .....	8
1.1.4. Quiz 4 .....	9
1.2. Problems .....	11
1.3. Summary Table of the Most Important Formulas .....	16
1.4. Answers .....	17
2. Algebraic Expressions .....	21
2.1. Problems .....	21
2.2. Summary Table of the Most Important Formulas.....	27
2.3. Answers .....	28
3. Algebraic Equations and Inequalities .....	31
3.1. Linear Equations Involving the Absolute Value $ ax + b $ ..	31
3.2. Linear Inequalities Involving Absolute Value $ ax + b $ ....	32
3.3. Quadratic Equations .....	36
3.4. Quadratic Inequalities .....	39
3.5. Answers .....	41
4. Exponential and Logarithmic Equations and Inequalities .....	45
4.1. Exponential Equations .....	45
4.2. Logarithmic Equations .....	47
4.3. Exponential and Logarithmic Inequalities .....	48
4.4. Useful Properties of Inequalities.....	50
4.5. Answers .....	51
References.....	53

## Содержание

Студенту .....	3
Содержание.....	4
1. Вещественные числа.....	6
1.1. Задачи для самопроверки .....	6
1.1.1. Тест 1 .....	6
1.1.2. Тест 2 .....	7
1.1.3. Тест 3 .....	8
1.1.4. Тест 4 .....	9
1.2. Задачи.....	11
1.3. Сводная таблица наиболее важных формул .....	16
1.4. Ответы .....	17
2. Алгебраические выражения.....	21
2.1. Задачи .....	21
2.2. Сводная таблица наиболее важных формул .....	27
2.3. Ответы .....	28
3. Алгебраические уравнения и неравенства.....	31
3.1. Линейные уравнения, содержащие $ ax + b $ .....	31
3.2. Линейные неравенства, содержащие $ ax + b $ .....	32
3.3. Квадратные уравнения.....	36
3.4. Квадратные неравенства.....	39
3.5. Ответы .....	41
4. Показательные и логарифмические уравнения и неравенства ..	45
4.1. Показательные уравнения .....	45
4.2. Логарифмические уравнения .....	47
4.3. Показательные и логарифмические неравенства.....	48
4.4. Полезные свойства неравенств.....	50
4.5. Ответы .....	51
Список литературы.....	53

**1. Вещественные числа****The Real Number System****1.1. Задачи для самопроверки****Self-testing Tasks****1.1.1. Тест 1****Quiz 1**

I. Какие из нижеприведенных чисел являются натуральными?

Which of the following numbers are natural?

$5/2$ ,  $2/5$ ,  $-2/5$ ,  $|-3|$ ,  $7$ ,  
 $-4$ ,  $\sqrt{9}$ ,  $\sqrt{5}$ ,  $\sqrt{(-4)^2}$ ,  $0$ .

Ваш ответ: | Your answer:

II. Какие из вышеприведенных чисел являются целыми?

Which of the above numbers are integers?

Ваш ответ: | Your answer:

III. Пусть  $n$  - целое число. Какие из нижеприведенных чисел являются четными?

Let  $n$  be an integer. Which of the following numbers are even?

$2n$ ,  $3n$ ,  $4n$ ,  $2n-1$ ,  $2n+1$ .

Ваш ответ: | Your answer:

IV. Какие из вышеприведенных чисел являются нечетными?

Which of the above numbers are odd?

Ваш ответ: | Your answer:

V. Пусть  $x = -8$  и  $y = -4$ . Какие из нижеприведенных выражений являются положительными? Какие из них являются отрицательными?

Let  $x = -8$  and  $y = -4$ . Which of the following expressions are positive? Which of them are negative?

a)  $xy$ , b)  $x/y$ , c)  $y-x$ , d)  $x+y$ ,  
 e)  $x^2y$ , f)  $2x+y^2$ , g)  $x-2y$ , h)  $x|y|$ .

Ваш ответ: | Your answer:

Положительные: / Positive:

Отрицательные: / Negative:

Обоснование: / Reasoning:

**1.1.2. Тест 2**

I. Какие из нижеприведенных утверждений являются истинными? Исправьте неверные утверждения.

a)  $5(x - y) = 5x - y,$

c)  $(x + y)^2 = x^2 + y^2,$

e)  $x + x = x^2,$

g)  $b^5 = b^2 + b^3,$

i)  $(x^2)^3 = x^6,$

k)  $x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{x^2},$

**Quiz 2**

Which of the following statements are true? Correct the false propositions.

b)  $(7x)^2 = 7x^2,$

d)  $(x - y)^2 = 2x - 2y,$

f)  $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y),$

h)  $a^6 = a^3 a^2,$

j)  $(x^2)^3 = x^5,$

l)  $\frac{1}{x^{-1/2}} = x^{\frac{1}{2}}.$

Ваши ответы: | Your answers:

a)  $5(x - y) =$

c)  $(x + y)^2 =$

e)  $x + x =$

g)  $b^5 =$

i)  $(x^2)^3 =$

k)  $x^{\frac{1}{2}} =$

b)  $(7x)^2 =$

d)  $(x - y)^2 =$

f)  $x^2 - y^2 =$

h)  $a^6 =$

j)  $(x^2)^3 =$

l)  $\frac{1}{x^{-1/2}} =$

II. Дайте правильный ответ для каждого из нижеприведенных ошибочных утверждений.

a)  $|x| < 1 \Rightarrow x < 1,$

c)  $|x| > 1 \Rightarrow x > 1,$

e)  $a^2 < b^2 \Rightarrow a < b,$

g)  $\sqrt{25} = \pm 5,$

i)  $\sqrt{x - y} = \sqrt{x} - \sqrt{y},$

Give the true proposition for each of the false statements below.

b)  $x < 1 \Rightarrow |x| < 1,$

d)  $x > 1 \Rightarrow |x| > 1,$

f)  $a > 3, \Rightarrow 1/a > 3,$

h)  $\sqrt{(-3)^2} = -3,$

j)  $\sqrt{x^2 + 1} = x + 1.$

Ваши ответы: | Your answers:

a)  $|x| < 1 \Rightarrow$

b)  $x < 1 \Rightarrow$

c)  $|x| > 1 \Rightarrow$

d)  $x > 1 \Rightarrow$

e)  $a^2 < b^2 \Rightarrow$

f)  $a > 3, \Rightarrow$

g)  $\sqrt{25} =$

h)  $\sqrt{(-3)^2} =$

i)  $\sqrt{x-y} =$

j)  $\sqrt{x^2+1} =$

**1.1.3. Тест 3**

I. Изобразите данные множества в схематическом виде на числовой оси.

a)  $\{x | 1 < x < 5\},$

c)  $\{x | -3 < x \leq 8\},$

e)  $\{x | x < 7, x \neq 1\},$

g)  $\{x | x > 2\},$

**Quiz 3**

Represent each of the given sets by means of a graph on the number line.

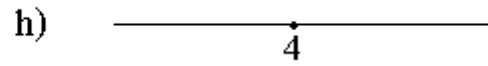
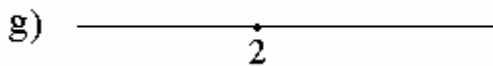
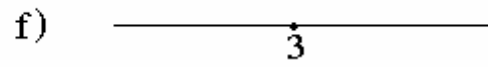
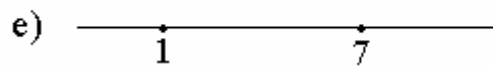
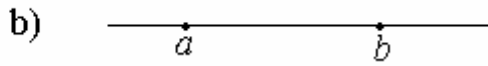
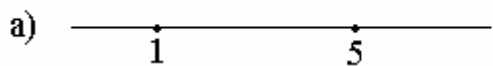
b)  $\{x | a \leq x \leq b\},$

d)  $\{x | 0 \leq x < 11\},$

f)  $\{x | x \leq 3\},$

h)  $\{x | x \geq 4\}.$

Ваши ответы: | Your answers:



Найдите объединение  $A \cup B$  и пересечение  $A \cap B$  множеств  $A$  и  $B$ , если  $A = \{x | 2 < x < 8\}$  и  $B = \{x | 5 < x < 10\}.$

Find the union  $A \cup B$  and intersection  $A \cap B$  of the sets  $A$  and  $B$ , if  $A = \{x | 2 < x < 8\}$  and  $B = \{x | 5 < x < 10\}.$

Ваши ответы: | Your answers:

$A \cup B =$

$A \cap B =$



II. Найдите объединение  $A \cup B$  и пересечение  $A \cap B$  множеств  $A$  и  $B$ , если  $A = \{x \mid x < 3\}$  и  $B = \{x \mid x > 1\}$ .

Find the union  $A \cup B$  and intersection  $A \cap B$  of the sets  $A$  and  $B$ , if  $A = \{x \mid x < 3\}$  and  $B = \{x \mid x > 1\}$ .

Ваши ответы: | Your answers:

$$A \cup B =$$

$$A \cap B =$$

III. Пусть  $A = \{x \mid x > 9\}$ ,  
 $B = \{x \mid 2 < x < 4\}$  и  
 $C = \{x \mid x < 3\}$ .

Let  $A = \{x \mid x > 9\}$ ,  
 $B = \{x \mid 2 < x < 4\}$  and  
 $C = \{x \mid x < 3\}$

Найдите следующие объединения и пересечения множеств:  $A \cup B$ ,  $A \cup C$ ,  $A \cap B$  и  $A \cap C$ .

Find the following unions and intersections of the sets:  $A \cup B$ ,  $A \cup C$ ,  $A \cap B$  and  $A \cap C$ .

Ваши ответы: | Your answers:

$$A \cup B =$$

$$A \cap B =$$

$$A \cup C =$$

$$A \cap C =$$

#### 1.1.4. Тест 4

#### Quiz 4

I. Если среди нижеприведенных утверждений имеются ложные - внесите в них поправки, ссылаясь на соответствующие свойства дробей. Для помощи используйте Таблицу на стр. 16.

Correct those propositions below, which are false. Present the arguments you use for the corrections by referring to the suitable properties of fractions. Apply the Table for a help (see p. 16).

a)  $\frac{a}{b} = \frac{5}{7} \Rightarrow a = 5, b = 7.$

b)  $\frac{a+4}{4} = a,$

c)  $\frac{5a-b}{8a} = \frac{5-b}{8},$

d)  $\frac{3}{a} + \frac{b}{4} = \frac{3+b}{a+4},$

e)  $\frac{a}{2} - \frac{a}{c} = \frac{a}{2c},$

f)  $\frac{a}{4} + \frac{b}{4} = \frac{a+b}{8},$

g)  $\frac{a}{b+c} = \frac{a}{b} + \frac{a}{c},$

h)  $\frac{\left(\frac{x}{a}\right)}{2} = \frac{2x}{a},$

i)  $\frac{3}{\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{3a}{b},$

j)  $\frac{a}{4} : \frac{b}{5} = \frac{a}{20b}.$

Ваши ответы: | Your answers:

a)  $\frac{a}{b} = \frac{5}{7} \Rightarrow$

b)  $\frac{a+4}{4} =$

c)  $\frac{5a-b}{8a} =$

d)  $\frac{3}{a} + \frac{b}{4} =$

e)  $\frac{a}{2} - \frac{a}{c} =$

f)  $\frac{a}{4} + \frac{b}{4} =$

g)  $\frac{a}{b+c} =$

h)  $\frac{\left(\frac{x}{a}\right)}{2} =$

i)  $\frac{3}{\left(\frac{a}{b}\right)} =$

j)  $\frac{a}{4} : \frac{b}{5} =$

II. Какие из нижеприведенных утверждений являются истинными?

Which of the following statements are true?

a)  $\lg 8 = \lg 4 + \lg 4,$

b)  $\lg 8 = \lg 2 + \lg 4,$

c)  $\lg 9 = (\lg 3)^2,$

d)  $\lg 9 = 2\lg 3,$

e)  $2\lg x = \lg 5 \Rightarrow 2x = 5,$

f)  $\lg a - \lg b = \lg(a - b).$

Ваши ответы / Your answer:

a)  $\lg 4 + \lg 4 =$

b)  $\lg 2 + \lg 4 =$

c)  $\lg 9 =$

d)  $2\lg 3 =$

e)  $2\lg x = \lg 5 \Rightarrow x =$

f)  $\lg a - \lg b =$

**Полезные свойства | Useful properties**

$a + b = b + a$ $ab = ba$	$(a + b) + c = a + (b + c)$ $a(b + c) = ab + ac$
$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}$	$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{d} = \frac{ad \pm bc}{cd}$
$a = \frac{ac}{c}$	$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$
$\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} = \frac{ab}{cd}$	$a : \frac{b}{c} = a \cdot \frac{c}{b}$

**1.2. Задачи**

**Задачи 1 – 15:** Используя вышеприведенные свойства и не прибегая к помощи калькулятора, вычислить следующие выражения:

- 1)  $23 + 39 + 27 + 61 + 45 =$
- 2)  $19 + 523 + 7 + 81 + 93 =$
- 3)  $68 + 74 - 18 - 24 - 90 =$
- 4)  $21 \cdot 43 + 57 \cdot 21 =$
- 5)  $30 \cdot 64 - 14 \cdot 30 =$
- 6)  $25 \cdot 93 \cdot 4 =$
- 7)  $50 \cdot 17 \cdot 200 \cdot 3 =$
- 8)  $5/7 + 9/7 =$
- 9)  $2 - 11/6 =$
- 10)  $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} =$
- 11)  $\frac{5}{6} + \frac{2}{3} =$
- 12)  $\frac{6}{8} \cdot \frac{12}{3} =$
- 13)  $\frac{6}{5} : \frac{9}{10} =$
- 14)  $\frac{9}{4} \cdot \frac{5}{3} - \frac{7}{8} : \frac{1}{6} =$
- 15)  $\frac{11}{5} : \frac{22}{3} + \frac{9}{14} : \frac{45}{7} =$

**Problems**

**Problems 1 – 15:** In view of the above useful properties evaluate the following expressions without using a calculator.

## Полезные свойства | Useful properties

$a^0 = 1$	$a^1 = a$
$a^{-p} = \frac{1}{a^p}$	$(a^p)^q = a^{pq}$
$a^p a^q = a^{p+q}$	$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$
$(ab)^p = a^p b^p$	$\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$

**Задачи 16 – 30:** Не прибегая к помощи калькулятора, вычислить следующие выражения:

**Problems 16 – 30:** Without using a calculator, evaluate the following expressions:

- 16)  $2^2 2^3 2^4 =$
- 17)  $3^{-5} 3^7 3^{-2} =$
- 18)  $8^5 8^{-3} / 8^2 =$
- 19)  $12(3^{-2} - 4^{-2})7^{-1} =$
- 20)  $8^{4/3} =$
- 21)  $1024^{1/10} =$
- 22)  $27^{2/3} =$
- 23)  $625^{1/4} - 25^{1/2} =$
- 24)  $((-3)(-27))^{1/4} =$
- 25)  $(12^6 30^{-4} 3^{-3} 4^{-3} 5^7 6^7)^{1/3} =$
- 26)  $2^{1/3} 4^{7/3} 8^{-2/3} =$
- 27)  $\left(\frac{5^7 2^{11} 3^4}{10^3 6^2}\right)^{1/2} =$
- 28)  $\left(\frac{5^{-1} 6^5 5^4 6}{5^3 6^{10}}\right)^{-1/4} =$
- 29)  $\frac{9^{1/2}}{64^{1/6}} + \frac{625^{1/4}}{1000^{1/3}} =$
- 30)  $\frac{81^{-1/2}}{27^{-2/3}} - \frac{32^{1/5}}{125^{1/3}} =$

## Полезные свойства | Useful properties

$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$	$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$
$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$	$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

**Задачи 31 – 40:** Упростить следующие выражения:

**Problems 21 – 30:** Simplify the following expressions:

$$31) a^3 a^7 a^{-2} =$$

$$32) (a^6 b^{-3} a^0)^{\frac{1}{3}} =$$

$$33) \left( \frac{a^{-1} b^5 a^4 b}{a^3 b^{10}} \right)^{-2} =$$

$$34) (a^{\frac{1}{2}} b^{-6} a^{-\frac{5}{2}})^{-\frac{1}{2}} =$$

$$35) \sqrt{a^3} (\sqrt{a})^5 =$$

$$36) \frac{\sqrt[5]{x^8}}{(\sqrt[5]{x})^3} =$$

$$37) \sqrt{x^4 y^3 y^5 x^{-2}} =$$

$$38) \sqrt[4]{\frac{x^{-3} y^{-5} z^7}{xy^{-1} z^3}} =$$

$$39) \frac{\sqrt[3]{x^2} \sqrt{x}}{(\sqrt[6]{x})^7} =$$

$$40) \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{256} \cdot \sqrt[6]{16} =$$

## Полезные свойства | Useful properties

$\log_a 1 = 0$	$\log_a a = 1$
$\log_a xy = \log_a  x  + \log_a  y $	$\log_a \frac{x}{y} = \log_a  x  - \log_a  y $
$\log_a x^y = y \log_a  x $	$\log_a x = \frac{\log_c x}{\log_c a}$
$\log_{1/a} x = -\log_a x$	$\log_{(a^b)} x = \frac{\log_a x}{b}$

**Задачи 41 – 50:** Не прибегая к помощи калькулятора, вычислить следующие выражения:

**Problems 41 – 50:** Without using a calculator, evaluate the following expressions:

41)  $\lg 2 + \lg 5 =$

42)  $\lg 25 + \lg 4 =$

43)  $2\lg 5 + \lg 4 =$

44)  $\log_4 64 - \log_4 16 =$

45)  $4\log_3 \sqrt{3} - \frac{1}{2}\log_3 9 + \log_9 81 =$

46)  $2\lg(4\sqrt{5}) - \lg 4 - \frac{1}{2}\lg 9 - 2\lg \sqrt{2} =$

47)  $\log_{\frac{1}{4}} \left( \sqrt[3]{64} \frac{1}{256} \right) =$

48)  $\frac{\log_3 8}{\log_3 2} =$

49)  $\frac{\log_3 7}{\log_3 5} - \frac{\log_4 7}{\log_4 5} =$

50)  $\log_4 3 \cdot \log_3 16 + 6\ln \sqrt{e} - \lg \frac{\sqrt{20}}{10} - \lg \frac{\sqrt{5}}{10} =$

## Полезные свойства | Useful properties

$$x = a^{\log_a x} = 2^{\log_2 x} = 3^{\log_3 x} = \dots = 10^{\lg x} = e^{\ln x}$$

$$y = \log_a a^y = \log_2 2^y = \log_3 3^y = \dots = \lg 10^y = \ln e^y$$

**Задачи 51 – 60:** Не прибегая к помощи калькулятора, вычислить следующие выражения:

**Problems 51 – 60:** Without using a calculator, evaluate the following expressions:

$$51) 10^{\lg 3} =$$

$$52) 3^{\log_3 \sqrt{49}} =$$

$$53) \frac{e^{2 \ln 6}}{4^{2 \log_4 6}} =$$

$$54) e^{-\ln 3 + 4 \ln 2} =$$

$$55) \left(\frac{1}{5}\right)^{-2 + \log_5 3} =$$

$$56) e^{2 \ln 4} + \left(\frac{1}{7}\right)^{-\log_{49} 25} =$$

$$57) \left(\frac{1}{16}\right)^{-\log_4 5} + 10^{\lg 2 - \lg 1} - 3^{\log_9 36} =$$

$$58) e^{\ln 4 \cdot \log_4 3} =$$

$$59) 10^{\lg 7 \cdot \log_7 3} =$$

$$60) \frac{e^{-5 \ln a} \cdot \ln e^{3a}}{10^{-4 \lg a}} =$$

**1.3. Сводная таблица наиболее важных формул**

**Summary Table of the Most Important Formulas**

Необходимо твердо запомнить все нижеприведенные тождества.

You have to remember well each of the below identities.

$a(b + c) = ab + ac$	$ a  = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$
$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$	$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}$
$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{d} = \frac{ad \pm bc}{cd}$	$\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} = \frac{ab}{cd}$
$a : \frac{b}{c} = a \cdot \frac{c}{b}$	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow ad = bc$
$a^0 = 1$	$a^p a^q = a^{p+q}$
$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$	$a^{-p} = \frac{1}{a^p}$
$(a^p)^q = a^{pq}$	$(ab)^p = a^p b^p$
$\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$	$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$
$\sqrt{a^2} =  a $	$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$
$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$	$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$
$x = a^{\log_a x}$	$y = \log_a a^y$
$\log_a 1 = 0$	$\log_a a = 1$
$\log_a xy = \log_a  x  + \log_a  y $	$\log_a \frac{x}{y} = \log_a  x  - \log_a  y $
$\log_a x^y = y \log_a  x $	$\log_a x = \frac{\log_c x}{\log_c a}$
$\log_{1/a} x = -\log_a x$	$\log_{(a^b)} x = \frac{\log_a x}{b}$



### 1.4. Ответы | Answers

#### Тест 1 / Test 1:

- I.  $|-3|, 7, \sqrt{9}, \sqrt{(-4)^2}$ .
- II.  $|-3|, 7, -4, \sqrt{9}, \sqrt{(-4)^2}, 0$ .
- III.  $2n, 4n$ .
- IV.  $3n, 2n - 1, 2n + 1$ .
- V. Положительные: / Positive:  $xy, x/y, y - x$ .  
 Отрицательные: / Negative:  $x + y, x^2y, x|y|$ .

#### Тест 2 / Test 2:

I.

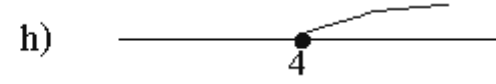
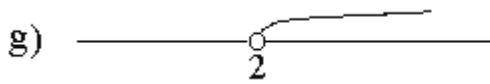
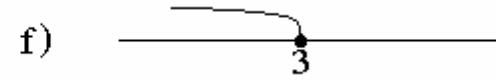
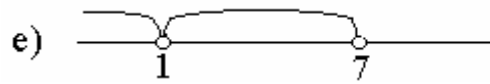
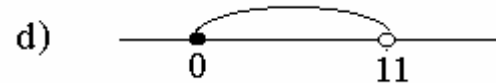
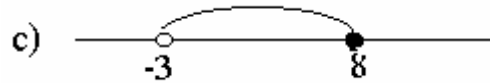
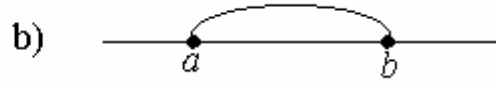
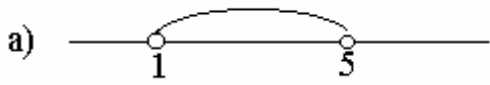
- a)  $5(x - y) = 5x - 5y$ .
- b)  $(7x)^2 = 49x^2$ .
- c)  $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ .
- d)  $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$ .
- e)  $x + x = 2x$ .
- f)  $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ .
- g)  $b^5 = b^2b^3$ .
- h)  $a^6 = (a^3)^2 = aa^5 = a^2a^4 = a^2a^3$ .
- i)  $(x^2)^3 = x^6$ .
- j)  $(x^2)^3 = x^6$ .
- k)  $x^{1/2} = \sqrt{x}$ .
- l)  $\frac{1}{x^{-1/2}} = x^{1/2}$ .

II.

- a)  $|x| < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$ .
- b) Ложь / False.
- c)  $|x| > 1 \Rightarrow x < -1$  или / or  $x > 1$ .
- d) Ложь / False.
- e)  $a^2 < b^2 \Rightarrow |a| < |b|$ .
- f)  $a > 3, \Rightarrow 1/a < 1/3$ .
- g)  $\sqrt{25} = 5$ .
- h)  $\sqrt{(-3)^2} = 3$ .
- i) Ложь / False.
- j) Ложь / False.

**Тест 3 / Test 3:**

I.



II.

$$A \cup B = \{x \mid 2 < x < 10\},$$

$$A \cap B = \{x \mid 2 < x < 5\}.$$

III.

$$A \cup B = \{x \mid -\infty < x < +\infty\},$$

$$A \cap B = \{x \mid 1 < x < 3\}.$$

IV.

$$A \cup B = \{x \mid 2 < x < 4\} \cup \{x \mid x > 9\},$$

$$A \cap B = \emptyset,$$

$$A \cup C = \{x \mid x < 3\} \cup \{x \mid x > 9\},$$

$$A \cap C = \emptyset.$$

**Тест 4 / Test 4:**

I.

a)  $\frac{a}{b} = \frac{5}{7} \Rightarrow a = \frac{5}{7}b,$

b)  $\frac{a+4}{4} = \frac{a}{4} + 1,$

c)  $\frac{5a-b}{8a} = \frac{5}{8} - \frac{b}{8a},$

d)  $\frac{3}{a} + \frac{b}{4} = \frac{12+ab}{4a},$

e)  $\frac{a}{2} - \frac{a}{c} = \frac{a(c-2)}{2c},$

f)  $\frac{a}{4} + \frac{b}{4} = \frac{a+b}{4},$

g)  $\frac{a}{b+c} = \frac{a}{b+c},$

h)  $\frac{\left(\frac{x}{a}\right)}{2} = \frac{x}{2a},$

i)  $\frac{3}{\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{3b}{a},$

j)  $\frac{a}{4} : \frac{b}{5} = \frac{5a}{4b}.$

II.

a)  $\lg 8 = 3 \lg 2,$

b)  $\lg 8 = \lg 2 + \lg 4,$

c)  $\lg 9 = 2 \lg 3,$

d)  $\lg 9 = 2 \lg 3,$

e)  $2 \lg x = \lg 5 \Rightarrow x = \sqrt{5},$

f)  $\lg a - \lg b = \lg \frac{a}{b}.$

**Задачи 1 – 15 / Problems 1 - 15:**

- 1)  $23 + 39 + 27 + 61 + 45 = (23 + 27) + (39+61) + 45 = 195.$
- 2)  $19 + 523 + 7 + 81 + 93 = (19 + 81) + (7 + 93) + 523 = 723.$
- 3)  $68 + 74 - 18 - 24 - 90 = (68 - 18) + (74 -24) - 90 = 10.$
- 4)  $21 \cdot 43 + 57 \cdot 21 = 21(43 + 57) = 2100.$
- 5)  $30 \cdot 64 - 14 \cdot 30 = 30(64 - 14) = 1500.$
- 6)  $25 \cdot 93 \cdot 4 = (25 \cdot 4) \cdot 93 = 9300.$
- 7)  $50 \cdot 17 \cdot 200 \cdot 3 = 510000.$
- 8)  $\frac{5}{7} + \frac{9}{7} = 2.$
- 9)  $2 - 11/6 = 1/6.$
- 10)  $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$
- 11)  $\frac{5}{6} + \frac{2}{3} = \frac{3}{2}.$
- 12)  $\frac{6}{8} \cdot \frac{12}{3} = 3.$
- 13)  $\frac{6}{5} : \frac{9}{10} = \frac{4}{3}.$
- 14)  $\frac{9}{4} \cdot \frac{5}{3} - \frac{7}{8} : \frac{1}{6} = -\frac{3}{2}.$
- 15)  $\frac{11}{5} : \frac{22}{3} + \frac{9}{14} : \frac{45}{7} = \frac{2}{5}.$

**Задачи 16 – 30 / Problems 16 - 30:**

- 16)  $2^2 2^3 2^4 = 512.$
- 17)  $3^{-5} 3^7 3^{-2} = 1.$
- 18)  $8^5 8^{-3} / 8^2 = 1.$
- 19)  $12(3^{-2} - 4^{-2})7^{-1} = \frac{1}{12}.$
- 20)  $8^{4/3} = 16.$
- 21)  $1024^{1/10} = 2.$
- 22)  $27^{2/3} = 9.$
- 23)  $625^{1/4} - 25^{1/2} = 0.$
- 24)  $((-3)(-27))^{1/4} = 3.$
- 25)  $(12^6 30^{-4} 3^{-3} 4^{-3} 5^7 6^7)^{1/3} = (12^6 12^{-3} 30^{-4} 30^7)^{1/3} = 360.$
- 26)  $2^{1/3} 4^{7/3} 8^{-2/3} = 8.$
- 27)  $(\frac{5^7 2^{11} 3^4}{10^3 6^2})^{1/2} = 600.$
- 28)  $(\frac{5^{-1} 6^5 5^4 6}{5^3 6^{10}})^{-1/4} = 6.$
- 29)  $\frac{9^{1/2}}{64^{1/6}} + \frac{625^{1/4}}{1000^{1/3}} = 2.$
- 30)  $\frac{81^{-\frac{1}{2}}}{27^{-\frac{2}{3}}} - \frac{32^{\frac{1}{5}}}{125^{\frac{1}{3}}} = \frac{3}{5}.$

**Задачи 31 – 40 / Problems 31 - 40:**

31)  $a^3 a^7 a^{-2} = a^8,$

32)  $(a^6 b^{-3} a^0)^{1/3} = a^2/b,$

33)  $(\frac{a^{-1} b^5 a^4 b}{a^3 b^{10}})^{-2} = b^8,$

34)  $(a^2 b^{-6} a^{-\frac{5}{2}})^{-\frac{1}{2}} = ab^3,$

35)  $\sqrt{a^3} (\sqrt{a})^5 = a^4,$

36)  $\frac{\sqrt[5]{x^8}}{(\sqrt[5]{x})^3} = x,$

37)  $\sqrt{x^4 y^3 y^5 x^{-2}} = xy^4,$

38)  $\sqrt[4]{\frac{x^{-3} y^{-5} z^7}{xy^{-1} z^3}} = \frac{z}{xy},$

39)  $\sqrt[3]{x^2} \sqrt{x} / (\sqrt[6]{x})^7 = 1,$

40)  $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{256} \cdot \sqrt[6]{16} = 16.$

**Задачи 41 – 50 / Problems 41 - 50:**

41)  $\lg 2 + \lg 5 = 1,$

42)  $\lg 25 + \lg 4 = 2,$

43)  $2\lg 5 + \lg 4 = 2,$

44)  $\log_4 64 - \log_4 16 = 1,$

45)  $4\log_3 \sqrt{3} - \frac{1}{2}\log_3 9 + \log_9 81 = 3,$

46)  $2\lg(4\sqrt{5}) - \lg 4 - \frac{1}{2}\lg 9 - 2\lg \sqrt{2} = 0,$

47)  $\log_{\frac{1}{4}} (\sqrt[3]{64} \frac{1}{256}) = 3,$

48)  $\frac{\log_3 8}{\log_3 2} = 3,$

49)  $\frac{\log_3 7}{\log_3 5} - \frac{\log_4 7}{\log_4 5} = 0,$

50)  $\log_4 3 \cdot \log_3 16 + 6\ln \sqrt{e} - \lg \frac{\sqrt{20}}{10} - \lg \frac{\sqrt{5}}{10} = 5.$

**Задачи 51 – 60 / Problems 51 - 60:**

51)  $10^{\lg 3} = 3,$

52)  $3^{\log_3 \sqrt{49}} = 7,$

53)  $\frac{e^{2\ln 6}}{4^{2\log_4 6}} = 1,$

54)  $e^{-\ln 3 + 4\ln 2} = \frac{16}{3},$

55)  $(\frac{1}{5})^{-2 + \log_5 3} = \frac{25}{3},$

56)  $e^{2\ln 4} + (\frac{1}{7})^{-\log_{49} 25} = 21,$

57)  $(\frac{1}{16})^{-\log_4 5} + 10^{\lg 2 - \lg 1} - 3^{\log_9 36} = 21,$

58)  $e^{\ln 4 \cdot \log_4 3} = 3,$

59)  $10^{\lg 7 \cdot \log_7 3} = 3,$

60)  $\frac{e^{-5\ln a} \cdot \ln e^{3a}}{10^{-4\lg a}} = 3.$

## 2. Алгебраические выражения

## Algebraic Expressions

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

### 2.1. Задачи

### Problems

**Задачи 1 – 15:** Упростить следующие выражения:

**Problems 1 – 15:** Simplify the following expressions:

1)  $\frac{a^2 - b^2}{a - b} =$

2)  $\frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} =$

3)  $\frac{a^3 - b^3}{a - b} =$

4)  $\frac{a - b}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}} =$

5)  $\frac{a^3 + b^3}{a + b} =$

6)  $\frac{a + b}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}} =$

7)  $(a + b)^2 - a^2 - b^2 =$

8)  $(a - b)^2 + 2ab =$

$$9) \quad \frac{(x+y)^3 - x^3 - y^3}{3xy} - x - y =$$

$$10) \quad a - 2 - \frac{(1-a)^2 - 1}{a} =$$

$$11) \quad x^2 + 10xy^2 + 25y^4 =$$

$$12) \quad 4 - 28a + 49a^2 =$$

$$13) \quad a^3 + 12a^2b + 48ab^2 + 64b^3 =$$

$$14) \quad (1 + a^2 - \sqrt{2}a)(1 + a^2 + \sqrt{2}a) =$$

$$15) \quad (1-x)(1+x+x^2+x^3+\dots+x^9) =$$

**Подсказки:**

2) В биноме  $(a-b)$  можно распознать разность квадратов  $(\sqrt{a})^2$  и  $(\sqrt{b})^2$ .

4) В биноме  $(a-b)$  можно распознать разность кубов  $(\sqrt[3]{a})^3$  и  $(\sqrt[3]{b})^3$ .

6) В биноме  $(a+b)$  можно распознать сумму кубов.

7)–10) Используйте формулы сокращенного умножения.

11)–12) В многочленах  $(x^2 + 10xy^2 + 25y^4)$  и

$(4 - 28a + 49a^2)$  можно распознать квадрат суммы и квадрат разности, соответственно..

13) В многочлене

$$a^3 + 12a^2b + 48ab^2 + 64b^3$$

можно распознать куб суммы.

14)–15) Скажите себе: “Я могу решить любую задачу”.

И решайте...

**Hints:**

2) The binomial  $(a-b)$  is recognizable as the difference between two squares,  $(\sqrt{a})^2$  and  $(\sqrt{b})^2$ .

4) The binomial  $(a-b)$  is recognizable as the difference between two cubes,  $(\sqrt[3]{a})^3$  and  $(\sqrt[3]{b})^3$ .

6) The binomial  $(a+b)$  is recognizable as the sum of two cubes.

7)–10) Use the formulas of expanding.

11)–12) The polynomials

$$x^2 + 10xy^2 + 25y^4, \quad 4 - 28a + 49a^2$$

are recognizable as the perfect square trinomials.

13) The polynomial

$$a^3 + 12a^2b + 48ab^2 + 64b^3$$

is recognizable as the sum cubed.

14)–15) Say yourself: “I am able to solve any problem”; then solve...

**Задачи 16– 20:** Упростить | **Problems 16 – 20;** Simplify the  
следующие выражения: | following expressions:

$$16) \left[ \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b+c} \right) : \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b+c} \right) \right] \cdot \left[ 1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right] - \frac{(a+b+c)^2}{2bc},$$

$$17) \left( \frac{\sqrt{5}+5}{1+\sqrt{5}+\sqrt{a}} + \frac{5-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}+\sqrt{a}} \right) \cdot \left( \sqrt{a} - \frac{4}{\sqrt{a}} + 2 \right),$$

$$18) \frac{\frac{1}{\sqrt{a-1}} + \sqrt{a-1}}{1 - \frac{1}{\sqrt{a+1}}} : \frac{(a^2+a)\sqrt{a-1}}{(a-1)\sqrt{a+1} - (a+1)\sqrt{a-1}},$$

$$19) \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \left( \frac{a^{3/2} + b^{3/2}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \frac{1}{(ab)^{1/2}} \right) \cdot (a-b)^{-1},$$

$$20) \frac{x^3 - a^3}{x^2 + 2ax + a^2} : \left( \frac{x-a}{ax+a^2} - \frac{a+x}{x^2-ax} - \frac{3x+a}{a^2-x^2} \right) - \frac{(x-a)ax}{x+a}.$$

**Решение / Solution:**

16)

$$\left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b+c} \right) : \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b+c} \right) =$$

$$1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} =$$

$$\left[ \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b+c} \right) : \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b+c} \right) \right] \cdot \left[ 1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right] =$$

$$\left[ \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b+c} \right) : \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b+c} \right) \right] \cdot \left[ 1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right] - \frac{(a+b+c)^2}{2bc} =$$

17)

$$\frac{\sqrt{5}+5}{1+\sqrt{5}+\sqrt{a}} + \frac{5-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}+\sqrt{a}} =$$

$$\sqrt{a} - \frac{4}{\sqrt{a}} + 2 =$$

$$\left( \frac{\sqrt{5}+5}{1+\sqrt{5}+\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{5}-5}{1-\sqrt{5}+\sqrt{a}} \right) \cdot \left( \sqrt{a} - \frac{4}{\sqrt{a}} + 2 \right) =$$

18)

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{a-1}} + \sqrt{a-1}}{\frac{1}{\sqrt{a+1}} - \frac{1}{\sqrt{a-1}}} =$$

$$\frac{(a^2+a)\sqrt{a-1}}{(a-1)\sqrt{a+1} - (a+1)\sqrt{a-1}} =$$

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{a-1}} + \sqrt{a-1}}{\frac{1}{\sqrt{a+1}} - \frac{1}{\sqrt{a-1}}} : \frac{(a^2+a)\sqrt{a-1}}{(a-1)\sqrt{a+1} - (a+1)\sqrt{a-1}} =$$

19)

$$\frac{a^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \frac{1}{(ab)^{\frac{1}{2}}} =$$

$$\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \left( \frac{a^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \frac{1}{(ab)^{\frac{1}{2}}} \right) \cdot (a-b)^{-1} =$$



20)

$$\frac{x-a}{ax+a^2} - \frac{a+x}{x^2-ax} - \frac{3x+a}{a^2-x^2} =$$

$$\frac{x^3-a^3}{x^2+2ax+a^2} : \left( \frac{x-a}{ax+a^2} - \frac{a+x}{x^2-ax} - \frac{3x+a}{a^2-x^2} \right) =$$

$$\frac{x^3-a^3}{x^2+2ax+a^2} : \left( \frac{x-a}{ax+a^2} - \frac{a+x}{x^2-ax} - \frac{3x+a}{a^2-x^2} \right) - \frac{(x-a)ax}{x+a} =$$

**Задачи 21– 30:** Разложить на множители многочлены

**Problems 21 – 30:** Factor the following polynomials

21)  $x^2 - 2x - 3 =$

22)  $x^2 - 3x - 4 =$

23)  $x^2 - 4x - 5 =$

24)  $x^2 + 6x + 9 =$

25)  $x^2 + 5x + 6 =$

26)  $x^3 - 2x^2 - 3x =$

27)  $x^4 - 4x^3 - 5x^2 =$

28)  $x^3 + x^2 - x - 1 =$

29)  $x^4 - 16 =$

30)  $x^4 + 16 =$

## Полезные формулы | Useful formulas

$$\frac{1}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} \mp \sqrt{b}}{a - b}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b}} = \frac{(\sqrt[3]{a^2} \mp \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2})}{a \pm b}$$

**Задачи 31– 40:** Освободить от иррациональностей знаменатели следующих дробей:

**Problems 31 – 40:** Rationalize the denominators of the following fractions:

31)  $\frac{1}{\sqrt{2}} =$

32)  $\frac{1}{\sqrt{3}-1} =$

33)  $\frac{1}{\sqrt{5}+1} =$

34)  $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} =$

35)  $\frac{1}{\sqrt{3+\sqrt{2}}} =$

36)  $\frac{1}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{5}-2)} =$

37)  $\frac{1}{\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{9}} =$

38)  $\frac{1}{\sqrt[3]{5}-1} =$

39)  $\frac{1}{\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{2}} =$

40)  $\frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}} =$

### 2.3. Сводная таблица наиболее важных формул

### Summary Table of the Most Important Formulas

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
$\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b}$
$\frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{a - b}$
$\frac{1}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}} = \frac{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}{a + b}$
$\frac{1}{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}} = \frac{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}{a + b}$
$\frac{1}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}} = \frac{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}{a - b}$
$\frac{1}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}} = \frac{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}}{a - b}$

## 2.4. ОТВЕТЫ | Answers

### Задачи 1 – 15: | Problems 1 - 15:

- 1)  $\frac{a^2 - b^2}{a - b} = a + b,$
- 2)  $\frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \sqrt{a} - \sqrt{b},$
- 3)  $\frac{a^3 - b^3}{a - b} = a^2 + ab + b^2,$
- 4)  $\frac{a - b}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}} = \sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b},$
- 5)  $\frac{a^3 + b^3}{a + b} = a^2 - ab + b^2,$
- 6)  $\frac{a + b}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2},$
- 7)  $(a + b)^2 - a^2 - b^2 = 2ab,$
- 8)  $(a - b)^2 + 2ab = a^2 + b^2,$
- 9)  $\frac{(x + y)^3 - x^3 - y^3}{3xy} - x - y = 0,$
- 10)  $a - 2 - \frac{(1 - a)^2 - 1}{a} = 0,$
- 11)  $x^2 + 10xy^2 + 25y^4 = (x + 5y^2)^2,$
- 12)  $4 - 28a + 49a^2 = (2 - 7a)^2,$
- 13)  $a^3 + 12a^2b + 48ab^2 + 64b^3 = (a + 4b)^3,$
- 14)  $(1 + a^2 - \sqrt{2}a)(1 + a^2 + \sqrt{2}a) = 1 + a^4,$
- 15)  $(1 - x)(1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^9) = 1 - x^{10}.$

**Задачи 16– 20: | Problems 16 - 20:**

$$\begin{aligned}
 16) \quad & \left[ \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b+c} \right) : \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b+c} \right) \right] \cdot \left[ 1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right] - \frac{(a+b+c)^2}{2bc} = \\
 & = \frac{b+c+a}{b+c-a} \cdot \frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc} - \frac{(a+b+c)^2}{2bc} = 0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 17) \quad & \left( \frac{\sqrt{5}+5}{1+\sqrt{5}+\sqrt{a}} + \frac{5-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}+\sqrt{a}} \right) \cdot \left( \sqrt{a} - \frac{4}{\sqrt{a}} + 2 \right) = \\
 & = \frac{10\sqrt{a}}{a+2\sqrt{a}-4} \cdot \frac{a+2\sqrt{a}-4}{\sqrt{a}} = 10,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 18) \quad & \frac{\frac{1}{\sqrt{a-1}} + \sqrt{a-1}}{\frac{1}{\sqrt{a+1}} - \frac{1}{\sqrt{a-1}}} : \frac{(a^2+a)\sqrt{a-1}}{(a-1)\sqrt{a+1} - (a+1)\sqrt{a-1}} = \\
 & = \frac{a\sqrt{a+1}}{\sqrt{a-1} - \sqrt{a+1}} : \frac{a\sqrt{a+1}}{\sqrt{a-1} - \sqrt{a+1}} = 1,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 19) \quad & \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \left( \frac{\frac{3}{a^2} + \frac{3}{b^2}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \frac{1}{(ab)^{\frac{1}{2}}} \right) \cdot (a-b)^{-1} = \\
 & = \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{a-b} = 1,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 20) \quad & \frac{x^3 - a^3}{x^2 + 2ax + a^2} : \left( \frac{x-a}{ax+a^2} - \frac{a+x}{x^2-ax} - \frac{3x+a}{a^2-x^2} \right) - \frac{(x-a)ax}{x+a} = \\
 & = \frac{x^3 - a^3}{(x+a)^2} : \frac{x^3 - a^3}{(x^2 - a^2)ax} - \frac{(x-a)ax}{x+a} = \\
 & = \frac{(x-a)ax}{x+a} - \frac{(x-a)ax}{x+a} = 0.
 \end{aligned}$$

**Задачи 21– 30: | Problems 21 - 30:**

- 21)  $x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$ ,  
 22)  $x^2 - 3x - 4 = (x + 1)(x - 4)$ ,  
 23)  $x^2 - 4x - 5 = (x + 1)(x - 5)$ ,  
 24)  $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$ ,  
 25)  $x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$ ,  
 26)  $x^3 - 2x^2 - 3x = x(x + 1)(x - 3)$ ,  
 27)  $x^4 - 4x^3 - 5x^2 = x^2(x + 1)(x - 5)$ ,  
 28)  $x^3 + x^2 - x - 1 = (x + 1)^2(x - 1)$ ,  
 29)  $x^4 - 16 = (x^2 + 1)(x - 1)(x + 1)$ ,  
 30)  $x^4 + 16 = (x^2 + 2\sqrt{2}x + 4)(x^2 - 2\sqrt{2}x + 4)$ .

**Задачи 31– 40: | Problems 31 - 40:**

- 31)  $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  
 32)  $\frac{1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + 1)$ ,  
 33)  $\frac{1}{\sqrt{5} + 1} = \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)$ ,  
 34)  $\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ ,  
 35)  $\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \frac{1}{7}\sqrt{3 + \sqrt{2}}(3 - \sqrt{2})$ ,  
 36)  $\frac{1}{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{5} - 2)} = \frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{5} + 2)$ ,  
 37)  $\frac{1}{\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{12} + \sqrt[3]{9}} = \frac{1}{7}(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{3})$ ,  
 38)  $\frac{1}{\sqrt[3]{5} - 1} = \frac{1}{4}(\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{5} + 1)$ ,  
 39)  $\frac{1}{\sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{2}} = \frac{1}{5}(\sqrt[3]{49} + \sqrt[3]{14} + \sqrt[3]{4})$ ,  
 40)  $\frac{1}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}} = \frac{1}{6}(2\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{4})$ .

### 3. Алгебраические уравнения и неравенства

#### 3.1. Линейные уравнения, содержащие $|ax + b|$

**Задачи 1 – 10:** Решить уравнения

1)  $|x| = 2,$

3)  $|x| = -x,$

5)  $|x + 1| = x + 1,$

7)  $|5x + 2| = 3 - x,$

9)  $|3x + 20| = 5x - 4,$

**Решение/ Solution:**

1)  $|x| = 2 \Rightarrow$

2)  $|x| = x \Rightarrow$

3)  $|x| = -x \Rightarrow$

4)  $|x - 3| = 8 \Rightarrow$

5)  $|x + 1| = x + 1 \Rightarrow$

6)  $|x + 1| = x + 2 \Rightarrow$

7)  $|5x + 2| = 3 - x \Rightarrow$

8)  $|x - 9| = 1 - 4x \Rightarrow$

9)  $|3x + 20| = 5x - 4 \Rightarrow$

10)  $|1 - x| = 3x - 2 \Rightarrow$

### Algebraic Equations and Inequalities

#### Linear Equations Involving the Absolute Value $|ax + b|$

**Problems 1 - 10:** Solve the equations

2)  $|x| = x,$

4)  $|x - 3| = 8,$

6)  $|x + 1| = x + 2,$

8)  $|x - 9| = 1 - 4x,$

10)  $|1 - x| = 3x - 2.$

**Подсказки:** Чтобы решить уравнение, содержащее  $|ax + b|$ , следует освободиться от символов абсолютной величины.

Если  $ax + b \geq 0$ , то знак абсолютной величины можно просто опустить, т.е.  $|ax + b| = ax + b$ .

Если  $ax + b < 0$ , то символы абсолютной величины можно также опустить, но при этом нужно изменить знак перед выражением  $ax + b$ , т.е.  $|ax + b| = -(ax + b)$ .

**Hints:** In order to solve an equation involving the absolute value  $|ax + b|$  it is necessary to remove the absolute value symbol.

If  $ax + b \geq 0$  then the absolute value symbol can be simply dropped, that is,  $|ax + b| = ax + b$ .

If  $ax + b < 0$  then the absolute value symbol can be also dropped but the minus sign has to be written in front of  $(ax + b)$ , that is,  $|ax + b| = -(ax + b)$ .

### 3.2. Линейные неравенства, содержащие $|ax + b|$

**Задачи 11 – 20:** Решите неравенства, содержащие абсолютные величины. Покажите решения на числовой оси.

11)  $|x| < 2$ ,

13)  $|x - 3| \leq 5$ ,

15)  $|x| \geq -x$ ,

17)  $|5x + 2| \leq 6 - x$ ,

19)  $|3 - x| > 2x + 1$ ,

### Linear Inequalities Involving the Absolute Value $|ax + b|$

**Problems 11 - 20:** Solve the following inequalities involving absolute values. Show the solution sets on the number line.

12)  $|x| > 2$ ,

14)  $|x + 4| \geq 1$ ,

16)  $|x + 1| < x + 2$ ,

18)  $|4x + 5| > 4x + 1$ ,

20)  $|3x - 1| \geq 5 - x$ .

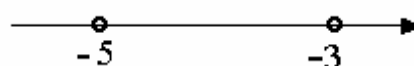
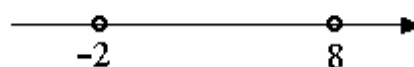
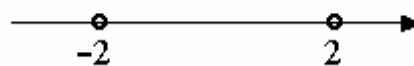
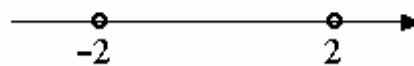
#### Решение/ Solution:

11)  $|x| < 2 \Rightarrow$

12)  $|x| > 2 \Rightarrow$

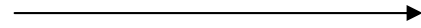
13)  $|x - 3| \leq 5 \Rightarrow$

14)  $|x + 4| \geq 1 \Rightarrow$

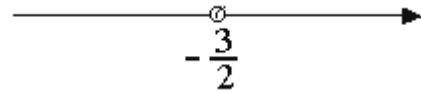




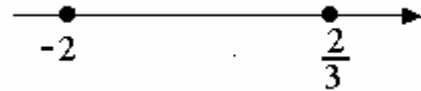
15)  $|x| \geq -x \Rightarrow$



16)  $|x + 1| < x + 2 \Rightarrow$



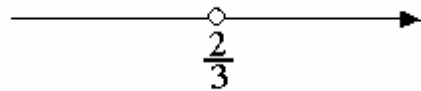
17)  $|5x + 2| \leq 6 - x \Rightarrow$



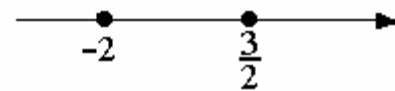
18)  $|4x + 5| > 4x + 1 \Rightarrow$



19)  $|3 - x| > 2x + 1 \Rightarrow$



20)  $|3x - 1| \geq 5 - x \Rightarrow$

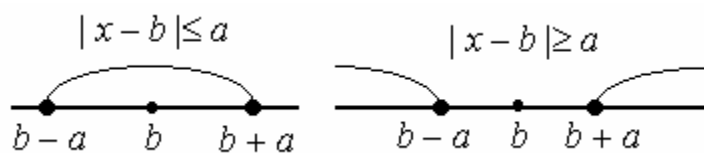


**Подсказки:** Чтобы решить линейное неравенство, содержащее абсолютную величину  $|ax + b|$ , нужно сначала избавиться от знака абсолютной величины, а затем решить два обычных неравенства.

Можно также использовать следующую интерпретацию абсолютной величины:

**Hints:** In order to solve a linear inequality involving the absolute value  $|ax + b|$ , first, it is necessary, to drop out the absolute value symbol by using the definition of the absolute value. Then solve two ordinary linear inequalities not involving the absolute value symbols.

One can use also the following interpretation of the absolute value:



**Задачи 21 – 30:** Решить следующие рациональные неравенства методом интервалов:

**Problems 21 - 30:** Solve the following rational inequalities using the chart method:

21)  $x(x+1) > 0,$

22)  $x^3(x+1)^7 > 0,$

23)  $\frac{x+5}{x-3} > 0,$

24)  $\frac{(x+2)(x-1)}{x+4} < 0,$

25)  $\frac{(x+2)(x-1)}{x+4} < x-3,$

26)  $\frac{x+1}{x-2} < x+1,$

27)  $\frac{x-4}{x-1} > x-4,$

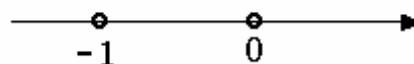
28)  $\frac{(x-3)^2 x}{x+5} \geq 0,$

29)  $\frac{(x-7)^3 x^2}{x+1} \geq 0,$

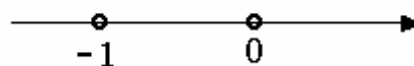
30)  $\frac{(x-1)(x-2)^2(x-4)}{x^3} \leq 0.$

**Решение/ Solution:**

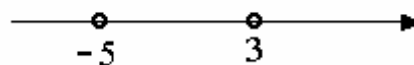
21)  $x(x+1) > 0 \Rightarrow$



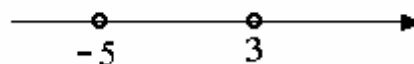
22)  $x^3(x+1)^7 > 0 \Rightarrow$



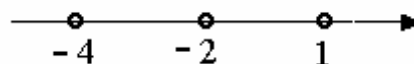
23)  $(x+5)(x-3) < 0 \Rightarrow$



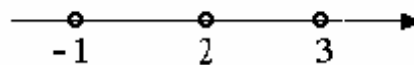
24)  $\frac{x+5}{x-3} > 0 \Rightarrow$



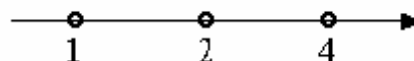
25)  $\frac{(x+2)(x-1)}{x+4} < 0 \Rightarrow$



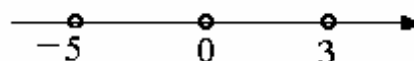
$$26) \quad \frac{x+1}{x-2} < x+1 \quad \Rightarrow$$



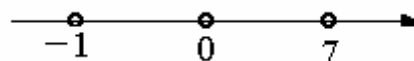
$$27) \quad \frac{x-4}{x-1} > x-4 \quad \Rightarrow$$



$$28) \quad \frac{(x-3)^2 x}{x+5} \geq 0 \quad \Rightarrow$$



$$29) \quad \frac{(x-7)^3 x^2}{x+1} \geq 0 \quad \Rightarrow$$



$$30) \quad \frac{(x-1)(x-2)^2(x-4)}{x^3} \leq 0 \quad \Rightarrow$$



**Подсказки:** Процедуру решения рационального неравенства можно представить в виде следующих шагов:

– Перенесите все члены в левую часть и объедините их в единое рациональное выражение.

– Разложите на множители числитель и знаменатель.

– Найдите критические точки (точки, в которых числитель или знаменатель обращаются в нуль). Эти точки разбивают числовую ось на интервалы.

– Определите знаки множителей на каждом интервале и отметьте те

**Hints:** To solve rational inequality, use the following stepwise procedure:  
– Move all terms to the left side of an inequality, leaving zero on the right side.

– Combine the terms into a single rational expression.

– Factor the numerator and denominator of this expression.

– Find the critical points, that is, those points in which the numerator or denominator equals zero. Divide the number line into intervals separated by the critical points.

– Analyze each factor to determine where it is negative, zero or positive.

точки на числовой оси, в которых множители меняют свои знаки. Пометьте интервалы знаками “+” или “-“. Множители, не принимающие отрицательных значений, можно не принимать в расчет при условии, что точки неопределенности нанесены на числовую ось.

– Выберите интервалы, удовлетворяющие требованиям неравенства.

Если неравенство нестрогое, то следует учесть все точки, удовлетворяющие равенству.

– Запишите ответ в виде множества (или объединения множеств), в виде интервала (объединения интервалов) или в виде схематического графика на числовой оси.

Помните, что нельзя умножать обе части неравенства на выражение, знак которого неизвестен или может изменяться.

### 3.3. Квадратные уравнения

**Задачи 31 – 40:** Выделить полный квадрат

31)  $x^2 - 2x + 1,$

33)  $x^2 + 6x + 5,$

35)  $4x^2 + 4x + 1,$

37)  $(x - 2)^2 + 3x - 5,$

39)  $x(x - 2) - 8x + 9,$

**Примеры:**

- $x^2 - 6x + 10 = x^2 - 2 \cdot 3x + 3^2 - 3^2 + 10 = (x - 3)^2 + 1,$

- $25x^2 + 40x - 9 = (5x)^2 + 2 \cdot 5x \cdot 4 + 4^2 - 4^2 - 9 = (5x + 4)^2 - 25.$

Mark each point on the line where the factor changes its sign. Label the intervals with the signs “+” or a “-“.

If some factor is never negative, it may be omitted in the chart providing you record the value of  $x$  that makes the expression zero or undefined on the number line.

– Select the intervals that satisfy the requirement of the inequality.

– Use the chart to answer the question asked.

If the inequality problem also involves the equality condition, select the appropriate critical points that satisfy given equation. Usually, these are the values of  $x$  which make the numerator equal to zero.

Write your answer in the form of a set (or union of sets), or in the interval notation (or union of intervals), or a graph on the number line. Remember that you should not multiply both sides of an inequality by an expression that contains an unknown or can change a sign.

### Quadratic Equations

**Problems 31 - 40:** Complete the perfect square

32)  $x^2 - 2x + 5,$

34)  $9 - 8x - x^2,$

36)  $9x^2 + 6x - 3,$

38)  $(x + 3)^2 - 2x - 30,$

40)  $3x(3x - 2) - 6x + 5.$

**Examples:**

**Решение/ Solution:**

31)  $x^2 - 2x + 1 =$

32)  $x^2 - 2x + 5 =$

33)  $x^2 + 6x + 5 =$

34)  $9 - 8x - x^2 =$

35)  $4x^2 + 4x + 1 =$

36)  $9x^2 + 6x - 3 =$

37)  $(x - 2)^2 + 3x - 5 =$

38)  $(x + 3)^2 - 2x - 30 =$

39)  $x(x - 2) - 8x + 9 =$

40)  $3x(3x - 2) - 6x + 5 =$

**Задачи 41 - 50:** Решить следующие квадратные уравнения:

**Problems 41 - 50:** Solve the following quadratic equations:

41)  $x^2 - 2x - 3 = 0,$

42)  $x^2 + 5x - 6 = 0,$

43)  $x^2 + 6x + 9 = 0,$

44)  $x^2 - 2x + 1 = 0,$

45)  $x^2 + 6x + 5 = 0,$

46)  $9 - 8x - x^2 = 0,$

47)  $9x^2 + 6x - 3 = 0,$

48)  $(x + 3)^2 - 2x - 30 = 0,$

49)  $x^2 + 7x + 10 = 0,$

50)  $3x^2 + 8x + 4 = 0.$

**Решение/ Solution:**

41)  $x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow$

42)  $x^2 + 5x - 6 = 0 \Rightarrow$

43)  $x^2 + 6x + 9 = 0 \Rightarrow$

44)  $x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow$

45)  $x^2 + 6x + 5 = 0 \Rightarrow$

46)  $9 - 8x - x^2 = 0 \Rightarrow$

47)  $9x^2 + 6x - 3 = 0 \Rightarrow$

48)  $(x + 3)^2 - 2x - 30 = 0 \Rightarrow$

49)  $x^2 + 7x + 10 = 0 \Rightarrow$

50)  $3x^2 + 8x + 4 = 0 \Rightarrow$

**Подсказки:** Квадратное уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0$$

решается любым из следующих методов:

- выделением полного квадрата;
- применением формулы корней квадратного уравнения;
- разложением на множители.

Формула корней квадратного уравнения имеет следующий вид:

**Hints:** Quadratic equation

$$ax^2 + bx + c = 0$$

can be solved using any of the following methods:

- completing the perfect square;
- applying the quadratic formula;
- factoring.

The quadratic formula has the following form:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Корни квадратного уравнения

$$x^2 + bx + c = 0$$

можно также найти с помощью формул

$$x_1 x_2 = c,$$

The roots of the quadratic equation

$$x^2 + bx + c = 0$$

can be also found by using the below formulas:

$$x_1 + x_2 = -b.$$

### 3.4. Квадратные неравенства

### Quadratic Inequalities

**Задачи 51 – 60:** Решите квадратные неравенства. Ответы представьте в схематическом виде на числовой оси.

**Problems 51 – 60:** Solve the quadratic inequalities. Write your answers in the form of graphs on the number line.

51)  $x^2 - 2x - 3 < 0,$

52)  $x^2 - 2x - 3 \geq 0,$

53)  $x^2 + 5x - 6 > 0,$

54)  $x^2 - 7x + 12 \geq 0,$

55)  $x^2 + 2x - 8 \leq 0,$

56)  $x^2 + 6x + 9 < 0,$

57)  $x^2 - 10x + 25 \leq 0,$

58)  $x^2 - 8x + 16 > 0,$

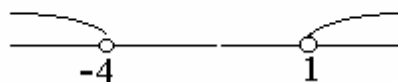
59)  $x(x + 9) > 5x + 5,$

60)  $x(x - 3) < 9x + 13.$

**Пример / Example:**  $x^2 + 3x - 4 > 0.$

$$x^2 + 3x - 4 = 0 \Rightarrow x_1 = -4, x_2 = 1.$$

$$\{x \mid x < -4\} \cup \{x \mid x > 1\}$$



**Решение/ Solution:**

51)  $x^2 - 2x - 3 < 0,$

$x_1 =$

$x_2 =$



52)  $x^2 - 2x - 3 \geq 0$

$x_1 =$

$x_2 =$



53)  $x^2 + 5x - 6 > 0$

$x_1 =$

$x_2 =$



54)  $x^2 - 7x + 12 \geq 0$

$x_1 =$

$x_2 =$



55)  $x^2 + 2x - 8 \leq 0$

$x_1 =$

$x_2 =$



56)  $x^2 + 6x + 9 < 0$

$x_1 =$

$x_2 =$



57)  $x^2 - 10x + 25 \leq 0$

$x_1 =$

$x_2 =$



58)  $x^2 - 8x + 16 > 0$

$x_1 =$

$x_2 =$



59)  $x(x + 9) > 5x + 5$

$x_1 =$

$x_2 =$



60)  $x(x - 3) < 9x + 13$

$x_1 =$

$x_2 =$



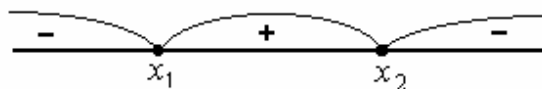
**Подсказки:** Чтобы решить квадратное неравенство, нужно сначала решить соответствующее квадратное уравнение. Для нахождения множества решений неравенства полезно использовать числовую ось:

**Hints:** To solve the quadratic inequality it is necessary, first, to solve the corresponding quadratic equation. Then it is helpful to use the number line to find the solution set of the inequality:

$$ax^2 + bx + c \quad (a > 0)$$



$$ax^2 + bx + c \quad (a < 0)$$





**3.5. ОТВЕТЫ**

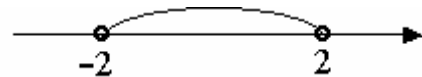
**Answers**

**Задачи 1– 10 / Problems 1 - 10:**

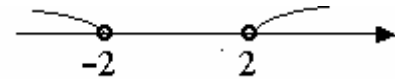
- 1)  $|x| = 2 \Rightarrow x = \pm 2.$
- 2)  $|x| = x \Rightarrow x \geq 0.$
- 3)  $|x| = -x \Rightarrow x \leq 0.$
- 4)  $|x - 3| = 8 \Rightarrow x_1 = -5, \quad x_2 = 11.$
- 5)  $|x + 1| = x + 1 \Rightarrow x \geq -1.$
- 6)  $|x + 1| = x + 2 \Rightarrow x = -3/2.$
- 7)  $|5x + 2| = 3 - x \Rightarrow x_1 = 1/6, \quad x_2 = -5/4.$
- 8)  $|x - 9| = 1 - 4x \Rightarrow x = -8/3.$
- 9)  $|3x + 20| = 5x - 4 \Rightarrow x = 12.$
- 10)  $|1 - x| = 3x - 2 \Rightarrow x = 3/4.$

**Задачи 11 – 20 / Problems 11 - 20:**

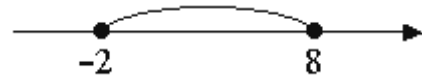
11)  $|x| < 2 \Rightarrow -2 < x < 2.$



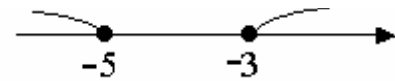
12)  $|x| > 2 \Rightarrow \{x | x < -2\} \cup \{x | x > 2\}.$



13)  $|x - 3| \leq 5 \Rightarrow -2 \leq x \leq 8.$

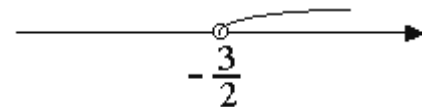


14)  $|x + 4| \geq 1 \Rightarrow \{x | x \leq -5\} \cup \{x | x \geq -3\}.$

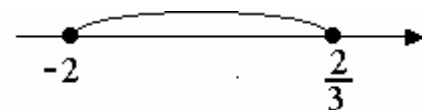


15)  $|x| \geq -x \Rightarrow -\infty < x < \infty.$

16)  $|x + 1| < x + 2 \Rightarrow x > -3/2.$

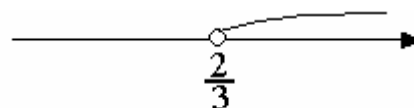


17)  $|5x + 2| \leq 6 - x \Rightarrow -2 \leq x \leq 2/3.$

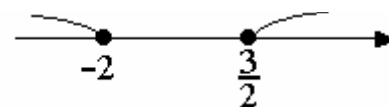


18)  $|4x + 5| > 4x + 1 \Rightarrow -\infty < x < \infty.$

$$19) |3 - x| > 2x + 1 \Rightarrow x < 2/3.$$



$$20) |3x - 1| \geq 5 - x \Rightarrow \{x | x \leq -2\} \cup \{x | x \geq 3/2\}.$$



**Задачи 21– 30 / Problems 21 - 30:**

$$21) x(x+1) > 0 \Rightarrow \{x | x < -1\} \cup \{x | x > 0\}.$$

$$22) x^3(x+1)^7 > 0 \Rightarrow \{x | x < -1\} \cup \{x | x > 0\}.$$

$$23) \frac{x+5}{x-3} > 0 \Rightarrow (x+5)(x-3) > 0 \Rightarrow \{x | x < -5\} \cup \{x | x > 3\}.$$

$$24) \frac{(x+2)(x-1)}{x+4} < 0 \Rightarrow (x+4)(x+2)(x-1) < 0 \Rightarrow \{x | x < -4\} \cup \{x | -2 < x < 1\}.$$

$$25) \frac{(x+2)(x-1)}{x+4} < x-3 \Rightarrow \frac{10}{x+4} < 0 \Rightarrow (x+4) < 0 \Rightarrow x < -4.$$

$$26) \frac{x+1}{x-2} < x+1 \Rightarrow \frac{(x+1)(3-x)}{x-2} < 0 \Rightarrow (x+1)(x-2)(x-3) > 0 \Rightarrow \{x | -1 < x < 2\} \cup \{x | 3 < x\}.$$

$$27) \frac{x-4}{x-1} > x-4 \Rightarrow \frac{(x-4)(2-x)}{x-1} > 0 \Rightarrow (x-1)(x-2)(x-4) < 0 \Rightarrow \{x | x < 1\} \cup \{x | 2 < x < 4\}.$$

$$28) \frac{(x-3)^2 x}{x+5} \geq 0 \Rightarrow \frac{x}{x+5} \geq 0 \Rightarrow \{x | x < -5\} \cup \{x | 0 \leq x\}.$$

$$29) \frac{(x-7)^3 x^2}{x+1} \geq 0 \Rightarrow \frac{x-7}{x+1} \geq 0 \Rightarrow \{x | x < -1\} \cup \{x | 7 \leq x\}.$$

$$30) \frac{(x-1)(x-2)^2(x-4)}{x^3} \leq 0 \Rightarrow \frac{(x-1)(x-4)}{x} \leq 0 \Rightarrow \{x | x < 0\} \cup \{x | 4 \leq x\}.$$

**Задачи 31– 40 / Problems 31 - 40:**

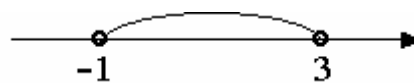
- 31)  $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$ .  
 32)  $x^2 - 2x + 5 = (x - 1)^2 + 4$ .  
 33)  $x^2 + 6x + 5 = (x + 3)^2 - 4$ .  
 34)  $9 - 8x - x^2 = 25 - (x + 4)^2$ .  
 35)  $4x^2 + 4x + 1 = (2x + 1)^2$ .  
 36)  $9x^2 + 6x - 3 = (3x + 1)^2 - 4$ .  
 37)  $(x - 2)^2 + 3x - 5 = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{5}{4}$ .  
 38)  $(x + 3)^2 - 2x - 30 = (x + 2)^2 - 25$ .  
 39)  $x(x - 2) - 8x + 9 = (x - 5)^2 - 16$ .  
 40)  $3x(3x - 2) - 6x + 5 = (3x - 2)^2 + 1$ .

**Задачи 41– 50 / Problems 41 - 50:**

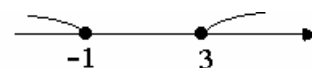
- 41)  $x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 3$ .  
 42)  $x^2 + 5x - 6 = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = -6$ .  
 43)  $x^2 + 6x + 9 = 0 \Rightarrow x = -3$ .  
 44)  $x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ .  
 45)  $x^2 + 6x + 5 = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = -5$ .  
 46)  $9 - 8x - x^2 = 0 \Rightarrow x_1 = -9, x_2 = 1$ .  
 47)  $9x^2 + 6x - 3 = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = \frac{1}{3}$ .  
 48)  $(x + 3)^2 - 2x - 30 = 0 \Rightarrow x_1 = -7, x_2 = 3$ .  
 49)  $x^2 + 7x + 10 = 0 \Rightarrow x_1 = -5, x_2 = -2$ .  
 50)  $3x^2 + 8x + 4 = 0 \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = -\frac{2}{3}$ .

**Задачи 51– 60 / Problems 51 - 60:**

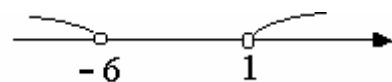
51)  $x^2 - 2x - 3 < 0$



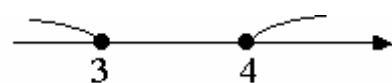
52)  $x^2 - 2x - 3 \geq 0$



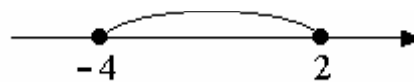
53)  $x^2 + 5x - 6 > 0$



54)  $x^2 - 7x + 12 \geq 0$

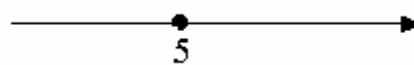


55)  $x^2 + 2x - 8 \leq 0$

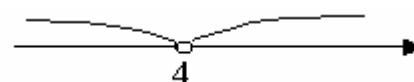


56)  $x^2 + 6x + 9 < 0 \Rightarrow x \in \emptyset.$

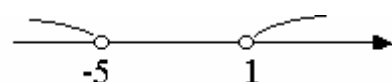
57)  $x^2 - 10x + 25 \leq 0$



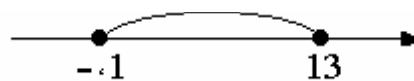
58)  $x^2 - 8x + 16 > 0$



59)  $x(x + 9) > 5x + 5$



60)  $x(x - 3) < 9x + 13$



# 1. Показательные и логарифмические уравнения и неравенства

## 4.1. Показательные уравнения

**Задачи 1 – 10:** Решить уравнения

- 1)  $7^{5-x} = 1$ ,
- 3)  $3^{2x+5} = 27$ ,
- 5)  $\left(\frac{2}{5}\right)^{7-2x} = \frac{25}{4}$ ,
- 7)  $5^{|x|-2} = 125$ ,
- 9)  $36^x - 4 \cdot 6^x - 12 = 0$ ,

**Решение/ Solution:**

$$1) \quad 7^{5-x} = 1 \Rightarrow$$

**Проверка / Check-up:**

$$2) \quad 3^{4x-1} = 3 \Rightarrow$$

**Проверка / Check-up:**

$$3) \quad 3^{2x+5} = 27 \Rightarrow$$

**Проверка / Check-up:**

$$4) \quad 4^{9-6x} = 2 \Rightarrow$$

**Проверка / Check-up:**

$$5) \quad \left(\frac{2}{5}\right)^{7-2x} = \frac{25}{4} \Rightarrow$$

# Exponential and Logarithmic Equations and Inequalities

## Exponential Equations

**Problems 1 - 10:** Solve the equations

- 2)  $3^{4x-1} = 3$ ,
- 4)  $4^{9-6x} = 2$ ,
- 6)  $\left(\frac{1}{4}\right)^{x^2+4x+1} = 64$ ,
- 8)  $4^{7x+6} = 8^{5-x}$ ,
- 10)  $4^{2x} + 6 \cdot 12^x - 7 \cdot 3^{2x} = 0$ .

**Проверка / Check-up:**

$$6) \left(\frac{1}{4}\right)^{x^2+4x+1} = 64 \Rightarrow$$

**Проверка / Check-up:**

$$7) 5^{|x|-2} = 125 \Rightarrow$$

**Проверка / Check-up:**

$$8) 4^{7x+6} = 8^{5-x} \Rightarrow$$

**Проверка / Check-up:**

$$9) 36^x - 4 \cdot 6^x - 12 = 0 \Rightarrow$$

**Проверка / Check-up:**

$$10) 4^{2x} + 6 \cdot 12^x - 7 \cdot 3^{2x} = 0 \Rightarrow$$

**Проверка / Check-up:****Подсказки:**

Используйте следующие свойства показательных выражений:

**Hints:**

Use the following properties of exponentials:

$$a^b = 1 \Rightarrow b = 0.$$

$$a^b = a^c \Rightarrow b = c.$$

Для решения Задачи 9 используйте подстановку  $y = 6^x$ .

Чтобы решить Задачу 10, сначала разделите обе части уравнения на  $3^{2x}$ , а затем сделайте подстановку

To solve Problem 9 use the substitution  $y = 6^x$ .

To solve Problem 10, divide both sides of the equation by the term  $3^{2x}$ , then use the substitution

$$y = \left(\frac{4}{3}\right)^x.$$

## 4.2. Логарифмические Уравнения

**Задачи 11 – 20:** Решить следующие уравнения:

11)  $\log_3 x = 2,$

13)  $\log_5(x^2 - 2x + 6/5) = -1,$

15)  $\log_2(2^x - 8) = 3,$

17)  $\log_5 x = 2\log_5 3 + 4\log_{25} 7,$

19)  $x^{\lg x} = 10,$

$$y = \left(\frac{4}{3}\right)^x.$$

## Logarithmic Equations

**Problems 11 – 20:** Solve the following equations:

12)  $\lg x^2 = 4,$

14)  $\log_4 2^{-x} = 1,$

16)  $\lg(\lg x) + \lg(\lg x^2 - 1) = 1,$

18)  $\log_2(3\log_3(\log_2 x)) = 0,$

20)  $(10^{\lg x})^{\lg x} = 10000.$

**Решение/ Solution:**

11)  $\log_3 x = 2 \Rightarrow$

**Проверка / Check-up:**

12)  $\lg x^2 = 4 \Rightarrow$

**Проверка / Check-up:**

13)  $\log_5(x^2 - 2x + 6/5) = -1 \Rightarrow$

**Проверка / Check-up:**

14)  $\log_4 2^{-x} = 1 \Rightarrow$

**Проверка / Check-up:**

15)  $\log_2(2^x - 8) = 3 \Rightarrow$

**Проверка / Check-up:**

16)  $\lg(\lg x) + \lg(\lg x^2 - 1) = 1 \Rightarrow$

**Проверка / Check-up:**

$$17) \log_5 x = 2\log_5 3 + 4\log_{25} 7 \Rightarrow$$

**Проверка / Check-up:**

$$18) \log_2(3\log_3(\log_2 x)) = 0 \Rightarrow$$

**Проверка / Check-up:**

$$19) x^{\lg x} = 10 \Rightarrow$$

**Проверка / Check-up:**

$$20) (10^{\lg x})^{\lg x} = 10000 \Rightarrow$$

**Проверка / Check-up:****Подсказка:**

Используйте логарифмические тождества. (См. сводную таблицу наиболее важных формул).

### 4.3. Показательные и логарифмические неравенства

**Задачи 21 – 30:** Решить следующие неравенства:

$$21) 3^{2x+5} < 27,$$

$$23) 3^{2x+5} \leq 3^{x+2} + 2,$$

$$25) \log_5(x^2 - 3) > 0,$$

$$27) \lg(\log_2 x) > 1,$$

**Hint:**

Use logarithmic identities. (See Summary Table of the Most Important Formulas).

### Exponential and Logarithmic Inequalities

**Problems 21 – 30:** Solve the following inequalities:

$$22) 4^{9-6x} > 2,$$

$$24) \left(\frac{2}{5}\right)^{7-2x} \leq \frac{25}{4},$$

$$26) \log_3(x^2 - 6) < 1,$$

$$28) \log_5(\log_2 x) > 0,$$



$$29) \log_{\frac{1}{2}} \log_3 \frac{3x}{x-2} < 0,$$

$$30) \log_x (x+2) < 0.$$

**Решение/ Solution:**

$$21) 3^{2x+5} < 27 \Rightarrow$$

$$22) 4^{9-6x} > 2 \Rightarrow$$

$$23) 3^{2x+5} \leq 3^{x+2} + 2 \Rightarrow$$

$$24) \left(\frac{2}{5}\right)^{7-2x} \leq \frac{25}{4} \Rightarrow$$

$$25) \log_5 (x^2 - 3) > 0 \Rightarrow$$

$$26) \log_3 (x^2 - 6) < 1 \Rightarrow$$

$$27) \lg(\log_2 x) > 1 \Rightarrow$$

$$28) \log_5 (\log_2 x) > 0 \Rightarrow$$

$$29) \log_{\frac{1}{2}} \log_3 \frac{3x}{x-2} < 0 \Rightarrow$$

30)  $\log_x(x+2) < 0 \Rightarrow$

**4.4. Полезные свойства  
неравенств****Useful Properties of  
Inequalities**

$\left. \begin{array}{l} a^b > a^c \\ a > 1 \end{array} \right\}$	$\Rightarrow$	$b > c$
$\left. \begin{array}{l} a^b > a^c \\ a < 1 \end{array} \right\}$	$\Rightarrow$	$b < c$
$\left. \begin{array}{l} \log_a b > \log_a c \\ a > 1 \end{array} \right\}$	$\Rightarrow$	$b > c$
$\left. \begin{array}{l} \log_a b > \log_a c \\ 0 < a < 1 \end{array} \right\}$	$\Rightarrow$	$b < c,$
$\left. \begin{array}{l} a^b > 1 \\ a > 1 \end{array} \right\}$	$\Rightarrow$	$b > 0$
$\left. \begin{array}{l} a^b > 1 \\ a < 1 \end{array} \right\}$	$\Rightarrow$	$b < 0$
$\left. \begin{array}{l} \log_a b > 0 \\ a > 1 \end{array} \right\}$	$\Rightarrow$	$b > 1$
$\left. \begin{array}{l} \log_a b > 0 \\ 0 < a < 1 \end{array} \right\}$	$\Rightarrow$	$0 < b < 1$

### 4.5. ОТВЕТЫ | Answers

#### Задачи 1– 10 / Problems 1 - 10:

- 1)  $7^{5-x} = 1 \Rightarrow x = 5.$
- 2)  $3^{4x-1} = 3, \Rightarrow x = 1/2.$
- 3)  $3^{2x+5} = 27, \Rightarrow x = -1.$
- 4)  $4^{9-6x} = 2, \Rightarrow x = 17/12.$
- 5)  $\left(\frac{2}{5}\right)^{7-2x} = \frac{25}{4}, \Rightarrow x = 9/2.$
- 6)  $\left(\frac{1}{4}\right)^{x^2+4x+1} = 64, \Rightarrow x = -2.$
- 7)  $5^{|x|-2} = 125, \Rightarrow x = \pm 5.$
- 8)  $4^{7x+6} = 8^{5-x}, \Rightarrow x = 3/17.$
- 9)  $36^x - 4 \cdot 6^x - 12 = 0, \Rightarrow x = 1.$
- 10)  $4^{2x} + 6 \cdot 12^x - 7 \cdot 3^{2x} = 0. \Rightarrow x = 0.$

#### Задачи 11– 20 / Problems 11 - 20:

- 11)  $\log_3 x = 2 \Rightarrow x = 9.$
- 12)  $\lg x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 100.$
- 13)  $\log_5(x^2 - 2x + 6/5) = -1 \Rightarrow x = 1.$
- 14)  $\log_4 2^{-x} = 1 \Rightarrow x = -2.$
- 15)  $\log_2(2^x - 8) = 3 \Rightarrow x = 4.$
- 16)  $\lg(\lg x) + \lg(\lg x^2 - 1) = 1 \Rightarrow \lg x = \frac{5}{2} \Rightarrow x = 10^{\frac{5}{2}}.$
- 17)  $\log_5 x = 2\log_5 3 + 4\log_{25} 7 \Rightarrow x = 441.$
- 18)  $\log_2(3\log_3(\log_2 x)) = 0 \Rightarrow x = 2^{\sqrt[3]{3}}.$
- 19)  $x^{\lg x} = 10 \Rightarrow \lg x = \pm 1 \Rightarrow x_1 = 10, x_2 = 0.1$
- 20)  $(10^{\lg x})^{\lg x} = 10000 \Rightarrow x^{\lg x} = 10000 \Rightarrow \lg x = \pm 4 \Rightarrow x_1 = 10000, x_2 = 0.0001.$

**Задачи 21– 30 / Problems 21 - 30:**

- 21)  $3^{2x+5} < 27 \Rightarrow x < -1.$
- 22)  $4^{9-6x} > 2 \Rightarrow x < 17/12.$
- 23)  $3^{2x+5} \leq 3^{x+2} + 2 \Rightarrow x \leq -2.$
- 24)  $\left(\frac{2}{5}\right)^{7-2x} \leq \frac{25}{4} \Rightarrow x \leq 9/2.$
- 25)  $\log_5(x^2 - 3) > 0 \Rightarrow |x| > 2.$
- 26)  $\log_3(x^2 - 6) < 1 \Rightarrow \sqrt{6} < |x| < 3.$
- 27)  $\lg(\log_2 x) > 1 \Rightarrow x > 1024.$
- 28)  $\log_5(\log_2 x) > 0 \Rightarrow x > 2.$
- 29)  $\log_{\frac{1}{2}} \log_3 \frac{3x}{x-2} < 0 \Rightarrow x > 2.$
- 30)  $\log_x(x+2) < 0 \Rightarrow 0 < x < 1.$

## Список литературы | References

1. V.V. Konev, Mathematics: Preparatory Course. Textbook. TPU Press, 2009, 104p.
2. V.V. Konev, Mathematics: Algebra, Exercise Book. TPU Press, 2009, 60p.
3. V.V. Konev, Mathematics: Geometry and Trigonometry, Exercise Book. TPU Press, 2009, 34p.
4. V.V. Konev, The Elements of Mathematics. Textbook. TPU Press, 2009, 140p.

Valery V. Konev, Associate Professor of the Higher Mathematics Department,  
TPU, Ph.D.

## The Elements of Mathematics

### Workbook Part 1

Editor: Victor A. Kilin, Professor of the Higher Mathematics Department, TPU,  
D.Sc.