ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«**ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ**»

V.V. Konev

THE ELEMENTS OF MATHEMATICS

TextBook

Рекомендовано в качестве учебного пособия
Редакционно-издательским советом
Томского политехнического университета

Издательство
Томского политехнического университета
2009

UDC 517

V.V. Konev. The Elements of Mathematics. Textbook. The Second Edition. Tomsk: TPU Press, 2001, 140 pp.

The textbook consists of 9 chapters devoted to the fundamental principles of Algebra and the elements of Calculus. The basic concepts of Mathematics are explained and illustrated by figures and examples.

The textbook can be helpful for students who want to understand and be able to use standard algebraic techniques, solve equations and inequalities, analyze the behavior of a function, operate with real and complex numbers, and so on. It is recommended as a Preparatory Course of Mathematics for English and Russian speaking students.
.

Reviewed by: V.A. Kilin, Professor of the Higher Mathematics Department, TPU, D.Sc.

PREFACE

"The Great Architect was the Mathematician"

Every student must be well grounded in mathematics to study special engineering sciences. Physicists need mathematics in order to express physical laws and explain the beauty of physical laws.

Mathematics is a language but not only that. Mathematics is language and logic together. It concentrates the results of the exact thinking of the most eminent persons. The well-known English philosopher Bacon said that it is impossible to study any science and even to discover one's own ignorance without a deep understanding of mathematics. Mathematics helps us better to understand the unity of different approaches to the same problem.

If mathematicians say "The statement X implies the statement Y", then it does not matter what they speak about. Because mathematics deals with the structure of argumentation and operates with abstract conceptions. Rigorous proofs are the main purpose of mathematics. The results can be used for solving different real problems of engineering sciences, physics, economy, medicine, and so on.

This textbook is intended mainly for foreign students who have already studied basic mathematics. It concentrates on those mathematical methods which students need to practice using but which often cause difficulty. Students may find the book useful to broaden and methodize a knowledge of the elements of mathematics. It can be also used by teachers in the classroom with a group of students.

Each part of the textbook contains definitions of basic mathematical terms and reading formulas. All important concepts of mathematics are explained and illustrated by using examples and figures. There are exercises at each point. The mathematical language used is as simple as possible.

The textbook covers the topics to be studied during the preparatory course.

The author welcomes your suggestions for improvements of future editions of this textbook.

Содержание

Contents

1. Вещественные числа

1.1. Арифметические операции

Арифметическими операциями над вещественными числами являются сложение, вычитание, умножение и деление. Операции сложения и вычитания, а также умножения и деления являются взаимосвязанными.

The Real Number System

Arithmetic operations

The arithmetic operations associated with real numbers are addition, subtraction, multiplication, and division. The operations of addition and subtraction are related, as are the operations of multiplication and division.

Таблица 1			**Table 1**		
Название символа	Операция	Символ	Sign	Designation	Operation
Плюс	Сложение	+		Plus	Addition
Минус	Вычитание	-		Minus	Subtraction
Точка Крест	Умножение	· ×		Multiplication	Multiplication
Двоеточие Черта	Деление	: /		Division Fraction bar	Division

Сложения двух чисел a и b записывается в виде

The **addition** of two numbers a and b is denoted by

$$a+b=c,$$

где c - результат сложения a и b. При этом a и b называются **слагаемыми**, а результат сложения – **суммой** a и b.

Вычитание двух чисел a и b описывается формулой

where c is the result of the addition of a and b. Both numbers, a and b, are called **addends**, and c is the **sum** of a and b.

The **subtraction** of two numbers a and b is denoted by

$$a-b=c,$$

где c - результат вычитания b из a. Число a является **вычитаемым,** а результат вычитания c называют **разностью** между a и b,

Операцию вычитания можно свести к операции сложения:

where c is the result of the subtraction of b from a. The result c is also called the **difference** between a and b, and a is known as the **subtrahend**.

The subtraction of numbers can be defined in terms of addition:

$$a-b=a+(-b)=c.$$

Таким образом, чтобы вычесть b из a, нужно к a прибавить b, взятое с обратным знаком. Это означает, что сложение и вычитание являются взаимно обратными операциями.

Легко проверить правильность произведенного вычитания, поскольку разность $a - b$ это такое число c, к которому нужно прибавить b, чтобы получить a:

Thus, in order to subtract b from a it is necessary to add the negative of b to a. This means that addition and subtraction are inverse operations to each other.

One can easily check whether the result of the subtraction is true. Indeed, by the definition, the difference $a - b$ is the number c that by which the number b is added to produce a:

$$c = a - b \quad \Rightarrow \quad a = b + c.$$

Умножение двух чисел a и b обозначается символически как

The **multiplication** of two numbers a and b is denoted by

$$ab = c,$$

где c - результат умножения a и b. При этом числа a и b называются **сомножителями**, а результат умножения – их **произведением**.

Операция **деления** чисел основывается на операции их умножения. Пусть даны любые числа a и b. Тогда

where c is the result of the multiplication of the numbers a and b. Both numbers, a and b, are called **factors** (or multipliers), and c is the **product** of a and b.

The operation of **division** of two numbers is derived from the operation of multiplication. Given any two real numbers a and b,

$$\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b} = c,$$

где c - результат деления a на b. Таким образом, чтобы разделить a на b, нужно a умножить на число, обратное к b. Это означает, что умножение и деление являются обратными операциями по отношению друг к другу.

В вышеприведенной формуле a называется **делимым**, b – **делителем**, а результат c – **частным** от деления a на b.

Правильность произведенного

where c is the result of the division of a by b.

Thus, to divide a by b, the inverse of b is multiplied by a. This means that multiplication and division are inverse operations to each other.

In the above formula, a is called the dividend, b is the divisor, and c is the quotient of a and b.

One can use multiplication to test whether the result of the division is деления проверяется умножением, так как частное от деления a на b это такое число c, которое нужно умножить на b, чтобы получить a:

true, because the quotient of a and b is a number c by which the number b is multiplied to produce a:

$$c = \frac{a}{b} \qquad \Rightarrow \qquad a = b\,c.$$

1.2. Чтение математических формул

Reading of Mathematical Formulas

	Таблица 2	Table 2	
Чтение формул	Формулы	Formulas	Reading of Formulas
• a плюс b. • Сумма a и b.	$a+b$		• a plus b. • The sum of a and b.
• a минус b. • Разность между a и b.	$a-b$		• a minus b. • The difference between a and b.
Плюс или минус. a плюс или минус b.	$\pm$ $a \pm b$		Plus or minus. a plus or minus b.
Минус или плюс. a минус или плюс b.	$\mp$ $a \mp b$		Minus or plus. a minus or plus b.
• ab • a умноженное на b. • Произведение a и b.	ab $a \cdot b$		• ab • a times b. • a multiplied by b. • The product of a and b.
• a деленное на b. • Частное от деления a на b. • Дробь a на b. • Отношение a к b.	$a:b$ $\frac{a}{b}$ a/b		• a over b. • a divided by b. • The quotient of a and b. • The ratio of a to b.
ab деленное на cd.	$\frac{ab}{cd}$		a times b over c times d.
Одна вторая.	$\frac{1}{2}$		One half.
Одна третья.	$\frac{1}{3}$		One third.

Одна четвертая.	$1/4$	One quarter.
Одна n-тая.	$1/n$	One *nth*. One over *n*.
Десятичная точка.	.	Decimal point.
Две целых (и) семьдесят девять сотых.	2.79	Two point seventy nine.
Круглые скобки.	( )	Parentheses.
a в скобках.	(a)	• a in parentheses. • parenthesis a parenthesis. • parenthesis (open) a parenthesis (close). • (initial) parenthesis a (final) parenthesis.
• a скобка открывается b плюс c скобка закрывается. • a умножить на сумму b и c.	$a(b+c)$	• a parenthesis b plus c parenthesis. • a parenthesis open b plus c parenthesis close.
A разделить на b, умноженное на c плюс d в скобках.	$\frac{a}{b(c+d)}$	a over b times c plus d in parentheses.
• В скобках a разделить на b, умножить на c и плюс d. • Открыть скобку, a разделить на b, полученную дробь умножить на c плюс d, закрыть скобку.	$(\frac{a}{b}c+d)$	• a over b times c plus d in parentheses. • Parenthesis, a over b, this fraction multiplied by c plus d, parenthesis.
Квадратные скобки. a в квадратных скобках.	[ ] $[a]$	Brackets. a in brackets.
Квадратная скобка открывается, a плюс b, квадратная скобка закрывается, умножить на c.	$[a + b]\ c$	Bracket (open) a plus b bracket (close) multiplied by c.

Фигурные скобки.	{ }	Braces.
Фигурная скобка открывается, a плюс b, фигурная скобка закрывается, умножить на c.	$\{a + b\}\ c$	Brace (open) a plus b brace (close) multiplied by c.
a равно b.	$a = b$	• a equals b. • a is equal to b.
a не равно b.	$a \neq b$	a is not equal to b.
a тождественно равно b.	$a \equiv b$	a is identical with b.
a приблизительно равно b.	$a \approx b$	• a is approximately equal to b. • a is nearly equal to b.
a меньше b. a больше b.	$a < b$ $a > b$	a is less than b. a is greater than b.
Не больше (меньше или равно).	$\leq$	Less or equal to.
• a меньше или равно b. • a не больше b.	$a \leq b$	• a is less than or equal to b. • a is not greater than b.
Не меньше (больше или равно).	$\geq$	Greater or equal to.
• a больше или равно b. • a не меньше b.	$a \geq b$	• a is greater than or equal to b. • a is not less than b.
a много меньше b.	$a << b$	a is much less than b.
a много больше b.	$a >> b$	a is much greater than b.
Номер. Номер 5. Натуральное число. Натуральные числа.	# #5 Natural # Natural #s	Number. Number five. Natural number. Natural numbers.
Стрелка.	$\rightarrow$	Arrow.
И так далее (многоточие).	$\cdots$	Leader.
Один плюс два, плюс три и так далее.	1+2+3+…	One plus two, plus three point, point, point.

• Означает. • Влечет за собой.	$\Rightarrow$	This implies.
• Равенство $a=b$ влечет за собой равенство $b=a$. • Если $a=b$, то $b=a$. • $a=b$ означает, что $b=a$. • Из равенства $a=b$ следует равенство $b=a$.	$a=b \Rightarrow b=a$	• The equality $a=b$ implies $b=a$. • If $a=b$ then $b=a$.

1.3. Основные определения и обозначения

Basic Definitions and Notations

Для наглядного изображения чисел можно использовать числовую ось, которая представляет собой прямую линию с выбранным началом отсчета и масштабом. Началом отсчета служит точка нуль, так что все числа можно сравнивать с нулем.

The set of all numbers can be graphically represented on the real number line, that is, such a straight line, on which the origin and a scale are chosen. The number zero is used as the origin, and so any numbers can be compared with zero.

Те числа, которые больше нуля, называются **положительными**:

Numbers are called **positive** if they are greater than zero:

$$a > 0.$$

Положительным числам соответствуют точки на числовой оси, расположенные справа от нуля. Все положительные числа упорядочены в возрастающем порядке слева направо (с правой стороны от нуля).

All positive numbers are represented by points that lie to the right of the number zero.
All positive numbers are ordered, in ascending order from left to right, to the right side of zero.

Те числа, которые меньше нуля, называются **отрицательными.**

Numbers are called **negative** if they are less than zero.

$$a < 0.$$

Отрицательным числам соответствуют точки на числовой оси, лежащие слева от нуля.

All negative numbers are represented by points to the left of the number zero.

Все отрицательные числа упорядочены в убывающем порядке справа налево (с левой стороны от нуля).

Число нуль отделяет положительные числа от отрицательных и не является ни положительным, ни отрицательным.

All negative integers are ordered, in descending order from right to left, to the left side of zero.

The number zero is an intermediate value between positive and negative numbers. It is neither positive nor negative number.

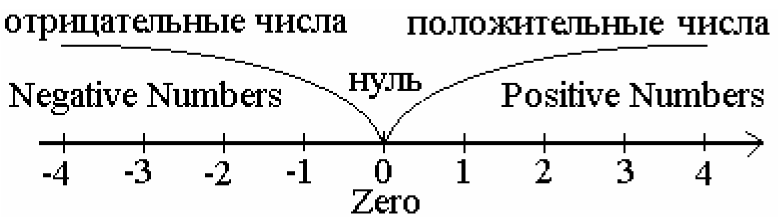


Рис. 1 | Fig. 1

Натуральные числа представляют собой числа вида

Natural numbers are the numbers such as

$$1, 2, 3, 4, \ldots$$

Целые числа это числа вида

Integers are the following numbers:

$$\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Можно сказать и иначе: к целым числам относятся все натуральные числа, натуральные числа со знаком минус, а также число нуль.

Метки на числовой оси, изображенной на Рис.1, соответствуют целым числам, а промежуточные точки – остальным числам.

Множество всех целых чисел можно разбить на два класса: четные и нечетные числа.

Четные числа это такие целые числа, которые делятся на число два без остатка. Так, если n - любое целое число, то число $m = 2n$ является четным.

Целое число m называется

One can also say that the set of integers consists of all natural numbers, the negative of the natural numbers, and the number zero.

If a number is an integer, then its point on the above number line coincides with one of the notches for an integer; otherwise, its point lies between two successive notches.

The set of all integers can be subdivided into the two classes of numbers: either even or odd.

An **even** number is an integer that is divisible by the number two.

If n is any integer, then the number $m = 2n$ is even.

A number m is called an **odd**

нечетным, если число $m/2$ не является целым. Если n - любое целое число, то число $m=2n+1$ является нечетным.

Число называется **рациональным**, если его можно представить в виде отношения целых чисел m и n, где $n \neq 0$.

Все целые числа являются рациональными, так как любое целое число m всегда можно представить в виде отношения целых чисел m и 1.

Кроме того, рациональное число может быть представлено

- либо конечной десятичной дробью, например,

number, if only m is an integer but not $m/2$.

If n is any integer, then the number $m=2n+1$ is odd.

A number is called a **rational** number, if it can be expressed exactly as the quotient of two integers m and n, where $n \neq 0$.

All integers are also rational numbers, because any integer m can be expressed by the quotient of two integers m and 1.

In addition, a rational number can be also represented:

- either by a terminating decimal, for instance,

$$\frac{3}{4} = 0.75;$$

- либо бесконечной периодической дробью, например,

- or a recurring decimal, for example,

$$\frac{15}{11} = 1.3636(36)...$$

Иррациональными числами называются такие числа, которые могут быть представлены в виде бесконечной непериодической десятичной дроби.

Никакое иррациональное число нельзя представить в виде отношения двух целых чисел.

Conversely, **irrational** numbers are the numbers that can be expressed by non-repeating and non-terminating decimals.

Any irrational number is not capable of being expressed as the quotient of two integers.

Примеры иррациональных чисел:

Some **examples** of irrational numbers:

$$\sqrt{2} \approx 1.4142...$$
$$\pi \approx 3.141592...$$
$$e = 2.718281828459045235360287 4...$$

К вещественным числам относятся рациональные и иррациональные числа.

Real numbers are either rational or irrational.

Примеры:

- Число 5 является натуральным. Оно также является положительным, целым, нечетным, рациональным и вещественным числом.
- Рациональное отрицательное число является также вещественным, но не является натуральным. Однако ничего нельзя сказать о том, является ли оно целым числом.

Examples:

- Number 5 is natural. It is also positive, integer, odd, rational, and real.
- A rational and negative number is also real but not natural. However, one can not say whether it is an integer number or not.

Между множеством вещественных чисел и точками числовой оси существует взаимно однозначное соответствие: каждая точка числовой оси соответствует единственному вещественному числу; и обратно - каждое вещественное число соответствует единственной точке числовой оси.

There is a one-to-one correspondence between the set of real numbers and points on the real number line, that is, every point on this line corresponds to a unique real number, and every real number can be paired with a unique point on this number line.

1.4. Свойства вещественных чисел

Математические преобразования алгебраических выражений основаны на следующих свойствах вещественных чисел:

Properties of Real Numbers

Most mathematical manipulations of algebraic expressions are based on the properties of real numbers. All real numbers have the following properties:

I. $a = b \quad \Rightarrow \quad b = a$.

Это свойство означает равноправие правой и левой частей равенства.

This property states equal rights for both sides of an equality.

II. $\begin{cases} a = b \\ c = b \end{cases} \Rightarrow a = c.$

Числа равны между собой, если каждое из них равно одному и тому же числу.

Numbers are equal to each other if they are equal to the same number.

III. $\begin{cases} a = b \\ c = d \end{cases} \Rightarrow a + c = b + d.$

Равенство не нарушится, если к обеим его частям прибавить равные числа.

An equality holds valid if equal numbers are added to both its members.

IV. $\begin{cases} a = b \\ c = d \end{cases} \Rightarrow ac = bd.$

Равенство не нарушится, если обе его части умножить на равные числа.

Свойства III и IV позволяют складывать правые и левые части уравнений, а также умножать обе части уравнений на одинаковые ненулевые множители.

Если $f(a)$ обозначает операцию над числом *a*, приводящую к единственному результату, то справедливо и более общее утверждение:

An equality holds valid if both its sides are multiplied by equal non-zero numbers.

Properties III and IV allow us to add term by term the left and right sides of equations as well as to multiply both sides of an equation by a non-zero factor.

If some operation $f(a)$ with respect to a number a gives a unique result then one can also formulate a more general statement:

$$a = b \Rightarrow f(a) = f(b).$$

V. $a + b = b + a.$

От перестановки мест слагаемых сумма не изменяется.

Это правило называют свойством коммутативности относительно сложения.

Items of a sum can be added in any order.

This rule is called the Commutative Law for Addition.

VI. $ab = ba.$

От перестановки мест сомножителей произведение не изменяется.

Factors can be multiplied in any order.

Это правило известно как свойство коммутативности относительно умножения.

This rule is known as the Commutative Law for Multiplication.

VII. $$a + (b + c) = (a + b) + c = a + b + c\,.$$

Слагаемые можно группировать произвольным образом.

Это правило называется свойством ассоциативности относительно сложения.

Addition items can be combined in any groups.

This property is called the Associative Law for Addition.

VIII. $$a(bc) = (ab)c = abc\,.$$

Сомножители можно объединять в произвольные группы.

Это правило называется свойством ассоциативности относительно умножения.

Factors can be combined in any groups.

This property is called the Associative Law for Multiplication.

IX. $$a(b \pm c) = ab \pm ac\,.$$

Читая это равенство слева направо, мы говорим, что раскрываем скобки.

Читая его справа налево, мы говорим, что выносим общий множитель.

This property allows us to expand an expression.

We can also read the property from right to left as follows:

A common factor can be taken out.

X. $$a + (-a) = -a + a = 0\,.$$

Для любого вещественного числа a существует, и притом единственное, число $-a$, которое в сумме с a дает нуль. Число $-a$ называется обратным к числу a относительно сложения.

For any real number a, there exists a unique number ($-a$) to which the given number is added to produce zero. The number ($-a$) is known as the additive inverse of a.

XI. $$a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1.$$

Для любого вещественного числа a существует, и притом единственное, число $1/a$, которое при умножении на a дает единицу.

For any non-zero real number a, there exists a unique real number $1/a$ by which the given number is multiplied to produce unity.

The number $1/a$ is called the

Числа a и $(1/a)$ являются взаимно обратными относительно умножения. Только число нуль не имеет обратного, так как операция деления на нуль не определена и, следовательно, число нуль не может быть делителем.

XII. Если $ab = 0$, то $a = 0$ или $b = 0$, или a и b равны нулю одновременно.

XIII. Если $ab \neq 0$, то $a \neq 0$ и $b \neq 0$.

XIV. Для любых вещественных чисел a и b выполняется одно и только одно из следующих условий:

$a > b$ (a больше b),
$a = b$ (a равно b),
$a < b$ (a меньше b).

Примеры:

reciprocal (or multiplicative inverse) of a. Only the number zero has no the reciprocal. Division by zero is undefined, that is, the number zero cannot be a divisor.

If $ab = 0$ then at least one of the factors has to be equal to zero.

If $ab \neq 0$ then $a \neq 0$ and $b \neq 0$.

For any real numbers a and b one and only one of the following conditions occurs:

$a > b$ (a is greater than b),
$a = b$ (a is equal to b) or
$a < b$ (a is less than b).

Examples:

- $38 + 43 + 62 = (38 + 62) + 43 = 100 + 43 = 143$.
- $25 \cdot 73 \cdot 4 = (25 \cdot 4) \cdot 73 = 100 \cdot 73 = 7300$.
- $18 \cdot 35 + 82 \cdot 35 = 35 \cdot (18 + 82) = 35 \cdot 100 = 3500$.
- $2 \cdot (7x + 4) - 10x = 14x + 8 - 10x$
  $= (14x - 10x) + 8 = 4x + 8.$
- $5x = 15a \quad \Rightarrow \quad x = 3a$.
- $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x + y) + (x - y) = 5 + 3 \\ (x + y) - (x - y) = 5 - 3 \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{cases} x + y + x - y = 8 \\ x + y - x + y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 8 \\ 2y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$$

1.5. Преобразование слов в формулы | Translating words into formulas

Задача: Сформулировать в виде символьных выражений и уравнений следующие словесные предложения:

Problem: Translate the following written expressions and sentences into symbolic expressions and equations.

1) Сумма пятнадцати и a: | The sum of 15 and a:

$$15 + a.$$

2) Разность между игреком и b: | The difference between y and b:

$$y - b.$$

3) Произведение двенадцати на x: | The product of 12 and x:

$$12x.$$

4) Частное от деления двух на b: | The quotient of 2 and b:

$$2/b.$$

5) Отношение игрека к трем: | The ratio of y to 3:

$$y : 3.$$

6) Число x, уменьшенное на пять: | A number x decreased by 5:

$$x - 5.$$

7) Число b, увеличенное на семь: | A number b increased by 7:

$$b + 7.$$

8) Число c, уменьшенное на семьдесят x: | A number c decreased by 70 times x:

$$c - 70x.$$

9) x больше разности между a и b: | x is greater than the difference between a and b:

$$x > a - b.$$

10) Произведение семнадцати на a меньше b: | The product of 17 and a is less than b:

$$17a < b.$$

11) Сумма c и двух равна трем:	The sum of c and 2 is 3:

$$c + 2 = 3.$$

12) z не меньше чем удвоенная разность между x и y:	z is not less than twice difference between x and y:

$$z \geq x + y.$$

13) Удвоенное a минус девять равняется c:	Twice a minus 9 is equal to c:

$$2a - 9 = c.$$

14) Четверть от z, вычтенная из пяти, равняется десяти:	A quarter of a number z subtracted from 5 equals 10:

$$5 - z/4 = 10.$$

15) Сумма b и d совпадает с удвоенным z:	The sum of b and d is the same as twice z:

$$b + d = 2z.$$

16) Если удвоенное x и плюс пять разделить на два, то получим c минус девять:	If twice x plus 5 is divided by two, the result is c minus 9.

$$(2x + 5)/2 = c - 9.$$

17) Дважды два – четыре:	Twice two makes four:

$$2 \cdot 2 = 4.$$

18) Произведение a на b вдвое больше разности между 7 и c, и вдвое меньше суммы 7 и c:	The product of a and b is twice as large as the difference between 7 and c and twice as small as the sum of 7 and c:

$$ab = 2(7 - c) = (7 + c)/2.$$

1.6. Абсолютные величины

Абсолютная величина любого вещественного числа a обозначается символом $|a|$ и определяется следующей формулой:

Absolute Values

The **absolute value** of a real number a is denoted by the symbol $|a|$ and defined by the following formula:

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Абсолютная величина неотрицательного числа совпадает с самим числом, тогда как абсолютная величина отрицательного числа равна числу, взятому с противоположным знаком.

The absolute value of a non-negative number is the number itself, while the absolute value of a negative number is the negative of the number.

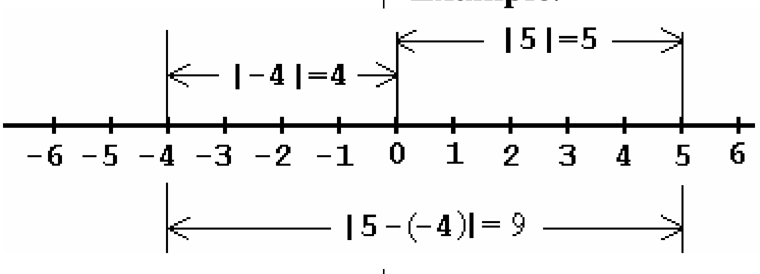
$$|5| = 5, \qquad |-5| = -(-5) = 5, \qquad |0| = 0.$$

Геометрическая интерпретация
Абсолютная величина вещественного числа равна расстоянию от нуля до соответствующей точки числовой оси вне зависимости от направления. Расстояние между точками a и b числовой оси равно $|a-b|$.

Пример:

Geometric interpretation
The absolute value of a real number is the distance between the corresponding point on the number line and the zero-point regardless of the direction. For any numbers a and b, the distance between points a and b on the number line is $|a-b|$.

Example:



Абсолютные величины обладают следующими свойствами:

Absolute values have the following properties:

I. $|a| \geq 0$.

II. $|-a| = |a|$.

III. $|a-b| = |b-a|$.

IV. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.

V. $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|} \quad (b \neq 0)$.

VI. $|a|^2 = a^2$.

1.7. Дроби

Дробь это выражение вида $\frac{a}{b}$, где a называется числителем дроби, b - ее знаменателем. В числителе и знаменателе могут стоять любые числа или выражения, однако знаменатель не должен быть равен нулю.

Дроби обладают следующими свойствами:

Fractions

A **fraction** is an expression of the form $\frac{a}{b}$, where a and b are called, respectively, the **numerator** and **denominator**. The numerator and denominator can be represented by any real numbers or expressions. However, the denominator can not be equal to zero.

Fractions have the following properties:

I. $$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$$

Дробь не изменится, если ее числитель и знаменатель одновременно умножить или разделить на одно и то же ненулевое число.

Благодаря этому свойству дробь можно:

- привести к другому знаменателю;
- преобразовать к другому виду, если разложить числитель и знаменатель на множители, а затем сократить общие множители.

Примеры:

A fraction keeps its value if both the numerator and denominator are multiplied or divided by equal non-zero numbers.

One can use this property in order:

- to reduce the fraction to a different denominator;
- to simplify the fraction by factoring the numerator and denominator and reducing common factors.

Examples:

- $\frac{4}{5} = \frac{4 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{8}{10}$,
- $\frac{30}{45} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 5}{3 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{2}{3}$,
- $\frac{8x-4}{6x-3} = \frac{4(2x-1)}{3(2x-1)} = \frac{4}{3}$,
- $\frac{a^2-ab}{ab-b^2} = \frac{a(a-b)}{b(a-b)} = \frac{a}{b}$.

II. $$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}.$$

Прочитаем это свойство слева направо:

Чтобы сложить дроби с одинаковыми знаменателями, нужно сложить числители, сохранив прежний знаменатель.

Теперь прочитаем его справа налево:

Дробь не изменится, если каждое слагаемое числителя разделить на знаменатель и полученные результаты сложить.

Аналогично выполняется вычитание дробей:

Let us read this property from left to right:

In order to add fractions with common denominators, add together the numerators and keep the same denominator.

We can also read the property from right to left:

The fraction keeps its value if each term of the numerator is divided by the denominator and then the results are added.

There is a similar rule for subtraction of fractions with equal denominators:

$$\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}.$$

Две последние формулы можно объединить в одну:

Two last formulas can be combined into the following uniform rule:

III. $$\frac{a}{c}\pm\frac{b}{c}=\frac{a\pm b}{c}.$$

IV. $$\frac{a}{c}\pm\frac{b}{d}=\frac{ad}{cd}\pm\frac{cb}{cd}=\frac{ad\pm bc}{cd}.$$

Чтобы сложить (или вычесть) дроби с различными знаменателями, нужно привести дроби к общему знаменателю и сложить (или вычесть) дроби с одинаковыми знаменателями.

In order to add (or subtract) fractions with different denominators it is necessary to reduce the fractions to a common denominator by finding a common multiple of both denominators and then add (or subtract) the fractions with equal denominators.

Примеры:

Examples:

- $\frac{4}{5}-\frac{2}{3}=\frac{4\cdot 3}{5\cdot 3}-\frac{2\cdot 5}{3\cdot 5}=\frac{12-10}{15}=\frac{2}{15}$.
- $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}=\frac{c}{abc}+\frac{a}{abc}=\frac{c+a}{abc}$.

V. $$\frac{a}{c}\cdot\frac{b}{d}=\frac{ab}{cd}.$$

Чтобы перемножить дроби, нужно перемножить отдельно числители и отдельно знаменатели; затем разделить один результат на другой.

The numerator of the product of fractions is equal to the product of the numerators, and the denominator equals the product of the denominators of all fractions.

VI. $$a:\frac{b}{c}=a\cdot\frac{c}{b}.$$

Чтобы разделить на дробь, нужно умножить на обратную дробь.

To divide a value by a fraction multiply it by the reciprocal fraction.

Пример:

Example:

$$\frac{6a}{5b}:\frac{3}{b}=\frac{6a}{5b}\cdot\frac{b}{3}=\frac{6ab}{5b\cdot 3}=\frac{2a}{5}.$$

Равные дроби называются **пропорциями.**

Примеры пропорций:

Equivalent fractions are known as **proportions**.

Examples of proportions:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d},\qquad \frac{1}{x-2}=\frac{x}{4},\qquad \frac{x-5}{3}=\frac{y+1}{2}.$$

Пропорции можно решать по правилу перекрестного умножения:

Proportions may be solved by cross multiplication using the cross product property:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\quad\Leftrightarrow\quad ad=bc.$$

Из этого правила следует, что

From this it follows that

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\quad\Leftrightarrow\quad\frac{d}{b}=\frac{c}{a}\quad\Leftrightarrow\quad\frac{a}{c}=\frac{b}{d}\quad\Leftrightarrow\quad\frac{b}{a}=\frac{d}{c}.$$

Докажем следующее полезное свойство пропорций:

Если вещественные числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ не равны нулю одновременно, то из равенств

Let us prove the following helpful property of proportions:

If real numbers $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ are not equal to zero at the same time then the equalities

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}=\mu \qquad (2)$$

следует, что

imply

$$\frac{\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\ldots+\lambda_n a_n}{\lambda_1 b_1+\lambda_2 b_2+\ldots+\lambda_n b_n}=\mu. \qquad (3)$$

Действительно, с учетом (2)

Indeed, in view of equalities (2)

$$a_1 = b_1\mu, \quad a_2 = b_2\mu, \quad \ldots, \quad a_n = b_n\mu.$$

Следовательно,

Therefore,

$$\frac{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n}{\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \ldots + \lambda_n b_n} = \frac{\lambda_1 b_1\mu + \lambda_2 b_2\mu + \ldots + \lambda_n b_n\mu}{\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \ldots + \lambda_n b_n}$$

$$= \frac{(\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \ldots + \lambda_n b_n)\mu}{\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \ldots + \lambda_n b_n} = \mu.$$

1.8. Множества

Множество представляет собой конечную или бесконечную совокупность объектов. Объекты называются элементами (или членами) множества. Элементами множества могут являться слова, числа и т.д.

Для обозначения множества обычно используется одна из заглавных латинских букв.

Если множество A определяется списком своих элементов, то список помещают в фигурные скобки, а элементы отделяют друг от друга запятыми:

A = {список элементов}.

Пример 1: Символическая запись $A = \{a, b, x\}$ означает, что A является множеством элементов a, b, x.

Утверждение “x является элементом множества A.” записывается символически в виде $x \in A$.

Символическая запись $x \notin A$ означает, что x не является элементом множества A.

Пример 2: Пусть N представляет собой множество натуральных чисел: $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Тогда символьная запись $7 \in N$

Sets

A set is a finite or infinite collection of objects. The objects are called elements or members of the set. For instance, numbers or words can be elements of a set.

Sets are usually denoted by capital Latin letters. A pair of braces is used to enclose either elements of the set or its description list, using commas to separate the individual elements.

If the set A is defined by a list of its elements, then it can be written in the following format:

A = {list of elements}.

Example 1: Let A be the set of the elements a, b, x. The set A is defined here by the list of its elements and so it can be denoted as

$$A = \{a, b, x\}$$

The statement “x is an element of the set A” is symbolized as

$$x \in A.$$

Conversely, the statement “x is not an element of A” is written symbolically as $x \notin A$.

Example 2: Let N be the set of all natural numbers:

$$N = \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

Then the notation $7 \in N$ means that

означает, что число семь является натуральным числом, тогда как запись $\sqrt{3} \notin N$ означает, что $\sqrt{3}$ не является натуральным числом.

Множество можно определить и иначе, формулируя принцип отбора элементов и указывая характеризующие их свойства. В этом случае используется запись $A = \{x \mid P\}$, где разделительный символ "|" читается: "таких, что". Вся строка читается так: "Множество A всех элементов x таких, что каждый элемент x имеет свойство P".

Пример 3: Пусть B представляет собой множество всех натуральных чисел за исключением числа пять.

Символически это можно записать так: $B = \{n \mid n \in N, n \neq 5\}$.

Замечание: В примере 1 множество A является **конечным**, тогда как в примерах 2-3 N и B - **бесконечные** множества.

Множество, не содержащее элементов, называется **пустым** множеством и обозначается символом Ø.

Примеры множеств:

the number seven is a natural number, and the notation $\sqrt{3} \notin N$ means that $\sqrt{3}$ is not any natural number.

A set can be also defined by describing the elements through their characterizing properties: "The set A of all elements x such that x has the property P". In this case, the symbol "|" is used instead of the statement "such that", and the set is written in the following format:

$$A = \{x \mid P\}.$$

Example 3: Let B be the set of all natural numbers except the number five.

Then B may be symbolized as

$$B = \{n \mid n \in N, n \neq 5\}.$$

Note: The set A is a **finite** set whereas N and B are **infinite** sets.

If a set has no elements, it is called a **null** set or an **empty** set and it is denoted by the symbol Ø.

Examples of sets:

- $\{x \mid x < 3, x > 5\} =$ Ø.
- Множество натуральных чисел: / The set of natural numbers:

$$N = \{\text{natural \#s}\} = \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

- Множество целых чисел: / The set of all integers:

$$I = \{\text{integer \#s}\} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}.$$

• Множество рациональных чисел

• The set of all rational numbers

$$\{\text{rational \#s}\} = \{p/q \mid q \neq 0,\ p, q \in I\}.$$

• Множество рациональных и иррациональных чисел образует множество вещественных чисел. Оно обозначается символом R и называется также **континуумом**.

• The set of all rational and irrational numbers is the set of real numbers that is denoted by the symbol R. The set of real numbers is also called the continuum.

1.8.1. Операции над множествами

Operations with Sets

Множества A и B **равны** между собой, если каждый элемент любого из них является элементом другого.

Обозначение: $A = B$.

Смысл: Множества A и B состоят из одинаковых элементов.

Примеры:

The set A is **equal** to the set B if every element of A is an element of B, and *vice versa*

Notation: $A = B$.

Meaning: A and B contain exactly the same elements.

Examples:

$$\{a, b, c\} = \{c, a, b\}.$$

$$\{a, b, c\} = \{a, a, c, b\}.$$

Множество A называется **строгим подмножеством** множества B, если каждый элемент множества A содержится в B, но $A \neq B$.

Обозначение: $A \subset B$.

Смысл: Множество A принадлежит множеству B, но не совпадает с ним. (Множество A как бы “меньше” чем множество B. Обратите внимание на близость символа принадлежности $\subset$ к символу неравенства $<$). Таким образом, каждый элемент множества A является элементом множества B, однако не все элементы B содержатся в A.

The set A is said to be a **proper subset** of the set B if every element of A is an element of B but $A \neq B$.

Notation: $A \subset B$.

Meaning: The set B consists of all elements of the set A and some extra elements.
Therefore, there exist some elements, which are elements of B but not A.

Compare the symbol $\subset$ with the symbol “less than” $<$.

Примеры:

Пустое множество Ø всегда рассматривается как строгое подмножество любого множества.

Множество натуральных чисел является строгим подмножеством множества вещественных чисел: $N \subset R$.

Множество $\{a,b,c\}$ есть строгое подмножество множества $\{a,b,c,d\}$: $\{a,b,c\} \subset \{a,b,c,d\}$.

Examples:

Ø is always considered to be a subset of any set.

The set of natural numbers is a proper subset of the set real numbers: $N \subset R$.

The set $\{a,b,c\}$ is a proper subset of the set $\{a,b,c,d\}$:

$$\{a,b,c\} \subset \{a,b,c,d\}.$$

Говорят, что множество A является **подмножеством** множества B, если либо $A \subset B$, либо $A = B$.

Обозначение: $A \subseteq B$.

Смысл: Множество A принадлежит множеству B и может совпадать с ним. (Здесь напрашивается аналогия символа $\subseteq$ с символом $\leq$).

Примеры:

The set A is said to be a **subset** of the set B if $A \subset B$ or $A = B$.

Notation: $A \subseteq B$.

Meaning: A is a proper subset of B or A is equal to B.

Compare symbols $\subseteq$ and $\leq$ with each other and try to understand the reason for this similarity.

Examples:

$$\{a,b,c\} \subseteq \{a,c,b\}.$$

$$\{a,b,c\} \subseteq \{a,b,c,d\}.$$

Пересечение множеств A и B есть множество элементов, содержащихся в A и B одновременно.

Обозначение: $A \cap B$.

Смысл: Элементами множества $A \cap B$ являются общие элементы множеств A и B, т.е.

$$(A \cap B) \subseteq A \text{ и } (A \cap B) \subseteq B.$$

Примеры:

The **intersection** of the sets A and B is the set of all elements that belong to both sets, A and B.

Notation: $A \cap B$.

Meaning: The elements of the set $A \cap B$ are the common elements of the sets A and B:

$$(A \cap B) \subseteq A \text{ and } (A \cap B) \subseteq B.$$

Examples:

$$\{a,b,c\} \cap \{a,c,d,f\} = \{a,c\}$$

$$\{x \mid 0 \leq x < 7\} \cap \{x \mid x < 3\} = \{x \mid 0 \leq x < 3\}.$$

Множества рациональных и иррациональных чисел не содержат одинаковых элементов. Следовательно,

The sets of rational and irrational numbers are mutually exclusive ones, and they have nothing in common. Therefore,

$$\{\text{irrational \#s} \cap \text{rational \#s}\} = \varnothing.$$

Если к элементам одного из множеств (A или B) добавить элементы другого, то полученное множество называется **объединением** множеств A и B.

Обозначение: $A \cup B$.

Смысл: Множество $A \cup B$ состоит из элементов, каждый из которых содержится хотя бы в одном из данных множеств - A или B:

$A \subseteq (A \cup B)$ и $B \subseteq (A \cup B)$.

Примеры:

The **union** of the sets A and B is the set of all elements that are contained in A or B, or both.

Notation: $A \cup B$.

Meaning: The set consisting of elements, each of which is in at least one of the given sets, A or B, that is,

$A \subseteq (A \cup B)$ and

$B \subseteq (A \cup B)$.

Examples:

$$\{\text{real \#s}\} = \{\text{irrational \#s}\} \cup \{\text{rational \#s}\}.$$

$$\{a,b,c\} \cup \{a,c,d,f\} = \{a,b,c,d,f\}.$$

$$\{x \mid x > 2\} \cup \{x \mid x > 5\} = \{x \mid x > 2\}.$$

Диаграммы Венна наглядно иллюстрируют вышеприведенные определения.

The Venn diagrams below illustrate the above definitions graphically.

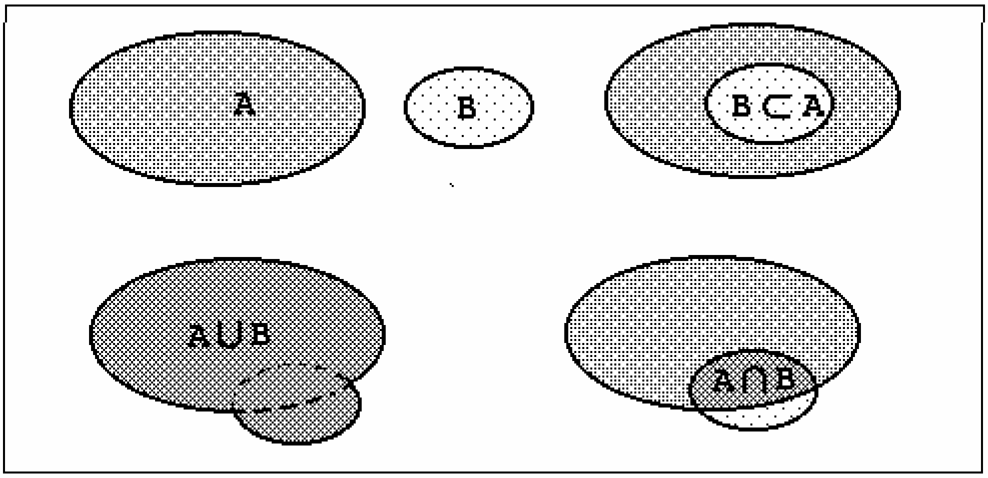


Рис. 2 | Fig. 2

1.8.2. Чтение формул | Reading of Formulas

	Таблица 3	Table 3	
Чтение формул	Формулы	Formulas	Reading of Formulas
A совпадает с B.	$A = B$		A is equal to B.
• A является строгим подмножеством B. A принадлежит B.	$A \subset B$		A is a proper subset of B. A belongs to B.
A является подмножеством B. A принадлежит B.	$A \subseteq B$		A is a subset of B. A belongs to B.
Пересечение множеств A и B. A и B.	$A \cap B$		A intersects B. A and B.
Объединение множеств A и B. A или B.	$A \cup B$		A union B. A or B.
x является элементом множества A. x принадлежит A.	$x \in A$		x is an element of set A. x belongs to set A
x не является элементом множества A. x не принадлежит A.	$x \notin A$		x is not an element of set A. x does not belong to set A.
Множество A состоит из натуральных чисел, больших 10.	$A = \{x \mid x \in N, x > 10\}$		A is the set of natural numbers, which are greater than 10.

1.9. Интервалы

Подмножества вещественных чисел называют **интервалами** (или **промежутками**).

Конечный интервал представляет собой множество вещественных чисел, которому соответствует отрезок числовой оси, ограниченный точками a и b.

Интервал называется **открытым**, если он не содержит своих

Intervals

Intervals are special subsets of real numbers.

A **finite** interval is a set of real numbers represented by a line segment of the number line between the two endpoints, a and b.

An interval whose endpoints are not included in the interval is called **open**. In particular, the open interval (a,b) is the set of all real граничных точек. Так, открытый интервал (a,b) представляет собой множество вещественных чисел x таких, что $a<x<b$.

Конечный интервал, содержащий обе граничные точки, называется **закрытым** и обозначается символом $[a,b]$. В этом случае $a\le x\le b$.

Открытый и закрытый интервалы представлены схематически на Рис.3.

numbers x such that

$$a<x<b.$$

If both endpoints, a and b, are included in a finite set, then the interval is called **closed** and denoted by the symbol $[a,b]$. Thus, the closed interval $[a,b]$ is the set of all real numbers x such that $a\le x\le b$.

Examples of open and closed intervals are shown in diagram form in Fig. 3.

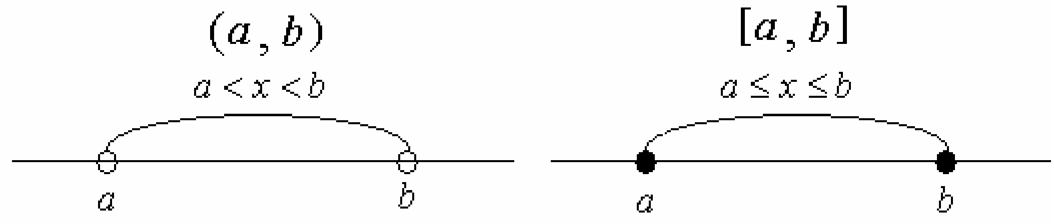


Рис. 3 | Fig. 3

Интервал, который включает в себя только одну из граничных точек, называется п**олуоткрытым**.

Так, полуоткрытый интервал $(a,b]$ представляет собой множество вещественных чисел x, заключенных между a и b, включая b:

$$(a,b]=\{x\,|\,a<x\le b\}.$$

Полуоткрытый интервал, который содержит левую граничную точку a, обозначается символом $[a,b)$. В этом случае

$$[a,b)=\{x\,|\,a\le x<b\}.$$

Полуоткрытые интервалы представлены схематически на Рис.4.

An interval is called **half-open** if only one endpoint is included, that is, a half-open interval contains all points between a and b, and either a or b but not both.

A half-open interval is denoted by $(a,b]$ if the point b is included in the interval.

Therefore,

$$(a,b]=\{x\,|\,a<x\le b\},$$

while $[a,b)$ is a set of real numbers x such that $a\le x<b$:

$$[a,b)=\{x\,|\,a\le x<b\}.$$

Half-open intervals are represented in diagram form in Fig. 4.

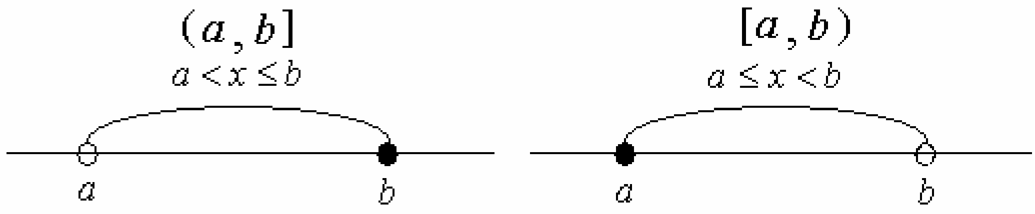


Рис. 4 | Fig. 4

Полубесконечный интервал представляет собой множество вещественных чисел, которому соответствует часть числовой оси, ограниченная с одной стороны и неограниченная с другой – в направлении положительной или отрицательной бесконечности.

Бесконечный интервал $(-\infty,\infty)$ не имеет граничных точек и представляет собой множество всех вещественных чисел.

Полубесконечный интервал всегда открыт там, где присутствует символ бесконечности ∞, но может быть как открытым, так и закрытым на другом конце интервала.

Примеры:

Интервал $[a,\infty)$ представляет собой множество вещественных чисел $a \le x$.

The **half-infinite** interval is a set of real numbers represented by a part of the number line. This part is bounded from one side and unbounded from the other in the direction of positive or negative infinity.

The **infinite** interval $(-\infty,\infty)$ has no endpoints and represents the set of all real numbers.

Any half-infinite interval is unbounded to the right or to the left, and the infinity symbol is always enclosed by a round bracket to represent it as an open interval. At the same time, the infinite interval may be open or closed at the endpoint.

Examples:

The infinite interval $[a,\infty)$ is a set of real numbers x with $a \le x$.

$(a,\infty) \quad \Leftrightarrow \quad a < x$.

$(-\infty,b] \quad \Leftrightarrow \quad x \le b$.

$(-\infty,b) \quad \Leftrightarrow \quad x < b$.

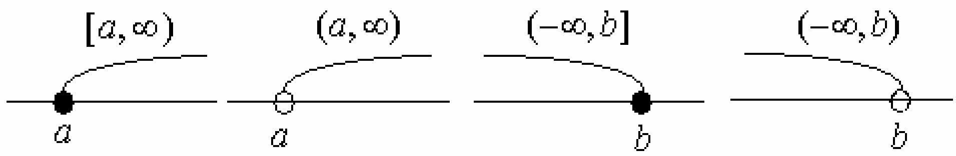


Рис. 5 | Fig. 5

1.10. Возведение в степень | Exponentiation

1.10.1. Чтение формул | Reading of Formulas

Таблица 4 | Table 4

Чтение формул	Формулы	Reading of Formulas
x в квадрате.	x^2	x squared.
x в кубе.	x^3	x cubed.
• Два в кубе. • Два в третьей (степени).	2^3	• The third power of 2. • Two cubed.
x в шестой.	x^6	x to the power six.
x в степени n.	x^n	x to the power n.
x в степени два на n.	$x^{2/n}$	x to the power two over n.
Пять в степени x минус два.	5^{x-2}	Five to the power x minus 2.
Корень (квадратный) из x.	$\sqrt{x}$	The square root of x.
Корень из семи.	$\sqrt{7}$	The square root of seven.
Корень пятой степени из x.	$\sqrt[5]{x}$	The fifth root of x.
Корень n-той степени из x.	$\sqrt[n]{x}$	The *n*th root of x.
• Корень из *a* плюс три плюс *b* в квадрате. • Корень квадратный, под корнем *a* плюс в скобках сумма трех и *b* в квадрате.	$\sqrt{a+(3+b)^2}$	• The square root of *a* plus three plus *b* squared. • The square root of *a* plus the sum of three and *b* in parentheses squared.
• x один два равно минус *b* плюс минус корень квадратный из *b* в квадрате минус четыре *ac*, все разделить на два *a*. • x один два равно дроби, в числителе минус *b*, плюс минус корень квадратный, под корнем *b* в квадрате минус четыре *ac*, в знаменателе два *a*.	$x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	• x sub one comma two equals minus *b* plus or minus the square root of *b* squared minus four *a* times *c* over two *a*. • x sub one and two equals long fraction bar, above the fraction bar minus *b* plus or minus the square root of *b* squared, minus four *a* times *c* below the fraction bar two times *a*.

1.10.2. Общие правила

В выражении x^a величина x называется **основанием**, a - **показателем** степени, а само выражение x^a читается как x в степени a.

Пример: В выражениях x^3, 2^4, 5^y и 3^n показателями степени являются, соответственно, 3, 4, y и n.

Для степенных выражений справедливы следующие правила, которые широко применяются в алгебраических преобразованиях:

Common Rules

In the expression x^a the quantity x is called the **base,** a is the **exponent** of the power, and x^a is the ath power of a or x raised to the ath power.

Example: The exponents of the quantities x^3, 2^4, 5^y and 3^n are, respectively, 3, 4, y and n.

The following rules are useful in algebraic manipulations involving exponents:

$$x^0 = 1. \tag{4}$$

$$x^a x^b = x^{a+b}. \tag{5}$$

$$\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}. \tag{6}$$

$$x^{-a} = \frac{1}{x^a}. \tag{7}$$

$$(x^a)^b = x^{ab}. \tag{8}$$

$$(xy)^a = x^a y^a. \tag{9}$$

$$(\frac{x}{y})^a = \frac{x^a}{y^a}. \tag{10}$$

Примеры;

Examples:

- $a^2 a^7 = a^9$; $(a^2)^7 = a^{14}$;
- $x^3 x^5 / x^6 = x^{3+5-6} = x^2$;
- $\dfrac{x^{-7}}{(x^{-2})^3} = \dfrac{x^{-7}}{x^{-6}} = x^{-7-(-6)} = x^{-1} = \dfrac{1}{x}$;
- $\dfrac{(x^3)^5 x^{-4}}{x^{11}} = x^{15-4-11} = x^0 = 1.$

1.10.3. Степени с дробными показателями

Операции возведения в степень с дробным показателем и извлечения корня являются взаимосвязанными.

Пусть n - натуральное число, большее единицы: $n \in N$, $n > 1$.

Тогда выражение $x^{\frac{1}{n}}$ называется корнем n-ой степени из x и обозначается символом $\sqrt[n]{x}$.

Таким образом,

Rational Exponents

The operations of the exponentiation (involving a rational exponent) and extraction of root are related to each other.

Let n be a natural number, which is greater than unity: $n \in N$ and $n > 1$.

Then the power of x with the exponent of the form $\dfrac{1}{n}$ is called the nth root of x and denoted symbolically as $\sqrt[n]{x}$. Therefore,

$$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}. \qquad (11)$$

В этой формуле x называется подкоренным выражением (или выражением под знаком радикала), число n - показателем корня, а $\sqrt[n]{x}$ - корнем n-ой степени из x.

Из формулы (8) при $b = 1/n$ и $c = n$ следует, что

In this formula x is called the radicand, n is the index of the radical, and $\sqrt[n]{x}$ is the nth root of x.

If we set $b = 1/n$ and $c = n$ then from property (8) it follows that

$$(x^{\frac{1}{n}})^n = x^1 = x \quad \Rightarrow \quad (\sqrt[n]{x})^n = x.$$

Следовательно, можно сказать, что число y является корнем n-ой степени из числа x, если $y^n = x$, и обратно: если y является корнем n-ой степени из числа x, то $y^n = x$. Таким образом, оба равенства, $y = \sqrt[n]{x}$ и $y^n = x$, выражают одно и то же математическое утверждение:

Therefore, one can say that a number y is the nth root of x if $y^n = x$, and *vice versa.*

Thus, both equalities, $y = \sqrt[n]{x}$ and $y^n = x$, express the same mathematical statement:

$$y = \sqrt[n]{x} \quad \Leftrightarrow \quad y^n = x. \qquad (12)$$

Корень второй степени называется квадратным корнем, а

The second root of x is called the square root of x, and the third root корень третьей степени – кубическим корнем. При записи квадратного корня его показатель опускают и пишут просто $\sqrt{x}$.

Корнями из вещественного числа могут быть как вещественные, так и комплексные числа. В частности, не существует вещественных корней четной степени из отрицательного числа, поскольку любое вещественное число в четной степени не может равняться отрицательному подкоренному выражению. В этом случае корнями из отрицательного числа являются комплексные числа.

В данном разделе мы намерены оставаться в рамках системы вещественных чисел.

Любое положительное число имеет два вещественных квадратных корня: y и $(-y)$, поскольку $y^2 = (-y)^2$. Чтобы избежать неоднозначности, для корней четной степени вводится понятие арифметического значения корня, под которым понимается положительный корень. По умолчанию под корнем четной степени из положительного числа всегда подразумевается арифметическое значение корня. Так, символ $\sqrt{x}$ означает положительный корень из числа x:

is known as the cube root. The index of the square root is omitted from the expression, that is, the square root of the number x is written as $\sqrt{x}$.

The roots of real numbers may be either real or complex numbers. In particular, there are no real *n*th roots if n is an even number and the radicand is a negative real number. Indeed, an even power of any real number is a positive real number, which can not be equal to a negative radicand. In this case the *n*th roots of a negative radicand are complex numbers.

Here we will restrict our discussion of exponents and roots to real-number solutions.

If the radicand is positive then there are the two real square roots, y and $(-y)$, because $y^2 = (-y)^2$.

To avoid confusion, we define the principal square root of a positive real number as the positive root of the number. When an algebraic expression refers to *n*th root of a positive number x with an even index of the radical, this means, by default, the principal (positive) *n*th root of the number.

For instance, the symbol $\sqrt{x}$ is defined for $x \geq 0$ and means the positive square root of the number x:

$$\sqrt{x^2} = |x|. \qquad (13)$$

Примеры:

- Уравнение $x^2 = 25$ имеет два решения: $x = \pm 5$. Поэтому два числа, 5 и (-5), являются корнями квадратными из числа 25. Арифметическое же значение корня равно 5.

Examples:

- The equation $x^2 = 25$ has the two solutions: $x = \pm 5$, that is, both numbers, 5 and (-5), are the square roots of 25. The principal square root of 25 is 5.

- $\sqrt{3^2} = |3| = 3$, $\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$.

Если в выражении под знаком квадратного корня содержится в виде множителя квадрат некоторого числа, то из этого множителя можно извлечь корень, сохранив оставшиеся множители под знаком корня.

If the radicand contains a perfect square of some value as a factor then the perfect square can be taken out from under the radical sign. What is not a perfect square is left under the radical sign.

Примеры:

Examples:

- $\sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3} = \sqrt{4^2 \cdot 3} = 4\sqrt{3}$,
- $\sqrt{a^3 - a^2} = \sqrt{a^2(a-1)} = |a|\sqrt{a-1}$.

Свойства радикалов являются прямым следствием правил возведения в степень и операций с вещественными числами.

Так, правило (9) при $a = b = 1/n$, где n – натуральное число, имеет следующий вид:

Let us formulate the properties of radicals, which are based on the rules of exponentiation and the properties of real numbers.

First, we rewrite rule (9) by setting $a = b = 1/n$, where n is a natural number:

$$(x)^{1/n}(y)^{1/n} = (xy)^{1/n} \qquad \Rightarrow$$

$$\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}. \qquad (14a)$$

Таким образом, произведение корней одной и той же степени равно корню этой же степени из произведения подкоренных выражений.

Therefore, the product of the nth roots of some real numbers is equal to the nth root of the product of these numbers.

Последняя формула нуждается в уточнении, если ее читать справа налево, а показатель корня является четным числом, т.е. $n = 2m$. В этом случае следует пользоваться формулой

The last formula can be also read from right to left. However, it has to be corrected if n is an even number, that is $n = 2m$. In this case one has to use the following formula:

$$\sqrt[2m]{xy} = \sqrt[2m]{|x|} \cdot \sqrt[2m]{|y|}\,. \qquad (14b)$$

Примеры:

- $\sqrt{3 \cdot 5} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{5}\,, \qquad \sqrt{(-3)(-5)} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{5}\,.$

Совершенно аналогично, из правила (10) следует, что

$$\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}}\,, \qquad (15a)$$

$$\sqrt[2m]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[2m]{|x|}}{\sqrt[2m]{|y|}} \qquad (y \neq 0). \qquad (15b)$$

Таким образом, частное от деления корней одной и той же степени равно корню этой же степени из частного от деления подкоренных выражений.

Рассмотрим теперь формулу (8), в которой положим $a = 1/n$ и $b = m$. Тогда

$$(\sqrt[n]{x})^m = \sqrt[n]{x^m}\,. \qquad (16)$$

При преобразовании алгебраических выражений, содержащих радикалы, можно использовать различные формы записи и приводить подобные. Помните, однако, что одинаковые выражения под знаками корней с различными показателями степени не являются подобными.

Примеры:

Examples:

- $\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3} = 4\,; \qquad \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{8 \cdot 27}} = \sqrt{\frac{6}{8 \cdot 27}} = \frac{1}{\sqrt{4 \cdot 9}} = \frac{1}{\sqrt{36}} = \frac{1}{6}\,;$
- $9\sqrt{8} - 3\sqrt{32} = 9\sqrt{2 \cdot 2^2} - 3\sqrt{2 \cdot 4^2} = 9 \cdot 2\sqrt{2} - 3 \cdot 4\sqrt{2} = 6\sqrt{2}\,;$
- $\sqrt[3]{625} \cdot \sqrt[3]{25} = \sqrt[3]{5^4} \cdot \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{5^4 \cdot 5^2} = \sqrt[3]{5^6} = 5^2 = 25.$

Examples:

Likewise, from rule (10) it follows that

Therefore, the quotient of the nth roots of some real numbers is equal to the nth root of the quotient of these numbers.

Let us set now $a = 1/n$ and $b = m$, where n and m are natural numbers. Then in view of rule (8) we obtain

Simplification of algebraic expressions with radicals involves simplification and combination of the quantities within the radical sign. One must ensure that the terms have the same index and the same radicand when radicals are added or subtracted.

2. Алгебраические выражения

2.1. Введение

Константа это символ, используемый для описания не изменяющейся величины.

Переменная это символ, используемый для описания величины, принимающей различные значения.

Алгебраическое **выражение** это сумма членов, каждый из которых представляет собой произведение констант и любого числа переменных. Переменные также называют символьными величинами, а постоянные множители членов - их **коэффициентами**.

Член, содержащий в своем произведении только константы, называется **постоянным** членом.

Степень члена определяется суммой показателей степени его переменных.

Члены, отличающиеся друг от друга только своими коэффициентами, называются **подобными**. Подобные члены можно группировать и представить в виде одного члена, коэффициент которого равен сумме коэффициентов подобных членов. Такая процедура называется **приведением подобных**.

Алгебраическое выражение принимает числовое значение, если вместо переменных подставить числа. Такой процесс называются **вычислением** алгебраического выражения.

Algebraic Expressions

Introduction

A **constant** is a symbol that represents a quantity assumed to be unchanged throughout a given discussion.

A **variable** is a symbol used to represent a quantity that may assume any given value or set of values.

An **algebraic expression** is an additive combination of any number of terms. A **term** is a product with an unspecified number of variables and constants. The variables of a term are said to be **literal factors**, and the product of the constants is called the **coefficient** of the term.

A term, whose factors are only constants, is called a **constant** term.

The **degree** of a term is the sum of the exponents of its variables.

Terms that have the same literal factors but differ only in their numerical coefficients are called **similar terms**. By applying the distributive property, two or more similar terms can be combined into one term. The new term has the same literal factors as the similar terms, but its coefficient is the sum of the coefficients of the similar terms. This procedure is known as **combining similar terms**.

The algebraic expression takes on a numerical value when numbers substitute for variables. This process is known as **evaluating** algebraic expression.

Пример: Членами алгебраического выражения

Example: The terms of the algebraic expression

$$7x^3 - 8x^{-1}y^2 + 3x + 5 - 9x$$

являются, соответственно, $7x^3$, $-8x^{-1}y^2$, $3x$, 5 и $(-9x)$. Степень члена $7x^3$ равна трем.
Два члена, $3x$ и $(-9x)$, являются подобными и могут быть представлены единым членом $(-6x)$. Поэтому данное выражение сводится к виду $7x^3 - 8x^{-1}y^2 - 6x + 5$ и может быть вычислено, например, подстановкой $x = 2$ и $y = 3$:

are, respectively, $7x^3$, $-8x^{-1}y^2$, $3x$, 5, and $(-9x)$. The degree of the term $7x^3$ equals 3.
Two terms, $3x$ and $(-9x)$, have the same literal factor, so they are similar terms and can be combined into the single term $(-6x)$.
The given expression is reduced to the form $7x^3 - 8x^{-1}y^2 - 6x + 5$ and can be evaluated by setting, *e.g.*, $x = 2$ and $y = 3$:

$$7 \cdot 2^3 - 8 \cdot 2^{-1} \cdot 3^2 - 6 \cdot 2 + 5 = 56 - 36 - 12 + 5 = 13.$$

2.2. Многочлены

Многочленом называется алгебраическое выражение, все переменные которого имеют только целые неотрицательные показатели степени.

Степень многочлена определяется степенью члена, имеющего наибольшую степень.

Примеры:

- Степень одночлена $5x^3z$ равна четырем.
- Многочлен $2x - 9y$ является биномом первой степени.
- Многочлен $3x + 4x^2yz^4 - yz^3$ является трехчленом седьмой степени.

Многочлены играют важную роль в математике и ее приложениях. С ними легко производить преобразования и вычисления, однако нахождение их корней является весьма сложной задачей.

Polynomials

An algebraic expression is called a **polynomial** if all variables of its terms have only non-negative integer exponents.
The degree of a polynomial is the degree of the term with the highest degree.

Examples:

- The polynomial $5x^3z$ is a monomial of degree 4.
- The polynomial $2x - 9y$ is a binomial of degree 1.
- The polynomial $3x + 4x^2yz^4 - yz^3$ is a trinomial of degree 7.

Polynomials are very important functions in mathematics and its applications. We can easily manipulate or evaluate the polynomial, but finding its roots is a more difficult task.

Многочлен одной переменной представляет собой выражение вида

A polynomial with a single variable is an expression that can be written in the following form:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \qquad (1)$$

где x - переменная, a_k - коэффициенты многочлена ($k = 0, 1, 2, \ldots, n$).

where x - the variable and a_k - coefficients of the polynomial ($k = 0, 1, 2, \ldots, n$).

Примеры: Многочлены

Examples: The polynomials

$$P(x) = 5x + 7,$$

$$P(x) = 3x^2 - x + 4,$$

$$P(x) = x^3 + 2x - 1.$$

представляют собой линейный, квадратный и кубический многочлены, соответственно.

are respectively, linear, quadratic and cubic polynomials.

Многочлен может быть записан и в другом виде. Так, выражение $(x-4)(x^2+1)$ является многочленом третьей степени.

Polynomials are not always given in an expanded form as above. For instance, the expression

$$(x-4)(x^2+1)$$

is the polynomial of degree 3.

2.3. Алгебраические преобразования

Algebraic Transformations

Одно и то же алгебраическое выражение можно записать многими различными способами. В большинстве случаев предпочтение следует отдавать наиболее простому виду, хотя едва ли можно точно сформулировать, какая из форм записи является самой простой. Как правило, достаточно просто представить выражение в нескольких различных формах и выбрать из них наиболее подходящую. Не существует универсального алгоритма преобразования алгебраического выражения к простейшему виду. Например, решение уравнений или неравенств часто основано

There are a few different ways to write the same algebraic expression. Although it is difficult to say exactly what one means in all cases by the "simplest form", a worthwhile practical procedure is to look at many different forms of an expression, and pick out the one that involves the smallest number of parts. In most cases, it is best simply to experiment, trying different transformations until we get a suitable form.

It is impossible to formulate any general-purpose method of getting expressions into the simplest form. For instance, in order to solve an equation or inequality it is necessary to write an expression as на представлении суммы членов в виде произведения множителей. Однако, чтобы привести подобные, нужно раскрыть скобки, т.е. выполнить обратное преобразование.

Выражения, содержащие несколько переменных, допускают еще более широкий выбор возможных форм записи, поскольку члены можно группировать различными способами, выбрав ту или иную переменную в качестве основной.

Таким образом, даже при работе с рациональными функциями или многочленами нужно свободно владеть различными приемами их преобразования и уметь переходить от одной формы записи к другой. Если же рассматривать более сложные выражения, содержащие, например, тригонометрические функции, то разнообразие форм их записи становится еще более впечатляющим.

Однако можно выделить некоторые типичные приемы решения задач и сформулировать следующие общие правила.

Прежде всего, выражение следует записать в нескольких формах и выбрать из них наиболее соответствующую данной проблеме. Так, в одних случаях полезно разложить выражение на множители, а в других – раскрыть скобки в отдельных частях выражения. Разумно привести подобные

a product of items. In order to combine similar terms it is necessary to expand an expression, that is, to carry out the inverse operation to factoring.

There is an even wider selection of possible forms for expressions with several variables. One can, for example, group terms in the expression in such a way that one or another of the variables is chosen as major.

Thus, even when we deal with polynomials and rational expressions, there are many different ways to write any particular expression. So it is necessary to possess easily methods of its transformation and be able to write down the same expression in different forms.

If we consider more complicated expressions including, for instance, trigonometric functions, the variety of possible forms becomes still greater.

However, we can try to formulate some simple principles that are suitable for solving some specific tasks.

First of all, let us define the following common rules:

Perform a sequence of algebraic transformations on the expression and return to the simplest form you found.

Simplify the expression by making use of factoring or expanding of some parts of the expression.

It is reasonable to combine similar terms, collect together terms that члены, сгруппировать попарно слагаемые, содержащие одинаковые степени переменных или корни одной и той же степени, вынести общие множители.

Как правило, дроби желательно приводить к общему знаменателю, а иногда полезно наоборот разложить дробь на простые дроби. Если числитель и знаменатель содержат общие множители – сократите их. Избавьтесь от радикалов в знаменателях дробей, и т.д.

К числу наиболее типичных приемов преобразования алгебраических выражений можно отнести: разложение на множители и освобождение знаменателя от радикалов.

include the same powers or radicals, and take out common factors.

As a rule, it is desirable to put all terms over a common denominator. However, sometimes it is better to separate some fractions into terms with simple denominators.

Cancel the common factors between the numerator and denominator; rationalize the denominators of the fractions, and so on.

Among different algebraic techniques of manipulating and simplifying algebraic expressions the most common methods are factoring and rationalizing the denominator.

2.3.1. Разложение на множители

Фраза “разложить на множители” означает “представить математическое выражение в виде произведения двух или большего числа множителей”. Выражение, записанное в виде произведения, обычно имеет более простой вид. Так, следующее выражение

$$(x+y^2)(2x-y)^3(x^2+3y)^4$$

является многочленом двух переменных, содержащим 36 членов.

Напомним, что любое натуральное число можно представить в виде произведения простых чисел, каждое из которых не допускает разложения на иные множители -

Factoring

The wording “factoring” means “to express a mathematical quantity as a product of two or more quantities”. This procedure often gives simpler expressions.

For instance, the following expression

$$(x+y^2)(2x-y)^3(x^2+3y)^4$$

is a polynomial with two variables and 36 terms.

Let us recall that the process of factoring a natural number involves expressing the number as a product of prime numbers that are irreducible factors, each of which has only two factors, the unity and the prime number itself.

Similarly, any polynomial can be

кроме единицы и данного числа. Аналогично, любой многочлен можно представить в виде произведения несокращаемых многочленов, каждый из которых не допускает разложения на более простые множители.

represented by a product of irreducible polynomials, that is, such polynomials each of which cannot be further reduced to other factors aside from the unity and itself.

Операции разложения на множители и раскрытия скобок всегда приводят к выражениям, равносильным данному для любых значений переменных.

Transformations of expressions by expanding or factoring are always correct, whatever values the symbolic variables in the expressions may have.

Примеры: Разложить выражения на множители:

Examples: Factor the following expressions into irreducible factors:

- $15a-6a^2=3a(5-2a)$.
- $$x^2+2x-3=x^2-x+3x-3$$ $$=x(x-1)+3(x-1)=(x-1)(x+3).$$
- $$a^2+2ab-3a-6b=a(a+2b)-3(a+2b)$$ $$=(a+2b)(a-3).$$

Задача 1: Разложить на множители разность квадратов a^2-b^2.

Problem 1: Factor the difference between two squares a^2-b^2.

Решение: Во-первых, вычтем и добавим произведение ab:

Solution: First, let us subtract and add the product ab:

$$a^2-b^2=a^2-ab+ab-b^2.$$

Затем попарно сгруппируем слагаемые и вынесем общие множители:

Then, combine the terms by pairs and take out the common factors:

$$a^2-ab+ab-b^2=(a^2-ab)+(ab-b^2)$$
$$=a(a-b)+b(a-b)=(a-b)(a+b).$$

Таким образом, разность квадратов равна произведению разности оснований на их сумму:

Therefore, the difference between two squares is equal to the product of the difference between the bases and the sum of the bases:

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b). \qquad (2)$$

Примеры: В каждом из нижеприведенных многочленов можно распознать разность квадратов, Следовательно,

Examples: Each of the below polynomial is recognizable as the difference between two squares. Therefore,

- $9x^2 - 25 = (3x)^2 - 5^2 = (3x-5)(3x+5)$.
- $(5x+3)^2 - 16x^2 = (5x+3)^2 - (4x)^2$
  $= (5x+3-4x)(5x+3+4x)$
  $= (x+3)(9x+3) = 3((x+3)(3x+1)$.
- $x^4 - 1 = (x^2)^2 - 1^2$
  $= (x^2-1)(x^2+1) = (x-1)(x+1)(x^2+1)$.

Задача 2: Разложить на множители разность кубов: $a^3 - b^3$.

Problem 2: Factor the difference between two cubes: $a^3 - b^3$.

Решение: Сначала вычтем и добавим два члена, a^2b и ab^2. Затем попарно сгруппируем слагаемые и вынесем общие множители:

Solution: First, we subtract and add two terms, a^2b and ab^2. Then combine the terms by pairs and take out the common factors:

$$a^3 - b^3 = a^3 - a^2b + a^2b - ab^2 + ab^2 - b^3$$
$$= a^2(a-b) + ab(a-b) + b^2(a-b) = (a-b)(a^2+ab+b^2).$$

Полученная формула называется формулой для разности кубов:

This formula is called the formula for the difference between two cubes:

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2). \qquad (3)$$

Следствие: Эта формула приводит к формуле для суммы кубов, если в обеих ее частях заменить b на $(-b)$:

Corollary: From the last formula one can easily get the formula for the sum of two cubes by substituting $(-b)$ for b:

$$a^3 - (-b)^3 = (a-(-b))(a^2+a\cdot(-b)+(-b)^2) \quad \Rightarrow$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2). \qquad (4)$$

Примеры:
В каждом из многочленов, $125-8x^3$ и x^3-1, можно распознать разность кубов.

В многочлене $125+8x^3$ можно распознать сумму кубов.

В многочлене x^2-1 можно распознать разность квадратов. Следовательно,

Examples:
Both polynomials, $125-8x^3$ and x^3-1, are recognizable as the difference between two cubes.

The polynomial $125+8x^3$ is recognizable as the sum of two cubes.

The polynomial x^2-1 is recognizable as the difference between two squares. Therefore,

- $$\begin{aligned}125-8x^3 &= 5^3-(2x)^3\\ &= (5-2x)(5^2+5\cdot 2x+(2x)^2)\\ &= (5-2x)(25+10x+4x^2).\end{aligned}$$
- $$125+8x^3=5^3+(2x)^3=(5+2x)(25-10x+4x^2).$$
- $$\begin{aligned}\frac{x^3-1}{x^2-1}(x+1) &= \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)}(x+1)\\ &= x^2+x+1.\end{aligned}$$

Задача 3: Разложить на множители квадратный трехчлен $a^2+2ab+b^2$.
Решение: Во-первых, представим слагаемое $2ab$ в виде $ab+ab$. Затем попарно сгруппируем слагаемые и вынесем общие множители:

Problem 3: Factor the quadratic trinomial $a^2+2ab+b^2$.
Solution: First, rewrite the term $2ab$ as $ab+ab$.
Next, combine the terms by pairs. Then, take out the common factors:

$$\begin{aligned}a^2+2ab+b^2 &= a^2+ab+ab+b^2\\ &= (a^2+ab)+(ab+b^2)\\ &= a(a+b)+b(a+b)=(a+b)(a+b).\end{aligned}$$

Таким образом, мы получаем следующую формулу для квадрата суммы:

Therefore, we obtain the following formula for the perfect square trinomial:

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2. \qquad (5)$$

Следствие: Подстановка $(-b)$ вместо b приводит к формуле для квадрата разности:

Corollary: The formula for the difference squared can be obtained by substituting $(-b)$ for b:

$$a^2 + 2a(-b) + (-b)^2 = (a + (-b))^2 \quad \Rightarrow$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2. \qquad (6)$$

Формулы (5) и (6) можно записать в едином виде:

Formulas (5) and (6) can be combined into a uniform formula:

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2. \qquad (7)$$

Задача 4: Разложить на множители кубический многочлен

Problem 4: Factor the following cubic polynomial:

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Решение: Сначала представим слагаемые $3a^2b$ и $3ab^2$, соответственно, в виде $a^2b + 2a^2b$ и $ab^2 + 2ab^2$; а затем попарно сгруппируем слагаемые

Solution: First, rewrite the terms $3a^2b$ and $3ab^2$, respectively, as $a^2b + 2a^2b$ and $ab^2 + 2ab^2$ and then combine the terms by pairs:

$$a^3 + 3a^2b + 3b^2a + b^3 = a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3$$

$$= (a^3 + a^2b) + (2a^2b + 2ab^2) + (ab^2 + b^3).$$

Теперь вынесем общие множители:

Finally, take out the common factors:

$$(a^3 + a^2b) + (2a^2b + 2ab^2) + (ab^2 + b^3) =$$

$$= a^2(a + b) + 2ab(a + b) + b^2(a + b)$$

$$= (a + b)(a^2 + 2ab + b^2)$$

$$= (a + b)(a + b)^2 = (a + b)^3.$$

Таким образом, мы получаем следующую формулу для куба суммы:

Therefore, we obtain the following formula for the sum cubed:

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3. \qquad (8)$$

Следствие: Подстановка $(-b)$ вместо b приводит к формуле для куба разности:

Corollary: The formula for the difference cubed can be obtained by substituting $(-b)$ for b:

$$a^3 + 3a^2(-b) + 3a(-b)^2 + (-b)^3 = (a + (-b))^3 \quad \Rightarrow$$
$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3. \tag{9}$$

2.3.2. Теоремы о разложении

Factor Theorems

Основная теорема алгебры: Любой многочлен можно разложить на множители, каждый из которых является либо линейным, либо неприводимым квадратичным многочленом.

Приведем некоторые свойства многочленов:

Квадратичный многочлен либо разлагается на два линейных множителя, либо содержит в своем разложении только двукратно вырожденный линейный множитель, либо является неприводимым.

Кубический многочлен либо разлагается на три линейных множителя (вырожденных или нет), либо содержит в своем разложении линейный множитель и неприводимый квадратичный.

The Fundamental Theorem of Algebra:
Every polynomial can be factored into linear factors and irreducible polynomials of degree 2.

Polynomials have the following factor properties.

A factorable quadratic polynomial can be factored into two linear factors or a twice repeated linear factor.

A factorable cubic polynomial can be factored either into the three linear factors (repeated or not), or a linear factor and an irreducible factor.

Примеры:

- Многочлен $x^2 + 6x - 7$ разлагается на линейные множители:

Examples:

- The polynomial $x^2 + 6x - 7$ can be factored into the following linear factors:

$$x^2 + 6x - 7 = (x - 1)(x + 7).$$

- Многочлен $x^3 - x^2 + 5x$ разлагается на линейный и неприводимый квадратичный многочлены:

- The polynomial $x^3 - x^2 + 5x$ can be factored into a linear factor and an irreducible factor of degree 2:

$$x^3 - x^2 + 5x = x(x^2 - x + 5).$$

- Разложение многочлена $x^2 + 2x + 1$ содержит только двукратно вырожденный линейный множитель:

- The factoring of the polynomial $x^2 + 2x + 1$ consists of twice repeated linear factor:

$$x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2.$$

- Многочлен $x^4 + 4x^2 + 4$ сводится к двукратно вырожденному квадратичному множителю:

- The polynomial $x^4 + 4x^2 + 4$ can be factored into a twice repeated irreducible factor of degree 2:

$$x^4 + 4x^2 + 4 = (x^2 + 2)^2.$$

- Оба множителя в разложении многочлена $x^4 + 3x^2 + 2$ являются неприводимыми многочленами второй степени:

- Both factors of the polynomial $x^4 + 3x^2 + 2$ are irreducible ones of degree 2:

$$x^4 + 3x^2 + 2 = (x^2 + 1)(x^2 + 2).$$

Теорема об остаточном члене: Остаточный член от деления многочлена $P(x)$ на бином $(x - c)$ равен $P(c)$.

The **Remainder Theorem**: If the polynomial $P(x)$ is divided by the binomial $(x - c)$ then the remainder is equal to $P(c)$.

Следствие: Бином $(x - c)$ является одним из множителей многочлена $P(x) - P(c)$.

Corollary: The binomial $(x - c)$ is a factor of the polynomial $P(x) - P(c)$.

Теорема о разложении: Если $P(c) = 0$, то $(x - c)$ является одним из множителей многочлена $P(x)$.

The **Factor Theorem**: If $P(c) = 0$ then $(x - c)$ is a factor of the polynomial $P(x)$.

Пример:

Пусть $P(x) = x^2 - 5x + 6$. Тогда $P(1) = 2$, $P(2) = 0$ и $P(3) = 0$. Следовательно, бином $(x - 1)$

Example:

Let $P(x) = x^2 - 5x + 6$. Then $P(1) = 2$, $P(2) = 0$ and $P(3) = 0$. Therefore, the binomial $(x - 1)$ is a является одним из множителей многочлена x^2-5x+4, тогда как оба бинома, $(x-2)$ и $(x-3)$, являются множителями данного многочлена:

factor of the polynomial x^2-5x+4 while both binomials $(x-2)$ and $(x-3)$ are the factors of the given polynomial:

$$x^2-5x+6=(x-2)(x-3).$$

Если известен один из множителей многочлена, то в некоторых случаях можно легко найти и другие его множители.

In some cases, factors of a polynomial can be easily found if one of the factors is knows.

Пусть, например, известно, что бином $(x-x_1)$ является одним из множителей многочлена $P(x)=x^2+bx+c$. Тогда $P(x)$ можно представить в виде $x^2+bx+c=(x-x_1)(x-x_2)$, где x_2 - некоторое неизвестное число. Это тождество должно выполняться при любых значениях x. Чтобы найти x_2, достаточно положить $x=0$:

For instance, let $(x-x_1)$ be a factor of the polynomial $P(x)=x^2+bx+c$. Then $P(x)$ can be represented in the following form:

$$x^2+bx+c=(x-x_1)(x-x_2),$$

where x_2 is an unknown number. This identity has to be valid for any values of x. One can easily find x_2 by setting $x=0$:

$$c=x_1x_2 \quad \Rightarrow \quad x_2=c/x_1.$$

Пример:

Пусть $P(x)=x^2-2x-8$. Легко проверить, что $P(-2)=0$. Согласно теореме о разложении, бином $(x+2)$ является одним из множителей многочлена $P(x)$. Следовательно,

$$x^2-2x-8=(x+2)(x-a),$$

где a - неизвестное число.

Полученное тождество должно выполняться при любых значениях x. Положим $x=0$ и найдем a:

Example:

Let $P(x)=x^2-2x-8$. One can easily check that $P(-2)=0$. Therefore, in view of the Factor Theorem, the binomial $(x+2)$ is a factor of the polynomial $P(x)$. Hence,

$$x^2-2x-8=(x+2)(x-a),$$

where a is an unknown number.

This identity has to be valid for any values of x. By setting $x=0$ we easily find the value of a:

$$-8=-2a \quad \Rightarrow \quad a=4.$$

Таким образом, вторым

Therefore, the second factor of the

множителем данного многочлена является бином $(x-4)$, и мы получаем такой окончательный результат:

given polynomial is the binomial $(x-4)$, and the final result is the following:

$$x^2 - 2x - 8 = (x+2)(x-4).$$

2.3.3. Формулы сокращенного умножения

Expanding

В некоторых случаях нужно выполнить преобразование, обратное разложению на множители. При этом мы говорим, что раскрываем скобки. В результате такой операции степени и произведения преобразуются в сумму, а алгебраическое выражение записывается в другом виде.

Прочитаем формулы (2) – (9) справа налево.

In many cases one needs the inverse operation to factoring, which is called expanding. Due to expanding of powers or a product of items we can get another form of the algebraic expression and write down the result as a sum of terms.

Let us read formulas (2) – (9) from right to left.

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2. \qquad (10)$$

Произведение разности оснований на их сумму равно разности квадратов оснований.

The product of the difference between the bases and the sum of bases is equal to the difference between the bases squared.

$$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3. \qquad (11)$$

Произведение суммы оснований на неполный квадрат их разности равно сумме кубов оснований.

The product of the sum of the bases and the imperfect square of their difference is equal to the sum of the bases cubed.

$$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3. \qquad (12)$$

Произведение разности оснований на неполный квадрат их суммы равно разности кубов оснований.

The product of the difference between the bases and the imperfect square of their sum is equal to the difference between the bases cubed.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2. \qquad (13)$$

Квадрат суммы двух чисел равен квадрату первого числа, плюс удвоенное произведение первого числа на второе, плюс квадрат второго числа.

The second power of the sum of two numbers equals the first number squared, plus twice product of the numbers and plus the second number squared.

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2. \quad (14)$$

Квадрат разности двух чисел равен квадрату первого числа, минус удвоенное произведение первого числа на второе, плюс квадрат второго числа.
Постарайтесь заучить вышеприведенные словесные формулировки как стихотворения.

The second power of the difference between two numbers equals the first number squared, minus twice product of the numbers and plus the second number squared.

Try to memorize the above wording as rhymes.

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3. \quad (15)$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3. \quad (16)$$

Примеры:

Examples:

- $(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = a - b.$
- $$\begin{aligned}(5x-1)^2 &= (5x)^2 - 2\cdot 5x + 1\\ &= 25x^2 - 10x + 1.\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}(2x+3y^2)^2 &= (2x)^2 + 2\cdot 2x\cdot 3y^2 + (3y^2)^2\\ &= 4x^2 + 12xy^2 + 9y^4.\end{aligned}$$
- $(3 \pm 4x)^2 = 3^2 \pm 2\cdot 3\cdot 4x + (4x)^2 = 9 \pm 24x + 16x^2.$
- $$\begin{aligned}(2a-5b)^3 &= (2a)^3 - 3\cdot(2a)^2 5b + 3\cdot 2a(5b)^2 - (5b)^3\\ &= 8a^3 - 60a^2b + 150ab^2 - 125b^3.\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}x^4 + y^4 &= x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 2x^2y^2\\ &= ((x^2)^2 + 2x^2y^2 + y^4) - 2x^2y^2\\ &= (x^2+y^2)^2 - (\sqrt{2}xy)^2\\ &= (x^2 + y^2 - \sqrt{2}xy)(x^2 + y^2 + \sqrt{2}xy).\end{aligned}$$

2.3.4. Освобождение знаменателей от иррациональностей

Как правило, наличие радикалов в знаменателях дробей осложняет вычисления и поэтому желательно от них избавляться.

Такую процедуру называют освобождением знаменателей от иррациональностей. В простых случаях рационализация знаменателя достигается с помощью несложных алгебраических преобразований.

Примеры:

Rationalizing Denominators

As a rule, it is desirable to eliminate all the terms involving radicals from the denominator of the fraction.

This procedure is known as rationalizing the denominator.

In simple cases rationalizing denominators can be easily achieved by means of simple algebraic manipulations.

Examples:

- $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \sqrt{\dfrac{ab}{b^2}} = \dfrac{\sqrt{ab}}{\sqrt{b^2}} = \dfrac{\sqrt{ab}}{|b|}$.
- $\dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.
- $\sqrt{\dfrac{3}{11}} = \sqrt{\dfrac{33}{11^2}} = \dfrac{\sqrt{33}}{\sqrt{11^2}} = \dfrac{\sqrt{33}}{11}$.

Обсудим типичные случаи, в которых легко добиться освобождения знаменателей от иррациональностей.

I. Пусть знаменатель представляет собой двучлен типа $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, $a+\sqrt{b}$, $\sqrt{a}+c\sqrt{b}$ и т.д. Тогда для рационализация знаменателя нужно числитель и знаменатель умножить на выражение, сопряженное знаменателю, а затем воспользоваться формулой (10):

Consider some usual cases in which denominators can be easily rationalized.

I. Let the denominator be a binomial expression, such as $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, $a+\sqrt{b}$, $\sqrt{a}+c\sqrt{b}$, and so on.

Then in view of formula (10) the denominator can be rationalized by multiplying of the numerator and denominator by the corresponding algebraic conjugate quantity to the denominator:

$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}. \qquad (17)$$

Примеры: Освободить от иррациональностей знаменатели данных выражений:

Examples: Rationalize the denominators of the given expressions:

- $$\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{5-2}=\frac{1}{3}(\sqrt{5}-\sqrt{2}).$$

- $$\frac{1}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}+1)}=\frac{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=\frac{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{3}-1)}{(5-1)(3-1)}=\frac{1}{8}(\sqrt{5}+1)(\sqrt{3}-1).$$

- $$\frac{1}{\sqrt{15}-\sqrt{3}+\sqrt{5}-1}=\frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{3}-\sqrt{3}+\sqrt{5}-1}=\frac{1}{\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)+(\sqrt{5}-1)}=\frac{1}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}+1)}=\frac{1}{8}(\sqrt{5}+1)(\sqrt{3}-1).$$

II. Пусть теперь знаменатель представляет собой трехчлен типа $\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$ или ему подобный.

Тогда для решения проблемы нужно умножить числитель и знаменатель на выражение, дополняющее знаменатель до разности кубов, а затем воспользоваться формулой (12):

II. Let the denominator be a trinomial expression such as

$$\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$$

or something similar.

In order to solve the problem multiply the numerator and denominator by the corresponding factor to complete a difference between cubes in the denominator. Then use formula (12):

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}=\frac{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}{(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})}=\frac{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}{(\sqrt[3]{a})^3-(\sqrt[3]{b})^3}=\frac{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}{a-b}. \tag{18}$$

III. Пусть знаменатель представляет собой трехчлен типа $\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$ или ему подобный. Основываясь на той же идее, что и в предыдущем случае, и используя формулу (11), мы получаем:

III. Let the denominator be an expression of the form $\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$ or something similar. Using the same idea as in Case 2 and in view of formula (11) we obtain:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}=\frac{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}{(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})}=\frac{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}{a+b}. \qquad (19)$$

Примеры:

Examples:

- $$\frac{1}{\sqrt[3]{25}-4\sqrt[3]{5}+16}=\frac{1}{(\sqrt[3]{5})^2-4\sqrt[3]{5}+4^2}$$
$$=\frac{\sqrt[3]{5}+4}{((\sqrt[3]{5})^2-4\sqrt[3]{5}+4^2)(\sqrt[3]{5}+4)}$$
$$=\frac{\sqrt[3]{5}+4}{(\sqrt[3]{5})^3+4^3}=\frac{\sqrt[3]{5}+4}{5+64}=\frac{1}{69}(\sqrt[3]{5}+4).$$

- $$\frac{1}{1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}=\frac{1-\sqrt[3]{x}}{((1+\sqrt[3]{x}+(\sqrt[3]{x})^2)(1-\sqrt[3]{x})}=\frac{1-\sqrt[3]{x}}{(1-(\sqrt[3]{x})^3}=\frac{1-\sqrt[3]{x}}{1-x}.$$

Для решения такого рода проблем можно также использовать подстановки вида $x=\sqrt[3]{a}$.

One can also use substitutions of the form $x=\sqrt[3]{a}$ to solve all other such problems.

Пример: Освободиться от радикалов в знаменателе выражения $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a^2}-3\sqrt[3]{a}+9}$.

Example: Eliminate the denominator from the radicals in the expression $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a^2}-3\sqrt[3]{a}+9}$.

Решение: Выполнив подстановки $x=\sqrt[3]{a}$ и $y=3$, мы получаем следующий результат:

Solution: Setting $x=\sqrt[3]{a}$ and $y=3$ we get the following result:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}-3\sqrt[3]{a}+9}=\frac{1}{x^2-xy+y^2}$$
$$=\frac{x+y}{(x^2-xy+y^2)(x+y)}=\frac{x+y}{x^3+y^3}=\frac{\sqrt[3]{a}+3}{a+27}.$$

3. Алгебраические уравнения и неравенства

Алгебраическое уравнение устанавливает, что одно алгебраическое выражение равно другому. Существуют и другие отношения между выражениями. Одно из них может быть: больше другого; меньше другого; больше или равно другому; меньше или равно другому. Отношения такого рода формулируются **алгебраическими неравенствами**.

Решение уравнений и неравенств состоит в нахождении значений переменных, при которых математические утверждения являются истинными. Чтобы решить уравнение (или неравенство), его нужно максимально упростить, используя свойства уравнений и неравенств, а также свойства вещественных чисел. Следующие свойства уравнений и неравенств относятся к числу основных:

- $a = b$ в том и только в том случае, если $a + c = b + c$ для любого значения c.
- $a = b$ в том и только в том случае, если $ac = bc$ для любого значения $c \neq 0$.
- $a > b$ в том и только в том случае, если $a + c > b + c$ для любого значения c.
- Если $a > b$ и $c > 0$, то $ac > bc$.
- Если $a > b$ и $c < 0$, то $ac < bc$.

Algebraic Equations and Inequalities

An **algebraic equation** states that one algebraic expression is equal to another.
There exist other relationships between algebraic expressions. One of them can be: greater than another, or less than another, or greater than or equal to another, or less than or equal to another. An **algebraic inequality** states such relationships.
The **solution** of equations and inequalities involves finding the values of the variables that make the mathematical statements true.

The properties of equalities and inequalities as well as the properties of real numbers are used to simplify the equation or the inequality as much as possible, prior to formulating the solution set for the variable in question.
The main properties of equations and inequalities are the following:

- $a = b$ if and only if $a + c = b + c$ for any c.
- $a = b$ if and only if $ac = bc$ for any $c \neq 0$.
- $a > b$ if and only if $a + c > b + c$ for any c.
- If $a > b$ and $c > 0$ then $ac > bc$.
- If $a > b$ and $c < 0$ then $ac < bc$.

Эти свойства позволяют преобразовывать уравнения и неравенства:

Если к обеим частям уравнения (неравенства) прибавить одну и ту же величину, то полученное уравнение (неравенство) будет равносильным данному.

Если обе части уравнения умножить на любую ненулевую величину, то полученное уравнение будет равносильным данному.

Если обе части неравенства умножить на любую положительную величину, то полученное неравенства будет равносильным данному.

Если обе части неравенства умножить на отрицательную величину, то знак неравенства следует изменить на обратный.

The above properties allow us to transform equations and inequalities:

Any quantity can be added to both sides of an equation (or inequality) to produce the equation (inequality), which is equivalent to the given one.

Both sides of an equation can be multiplied by any non-zero quantity to produce the equation, which is equivalent to the given one.

Both sides of an inequality can be multiplied by the same positive quantity to produce the inequality, which is equivalent to the given one.

If both sides of an inequality are multiplied by the same negative quantity, then the inequality symbol must be reversed.

3.1. Линейные уравнения

Linear Equations

Линейное уравнение с одной переменной можно представить в виде

A linear equation in one variable can be put into the following form:

$$ax + b = 0, \qquad (1)$$

где a и b - константы ($a \neq 0$), x - переменная.

where a and b are constants ($a \neq 0$), and x is the variable.

Пример 1: Чтобы решить уравнение

Example 1: In order to solve the equation

$$a_1 x + b_1 = a_2 x + b_2,$$

нужно его преобразовать к виду

it is necessary to transform it into the following form:

$$(a_1 - a_2)x = b_2 - b_1. \qquad (2)$$

Если $a_1 \neq a_2$, то это уравнение имеет решение

If $a_1 \neq a_2$, then the solution for the given equation is

$$x = (b_2 - b_1)/(a_1 - a_2).$$

Если $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$, то уравнение обращается в тождество $0 \cdot x = 0$, т.е. удовлетворяется при любых значениях x.
Если $a_1 = a_2$, но $b_1 \neq b_2$, то уравнение не имеет решений.

If $a_1 = a_2$ and $b_1 = b_2$, then equation (2) is the identity $0 \cdot x = 0$. Therefore, any number x will make the true sentence in this equation.
If $a_1 = a_2$ but $b_1 \neq b_2$, then the given equation has no solutions.

3.2. Линейные неравенства

Linear Inequalities

Линейное неравенство с одной переменной можно представить в одной из следующих форм:

A linear inequality in one variable is that inequality, which can be put into one of the following forms:

$$ax + b > 0, \tag{3a}$$
$$ax + b \geq 0. \tag{3b}$$

Здесь a и b - константы ($a \neq 0$), x - переменная.

Неравенство (3a) называется строгим, тогда как неравенство (3b) - нестрогим. Единственное различие этих неравенств состоит в том, что в одном случае граничная точка интервала входит в множество решений, а в другом – не входит.

Процедура решения неравенств во многом аналогична процедуре решения уравнений, но основывается уже на свойствах неравенств.

Пример 2: Решить неравенство:

In these formulas a and b are constants ($a \neq 0$), and x is a variable.
Inequality (3a) is called a strict inequality while inequality (3b) is an unstrict inequality. The only difference between these inequalities is whether the endpoint of the interval is included in the solution set or not.
The procedure of solving inequalities is similar to that of equations, except that the properties of inequalities apply.
Example 2: Solve the following inequality:

$$-5x + 3 \geq 2x + 17.$$

Решение: Чтобы решить линейное неравенство, нужно в его левой части сгруппировать все члены, содержащие переменную, а все остальные члены перенести в правую часть:

Solution: In order to solve a linear inequality it is necessary to group together all terms with the variable on the left-hand side of the inequality and to eliminate from this side other terms:

$$-5x + 3 \geq 2x + 17 \;\Rightarrow$$
$$-5x + 3 - 2x - 3 \geq 2x + 17 - 2x - 3 \quad \Rightarrow$$
$$-7x \geq 14.$$

Чтобы записать решение, нужно разделить обе части полученного неравенства на отрицательное число -7 и изменить знак неравенства на обратный: $x \le -2$.

Divide both sides of this inequality by the negative number -7 and reverse the inequality symbol to get the solution set: $x \le -2$.

3.3. Линейные уравнения, содержащие $|ax+b|$

Linear Equations Involving the Absolute Value $|ax+b|$

Чтобы решить уравнение, содержащее $|ax+b|$, следует освободиться от символов абсолютной величины. Для этого нужно рассмотреть два возможных случая.

Случай 1: Если $ax+b \ge 0$, то знак абсолютной величины можно просто опустить:

In order to solve an equation involving the absolute value $|ax+b|$ it is necessary to remove the absolute value symbol. This can be done by considering two possible cases.

Case 1: If the expression $ax+b$ represents a positive quantity then the absolute value symbol can be simply dropped.

$$ax+b \ge 0 \quad \Rightarrow \quad |ax+b| = ax+b\,.$$

Случай 2: Если $ax+b<0$, то символы абсолютной величины можно также опустить, но при этом нужно изменить знак перед выражением $ax+b$:

Case 2: If the expression $ax+b$ represents a negative quantity then the absolute value symbol can be also dropped but a minus sign has to be written in front of $(ax+b)$:

$$ax+b<0 \quad \Rightarrow \quad |ax+b| = -(ax+b)\,.$$

Таким образом, исходное уравнение эквивалентно двум линейным уравнениям, не содержащим символов абсолютной величины.

Следовательно, задача сводится к проблеме, уже рассмотренной ранее.

Therefore, instead of the original equation we obtain two linear equations, each of which does not contain the absolute value symbol.
Hence, the problem is reduced that considered above.

Пример 3: Решить уравнение

Example 3: Solve the equation

$$|2x+3| = 9-x\,.$$

Решение:
Случай 1: Если $2x+3 \ge 0$, что эквивалентно $x \ge -3/2$, то знак абсолютной величины можно просто опустить. Тогда

Solution:
Case 1: If $2x+3 \ge 0$, that means $x \ge -3/2$, then the absolute value symbol can be simply dropped. Therefore,

$$|2x+3| = 9-x \quad \Rightarrow \quad 2x+3 = 9-x \quad \Rightarrow$$
$$3x = 6 \quad \Rightarrow \quad x = 2,$$

при условии, что $x \geq -3/2$.

Условие выполняется.

Случай 2: Если $2x+3<0$, что означает $x<-3/2$, то при опускании символа абсолютной величины выражение $(2x+5)$ берется со знаком минус:

provided that $x \geq -3/2$.

That is certainly true.

Case 2: If $2x+3<0$, that means $x<-3/2$, then we drop the absolute symbol and write down the minus sign in front of the expression $(2x+5)$:

$$|2x+3| = 9-x \quad \Rightarrow \quad -(2x+3) = 9-x \quad \Rightarrow \quad x = -12.$$

Это значение удовлетворяет необходимому условию $x<-3/2$.

Объединяя решения, полученные в выше рассмотренных случаях, мы получаем множество решений данного уравнения:

This value obeys the condition $x<-3/2$.

The solution set is the union of the two solutions involving case 1 and case 2. Thus, the solution set for the given equation is the following:

$$\{x \mid x=-12, x=2\}.$$

Пример 4: Решить уравнение

Example 4: Solve the equation

$$|2x+15| = 3x-5.$$

Решение:

Случай 1:

Solution:

Case 1:

$$\begin{cases} 2x+15 = 3x-5 \\ 2x+15 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 20 \\ x \geq -15/2 \end{cases} \Rightarrow \quad x = 20.$$

Случай 2:

Case 2:

$$\begin{cases} -(2x+15) = 3x-5 \\ 2x+15<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x<-15/2 \end{cases}$$

Возникло противоречие и, следовательно, $x=-2$ не является решением рассматриваемого уравнения. В этом случае решением является пустое множество Ø.

Таким образом, уравнение имеет только одно решение: $x=20$.

This is a contradiction.

Therefore, the value $x=-2$ is not the solution for the considered equation, and the solution set in case 2 is the empty set Ø.

Thus, the solution set for the given equation is the single value $x=20$.

3.4. Линейные уравнения, содержащие абсолютные величины $|ax+b|$ и $|cx+d|$

Чтобы решить уравнение, содержащее абсолютные величины $|ax+b|$ и $|cx+d|$, следует освободиться от всех символов абсолютной величины.

Пусть $x = x_1$ и $x = x_2$ являются решениями уравнений $ax+b=0$ и $cx+d=0$, соответственно. Следовательно, выражение $ax+b$ меняет свой знак в точке x_1, а выражение $cx+d$ - в точке x_2.

Предположим, что $x_1 < x_2$. Тогда точки x_1 и x_2 разбивают числовую ось на три интервала: $(-\infty, x_1)$, $[x_1, x_2)$ и $[x_2, +\infty)$. (См. Рис. 1).

Linear Equations Involving Absolute Values $|ax+b|$ and $|cx+d|$

In order to solve a linear equation involving the absolute values $|ax+b|$ and $|cx+d|$ it is necessary to remove all absolute value symbols.

Let $x = x_1$ and $x = x_2$ be, respectively, the solutions of the equations $ax+b=0$ and $cx+d=0$. Therefore, the expression $ax+b$ changes its sign in the point x_1, while the expression $cx+d$ changes its sign in the point x_2.

Suppose that x_1 is less than x_2. Then points x_1 and x_2 divide the number line into three intervals: $(-\infty, x_1)$, $[x_1, x_2)$ and $[x_2, +\infty)$. (See Fig. 1).

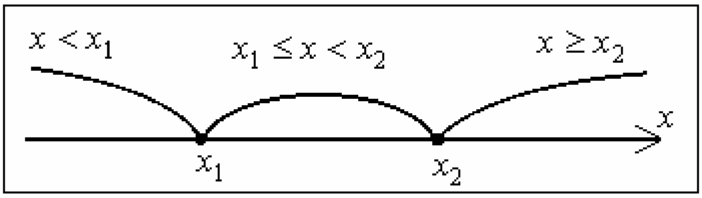


Рис.1 | Fig. 1

На каждом из этих интервалов оба выражения, $ax+b$ и $cx+d$, сохраняют свои знаки. Поэтому символы абсолютной величины можно опустить, поставив правильные знаки перед этими выражениями.

Таким образом, мы должны рассмотреть данное уравнение в каждом из трех случаев: $x < x_1$, $x_1 \le x < x_2$ и $x \ge x_2$. Полученные при этом уравнения не содержат

On each of these intervals both expressions, $ax+b$ and $cx+d$, keep their signs and therefore, the absolute value symbols can be dropped, provided that correct signs (plus or minus) are written in front of the expressions.

Thus, we have to write the equation in three cases: $x < x_1$, $x_1 \le x < x_2$ and $x \ge x_2$.

The solution set for the given equation will involve solving three абсолютных величин, а их решения образуют совокупность решений данного уравнения.

equations, each of which does not contain the absolute value symbols.

Пример 5: Чтобы решить уравнение

Example 5: In order to solve the equation

$$|3x+4|=|7x-2|-4x, \qquad (4)$$

нужно сначала найти точки, в которых выражения $3x+4$ и $7x-2$ меняют свои знаки:

first, it is necessary to find the points, in which the expressions $3x+4$ and $7x-2$ change their signs:

$$3x+4=0 \quad \Rightarrow \quad x=-\frac{4}{3},$$

$$7x-2=0 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{2}{7}.$$

Затем мы должны рассмотреть три случая:

Then we have to consider three cases.

Случай 1: Если $x<-\frac{4}{3}$, то оба выражения, $3x+4$ и $7x-2$, отрицательны. Следовательно,

Case 1: If $x<-\frac{4}{3}$ then both expressions, $3x+4$ and $7x-2$, are negative. Therefore,

$$\begin{cases} |3x+4|=-(3x+4) \\ |7x-2|=-(7x-2) \end{cases}$$

Преобразуем уравнение (4):

Now equation (4) can be transformed in the following way:

$$|3x+4|=|7x-2|-4x \quad \Rightarrow \quad -3x-4=-7x+2-4x \quad \Rightarrow$$

$$8x=6 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{3}{4}.$$

Это значение противоречит условию $x<-\frac{4}{3}$.

Следовательно, уравнение (4) не имеет решений на рассматриваемом интервале.

Let us test of whether $x<-\frac{4}{3}$.

This is a contradiction.

Hence, the equation (4) has no solution when $x<-\frac{4}{3}$.

Случай 2: Если $-\frac{4}{3}\le x<\frac{2}{7}$, то $3x+4\ge 0$, однако $7x-2<0$. Следовательно,

Case 2: If $-\frac{4}{3}\le x<\frac{2}{7}$ then $3x+4\ge 0$ but $7x-2<0$. Therefore,

$$\begin{cases} |3x+4| = 3x+4 \\ |7x-2| = -(7x-2) \end{cases}$$

Вновь преобразуем уравнение (4):

Likewise the above

$$|3x+4| = |7x-2| - 4x \quad \Rightarrow \quad 3x+4 = -7x+2-4x \quad \Rightarrow$$

$$14x = -2 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{1}{7}.$$

Это значение попадает в заданный интервал $-\frac{4}{3} \le x < \frac{2}{7}$.

This value of x obeys the conditions $-\frac{4}{3} \le x < \frac{2}{7}$.

Случай 3: На интервале $x > 2/7$ выражения $3x+4$ и $7x-2$ положительны. Следовательно,

Case 3: If $x > 2/7$ then both expressions, $3x+4$ and $7x-2$, are positive. Therefore,

$$\begin{cases} |3x+4| = 3x+4 \\ |7x-2| = 7x-2 \end{cases}$$

Тогда уравнение (4) принимает вид

In this case equation (4) has the form

$$3x+4 = 7x-2-4x \quad \Rightarrow \quad 4 = -2.$$

Полученное противоречие означает, что уравнение (4) не имеет решений при $x > 2/7$.

This is a contradiction and so equation (4) has no solutions when $x > 2/7$.

Итак, уравнение (4) имеет единственное решение: $x = -1/7$. Результаты решения иллюстрируются Рис. 2.

Therefore, only $x = -1/7$ is the solution for equation (6).
The above can be illustrated by the following drawing:

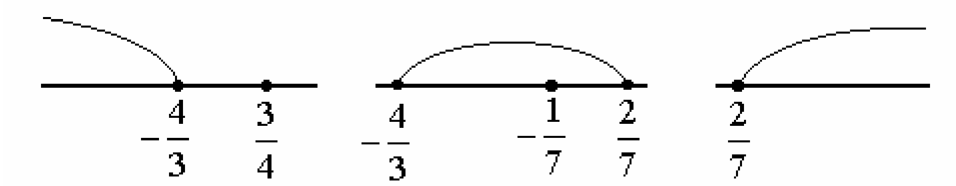


Рис.2 | Fig. 2

Подведем итоги: Если уравнение содержит абсолютные величины, то его решение сводится к решению нескольких линейных уравнений.

Thus, we can make the following conclusion: If the equation involves absolute values, then its solution will involve solving two or more equations.

3.5. Линейные неравенства, содержащие $|ax+b|$

Linear Inequalities Involving Absolute Value $|ax+b|$

Линейные неравенства, содержащие абсолютную величину $|ax+b|$, решаются по той же схеме, что и соответствующие уравнения.

Во-первых, нужно найти точку, в которой выражение $ax+b$ меняет знак. Затем на каждом из интервалов, $ax+b \geq 0$ и $ax+b<0$, нужно записать и решить стандартным способом обычные линейные неравенства, не содержащие символов абсолютной величины. Далее нужно выбрать такие решения неравенств, которые принадлежат соответствующим интервалам.

В некоторых случаях решение можно записать сразу, используя свойства абсолютной величины:

In order to solve a linear inequality involving the absolute value $|ax+b|$ it is necessary to use the same technique as in the case of equations.

First, find the point in which the expression $ax+b$ changes its sign.

Then in both cases, $ax+b \geq 0$ and $ax+b<0$, write down and solve the linear inequalities not involving the absolute value symbols. At this step the problem can be solved in the usual way, but the solution set for each of these inequalities has to be tested to determine whether it belongs to the corresponding interval.

In some cases one can easily write the solution set in view of the following properties of absolute values:

$$|x-b|<a \quad \Rightarrow \quad b-a<x<b+a.$$

$$|x-b|\leq a \quad \Rightarrow \quad b-a\leq x\leq b+a.$$

$$|x-b|>a \quad \Rightarrow \quad x\in(-\infty, b-a)\cup(b+a, +\infty).$$

$$|x-b|\geq a \quad \Rightarrow \quad x\in(-\infty, b-a]\cup[b+a, +\infty).$$

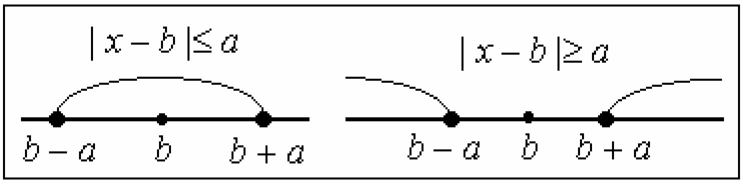


Рис.3 | Fig. 3

Пример 6: Решить неравенство

Example 6: Solve the inequality

$$|3x-1|<5.$$

Решение:

Solution:

$$|3x-1|<5 \quad \Rightarrow \quad 1-5<3x<1+5 \quad \Rightarrow \quad -\frac{4}{3}<x<2.$$

Пример 7: Решить неравенство | **Examples 7**: Solve the inequality

$$|4x+5| \geq 3.$$

Решение: | **Solution**:

$$|4x+5| \geq 3 \;\Rightarrow\; \begin{array}{ll} a) & 4x+5 \leq -3, \\ b) & 4x+5 \geq 3. \end{array} \;\Rightarrow\; \begin{array}{ll} a) & x \leq -2, \\ b) & x \geq -\frac{1}{2}. \end{array}$$

Таким образом, совокупность решений данного неравенства представляет собой объединение множеств полученных решений:

The solution set for the given inequality is the union of the two solution sets:

$$\{x \mid (x \leq -2) \cup (x \geq -\frac{1}{2})\}.$$

Пример 8: Решить неравенство | **Examples 8:** Solve the inequality

$$|3x-1| \leq 2x.$$

Решение: | **Solution**:

$$|3x-1| \leq 2x \quad \Rightarrow \quad -2x \leq 3x-1 \leq 2x \quad \Rightarrow$$

$$-2x-3x \leq -1 \leq 2x-3x \quad \Rightarrow \quad -5x \leq -1 \leq -x \quad \Rightarrow$$

$$5x \geq 1 \geq x \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{5} \leq x \leq 1.$$

Пример 9: Решить неравенство | **Examples 9**: Solve the inequality

$$|x+2| \leq 5x-10.$$

Решение: | **Solution:**

Случай 1: Если $x+2 \geq 0$, то | Case 1: If $x+2 \geq 0$ then

$$\begin{cases} |x+2| \leq 5x-10 \\ x+2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2 \leq 5x-10 \\ x \geq -2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x \geq 3 \\ x \geq -2 \end{cases} \Rightarrow \quad x \geq 3.$$

Случай 2: Если $x+2 < 0$, то | Case 2: If $x+2 < 0$ then

$$\begin{cases} |x+2| \leq 5x-10 \\ x+2 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -(x+2) \leq 5x-10 \\ x < -2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x \geq \frac{4}{3} \\ x < -2 \end{cases} \Rightarrow \quad x \in \varnothing.$$

В этом случае решений не существует, так что множество решений данного неравенства состоит из решений, относящееся только к первому случаю: $x \in [3, +\infty)$.

Если неравенство содержит две или больше абсолютных величин, то его решение сводится к решению нескольких линейных неравенств. Среди полученных решений нужно произвести отбор таких, которые попадают в соответствующие интервалы. Их совокупность образует множество решений неравенства.

There are no solutions in this case. Therefore, the solution set for the given inequality involves Case 1 only: $x \in [3, +\infty)$.

If an inequality involves two or more absolute values, then its solution involves solving three or more inequalities. Then it is necessary to select only such solutions that belong to the corresponding intervals. The solution set is the union of the solutions involving all cases.

3.6. Квадратные уравнения

Quadratic Equations

Квадратное уравнение может быть представлено в виде

A **quadratic equation** can be written in the following form:

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (5)$$

где x - переменная; a, b и c - константы ($a \neq 0$).

Уравнение (5) так же называют уравнением второй степени, поскольку в левой его части стоит многочлен второй степени.

Если разделить обе части уравнения (5) на коэффициент a, то полученное уравнение называется приведенным квадратным уравнением:

where x is the variable; a, b and c are constants ($a \neq 0$).

Since the expression on the left-hand side (5) is a quadratic polynomial so equation (5) is also called a second-degree equation.

Equation (5) can be rewritten in the form of a monic quadratic equation by dividing both its sides by the numerical coefficient a:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0. \qquad (6)$$

Квадратные уравнения решаются любым из следующих методов:

- выделением полного квадрата;
- применением формулы;
- разложением на множители.

Quadratic equations can be solved using any of the following methods:

- completing the perfect square;
- applying the quadratic formula;
- factoring.

3.6.1. Выделение полного квадрата

Выделим полный квадрат в левой части многочлена (6), добавляя и вычитая соответствующую константу:

Completing the Perfect Square

Let us transform the quadratic polynomial on the left-hand side of equation (6) by adding and subtracting the constant to complete the perfect square:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=x^2+\frac{b}{a}x+(\frac{b}{2a})^2-(\frac{b}{2a})^2+\frac{c}{a}$$
$$=(x+\frac{b}{2a})^2-((\frac{b}{2a})^2-\frac{c}{a}).$$

При этом мы получаем равносильное уравнение:

We get the equation which is equivalent to the original one:

$$(x+\frac{b}{2a})^2=((\frac{b}{2a})^2-\frac{c}{a}).$$

Приведем правую часть к общему знаменателю:

Reduce the right side to the common denominator:

$$(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}. \qquad (7)$$

Величина $D=b^2-4ac$ называется дискриминантом квадратного уравнения, а знак дискриминанта является важной характеристикой уравнения.
Перепишем уравнение (7) в терминах дискриминанта:

The value $D=b^2-4ac$ is called the discriminant of the quadratic equation. The sign of the discriminant is an important characteristic of the quadratic equation.
Let us rewrite equation (7) in terms of the discriminant:

$$(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{D}{4a^2}. \qquad (8)$$

Возможны три случая: $D<0$, $D=0$ и $D>0$.

Случай 1: Если $D<0$, то

$$(x+\frac{b}{2a})^2<0.$$

Возникшее противоречие указывает на то, что уравнение (8) не имеет решений в области вещественных чисел.

There are three possible cases: $D<0$, $D=0$ and $D>0$.

Case 1: If $D<0$, then

$$(x+\frac{b}{2a})^2<0.$$

This is a contradiction. Therefore, equation (8) has no real roots, that is, the solution set in Case 1 is the empty set Ø.

Случай 2: Если $D = 0$, то

Case 2: If $D = 0$ then

$$(x + \frac{b}{2a})^2 = 0.$$

Следовательно, корни уравнения (8) совпадают друг с другом:

Therefore, equation (8) has a twice repeated real root:

$$x_1 = x_1 = -\frac{b}{2a}. \qquad (9)$$

Случай 3: Если $D > 0$, то можно извлечь корни из обеих частей равенства (8):

Case 3: If $D > 0$ then by taking the square root of both sides of equation (8) we obtain:

$$|x + \frac{b}{2a}| = \frac{\sqrt{D}}{2|a|}. \qquad (10)$$

3.6.2. Формула корней квадратного уравнения

The Quadratic Formula

Равенство (10) можно представить в виде

The equality (10) can be rewritten in the following form:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \qquad (11)$$

Эта формула называется формулой корней квадратного уравнения. Она полностью снимает проблему решения уравнения (5).

Formula (12) is known as the **quadratic formula.** It gives the complete solution for equation (5).

Примеры:

Examples:

- Уравнение $3x^2 - x + 4 = 0$ не имеет вещественных корней, так как дискриминант отрицателен:

- The equation $3x^2 - x + 4 = 0$ has no real roots because the discriminant is negative:

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5 = -59 < 0.$$

- Уравнение $x^2 - 6x + 9 = 0$ имеет только одно решение $x = 3$, поскольку $D = 36 - 36 = 0$.

- The equation $x^2 - 6x + 9 = 0$ has a twice repeated real root $x = 3$ because $D = 36 - 36 = 0$.

- Согласно формуле (11) корнями уравнения $x^2 + 6x + 5 = 0$ являются $x_1 = -5$ и $x_2 = -1$.

- In view of formula (11), the equation $x^2 + 6x + 5 = 0$ has the solution set $x_1 = -5$ and $x_2 = -1$.

3.6.3. Разложение многочленов на множители

Разложение многочлена на множители полностью решает проблему нахождения его корней. Чтобы лучше понять взаимосвязь между разложением многочлена на множители и нахождением корней уравнения, рассмотрим, например, квадратное уравнение (6).

Если $D<0$, то уравнение не имеет вещественных корней, так что многочлен $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}$ нельзя разложить на более простые множители.

Если $D=0$, то корни уравнения (6) совпадают друг с другом: $x_1=x_2$. Это означает, что рассматриваемый многочлен можно представить в виде

Factoring Polynomials

A polynomial equation can be solved by factoring the polynomial expression, that is, by representing it as the product of irreducible polynomials.

In order to understand better the relation between factoring the polynomial and finding the solution set of the equation, let us consider, for instance, quadratic equation (6).

If $D<0$, then the equation has no real roots, that is, the polynomial $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}$ is irreducible.

If $D=0$, then the roots for equation (6) coincide with each other: $x_1=x_2$. So the polynomial can be represented as

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=(x-x_1)^2.$$

Если $D>0$, то уравнение (8) имеет два различных вещественных корня, x_1 и x_2. Это означает, что многочлен $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}$ разлагается на два линейные множители:

If $D>0$ then equation (8) has two real roots, x_1 and x_2 ($x_1 \neq x_2$), that is, the polynomial $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}$ can be factored into two linear factors:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=(x-x_1)(x-x_2).$$

Раскроем скобки и упростим это тождество:

Expand the expression on the right side and simplify this identity:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=x^2-x(x_1+x_2)+x_1x_2 \;\Rightarrow$$

$$(\frac{b}{a}+x_1+x_2)x+\frac{c}{a}=x_1x_2. \qquad (12)$$

Тождество должно выполняться при любых значениях x.
Пусть $x = 0$, тогда

The identity has to be valid for any values of x.
Let $x = 0$, then

$$x_1 x_2 \equiv \frac{c}{a}. \qquad (13)$$

Следовательно,

Hence,

$$(\frac{b}{a} + x_1 + x_2)x = 0$$

для любых значений x. Тогда

for any x. Therefore,

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}. \qquad (14)$$

Формулы (13) и (14) применяются как для нахождения корней уравнения (6), так и для проверки правильности полученных решений.

Formulas (14) and (15) can be used to find the roots of equation (6) as well as to test whether the found roots are correct.

Примеры:

- Чтобы разложить на множители квадратный многочлен

Examples:

- In order to factor the quadratic polynomial

$$x^2 - 4x - 12,$$

сначала прибавим к нему и вычтем $2x$. Затем попарно сгруппируем слагаемые и вынесем общие множители:

first, add and subtract the term $2x$. Next group the terms by pairs, and then take out the common factors:

$$x^2 - 4x - 12 = (x^2 + 2x) - 6x - 12$$
$$= x(x+2) - 6(x+2) = (x+2)(x-6).$$

Такая форма записи многочлена позволяет найти корни уравнения

This form of the polynomial gives the roots of the equation

$$x^2 - 4x - 12 = 0.$$

Решениями этого уравнение являются $x = -2$ и $x = 6$.

- The solution set for this equation is $x = -2$ and $x = 6$.

• Квадратное уравнение

• The quadratic equation

$$x^2+4x-5=0$$

легко решается с помощью формул (13) и (14):

$$-4=1+(-5) \quad \text{и} \quad -5=1\cdot(-5).$$

Следовательно, уравнение имеет решения $x=-5$ и $x=1$.

Другое решение:

can be easily solved by using formulas (13) and (14):

$$-4=1+(-5) \text{ and } -5=1\cdot(-5).$$

Therefore, the solution set for the equation is $x=-5$ and $x=1$.

Another solution:

$$x^2+4x-5=(x^2-x)+(5x-5)$$
$$=x(x-1)+5(x-1)=(x-1)(x+5)=0 \quad \Rightarrow$$
$$x=1, \qquad x=-5.$$

• Квадратное уравнение

• The quadratic equation

$$x^2-11x+24=0$$

также решается с помощью формул (13) и (14):

$$11=3+8 \quad \text{и} \quad 24=3\cdot 8.$$

Следовательно, уравнение имеет решения $x=3$ и $x=8$.

Проверка: Если $x=3$, то

can be also solved by using formulas (13) and (14):

$$11=3+8 \quad \text{and} \quad 24=3\cdot 8.$$

Hence, the solution set is $x=3$ and $x=8$.

Check up: If $x=3$, then

$$x^2-11x+24=0 \quad\Rightarrow\quad 3^2-33+24\equiv 0 \quad\Rightarrow\quad 0\equiv 0.$$

Уравнение обратилось в тождество.
Пусть теперь $x=8$. Тогда

That is true.
Now let $x=8$. Then

$$x^2-11x+24=0 \quad\Rightarrow\quad 8^2-88+24\equiv 0 \quad\Rightarrow\quad 0\equiv 0.$$

Проверка выполнена.

That is true.

• Чтобы решить кубическое уравнение

• The cubic equation

$$x^3+4x^2+x-6=0$$

нужно разложить многочлен на множители:

can be solved by factoring the polynomial:

$$x^3+4x^2+x-6=(x^3-x^2)+(5x^2-5x)+(6x-6)$$
$$=x^2(x-1)+5x(x-1)+6(x-1)=(x-1)(x^2+5x+6).$$

Теперь разложим на множители квадратный многочлен x^2+5x+6:

Now factor the quadratic polynomial x^2+5x+6:

$$x^2+5x+6=(x^2+2x)+(3x+6)$$
$$=x(x+2)+3(x+2)=(x+2)(x+3).$$

Таким образом,

Thus,

$$x^3+4x^2+x-6=(x-1)(x+2)(x+3)=0.$$

Следовательно, уравнение имеет решения $x=-3,\quad x=-2$ и $x=1$.

Hence, the solution set is $x=-3,\quad x=-2$ and $x=1$.

3.7. Деление многочлена на многочлен

Polynomial Long Division

Если многочлен $P(x)$ обращается в нуль при $x=a$, то из теоремы о разложении (Глава 2, стр. 49) следует, что $x-a$ является одним из множителей многочлена $P(x)$: $P(x)=(x-a)Q(x)$, где $Q(x)$ - неизвестный многочлен.

Чтобы найти $Q(x)$, нужно многочлен $P(x)$ разделить на $x-a$.

Покажем процедуру деления на конкретном примере.

Пример: Сделаем заготовку для деления углом многочлена x^3-4x^2+x+6 на $x-3$, располагая слагаемые в порядке убывания степеней:

If the polynomial $P(x)$ is equal to zero for $x=a$ then in view of the Factor Theorem $x-a$ is a factor of the polynomial $P(x)$ (See Chapter 2, p. 49 for more information): $P(x)=(x-a)Q(x)$, where $Q(x)$ is an unknown polynomial.

The polynomial $Q(x)$ can be found by the division of $P(x)$ by $x-a$. Consider the division algorithm in detail for a particular example.

Example: To perform the polynomial long division of the polynomial x^3-4x^2+x+6 by $x-3$, write the expressions in the form of long division:

$$\begin{array}{l|l} x^3-4x^2+x+6 & x-3 \\ \cline{2-2} & \end{array}$$

Затем разделим член x^3, содержащий старшую степень в числителе, на аналогичный член x знаменателя и запишем ответ x^2 ниже линии:

Next, divide the leading term x^3 in the numerator of the given polynomial by the leading term x of the divisor and write the answer x^2 under the line:

$$\begin{array}{l|l} x^3-4x^2+x+6 & x-3 \\ \cline{2-2} & x^2 \end{array}$$

Умножим x^2 на делитель $x-3$ и запишем ответ $x^2(x-3)=x^3-3x^2$ под многочленом числителя, располагая члены с одинаковыми степенями один под другим:

Multiply the term x^2 by the divisor $x-3$ and write the answer $x^2(x-3)=x^3-3x^2$ under the numerator polynomial, lining up the terms of equal degree:

$$\begin{array}{l|l} x^3-4x^2+x+6 & x-3 \\ \cline{2-2} x^3-3x^2 & x^2 \end{array}$$

Вычитаем выражение в последней линии из выражения в предыдущей:

Then subtract the last line from the line above it:

$$\begin{array}{l|l} -\begin{array}{l} x^3-4x^2+x+6 \\ x^3-3x^2 \end{array} & \begin{array}{l} x-3 \\ \hline x^2 \end{array} \\ \cline{1-1} \qquad -x^2+x+6 & \end{array}$$

Затем вся процедура повторяется: член $(-x^2)$ со старшей степенью полученного многочлена делим на член x делителя, получаем $(-x)$ и прибавляем этот результат к x^2 в правом столбике:

Now we have to repeat the procedure, that is, divide the leading term $(-x^2)$ of the polynomial in the last line by the leading term x of the divisor to obtain $(-x)$, and add this term to the x^2 under the line on the right-hand side:

$$\begin{array}{l|l} -\begin{array}{l} x^3-4x^2+x+6 \\ x^3-3x^2 \end{array} & \begin{array}{l} x-3 \\ \hline x^2-x \end{array} \\ \cline{1-1} \qquad -x^2+x+6 & \end{array}$$

Умножаем $(-x)$ на делитель $x-3$, записывая результат $-x(x-3)=-x^2+3x$ под многочленом числителя, один член под другим с такой же степенью:

Then multiply the term $(-x)$ by the divisor $x-3$ and write the answer $-x(x-3)=-x^2+3x$ under the last line polynomial, lining up terms of equal degree:

$$
\begin{array}{r|l}
-\begin{array}{l} x^3-4x^2+x+6 \\ x^3-3x^2 \end{array} & \underline{x-3} \\
\hline
-x^2+x+6 & x^2-x \\
-x^2+3x &
\end{array}
$$

Вычитаем выражение в последней линии из выражения в предыдущей:

Subtract the last line from the line above it:

$$
\begin{array}{r|l}
-\begin{array}{l} x^3-4x^2+x+6 \\ x^3-3x^2 \end{array} & \underline{x-3} \\
\hline
-\begin{array}{l} -x^2+x+6 \\ -x^2+3x \end{array} & x^2-x \\
\hline
-2x+6 &
\end{array}
$$

Теперь нужно разделить $(-2x)$ на член x со старшей степенью делителя, что дает (-2), и прибавить этот результат к выражению ниже линии в правом столбике. Затем умножим число (-2) на делитель и запишем ответ $-2(x-3)=-2x+6$ под многочленом числителя, один член под другим с такой же степенью:

At the next step we divide the term $(-2x)$ by the leading term x of the divisor to obtain (-2), and add this term to the expression under the line on the right-hand side. Then multiply the number (-2) by the divisor $x-3$, and write the answer $-2(x-3)=-2x+6$ under the last line polynomial, lining up terms of equal degree:

$$
\begin{array}{rl|l}
- & x^3-4x^2+x+6 & x-3 \\ \cline{3-3}
 & x^3-3x^2 & x^2-x-2 \\ \cline{2-2}
- & -x^2+x+6 & \\
 & -x^2+3x & \\ \cline{2-2}
- & -2x+6 & \\
 & -2x+6 & \\ \cline{2-2}
 & 0 &
\end{array}
$$

Процедура деления завершена, и мы получаем окончательно

Therefore, the division procedure is terminated. Thus, we finally get

$$\frac{x^3-4x^2+x+6}{x-3}=x^2-x-2\,.$$

Этот результат можно проверить, умножая обе части последнего равенства на делитель:

The easiest way to check the answer algebraically is to multiply both sides by the divisor:

$$x^3-4x^2+x+6=(x^2-x-2)(x-3)\,.$$

Упростим правую часть:

Expand and simplify the expression on the right side:

$$(x^2-x-2)(x-3)=x^3-x^2-2x-3x^2+3x+6=x^3-4x^2+x+6\,.$$

Мы получили тождество, и, следовательно, подтвердили правильность полученного результата. Таким образом, многочлен x^3-4x^2+x+6 представлен в виде произведения многочленов меньших степеней.

Thus, we have the identity and so the answer is correct.
By polynomial long division, the polynomial x^3-4x^2+x+6 is factored, that is, it is written as the product of polynomials with lower degrees.

3.8. Квадратные неравенства

Quadratic Inequalities

Квадратное неравенство можно представить в одной из следующих форм:

A quadratic inequality can be put into one of the following forms:

$$ax^2+bx+c>0\,, \qquad (15a)$$

$$ax^2+bx+c\ge 0\,, \qquad (15b)$$

где x - переменная; a, b и c - константы ($a\ne 0$).
Чтобы решить квадратное неравенство, нужно сначала решить соответствующее

where x is the variable; a, b and c are constants ($a\ne 0$).
In order to solve the quadratic inequality it is necessary to solve the corresponding quadratic equation:

квадратное уравнение:

$$ax^2+bx+c=0.$$

Возможны три случая: $D<0$, $D=0$ или $D>0$.

Если $D<0$, то уравнение не имеет вещественных корней. Это означает, что выражение ax^2+bx+c сохраняет свой знак при любых значениях x:

$ax^2+bx+c>0$, если $a>0$;

$ax^2+bx+c<0$, если $a<0$.

There are three possible cases: $D<0$, $D=0$ or $D>0$.

If $D<0$, then the equation has no real roots. Hence, the expression ax^2+bx+c holds its sign for any value of x:

$ax^2+bx+c>0$ if $a>0$,

$ax^2+bx+c<0$ if $a<0$.

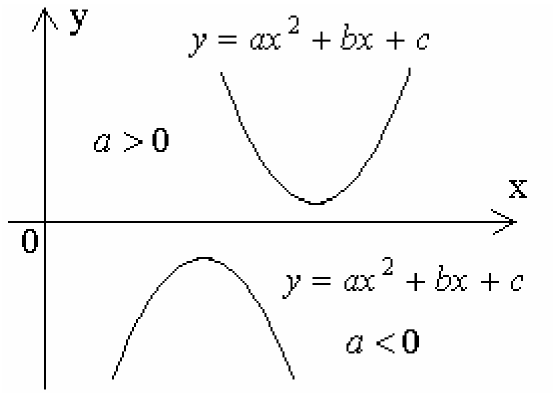


Рис. 1 | Fig. 1

Если $D=0$, то корни уравнения совпадают друг с другом: $x_1=x_2$. Поэтому выражение ax^2+bx+c имеет тот же знак, что и коэффициент a - для всех x, кроме точки $x=x_1=x_2$, в которой многочлен обращается в нуль.

If $D=0$, then the roots for the equation coincide with each other: $x_1=x_2$. So the expression ax^2+bx+c has the same sign as the coefficient a for all values x except $x=x_1=x_2$, where it is equal to zero.

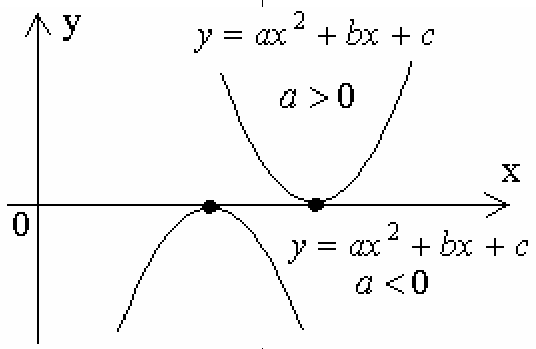


Рис. 2 | Fig. 2

Если $D > 0$, то уравнение имеет два вещественных корня, x_1 и x_2 ($x_1 < x_2$), а многочлен $ax^2 + bx + c$ меняет свой знак при переходе через точки x_1 и x_2. Эти точки разбивают числовую ось на три интервала: $(-\infty, x_1)$, (x_1, x_2) и (x_2, ∞).

If $D > 0$, then the equation has two real roots, x_1 and x_2 ($x_1 < x_2$), and the polynomial $ax^2 + bx + c$ changes its sign when the variable x jumps over x_1 or x_2. These points divide the number line into three intervals: $(-\infty, x_1)$, (x_1, x_2) and (x_2, ∞).

Если $a > 0$, то многочлен положителен на интервалах $(-\infty, x_1)$ и (x_2, ∞), так что решением неравенства (15a) является множество

If $a > 0$, then the polynomial is greater than zero on the intervals $(-\infty, x_1)$ and (x_2, ∞). Therefore, the solution set for inequality (15a) is the union of the sets $x < x_1$ and $x > x_2$:

$$\{x \mid x < x_1\} \cup \{x \mid x > x_2\}.$$

Если же $a < 0$, то решением неравенства является множество $\{x \mid x_1 < x < x_2\}$.

If $a < 0$, then the solution set for the inequality is $\{x \mid x_1 < x < x_2\}$.

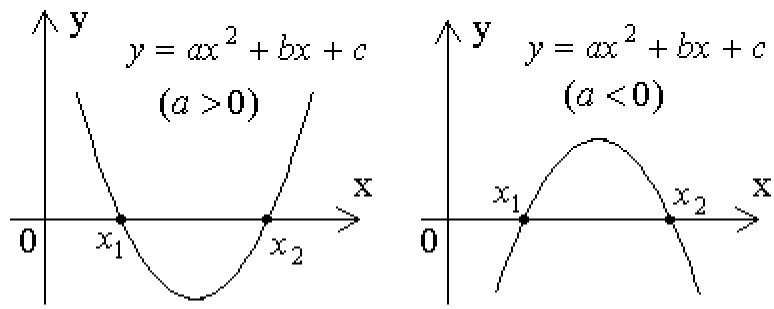


Рис. 3 | Fig. 3

При решении неравенств полезно использовать числовую ось.

We can also use the number line to find the solution set of the inequality.

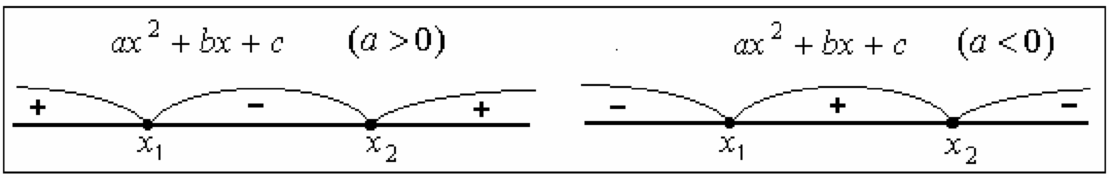


Рис. 4 | Fig. 4

Примеры:

- Чтобы решить неравенство

Examples:

- In order to solve the inequality

$$x^2+2x-8>0$$

нужно сначала решить уравнение

it is necessary to solve the equation

$$x^2+2x-8=0.$$

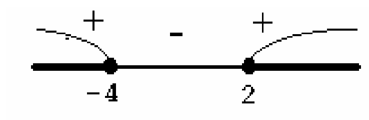
Это уравнение имеет два корня: $x_1=-4$ и $x_2=2$.

Следовательно, совокупностью решений неравенства является объединение множеств $\{x\,|\,x<-4\}$ и $\{x\,|\,x>2\}$: $\{x\,|\,x<-4\}\cup\{x\,|\,x>2\}$.

This equation has two real roots: $x_1=-4$ and $x_2=2$.

Therefore, the solution set for the inequality is the union of the sets $\{x\,|\,x<-4\}$ and $\{x\,|\,x<-4\}$:

$$\{x\,|\,x<-4\}\cup\{x\,|\,x>2\}.$$



- Чтобы решить неравенство

- In order to solve the inequality

$$x^2-4x-5\le 0$$

нужно найти корни уравнения

it is necessary to solve the equation

$$x^2-4x-5=0.$$

Это уравнение имеет два корня: $x_1=-1$ и $x_2=5$.

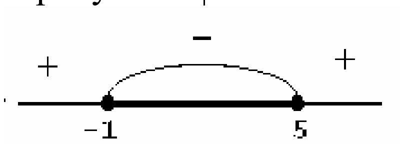
Следовательно, $x^2-4x-5\le 0$, если $-1\le x\le 5$.

Совокупность решений неравенства показана на рисунке.

This equation has two real roots: $x_1=-1$ and $x_2=5$.

Therefore, $x^2-4x-5\le 0$ if $-1\le x\le 5$.

The solution set for the inequality is shown in the figure below:



- Дано неравенство

- Given the inequality

$$x^2+6x+9>0.$$

Корни уравнения

The equation

$$x^2+6x+9=0$$

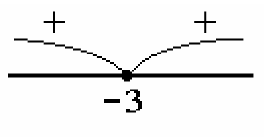
совпадают друг с другом и равны -3.

Следовательно, $x^2+6x+9>0$ для любых вещественных x, кроме $x=-3$.

has a twice repeated root

$$x_1=x_2=-3.$$

Therefore, $x^2+6x+9>0$ for any $x\in R$ except $x=-3$.



- Дано неравенство

- Given the inequality

$$x^2 - 4x + 4 \le 0 .$$

Корни уравнения

The roots of the equation

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

совпадают друг с другом: $x_1 = x_2 = 2$.

coincide with each other: $x_1 = x_2 = 2$.

Это означает, что $x^2 - 4x + 4 > 0$ при $x \ne 2$, и $x^2 - 4x + 4 = 0$ при $x = 2$.

Hence, $x^2 - 4x + 4 > 0$ if $x \ne 2$, and $x^2 - 4x + 4 = 0$ if $x = 2$.

Следовательно, неравенство удовлетворяется только при $x = 2$.

Therefore, the solution set for the inequality is $x = 2$.

- Решить неравенство:

- Solve the following inequality:

$$x^2 - 4x + 5 \le 0 .$$

Так как уравнение

Since the equation

$$x^2 - 4x + 5 = 0$$

не имеет вещественных корней, то многочлен $x^2 - 4x + 5$ положителен при любых $x \in R$.
Следовательно, решением неравенства является пустое множество Ø.

has no real roots, the quadratic polynomial $x^2 - 4x + 5$ is positive for any $x \in R$.
Therefore, the solution set is the empty set Ø.

4. Функции

4.1. Введение в декартовую систему координат

Рассмотрим две взаимно перпендикулярные числовые оси, лежащие в одной плоскости, одна из которых – горизонтальная, а другая - вертикальная. Эти линии являются осями декартовой системы координат. Точка пересечения осей образует начало координат. Горизонтальная линия называется осью $0x$, точки на которой справа от начала координат соответствуют положительным числам, а слева – отрицательным. Вертикальная линия называется осью $0y$. Эта ось положительна выше начала координат, а ниже – отрицательна. Координатные оси делят координатную плоскость на четыре квадранта (четверти), которые нумеруются в направлении против часовой стрелки.

Любая точка P плоскости $x0y$ описывается упорядоченной парой (x, y) вещественных чисел x и y, которые называются, соответственно, x и y координатами точки.

Functions

Introduction to the Cartesian Coordinate System

Let us consider two number lines in the plane, one horizontal and one vertical.

The number lines make up the axes of the Cartesian coordinate system. These two perpendicular lines intercross at some point that is called the origin.

The horizontal line is called the x-axis, the points of which are positive to the right and negative to the left from the origin.

The vertical line is called the y-axis, which is positive going up and negative going down from the origin.

The x-axis and y-axis divide the x, y-plane into four parts called quadrants. The quadrants are numbered counter-clockwise form one to four.

Any point P in the $x, y-$plane can be described by an ordered pair (x, y) of real numbers x and y that are called the $x-$ coordinate and $y-$ coordinate of the point.

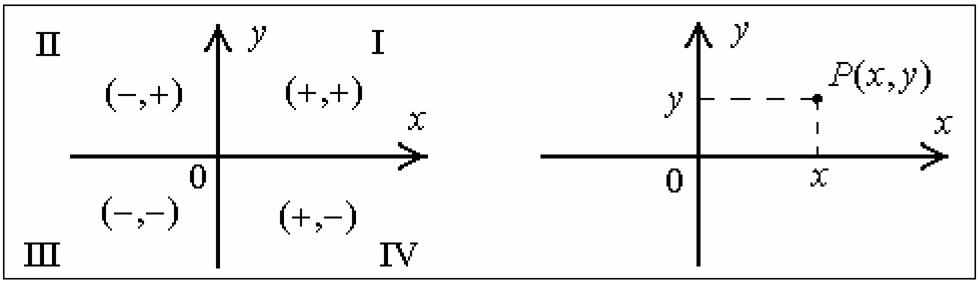


Рис. 1 | Fig. 1

Первую координату, x, называют также **абсциссой**; она описывает положение точки от начала координат вдоль оси $0x$. Вторая координата, y, называется **ординатой**; она описывает положение точки от начала координат вдоль оси $0y$. Упорядоченную пару координат записывают в виде (x, y).

Началу координат соответствует пара чисел (0,0). Обычно, однако, для ссылки на начало координат используют точку 0.

Абсциссы точек первого и четвертого квадрантов положительны, а второго и третьего – отрицательны.

Ординаты точек первого и второго квадрантов положительны, а третьего и четвертого - отрицательны.

The first coordinate, x, is called an **abscissa**; it describes the displacement of the point from the origin along the x-axis. The second number, y, is called an **ordinate**; it describes the displacement of the point away from the origin along the y-axis.

The ordered pair is always listed as (x, y). The number pair (0,0) is assigned to the origin. The point 0 often refers to the origin (0,0).

The points have positive x-coordinates if they lye in the first or fourth quadrant, while x-coordinates are negative if the points lye in the second or third quadrant.

The y- coordinates are positive for points of the first and second quadrants, and they are negative for points of the third and fourth quadrants.

4.2. Основные понятия

Если каждому значению x из некоторой области D поставлено в соответствие значение переменной y, то говорят, что в области D задана функция y аргумента x:

$$y = f(x).$$

Это типичное обозначение функции. Область D называется **областью определения** функции, а совокупность значений переменной y - **областью** ее **изменения**.

Уравнение $y = f(x)$ можно интерпретировать графически как уравнение кривой в *x,y*-

Basic Conceptions

If each value of $x \in D$ is associated with one value of a variable y, then it is said that a function y of the argument x is defined on the set D:

$$y = f(x).$$

The equation above is the most commonly used representation of a function. It is called the function notation,

The set D is called the **domain of definition**, and the set of all values of y is called the **range** of the function.

The equation $y = f(x)$ can be interpreted graphically as an плоскости.

Говорят, что функция f задает отображение множества X на множество Y, если для любого $y \in Y$ существует такое $x \in X$, что $f(x) = y$. Это отображение является взаимно однозначным, если из равенства $f(x) = f(z)$ следует, что $x = z$.

Примеры:

- Если $f(x) = x^2$, то $f(3) = 3^2 = 9$
- Областью определения функции $y = 4x + 1$ является множество $D = \{x \mid x \in R\}$, а областью ее изменения - $\{y \mid y \in R\}$.
- Областью определения функции $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$ является $D = \{x \mid x \in R, x \neq 2\}$, так как знаменатель не может быть равен нулю. Однако функция $y = f(x)$ может принимать любые значения, так что областью ее изменения является множество $\{y \mid y \in R\}$.

Функции можно также задавать с помощью таблиц. Примером такого задания является нижеприведенная таблица.

equation of a line in the $x, y -$plane.

A function f is said to map the set X onto Y if for every y in Y, there is some x in X such that

$$f(x) = y.$$

A function f is said to be a one-to-one relation, if $f(x) = f(z)$ implies $x = z$.

Examples:

- If $f(x) = x^2$, then $f(3) = 3^2 = 9$
- The domain of the function $y = 4x + 1$ is $D = \{x \mid x \in R\}$ and its range is $\{y \mid y \in R\}$.
- The domain of the function

$$f(x) = \frac{x}{x-2}$$

is $D = \{x \mid x \in R, x \neq 2\}$ since a denominator cannot be equal to zero. However, the function $y = f(x)$ can have any value, so its range is $\{y \mid y \in R\}$.

Functions can be also determined by means of tables. See, for example, the table below.

Таблица 1 | **Table 1**

x	- 3	- 2	- 1	0	1	2	3
$f(x)$	5	2	0	- 1	3	4	5

Кроме того, зависимость между переменными x и y можно задавать графически. Каждая пара чисел в вышеприведенной таблице задает точку в плоскости $x0y$. Если нанести эти точки и соединить их плавной кривой, то мы получим график функции $y = f(x)$, показанный на Рис. 2.

One can also use a graphic representation of the relation between variables x and y. Each ordered pair in the table corresponds to a point in $x, y-$plane. If we connect these points with a smooth curve then we obtain a graph of the function $y = f(x)$, which is shown in the Fig. 2.

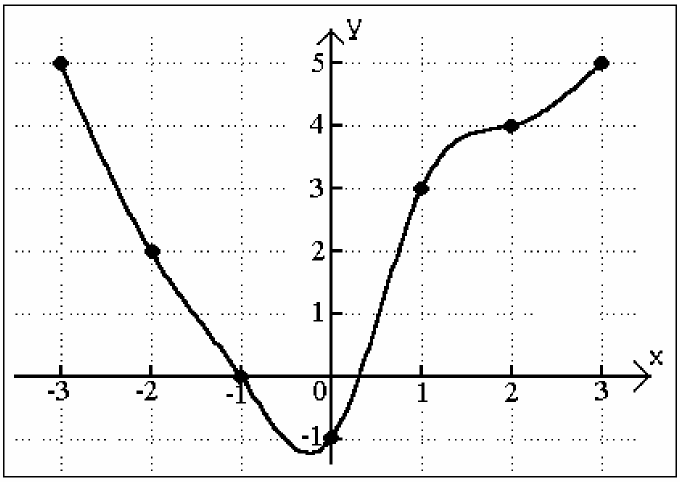


Рис. 2 | Fig. 2

Графики полезны для иллюстрации уравнений, т.е. уравнения можно воспринимать через графики. Иногда графический метод используется для решения уравнений.

Совокупность упорядоченных пар (x, y) задает некоторую функцию $y = f(x)$. Обратная зависимость (y, x) задает обратную функцию $y = g(x)$.

Функции $f(x)$ и $g(x)$ называют взаимно-обратными, если

The graphs are used to illustrate equations, that is, one can see the equation through the graph. Sometimes the graphical representation is used to find the solution of equations.

A set of ordered pairs (x, y) determines some function $y = f(x)$. The inverse relation (y, x) determines the inverse function $y = g(x)$.

The functions, $f(x)$ and $g(x)$, are said to be **inverse** of each other if

$$f(g(x)) = g(f(x)) = x.$$

Обратную функцию часто обозначают символически как $f^{-1}(x)$, так что

The inverse function is often denoted by the symbol $f^{-1}(x)$. Therefore,

$$f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x. \qquad (1)$$

Чтобы найти обратную функцию для $y = f(x)$, нужно x заменить на y, y заменить на x и решить полученное уравнение относительно переменной y.

In order to find the inverse function of $y = f(x)$ it is necessary to replace x with y and y with x. Then solve the equation for y.

Пример; Найти обратную функцию для $y = 7x - 2$.

Решение:

Example: Find inverse functions of $y = 7x - 2$.

Solution:

$$y = 7x - 2 \quad \Rightarrow \quad x = 7y - 2 \quad \Rightarrow \quad y = (x+2)/7.$$

Таким образом, $f^{-1}(x) = \dfrac{x+2}{7}$.

Thus, $f^{-1}(x) = \dfrac{x+2}{7}$.

Проверим, действительно ли эта функция является обратной для $f(x) = 7x - 2$:

Let us check whether this function is inverse of $f(x) = 7x - 2$:

$$f(f^{-1}(x)) = f(\frac{x+2}{7}) = 7\frac{x+2}{7} - 2 = (x+2) - 2 = x,$$

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(7x-2) == \frac{(7x-2)+2}{7} = x.$$

Проверка показала правильность полученного результата.

График обратной функции f^{-1} является зеркальным отражением графика f относительно прямой $y = x$.

The inverse function test is correct.

If the graph of the function f is given then the graph of f^{-1} is reflected across the line $y = x$.

4.3. Графики некоторых функций

Для построения графика функции $y = f(x)$ нужно знать точки, в которых линия пересекает координатные оси или касается их. Координаты этих точек определяют отрезки, отсекаемые графиком функции на осях $0x$ и $0y$. Так как ординаты любых точек, лежащих на оси $0x$, равны нулю, то для нахождения отрезков, отсекаемых линией $y = f(x)$ на оси $0x$, нужно решить уравнение $f(x) = 0$. Отрезки, отсекаемые этой линией на оси $0y$, находятся из условия $y = f(0)$.

Рассмотрим графики некоторых функций.

I. **Линейную функцию** можно представить в виде:

Graphs of Some Functions

In order to graph a function $y = f(x)$ it is necessary to find the points at which a curve or line intersects or touches the x-axis and y-axis.

The x-coordinates of a graph, which are common with x-axis are called x-intercepts. In order to find the x-intercept, set $y = 0$ and solve the equation $f(x) = 0$ for x.

The y- coordinates of a graph, which are common with y-axis are the y- intercepts. To find the y-intercepts, evaluate $f(0)$: $y = f(0)$.

Let us consider graphs of some functions.

A **linear function** can be expressed in the following form:

$$y = kx + b. \qquad (2)$$

Ее графиком является прямая линия. Поэтому уравнение (2) называют также уравнением прямой в форме с угловым коэффициентом. Если прямая проходит через точки $P_1(x_1, y_1)$ и $P_2(x_2, y_2)$, то ее угловой коэффициент равен

The graph of this function is a straight line and so equation (2) is also called the equation of a straight line in the slope-intercept form.

The slope of the line passing through the points $P_1(x_1, y_1)$ and $P_2(x_2, y_2)$ is

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \qquad (3)$$

Для вычисления углового коэффициента можно использовать любые точки прямой, поскольку он не зависит от выбора таких точек.

It does not matter which two points are selected on a straight line; the slope is always the same.

Угловой коэффициент горизонтальной прямой равен

The slope of a horizontal line equals zero because in this case нулю, так как в этом случае $y_1 = y_2$.

Угловой коэффициент вертикальной прямой не определен, поскольку $x_1 = x_2$ и знаменатель в равенстве (3) обращается в нуль.

Графики некоторых линейных функций показаны на Рис. 3. Горизонтальная прямая является графиком функции $y = 4$. Вертикальная линия описывается уравнением $x = -4$, а две наклонные прямые имеют угловые коэффициенты противоположных знаков.

$y_1 = y_2$.

The slope of a vertical line is undefined because in this case $x_1 = x_2$, but one never divides by zero.

The graphs of some linear functions are shown in the drawing below. $x = -4$ and $y = 4$ are examples of equations of vertical and horizontal lines. The slope of the vertical line $x = -4$ is undefined.

There are also shown the lines with positive and negative slopes.

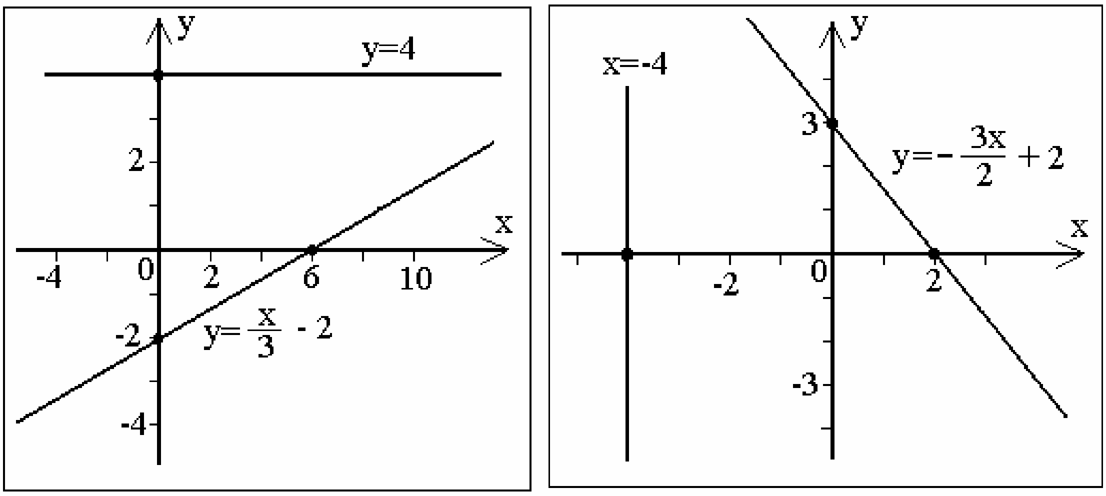


Рис. 3 | Fig. 3

На рис. 4 показаны графики функций, аргументы которых входят под знак абсолютной величины.

Функция $y = |x|$ симметрична относительно оси $0x$ и пересекает оси в начале координат.

График функции $y = |x+1|$ отличается от предыдущего только тем, что он смещен в

The graphs of some functions involving absolute values are shown in Fig.4.

The function $y = |x|$ is symmetric about the $y-$axis, and its intercepts are at the origin.

The graph of the function $y = |x+1|$ is exactly the same, but the only difference is its отрицательном направлении оси $0x$ на одну единицу.

displacement from the origin along the negative direction of the x-axis at the unit value.

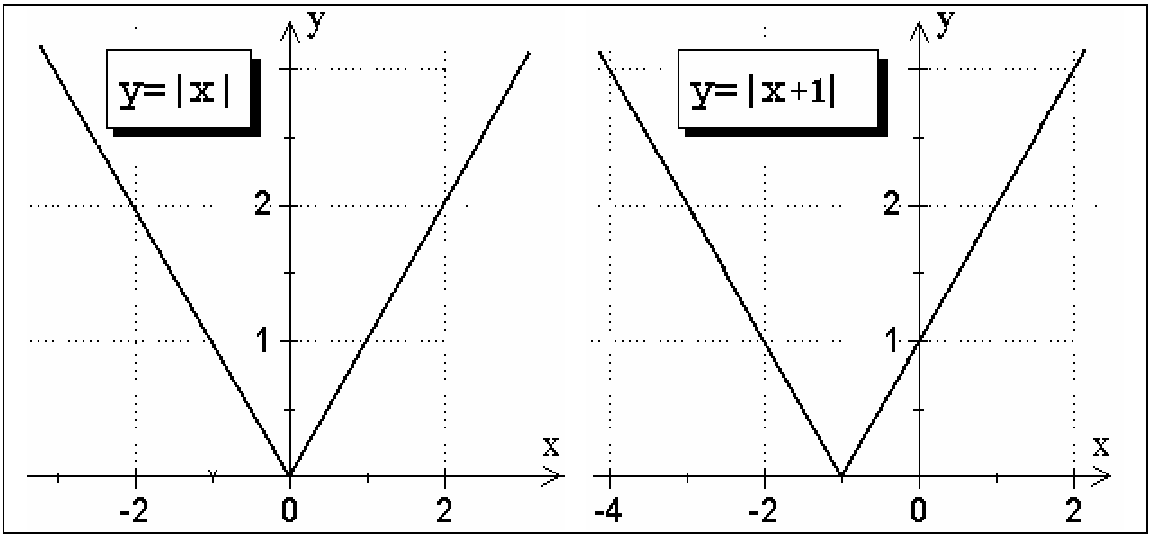


Рис. 4 | Fig. 4

II. **Квадратичная функция** имеет вид

A **quadratic function** is the function of the form

$$y = ax^2 + bx + c, \tag{4}$$

где $a \neq 0$. Графиком этой функция является парабола.

Преобразуем квадратичную функцию, выделив полный квадрат:

with a non-zero coefficient a. The graph of this function is a parabola.
Let us complete the perfect square to get another form of the quadratic function:

$$y = a(x + \frac{b}{2a})^2 + (c - \frac{b^2}{4a}). \tag{5}$$

Используя эту форму, легко доказать следующие свойства параболы:

- Вершина параболы находится в точке с координатами $x_0 = -\frac{b}{2a}$ и $y_0 = c - \frac{b^2}{4a}$. В частности, вершина параболы $y = ax^2$ находится в начале координат. Если $b \neq 0$, то парабола смещена вдоль оси $0x$.

Using this form one can easily prove the following properties of parabolas:

- The coordinates of the vertex of a parabola are $x_0 = -\frac{b}{2a}$ and $y_0 = c - \frac{b^2}{4a}$. In particular, the vertex of the parabola $y = ax^2$ is at the origin. If $b \neq 0$ then a parabola is shifted along the $x-$axis.

• Парабола симметрична относительно вертикальной оси $x=-b/(2a)$, проходящей через ее вершину.
• Парабола пересекает ось $0y$ в точке с координатой $y=c$. Если существуют точки пересечения с осью $0x$, то они являются корнями уравнения $ax^2+bx+c=0$.
• Отметим, что абсциссы точек пересечения параболы с осью $0x$ являются решениями квадратного уравнения

• A parabola is symmetric with respect to the vertical line $x=-b/(2a)$, which passes through the vertex.
• y-intercept of a parabola equals c. If there exist x-intercepts of a parabola then they can be founded by solving of the quadratic equation $ax^2+bx+c=0$.

• Note that x-intercepts of a parabola is the solution set for the quadratic equation

$$ax^2+bx+c=0.$$

На Рис. 5 приведены два примера графиков параболы.

There are given examples of graphs of parabolas in Fig. 5.

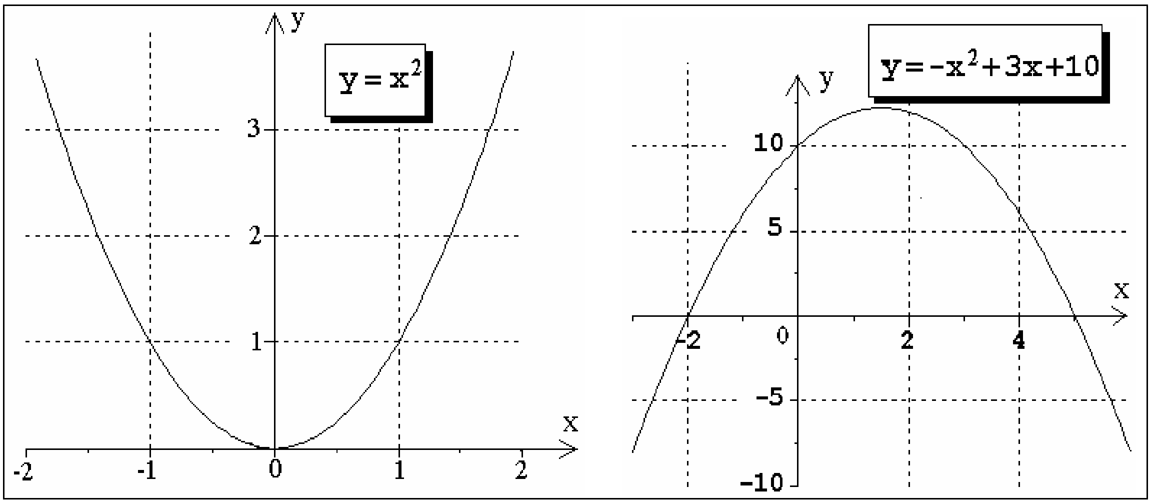


Рис. 5 | Fig. 5

Пример: Построить график квадратичной функции

Example: Plot the graph of the quadratic function

$$f(x)=2x^2-6x+5.$$

Решение: Выделим полный квадрат

Solution: Complete the perfect square:

$$f(x)=2x^2-6x+5=2(x^2-3x)+5$$

$$=2(x^2-2\frac{3}{2}x+\frac{9}{4})-\frac{9}{2}+5=2(x-\frac{3}{2})^2+\frac{1}{2}.$$

Уравнение $f(x)=0$ не имеет вещественных корней, поскольку $f(x)>0$ для любых $x \in R$. Следовательно, парабола не пересекается с осью $0x$.

На оси $0y$ парабола отсекает отрезок $y = f(0) = 5$, а ее вершина находится в точке $(3/2, 1/2)$.

Осью симметрии параболы является вертикальная прямая $x = 3/2$.

График параболы $y = 2x^2 - 6x + 5$ показан на Рис. 6.

There are no real roots for the equations $f(x)=0$, because $f(x)>0$ for any $x \in R$. Hence, there are no $x-$intercepts.

The $y-$ intercept can be easily founded from the condition $y = f(0)$, which implies $y = 5$.

The graph of the given function is the parabola with the vertex at the point $(3/2, 1/2)$.

The vertical line $x = 3/2$ is the axis of symmetry of the parabola.

The graph of the parabola $y = 2x^2 - 6x + 5$ is shown in Fig. 6.

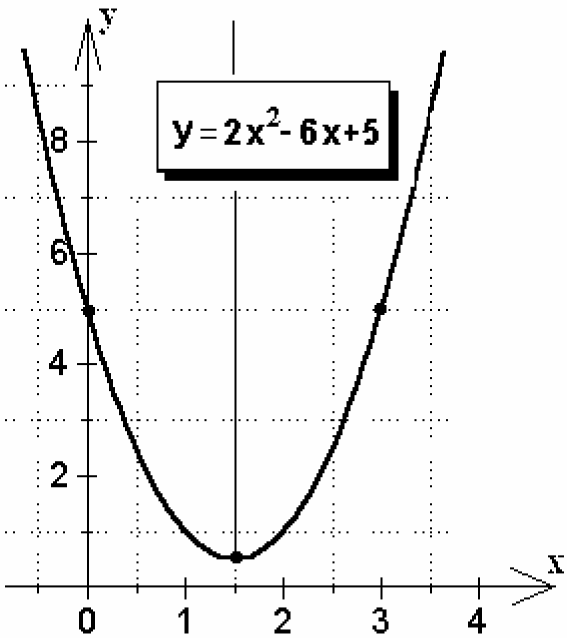


Рис. 6 | Fig. 6

III. Рассмотрим теперь **кубические многочлены**, т.е. функции следующего вида:

Let us consider now **cubic polynomials**, that is, the functions of the following form:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \qquad (a \neq 0). \qquad (6)$$

Типичные графики кубических парабол представлены на Рис. 7-8.

A few typical graphics of cubic parabolas are represented in Fig. 7 and Fig. 8.

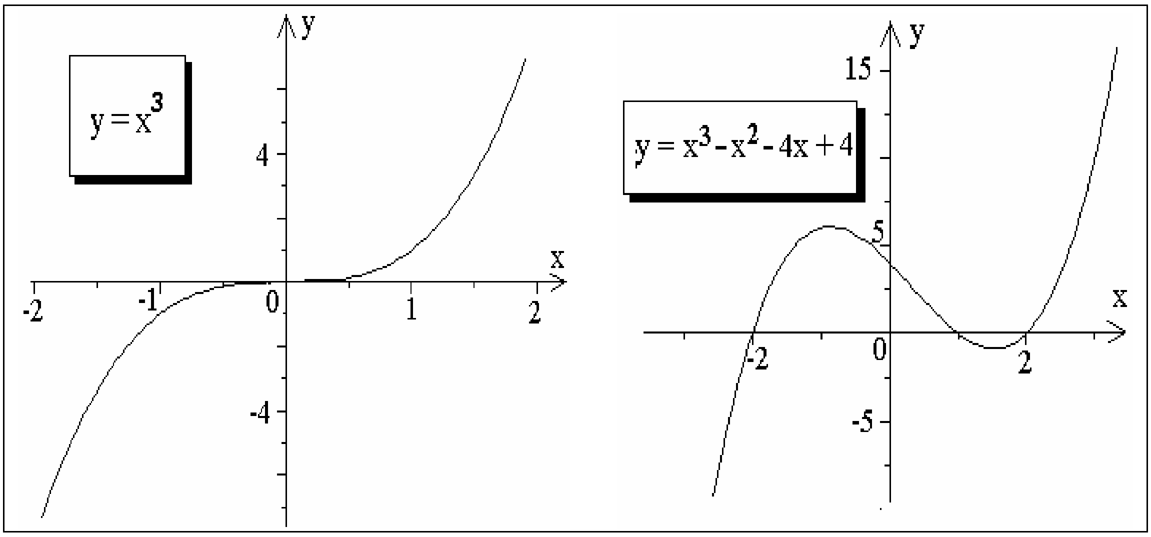


Рис. 7 | Fig. 7

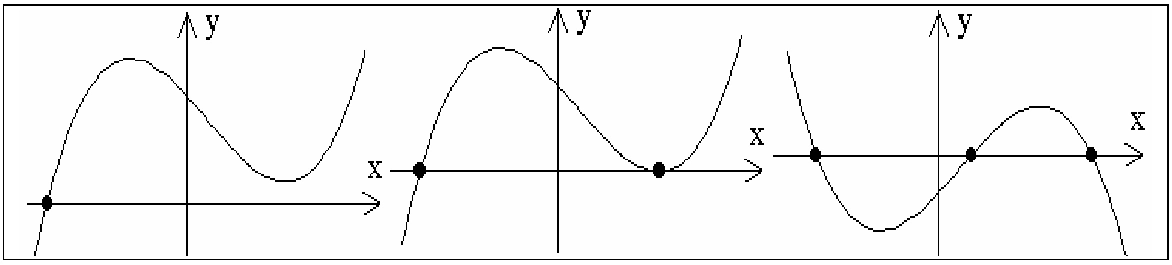


Рис. 8 | Fig. 8

Поведение кубической параболы при x стремящемся к плюс или минус бесконечности определяется членом ax^3 со старшей степенью; при $a > 1$ функция стремится к бесконечности того же знака, что и x.

График любой кубической параболы пересекается с осью ординат и имеет, по крайней мере, одну точку пересечения с осью абсцисс. Однако кубическая парабола может также пересекать ось абсцисс в двух или трех точках (но не более). Это означает, что уравнение вида

If x tends to infinity then the behaviors of a cubic polynomial is determined by the major term ax^3. When $a > 1$, the function increases to a positive infinity as x approaches a positive infinity, while it decreases to a negative infinity as x approaches a negative infinity.

For graph of any cubic polynomial there exists only one $y-$ intercept and at least one $x-$intercept. However, some cubic polynomials have 2 or 3 $x-$intercepts. It means that the number of solutions of any cubic equation

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \qquad (7)$$

может иметь от одного до трех корней включительно.

На рис. 9 представлены графики еще одной часто встречающейся функции – гиперболы.

is exactly the same, namely, one, or two, or three.

In Fig. 9 there are graphs of hyperbola, which is a frequently used function.

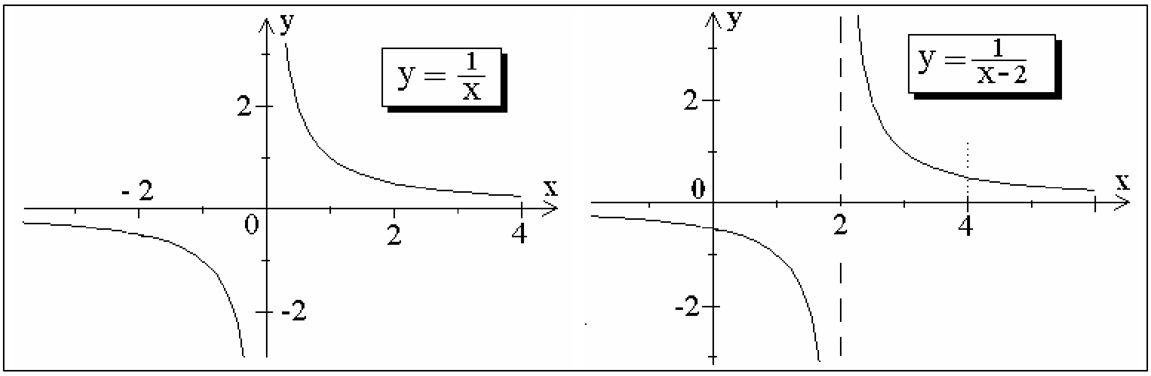


Рис. 9 | Fig. 9

4.4. Симметрия функций

Symmetry of Functions

Предположим, что для любого x из области определения функции $f(x)$ в эту область входит и $(-x)$.

Тогда функция $f(x)$ называется **четной**, если для любых значений x из области ее определения

Assume that for every x in the domain of a function $f(x)$, $(-x)$ also enters into the domain.

A function $f(x)$ is called an **even** function if for any x in its domain

$$f(-x) = f(x). \qquad (7)$$

График четной функции симметричен относительно оси ординат.

Примеры четных функций:

The graph of the even function is symmetric with respect to the y-axis.

Examples of even functions:

$$x^2, \quad x^4, \quad 1/x^2, \quad |x|.$$

Функция $f(x)$ называется **нечетной**, если

A function $f(x)$ is an **odd** function if

$$f(-x) = -f(x) \qquad (8)$$

для любых значений x из области ее определения.

График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

for all x in its domain.

The graph of the odd function is symmetric with respect to the origin.

Примеры нечетных функций:

Examples of odd functions:

$$x, \quad x^3, \quad x^5, \quad 1/x, \quad \sqrt[3]{x}.$$

Примеры графиков четной и нечетной функций показаны на Рис. 10.

Graphic examples of even and odd functions are shown in Fig. 10.

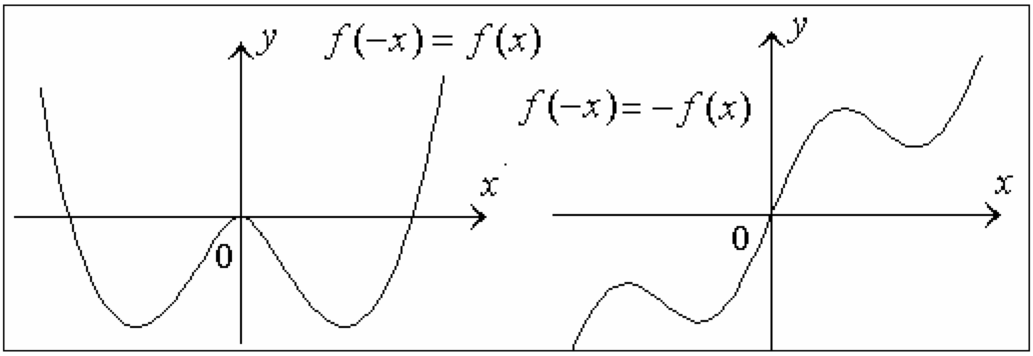


Рис. 10 | Fig. 10

Свойства четности функций:

- Сумма и произведение любого числа четных функций есть четная функция.
- Сумма нечетных функций есть нечетная функция.
- Произведение двух нечетных функций есть четная функция.
- Произведение четной и нечетной функций есть нечетная функция.

Большинство функций не являются ни четными, ни нечетными.

Even-odd properties of functions:

- The sum and product of any number of even functions is an even function.
- The sum of odd functions is an odd function.
- The product of two odd functions is an even function.
- The product of an even function and an odd function is an odd one.

Most functions are neither even nor odd.

Функция $f(x)$ называется **периодической**, если существует такое положительное число T, что для всех значений x из области ее определения

A function $f(x)$ is called **periodic** if there exists a positive number T such that for all x in its domain

$$f(x+T) = f(x). \qquad (9)$$

Наименьшее число T называется **периодом** функции.

Все тригонометрические функции, а также их комбинации являются периодическими.

The smallest number T is the **period** of the function.

All trigonometric functions are periodic functions and so are their combinations.

Пример периодической функции представлен на Рис. 11.

An example of a periodic functions is given in Fig. 11.

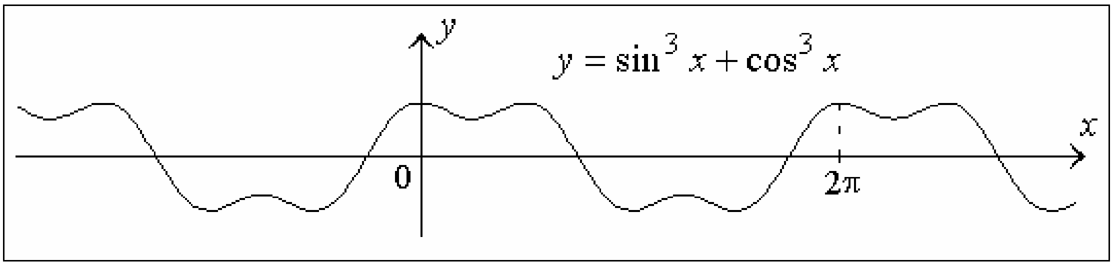


Рис. 11 | Fig. 11

4.5. Показательные функции

Exponential Functions

Показательная функция имеет следующий вид:

The exponential function has the following form:

$$f(x) = a^x \tag{10}$$

где a - основание (($a > 0$ и $a \neq 1$).

Областью определения этой функции являются все вещественные числа, тогда как в область ее изменения входят только положительные числа.

Показательные функции имеют следующие свойства:

- $a^x > 0$ для любых вещественных значений x.
- $a^x = a^y$ если и только если $x = y$.
- Если $a > 1$, то из неравенства $x < y$ следует, что $a^x < a^y$.

Если $0 < a < 1$, то из неравенства $x < y$ следует, что $a^x > a^y$.

- Если $a > 1$, то

при $x \to +\infty$ функция $a^x \to +\infty$;
при $x \to -\infty$ функция $a^x \to 0$.

- Если $0 < a < 1$, то

при $x \to +\infty$ функция $a^x \to 0$;
при $x \to -\infty$ функция $a^x \to +\infty$.

where a is the base ($a > 0$ and $a \neq 1$).

The domain of any exponential function consists of all real numbers while its range consists of positive real numbers only.

Exponential functions have the following properties

- The value of a^x is positive for all x and can never be equal to zero.
- $a^x = a^y$ if and only if $x = y$.
- If $a > 1$ then the inequality $x < y$ implies $a^x < a^y$.

If $0 < a < 1$ then the inequality $x < y$ implies $a^x > a^y$.

- If $a > 1$ then the function a^x ends at infinity as x tends to plus infinity, and $a^x \to 0$ as $x \to -\infty$.
- If $0 < a < 1$ then the function a^x tends to zero as $x \to +\infty$, and $a^x \to +\infty$ as $x \to -\infty$.

• График функции $y=a^x$ располагается выше оси $0x$ и не пересекает эту ось; однако он пересекает ось $0y$ в точке с координатами $(0,1)$.

• Графики функций $f(x)=a^{-x}$ и $y=a^x$ дают зеркальные отражения друг друга относительно оси $0y$.

• A graph of the exponential function lies above the x-axis, has no x-intercepts, and includes the point $(0,1)$.

• The graphs of $f(x)=a^{-x}$ and $f(x)=a^x$ are reflections of each other through the y-axis.

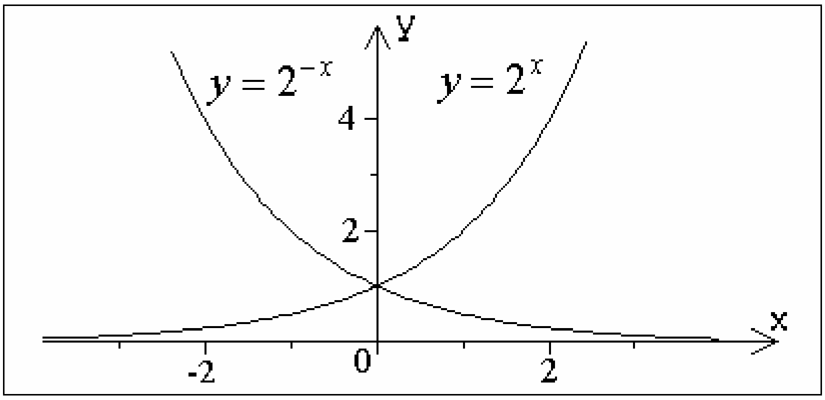


Рис. 12 | Fig. 12

4.6. Логарифмические функции

Пусть $x>0$, $a>0$ и $a\neq 1$. Тогда логарифмом числа x по основанию a называется такое число y, в которое нужно возвести a, чтобы получить x. Это означает, что $y=\log_a x$, если $x=a^y$. Из этого определения сразу же следуют полезные тождества:

Logarithmic Functions

Let a and x be positive real numbers but $a\neq 1$. Then the logarithm of x to the base a is the exponent of the power to which the base a must be raised to equal a given number x, that is, $y=\log_a x$ whenever $x=a^y$.
This definition implies the following useful identities:

$$x=a^{\log_a x}, \tag{11}$$

$$y=\log_a a^y. \tag{12}$$

Пример: Логарифм 100 по основанию 10 равен 2, так как $10^2=100$:

Example: The logarithm of 100 to the base 10 is 2 since $10^2=100$:

$$\log_{10} 100=2.$$

Логарифмическая функция позволяет записать решение показательного уравнения $x = a^y$ для переменной y в терминах переменной x: $y = \log_a x$.

Логарифмическая функция $y = \log_a x$ определена только для положительных вещественных значений x, тогда как областью ее изменения является вся числовая ось. Функцию $\log_{10} x$ принято обозначать просто как $\lg x$.

The logarithm function is suitable for solving the exponential equation $x = a^y$ for y in terms of the variable x: $y = \log_a x$.

The logarithmic function has a domain that consists only of positive real numbers while its range consists of all real numbers. The base of the logarithm must be positive and different from 1.

The function $\log_{10} x$ is referred to as simply $\log x$.

Задача 1: Доказать, что функции $f(x) = \log_a x$ и $g(x) = a^x$ являются взаимно обратными.

Problem 1: Prove that the functions $f(x) = \log_a x$ and $g(x) = a^x$ are the inverse of each other.

Доказательство: С учетом тождеств (11) и (12) мы получаем

Proof: In view of identities (11) and (12) we obtain

$$f(g(x)) = f(a^x) = \log_a a^x \equiv x,$$

$$g(f(x)) = g(\log_a x) = a^{\log_a x} \equiv x.$$

Таким образом,

$$f(g(x)) = g(f(x)) = x,$$

что и требовалось доказать.

Thus, $f(g(x)) = g(f(x)) = x$.

Hence, the problem.

Следствие: Так как функции $f(x) = \log_a x$ и $g(x) = a^x$ являются взаимно-обратными, то их графики являются зеркальными отражениями друг друга относительно прямой $y = x$.

Corollary: Since the functions $f(x) = \log_a x$ and $g(x) = a^x$ are the inverse of each other, their graphs are mirror images of each other across the line $y = x$.

Задача 2: Доказать следующие тождества:

Problem 2: Prove the following identities:

$$\log_a 1 = 0, \qquad (13)$$

$$\log_a a = 1. \qquad (14)$$

Доказательство:

Proof:

$$a^0 = 1 \quad \Rightarrow \quad \log_a 1 = 0,$$

$$a^1 = a \quad \Rightarrow \quad \log_a a = 1.$$

Задача 3: Доказать тождество

Problem 3: Prove the identity

$$\log_a xy = \log_a |x| + \log_a |y|. \qquad (15)$$

Доказательство: Перемножим почленно тождества

Proof: Multiply term by term the identities

$$a^{\log_a |x|} = |x|, \qquad (16)$$

$$a^{\log_a |y|} = |y|. \qquad (17)$$

Затем используем свойства показательных функций и абсолютных величин:

Then transform the products making use of the properties of exponents and absolute values:

$$a^{\log_a |x|} \cdot a^{\log_a |x|} = |x||y| \qquad \Rightarrow$$

$$a^{\log_a |x| + \log_a |y|} = |xy|.$$

С учетом определения логарифмов это равенство приводит к требуемому результату.

In view of the definition of logarithms, this equality implies the desired result.

Задача 4: Доказать тождество

Problem 4: Prove the identity

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a |x| - \log_a |y|. \qquad (18)$$

Доказательство основывается на той же идее, что использовалась в предыдущей задаче. Единственное отличие состоит в том, что нужно разделить тождества (16) и (17) одно на другое - вместо их перемножения.

The idea of a proof is the same as above. The only difference is applying the division of identities (16) and (17) instead of their multiplication.

Задача 5: Доказать тождество

Problem 5: Prove the identity

$$\log_a x^y = y \log_a |x|. \qquad (19)$$

Доказательство:

Proof:

$$a^{\log_a |x|} = |x| \;\Rightarrow\; (a^{\log_a |x|})^y = |x|^y \;\Rightarrow$$

$$a^{y \log_a |x|} = |x|^y \;\Rightarrow\; \log_a x^y = y \log_a |x|.$$

Тождество доказано.

The identity is proved.

Приведем еще одну важную формулу, которая используется для перехода к логарифму с другим основанием:

Let us give one more the important formula, which is used to change the base of the logarithm:

$$\log_a x = \frac{\log_c x}{\log_c a}. \qquad (20)$$

Следствие 1:

Corollary 1:

$$\log_{1/a} x = \frac{\log_a x}{\log_a (1/a)} = \frac{\log_a x}{\log_a a^{-1}} = \frac{\log_a x}{-\log_a a} = -\log_a x \qquad \Rightarrow$$

$$\log_{1/a} x = -\log_a x. \qquad (21)$$

Следствие 2:

Corollary 2:

$$\log_{(a^b)} x = \frac{\log_a x}{\log_a a^b} = \frac{\log_a x}{b\log_a a} = \frac{\log_a x}{b} \qquad \Rightarrow$$

$$\log_{(a^b)} x = \frac{\log_a x}{b}. \qquad (22)$$

Примеры:

Examples:

- $\log\sqrt{x} = 2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x} = 10^2 = 100 \quad \Rightarrow \quad x = 10000.$
- $\log_2 16 = \log_2 2^4 = 4\log_2 2 = 4.$
- $\log_6 2 + \log_6 3 = \log_6 (2\cdot 3) = \log_6 6 = 1.$
- $\log_3 \sqrt[5]{81} = \log_3 3^{4/5} = \frac{4}{5}\log_3 3 = \frac{4}{5}.$
- $\log_5 400 - \log_5 16 = \log_5 (20/4)^2 = 2\log_5 5 = 2.$
- $\log_{1/7} 49 = \log_{7^{-1}} 7^2 = -2\log_7 7 = -2.$

4.6.1. Графики логарифмических функций

Graphs of Logarithmic Functions

Графики логарифмических функций показаны на Рис. 13.

Graphs of logarithmic functions are shown in Fig. 13.

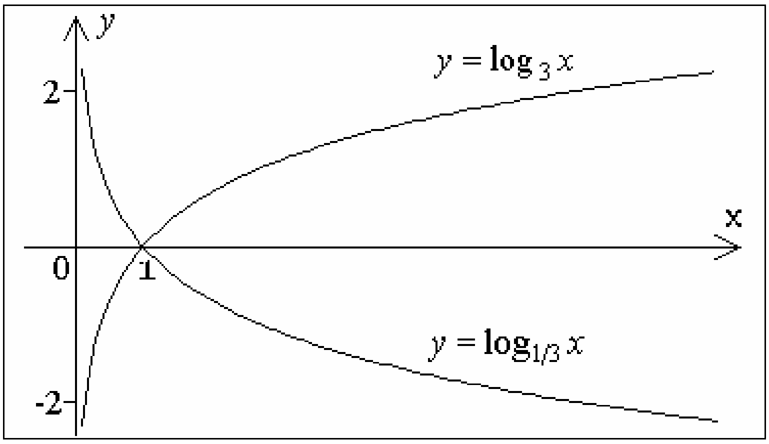


Рис. 13 | Fig. 13

Если $a > 1$, то функция $y = \log_a x$ возрастает до бесконечности при $x \to \infty$, и асимптотически приближается к оси $0y$ при $x \to 0$.

Если $x \to 0$, то с ростом x функция $y = \log_a x$ непрерывно убывает от $(+\infty)$ до $(-\infty)$.

Графики логарифмической функции $y = \log_a x$ проходят через точку с координатами $(1,0)$.

Графики функций $y = \log_a x$ и $y = \log_{1/a} x$ дают зеркальное отражение друг друга относительно оси $0x$.

Рис. 14 иллюстрирует общее свойство обратных функций: график одной из них является зеркальным отражением другой относительно прямой $y = x$.

One can see that the function $y = \log_a x$ $(a > 1)$ increases towards infinity as $x \to \infty$, while it will approach the y-axis asymptotically as $x \to 0$.

If $0 < a < 1$ then the function $y = \log_a x$ decreases continuously from $(+\infty)$ to $(-\infty)$ as x grows.

Graphs of the logarithmic function $y = \log_a x$ include the point $(1,0)$.

The graphs of the functions $y = \log_a x$ and $y = \log_{1/a} x$ are reflections of each other through the x-axis.

Fig. 14 illustrates the general property of inverse functions: their graphs are mirror images of each other across the line $y = x$.

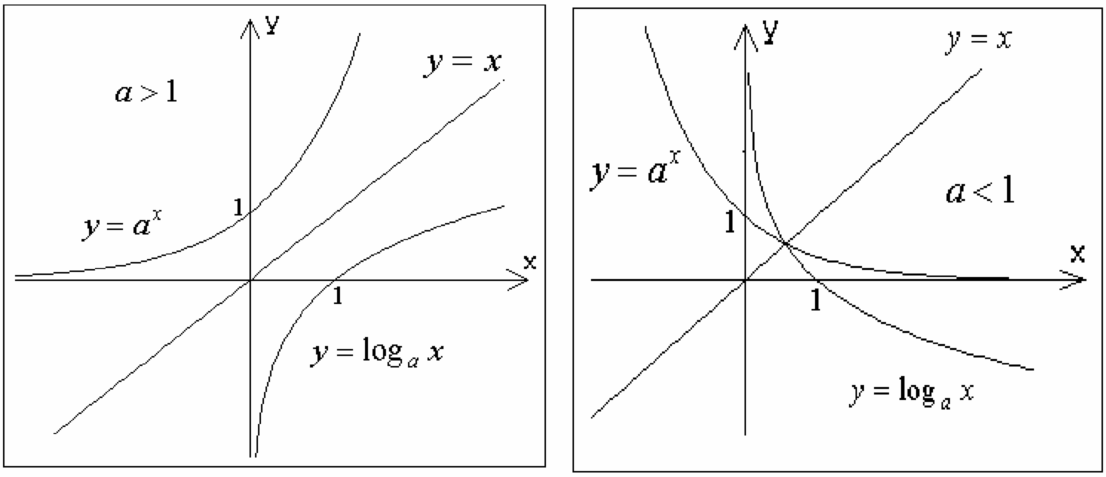


Рис. 14 | Fig. 14

4.6.2. Натуральные логарифмы

Одним из наиболее важных чисел, используемых в качестве основания показательной и логарифмической функций, является иррациональное число e, приблизительно равное $e \approx 2.718$. Логарифм числа x по основанию e называется натуральным логарифмом и обозначается символом $\ln x$:

Natural Logarithms

One of the most important numbers used as the base for exponential and logarithmic functions is the irrational number e; its approximate value is $e \approx 2.718$.
The expression $\log_e x$ is usually written as $\ln x$ and called the natural logarithm:

$$\ln x \equiv \log_e x$$

Показательная и логарифмическая функции с основанием e встречаются во многих практических приложениях, в которых фигурируют рост, затухание или распад чего-нибудь.

Exponential and logarithmic functions with the base e occur in many practical applications, including those involving growth and decay of anything.

4.6.3. Сводная таблица формул

Наиболее важные показательные тождества и их логарифмические аналоги сведены в таблицу.

Summary Formulas

The following table lists the most important exponential identities and their equivalent logarithmic form.

Таблица 2 | **Table 2**

$x = a^y$	$y = \log_a x$
$x = a^{\log_a x}$	$x = \log_a a^x$
$a^0 = 1$	$\log_a 1 = 0$
$a^1 = a$	$\log_a a = 1$
$a^x a^y = a^{x+y}$	$\log_a xy = \log_a \lvert x \rvert + \log_a \lvert y \rvert$
	$\log_a x + \log_a y = \log_a xy$
$\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$	$\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a \lvert x \rvert - \log_a \lvert y \rvert$
	$\log_a x - \log_a y = \log_a \dfrac{x}{y}$
$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$	$\log_a x^y = y \log_a \lvert x \rvert$
	$y \log_a x = \log_a x^y$
$(ab)^x = a^x b^x$ $(\dfrac{a}{b})^x = \dfrac{a^x}{b^x}$ $(\dfrac{1}{a})^x = a^{-x}$	$\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$ $\log_{(a^b)} x = \dfrac{\log_a x}{b}$ $\log_{1/a} x = -\log_a x$ $\log_a x \cdot \log_x a = 1$

5. Дискретная алгебра

Discrete Algebra

5.1. Σ - обозначения

Σ - Notations

Сумму чисел, пронумерованных целочисленными индексами, обычно записывают с помощью ∑-обозначений:

The sum of numbers indexed by integers is usually written using the ∑-notation as follows:

$$a_1 + a_2 + ... + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k .$$

В качестве индекса суммирования можно использовать любую букву:

One can use any letter as the index of summation:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{m=1}^{m} a_m = \cdots .$$

Следующие простые формулы используются для преобразования алгебраических выражений:

The following simple formulas are useful in algebraic transformations of the expression:

$$\sum_{i=1}^{n} ca_i = c\sum_{i=1}^{n} a_i .$$

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i .$$

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1}) = a_n - a_0 .$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{m} a_i + \sum_{i=m+1}^{n} a_i , \qquad (1 \le m \le n).$$

$$\sum_{i=1+j}^{n+j} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_{i+j} .$$

Примеры:

Examples:

- $1 + 2 + 3 + \cdots + 25 = \sum_{k=1}^{25} k .$
- $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + 21^2 = \sum_{k=0}^{10} (2k+1)^2 = \sum_{k=1}^{11} (2k-1)^2 .$
- $2^2 + 4^3 + 6^3 + \cdots + 100^3 = \sum_{k=1}^{50} (2k)^3 .$

5.2. Арифметические прогрессии

Арифметическая прогрессия представляет собой последовательность, в которой каждый последующий член отличается от предыдущего на одну и ту же величину, называемую разностью арифметической прогрессии. Математическая формулировка имеет следующий вид:

Arithmetic Progressions

An arithmetic progression is a sequence in which each term (after the first) is determined by adding a constant to the preceding term. This constant is said to be the common difference of the arithmetic progression. The following equations express this sentence mathematically:

$$a_{n+1} = a_n + d\,, \tag{1}$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d\,, \tag{2}$$

где a_1 - первый член арифметической прогрессии; a_n - ее n-ый член; d - разность арифметической прогрессии; n - натуральное число.

Рассмотрим сумму первых n членов арифметической прогрессии:

where a_1 is the first term of the arithmetic progression; a_n is its nth term; d is the common difference of the arithmetic progression; n - a natural number.

Consider the sum of the first n terms of an arithmetic progression:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n\,. \tag{3}$$

Заметим, что эта сумма составлена из равных пар:

Let us note that sum (3) consists of equal pairs:

$$a_1 + a_n = (a_1 + d) + (a_n - d) = a_2 + a_{n-1}$$
$$= (a_2 + d) + (a_{n-1} - d) = a_3 + a_{n-2} = \ldots$$

Следовательно, сумма S_n не изменится, если каждый ее член заменить на $(a_1 + a_n)/2$. Поскольку сумма содержит n членов, то она равна

Therefore, the sum S_n holds its value if each term in (3) is replaced by $(a_1 + a_n)/2$. Since the sum contains n terms, we get the following formula:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}\,. \tag{4}$$

С учетом равенства (2) эту формулу можно также представить в виде

In view of the equality (2) this formula can be also written as

$$S_n = (a_1 + \frac{(n-1)d}{2})n. \quad (5)$$

Пример 1: Найти первый и пятый члены арифметической прогрессии, если $a_7 = 42$ и $d = 5$.

Решение: По определению арифметической прогрессии

Example 1: Find the first and fifth terms of the arithmetic progression if $a_7 = 42$ and $d = 5$.

Solution: By the definition of an arithmetic progression we have

$$a_7 = a_1 + 6d,$$
$$a_7 = a_5 + 2d.$$

Следовательно,

Therefore,

$$a_1 = a_7 - 6d = 42 - 6 \cdot 5 = 12,$$
$$a_5 = a_7 - 2d = 42 - 2 \cdot 5 = 32.$$

Пример 2: Найти сумму первых 10 членов арифметической прогрессии, если $a_2 = 4$ и $a_5 = 22$.

Решение: Из равенства (2) следует, что

Example 2: Find the sum of the first 10 terms of the arithmetic progression if $a_2 = 4$ and $a_5 = 22$.

Solution: From equality (2) it follows that

$$a_2 = a_1 + d = 4, \quad (6)$$
$$a_5 = a_1 + 4d = 22. \quad (7)$$

Чтобы найти разность арифметической прогрессии, вычтем равенство (6) из (7):

The common difference of the arithmetic progression can be found by subtracting equality (6) from (7):

$$a_5 - a_2 = 3d = 18 \quad \Rightarrow \quad d = 6.$$

Теперь найдем первый член арифметической прогрессии:

Next find the first term of the arithmetic progression:

$$a_1 = a_2 - d = 4 - d = 4 - 6 = -2.$$

Чтобы найти искомую сумму, воспользоваться формулой (5):

Now use formula (5) to find the sum of the first 10 terms:

$$S_{10} = (-2 + \frac{9 \cdot 6}{2}) \cdot 10 = 250.$$

Вывод: Любая арифметическая прогрессия полностью определяется заданием любых двух ее величин.

Conclusion: Any arithmetic progression is completely determined by any two of its quantities.

5.3. Геометрические прогрессии

Geometric Progressions

Геометрическая прогрессия представляет собой последовательность, в которой каждый последующий член отличается от предыдущего одним и тем же множителем, называемым знаменателем геометрической прогрессии. Математическая формулировка имеет следующий вид:

A **geometric progression** is a sequence in which each term (after the first) is determined by multiplying the preceding term by a constant. This constant is called the **common ratio** of the geometric progression. The following equations express this statement mathematically:

$$a_{n+1} = a_n\, q, \tag{8}$$

$$a_n = a_1\, q^{n-1}, \tag{9}$$

где a_1 - первый член геометрической прогрессии; a_n - ее n-ый член; q - знаменатель прогрессии; $n \in N$.

Вычислим сумму первых n членов геометрической прогрессии:

where a_1 is the first term of the progression; a_n is its nth term; q is the common ratio of the geometric progression; $n \in N$.

Let us calculate the sum of the first n terms of the geometric progression:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n \\ &= a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^{n-1} = a_1(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}). \end{aligned} \tag{10}$$

Заметим, что

Note that

$$(1 + q + q^2 + \ldots + g^{n-1})(1-q) =$$
$$= (1 + q + q^2 + \ldots + g^{n-1}) - (q + q^2 + q^3 + \ldots + g^n) = (1 - q^n).$$

Следовательно,

Therefore,

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}. \tag{11}$$

Если $|q| < 1$, то $q^n \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно, сумму бесконечного числа членов убывающей геометрической прогрессии равна

If $|q| < 1$, then $q^n \to 0$ when $n \to \infty$.
Hence, the sum of an infinite number of terms of decreasing geometric progression is

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-q}. \tag{12}$$

Пример 3: Найти пятый член геометрической прогрессии, если $a_2 = -243$ и $a_7 = 1$.

Example 3: Find the fifth term of the geometric progression if $a_2 = -243$ and $a_7 = 1$.

Решение: По определению геометрической прогрессии

Solution: By the definition of a geometric progression we obtain

$$a_7 = a_2 q^5 \quad \Rightarrow \quad 1 = -243 q^5 \quad \Rightarrow \quad q = \sqrt[5]{-1/243} = -1/3,$$

$$a_5 = a_2 q^3 = -243(-1/3)^3 = 81.$$

Пример 4: Вычислить сумму первых 10 членов геометрической прогрессии и найти седьмой ее член, если сумма первых пяти членов $S_5 = 31$, а знаменатель прогрессии $q = 2$.

Example 4: Calculate the sum of the first ten terms of the geometric progression and find the seventh term if the sum of the first five terms $S_5 = 31$ and the common ratio $q = 2$.

Решение: Из формулы (11) при $n = 5$ мы получаем

Solution: In view of formula (11) for $n = 5$ we obtain

$$S_5 = \frac{a_1(1-q^5)}{1-q} \quad \Rightarrow \quad a_1 = \frac{S_5(q-1)}{q^5-1} = \frac{31}{32-1} = 1.$$

Теперь используем формулу (11) при $n = 10$:

Now let us use formula (11) for $n = 10$:

$$S_{10} = \frac{1-2^{10}}{1-2} = 1023.$$

Наконец, применим формулу (9):

Finally, formula (9) gives

$$a_7 = a_1 q^6 = 2^6 = 64.$$

Пример 5: Вычислить сумму бесконечного числа членов убывающей геометрической прогрессии, если $a_3 = 5$, а знаменатель прогрессии $q = 1/2$.

Example 5: Find the sum of an infinite number of terms of decreasing geometric progression if $a_3 = 5$ and the common ratio $q = 1/2$.

Решение: Сначала найдем первый член прогрессии:

Solution: Find the first term of the progression:

$$a_3 = a_1 q^2 \quad \Rightarrow \quad a_1 = a_3 / q^2 = 5 \cdot 4 = 20.$$

Затем применим формулу (12):

Then use formula (12):

$$S_\infty = \frac{20}{1-1/2} = 40.$$

5.4. Бином Ньютона

Биномиальные коэффициенты определяются следующей формулой:

Binomial Theorem

Binomial coefficients are defined by the following formula:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \qquad (13)$$

Символ “$n!$” читается как “n факториал” и означает произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно:

The symbol “$n!$” is read as “n factorial” and means the product of all natural numbers from 1 to n:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n.$$

По определению, под 0! понимается единица: $0! = 1$.

Биномиальные коэффициенты C_n^k дают число различных способов выбора k объектов из множества, содержащего n элементов без учета порядка их следования.

Из определения (13) вытекают следующие соотношения:

By definition, zero factorial is equal to the unity: $0! = 1$.

The binomial coefficients C_n^k give a number of ways for choosing k objects from a set of n objects, regardless of the order in which the k objects are chosen.

Making use of definition (13) we get the following relationships:

$$C_n^{n-k} = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

$$C_n^0 = C_n^n = \frac{n!}{0!(n-0)!} = 1,$$

$$C_n^1 = \frac{n!}{1!(n-1)!} = n.$$

Биномиальные коэффициенты удовлетворяют также рекуррентным соотношениям

There also exist recursion relations between the binomial coefficients

$$C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k, \qquad (14)$$

которые позволяют построить треугольник Паскаля, т.е. треугольную таблицу биномиальных коэффициентов. Структура этого треугольника очевидна из нижеприведенной таблицы (см. также примеры).

which are used for constructing Pascal’s triangle, that is, a triangular array of binomial coefficients. The structure of this triangle is evident from the table below. (Also see the examples).

C_0^0						1						k=0
C_1^k					1		1					k=0, 1
C_2^k				1		2		1				k=0, 1, 2
C_3^k			1		3		3		1			k=0, 1, 2, 3
C_4^k		1		4		6		4		1		k=0, 1,2,3,4
C_5^k	1		5		10		10		5		1	k=0, 1,2,3,4,5
…	…		…		…		…		…		…	…

Примеры: | **Examples**

- $C_2^0 = 1, \quad C_2^1 = 2, \quad C_2^2 = 1.$
- $C_3^0 = 1, \quad C_3^1 = C_2^0 + C_2^1 = 1 + 2 = 3, \quad C_3^2 = C_2^1 + C_2^2 = 2 + 1 = 3.$
- $C_4^1 = C_3^0 + C_3^1 = 1 + 3 = 4, \quad C_4^2 = C_3^1 + C_3^2 = 3 + 3 = 6.$
- $C_5^2 = C_4^1 + C_4^2 = 4 + 6 = 10, \quad C_5^3 = C_5^2 = 10.$

Бином Ньютона: Пусть n - любое натуральное число. Тогда для любых чисел a и b

The Binomial Theorem: Let n be some natural number n. Then for any numbers a and b

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k. \qquad (15)$$

В частности, когда $a = 1$ и $b = x$, эта формула принимает следующий вид:

In the particular case when $a = 1$ and $b = x$, this formula has the following form:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k. \qquad (16)$$

Поэтому можно сказать, что биномиальные коэффициенты являются коэффициентами разложения $(1+x)^n$ по степям x.

Thus, one can say that binomial coefficients are the coefficients of x in the expansion of $(1+x)^n$.

Примеры: | **Examples**:

- $(a+b)^2 = C_2^0 a^2 + C_2^1 ab + C_2^2 b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$
- $(a+b)^3 = C_3^0 a^3 + C_3^1 a^2 b + C_3^2 a b^2 + C_3^3 b^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3.$
- $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4 b + 10a^3 b^2 + 10a^2 b^3 + 5ab^4 + b^5.$
- $(1+x)^4 = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4.$

6. Комплексные числа

Напомним геометрическую интерпретацию вещественных чисел: каждой точке числовой оси $0x$ ставится в соответствие вещественное число x, и обратно.

Для описания любой точки плоскости $x0y$ необходима уже пара вещественных чисел (x, y), например, декартовы координаты точки. Точкам плоскости $x0y$ можно сопоставить числа нового типа, которые называются **комплексными числами.**

Таким образом, комплексное число представляет собой упорядоченную пару (x, y) вещественных чисел x и y.

Комплексное число записывается в виде выражения $x+iy$ или обозначается одной буквой, например, $z = x+iy$. где i – такое число, квадрат которого равен (-1): $i^2 = -1$. Числа x и y называются, соответственно, вещественной и мнимой частями комплексного числа z:

Complex Numbers

Let us recall the geometrical interpretation of real numbers: every point on the *x*-axis corresponds to a unique real number x, and *vice versa*.

In order to describe the position of some point in the $x, y-$plane it is necessary to have a pair (x, y) of real numbers x and y, for instance, the Cartesian coordinates of the point. The points in the $x, y-$plane can be associated with numbers of a new kind, which are called **complex numbers**.

Thus, a complex number is an ordered pair (x, y) of real numbers.

The complex number is written as an expression of the form $x+iy$ or denoted by a single letter, e.g.,

$$z = x+iy,$$

where i is the number such that $i^2 = -1$.

The numbers x and y are called, respectively, the **real** and imaginary parts of z. They are symbolized as

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Подчеркнем, что оба числа, $\operatorname{Re} z$ и $\operatorname{Im} z$, являются вещественными.

Существует взаимно однозначное соответствие между совокупностью комплексных чисел и точками плоскости: $x0y$ каждому комплексному числу соответствует единственная точка плоскости, и обратно.

Note that both numbers, $\operatorname{Re} z$ and $\operatorname{Im} z$, are real numbers.

There is a one-to-one correspondence between the set of complex numbers and points in the $xy-$ plane: every point in this complex plane corresponds to a unique complex number, and *vice versa*.

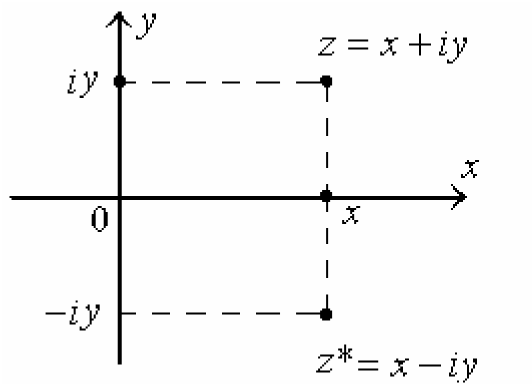


Рис. 1 | Fig. 1

Любое вещественное число x можно рассматривать как комплексное число, мнимая часть которого равна нулю: $x + i \cdot 0 = x$. Следовательно, множество комплексных чисел включает в себя в качестве подмножества совокупность вещественных чисел.

Число $z = iy$, вещественная часть которого равна нулю, называется чисто мнимым.

Вещественные числа изображаются точками оси Ox, тогда как чисто мнимым числам соответствуют точки на оси Oy. Поэтому оси Ox и Oy называются, соответственно, вещественной и мнимой осями.

Any real number x can be considered as a complex number whose imaginary part equals zero. Therefore, the set of complex numbers includes the set of all real numbers as a proper subset.

If $\operatorname{Re} z = 0$ then the number $z = iy$ is said to be purely imaginary.

All real numbers are represented by the points of the x-axis, while all purely imaginary numbers are represented by the points of the y-axis. These axes are known, correspondingly, as the real and imaginary lines.

6.1. Алгебраические операции

Algebraic Operations

I. Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ равны друг другу, если попарно равны их вещественные и мнимые части:

Two complex numbers, $z_1 = x_1 + iy_1$ and $z_2 = x_2 + iy_2$, are equal to each other if and only if $x_1 = x_2$ and $y_1 = y_2$:

$$z_1 = z_2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2 \\ \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2 \end{cases} \tag{1}$$

II. Чтобы сложить комплексные числа, нужно попарно сложить их вещественные и мнимые части:

To add complex numbers add by pairs their real and imaginary parts, correspondingly:

$$(x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2). \qquad (2)$$

Комплексные числа имеют те же свойства сложения, что и вещественные числа:

Complex numbers have the same addition properties as real numbers:

$$z_1 \pm z_2 = z_2 \pm z_1,$$
$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3),$$
$$z + (-z) = 0.$$

С геометрической точки зрения комплексные числа складываются и вычитаются по правилам сложения векторов:

From the geometric point of view complex numbers are added and subtracted in the same way as vectors:

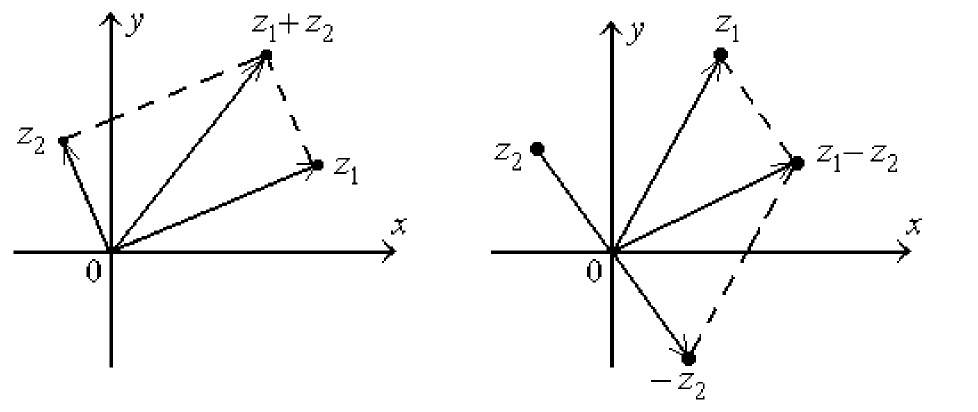


Рис. 2 | Fig. 2

III. Чтобы перемножить комплексные числа, нужно просто раскрыть скобки и заменить i^2 на (-1):

In order to multiply complex numbers one has to expand the product and substitute (-1) for i^2:

$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1) + i^2 y_1y_2$$
$$= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1). \qquad (3)$$

Комплексные числа имеют те же свойства умножения, что и вещественные числа:

Complex numbers have the same multiplication properties as real numbers:

$$z_1z_2 = z_2z_1,$$
$$(z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3),$$
$$z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3.$$

Число $z^* = x - iy$ называется комплексно сопряженным числу $z = x + iy$.

The number $z^* = x - iy$ is called the complex conjugate of the number $z = x + iy$.

IV. Произведение $z z^*$ является неотрицательным вещественным числом:

The product $z z^*$ is a nonnegative real number:

$$z z^* = (x + iy)(x - iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 + y^2 .$$

Прочитаем эту формулу справа налево: Сумму квадратов любых двух вещественных чисел можно разложить на линейные комплексные множители:

Let us read this formula from right to left:
The sum of two squares of any real numbers can be factored into linear complex factors:

$$x^2 + y^2 = (x + iy)(x - iy) . \qquad (4)$$

Абсолютная величина комплексного числа z обозначается символом $|z|$:

The absolute value of the complex number z is denoted by the symbol $|z|$:

$$|z| = \sqrt{z \cdot z^*} = \sqrt{x^2 + y^2} . \qquad (5)$$

С геометрической точки зрения абсолютная величина $|z|$ равна расстоянию от нуля до точки z комплексной плоскости.
Абсолютная величина $|z_1 - z_2|$ равна расстоянию между точками z_1 и z_2 комплексной плоскости.

From the geometrical point of view the absolute value $|z|$ is the distance from the point z to the zero-point in the complex plane.
The absolute value $|z_1 - z_2|$ is the distance between points z_1 and z_2 in the complex plane.

V.
$$(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*,$$
$$(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*.$$

VI. Число $\dfrac{z^*}{|z|^2}$ является обратным к комплексному числу z:

The inverse of a nonzero complex number z is $\dfrac{z^*}{|z|^2}$.

$$\frac{1}{z} = \frac{z^*}{z \cdot z^*} = \frac{z^*}{|z|^2} . \qquad (6)$$

Примеры: | **Examples**:

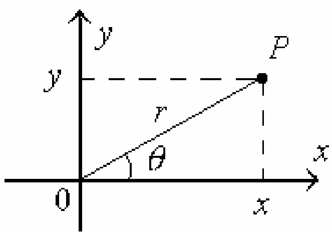
- $(3-5i)+(1+7i)=4+2i$.
- $2(8+3i)-(5-2i)=11+10i$.
- $i^4=(i^2)^2=(-1)^2=1$.
- $i^5=i^4 i=i$.
- $(2-3i)(4+i)=8+2i-12i-3i^2=11-10i$.
- $\frac{1}{i}=\frac{i}{i^2}=-i$.
- $\frac{1+2i}{3-4i}=\frac{(1+2i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)}=\frac{3+6i+4i+8i^2}{3^2+4^2}=\frac{-5+10i}{25}=-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$.

6.2. Тригонометрическая форма комплексных чисел

Положение точки P плоскости $x0y$ можно также описать полярными координатами r и θ, где r - расстояние от точки P до начала координат; θ - угол, образуемый лучом OP с положительным направлением оси $0x$. Полярные и декартовые координаты связаны между собой простыми соотношениями:

Complex Numbers in the Polar Coordinate System

The point P in the $x,y-$plane can also be described by the polar coordinates r and θ, where r is the distance from the origin O to the point P, and θ is the angle that the ray OP makes with the positive direction of the x-axis.
Simple relationships exist between Cartesian and polar coordinates:



$$x=r\cos\theta, \qquad y=r\sin\theta,$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2}, \qquad \tan\theta=\frac{y}{x},$$

$$\sin\theta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \cos\theta=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Комплексное число $z=x+iy$ можно представить в тригонометрической форме:

A complex number $z=x+iy$ can be written in the polar form:

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta). \tag{7}$$

В этом случае $r=|z|$ называют модулем комплексного числа, а $\theta=\arg(z)$ - его аргументом.

In this case, $r=|z|$ is said to be the modulus and $\theta=\arg(z)$ is known as the argument (or phase) of the complex number z.

Для нахождения аргумента следует пользоваться такими правилами:

- Если $x > 0$, то $\theta = \arctan(y/x)$.
- Если $x < 0$, $y > 0$, то
$$\theta = \pi - \arctan|y/x|.$$
- Если $x < 0$ и $y < 0$, то
$$\theta = -\pi + \arctan(y/x).$$

Все эти случаи иллюстрируются примерами, приведенными на Рис.3.

One has to apply the following rules in order to find $\arg(z)$.

If $x > 0$ then $\theta = \arctan(y/x)$,

If $x < 0$ while $y > 0$ then
$$\theta = \pi - \arctan|y/x|,$$
If $x < 0$ and $y < 0$ then
$$\theta = -\pi + \arctan(y/x).$$

All these cases are illustrated by simple examples in Fig. 3.

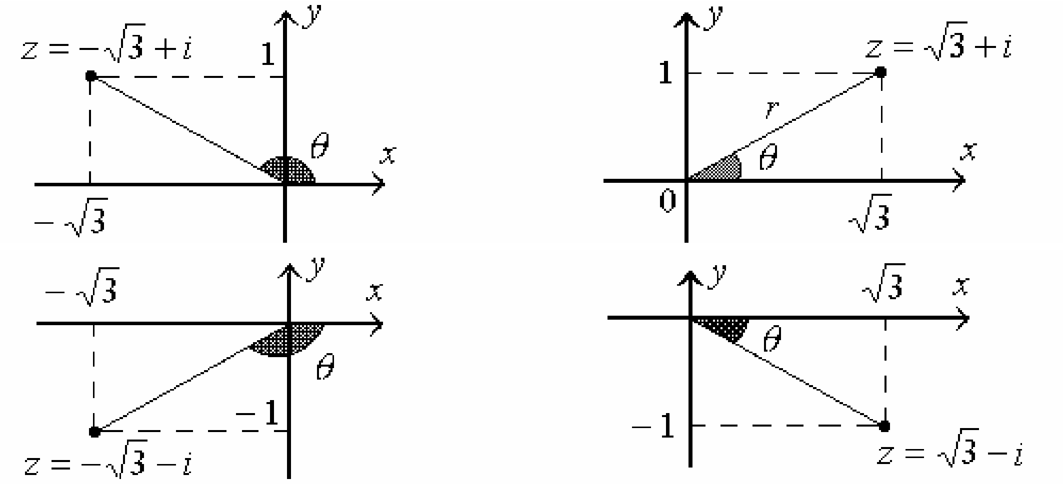


Рис. 3 | Fig. 3

6.3. Формула Эйлера

The Euler Formula

Формула Эйлера имеет следующий вид:

The Euler Formula has the following form:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta. \quad (8)$$

Она обобщает понятие показательной функции e^x вещественного аргумента x на случай комплексных чисел $z = x + iy$:

It generalizes the definition of the exponential e^x with a real variable x to the case of complex numbers $z = x + iy$:

$$e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y). \quad (9)$$

Показательные функции с комплексными и вещественными степенями имеют одинаковые свойства:

The exponential of complex numbers has the same properties as the exponential of real numbers:

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}, \quad (10)$$

$$e^{z_1-z_2} = \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}}, \quad (11)$$

$$(e^{z_1})^{z_2} = e^{z_1 z_2}. \quad (12)$$

Формула Эйлера позволяет представлять комплексные числа в виде

The Euler Formula gives one more a representation of complex numbers:

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}. \quad (13)$$

Пример 1: Найдем произведение комплексных чисел $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ и $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$:

Example 1: Let us find the product of two complex numbers $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ and $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$:

$$z = z_1 z_2 = r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)} \quad \Rightarrow$$

$$|z| = r_1 \cdot r_2 = |z_1| \cdot |z_2|,$$

$$\arg(z) = \theta_1 + \theta_2 = \arg(z_1) + \arg(z_2).$$

Пример 2: Аналогично находится частное от деления z_1 и z_2:

Example 2: Likewise, the quotient of the complex numbers z_1 and z_2 is

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)} \quad \Rightarrow$$

$$|z| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \qquad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2).$$

Пример 3: Целую степень комплексного числа z можно представить в виде

Example 3: The integer power n of a complex number z can be written in closed form as follows:

$$z^n = |z|^n (\cos n\theta + i\sin n\theta) = |z|^n e^{in\theta}. \quad (14)$$

С помощью формулы Эйлера нетрудно вывести любое тригонометрическое тождество.

All trigonometric identities can be easily derived by making use of the Euler Formula.

Пример 4: Возведя в квадрат обе части формулы Эйлера и используя свойство (1), мы получаем формулы двойного угла:

Example 4: By raising to the second power both sides of the Euler Formula and using property (1) we get double-angle identities:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \quad \Rightarrow \quad e^{i2\theta} = (\cos\theta + i\sin\theta)^2 \quad \Rightarrow$$

$$\cos 2\theta + i\sin 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta + 2i\sin\theta\cos\theta \quad \Rightarrow$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta, \tag{15}$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta. \tag{16}$$

Пример 5: Используя формулу Эйлера, преобразуем произведение $e^{i\alpha}e^{i\beta}$.

С одной стороны,

Example 5: Transform the product $e^{i\alpha}e^{i\beta}$ by making use of the Euler Formula.

On one hand,

$$e^{i\alpha}e^{i\beta} = (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta)$$
$$= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta + i(\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha).$$

С другой стороны,

On the other hand,

$$e^{i\alpha}e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)} = \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta).$$

Следовательно,

Therefore,

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta, \tag{17}$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha. \tag{18}$$

6.4. Комплексные корни

Complex Roots

Периодическая функция $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ имеет период 2π. Следовательно, формулу (13) можно записать в виде

The period of the periodic function $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ is equal to 2π. Hence, formula (13) can be written as

$$z = re^{i(\theta + 2\pi m)},$$

где m - любое целое число.

Корни n-ой степени из z равны

where m is any integer.

The nth roots of a number z are

$$t = r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta + 2\pi m}{n}},$$

поскольку $t^n = z$. Все эти корни можно найти, придавая m целые значения:

since $t^n = z$. One can find all nth roots setting integer values of m:

$$m = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\theta}{n}} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta}{n} + i\sin\frac{\theta}{n}\right).$$

$$m = 1 \quad \Rightarrow \quad t_2 = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\theta + 2\pi}{n}} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2\pi}{n}\right).$$

$$m=2 \qquad \Rightarrow \qquad t_3=\sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta+4\pi}{n}}=\sqrt[n]{r}(\cos\frac{\theta+4\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+4\pi}{n}).$$

$$m=n-1 \qquad \Rightarrow \qquad t_n=\sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta+2\pi(n-1)}{n}}.$$

$$m=n \qquad \Rightarrow \qquad t_{n+1}=\sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta+2\pi n}{n}}=\sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta}{n}}=t_1.$$

Заметим, что $t_{n+1}=t_1$. Следующее значение m дает $t_{n+2}=t_2$, и т. д. Следовательно, существует ровно n различных корней n-ой степени из любого комплексного числа. Их модули равны друг другу и лежат на окружности радиуса $\sqrt[n]{r}$.

Квадратный и кубический корни из комплексного числа i показаны на Рис. 4. Другие примеры приведены на Рис. 5:

Note that $t_{n+1}=t_1$. The next value of m gives $t_{n+2}=t_2$, and so on. Therefore, there exist exactly n different nth roots of any complex number. All the roots have the same modulus $\sqrt[n]{r}$, that is, they lie on the circle with the radius $\sqrt[n]{r}$.

The square and cube roots of the complex number i are shown in Fig. 4. Other examples of roots are shown in Fig. 5.

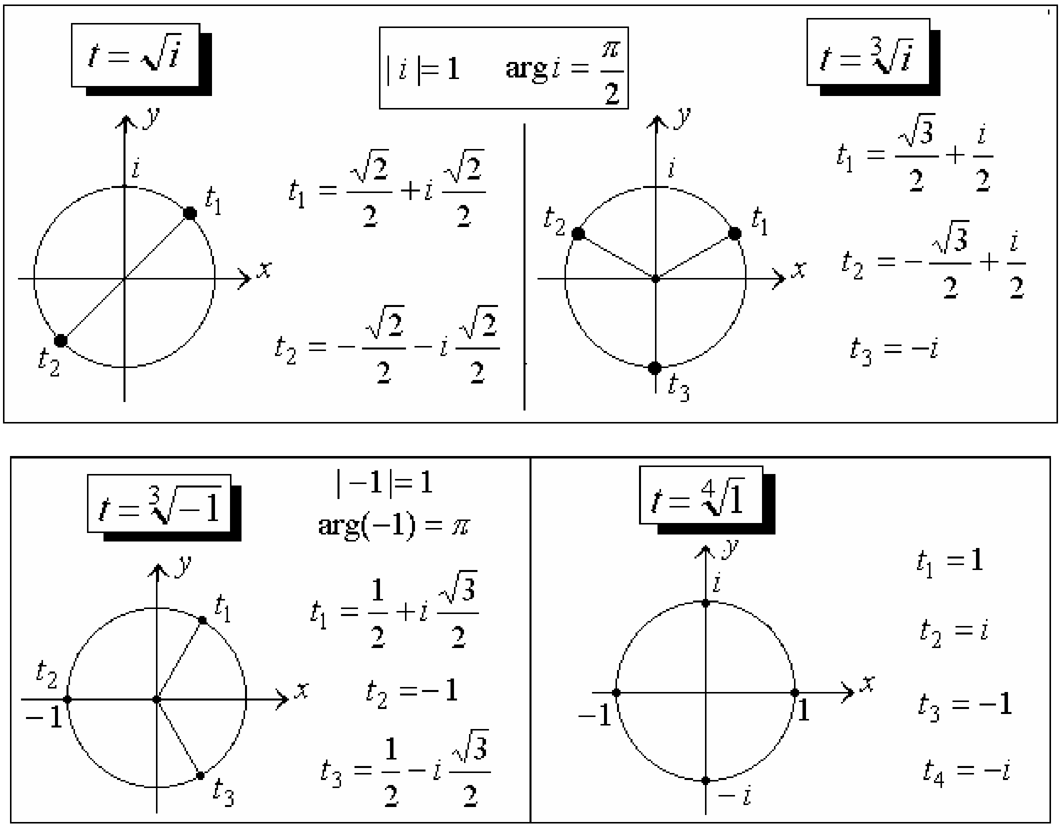


Рис. 4-5 | Fig. 4-5

Если известен хотя бы один из n корней комплексного числа z, то остальные корни легко построить графически. Все, что для этого нужно – это разделить окружность радиуса $|z|^{1/n}$ на n равных частей, начиная от точки окружности, которая соответствует известному корню из z.

Например, один из двенадцати корней из единицы равен единице. Поскольку $|1|=1$, $\arg 1 = 0$ и $\frac{2\pi}{12}=\frac{\pi}{6}$, то остальные 11 корней описываются следующей формулой:

There is a simple way to plot all n roots of the complex number z when one of the roots is known. All we need is to divide the circle with radius $|z|^{1/n}$ into n equal parts starting from the point on the circle that corresponds to the known root of z.

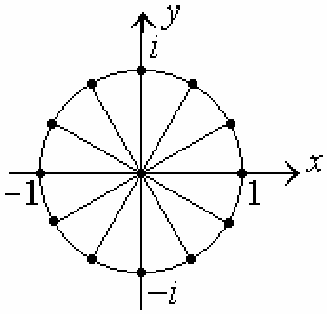
For instance, one of the twelve roots of 1 is equal to 1. Since $|1|=1$, $\arg 1 = 0$ and $\frac{2\pi}{12}=\frac{\pi}{6}$, so the other 11 roots are described by the following formula:

$$\cos\frac{\pi\cdot m}{6}+i\sin\frac{\pi\cdot m}{6},$$

где $m=1,2,\ldots,11$. (См. Рис. 6).

where $m=1,2,\ldots,11$. (See Fig. 6).

$\boxed{t=\sqrt[12]{1}}$



$t_1=1$ $\quad t_2=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$ $\quad t_3=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$t_4=i$ $\quad t_5=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad t_6=-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}$

$t_7=-1$ $\quad t_8=-\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}$ $\quad t_9=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$t_{10}=-i$ $\quad t_{11}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad t_{12}=\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}$

Рис. 6 | Fig. 6

7. Пределы функций

Пусть независимая переменная x функции $f(x)$ стремится к числу a. Тогда число A называется пределом функции $f(x)$, если ее значения становятся сколь угодно близкими к числу A по мере того, как переменная x приближается достаточно близко к точке a.

Символическая запись этого определения выглядит так:

Limits of Functions

Let the independent variable x of a function $f(x)$ approach a number a. Then the limit of the function $f(x)$ is the number A such that the value of the given function remains arbitrarily close to this number when the variable x is sufficiently close to a specified point a.

This definition is written symbolically as

$$\lim_{x\to a} f(x) = A. \tag{1}$$

Математическое утверждение $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ означает, другими словами, что разность между $f(x)$ и A стремится к нулю, если расстояние между точками x и a становятся все меньше и меньше.

Математическое утверждение

In another words, the mathematical statement $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ means that the difference between $f(x)$ and A vanishes as the distance between points x and a on the number line gets smaller and smaller.

The mathematical statement

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \tag{2}$$

означает, что функция $f(x)$ стремится к числу A для достаточно больших значений независимой переменной x.

Пределы функций имеют следующие свойства:

I. Постоянный множитель можно выносить за знак предела:

means that the function $f(x)$ approaches the number A when the independent variable x is sufficiently large.

Limits of functions have the following properties:

A constant factor can be taken out of the sign of the limit:

$$\lim_{x\to a} cf(x) = c\lim_{x\to a} f(x). \tag{3}$$

II. Если существует каждый из пределов, $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, то существует и предел суммы, равный сумме пределов:

If both limits, $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ and $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, exist then the limit of the sum of the functions equals the sum of the limits of the functions:

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to a}g(x). \qquad (4)$$

III. Если существуют пределы функций $f(x)$ и $g(x)$ при $x\to a$, то существует и предел произведения, равный произведению пределов:

If the limits of the functions $f(x)$ and $g(x)$ exist as $x\to a$, then the limit of the product of these functions equals the product of the limits of the functions:

$$\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}g(x). \qquad (5)$$

IV. Если существуют пределы функций $f(x)$ и $g(x)$ при $x\to a$, то предел частного от деления функций равен частному от деления пределов (при условии, что $\lim_{x\to a}g(x)\neq 0$):

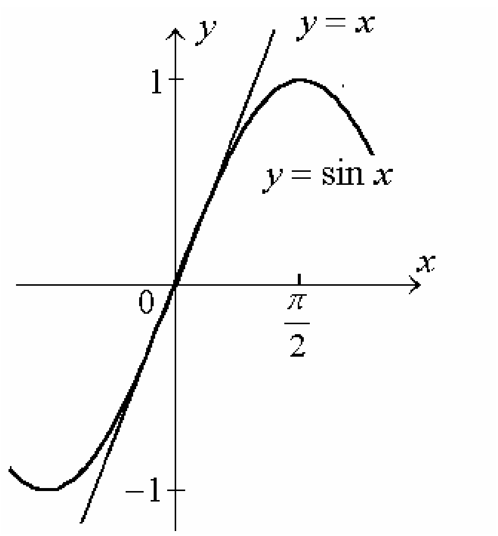
If the limits of the functions $f(x)$ and $g(x)$ exist as $x\to a$, then the limit of the quotient of these functions equals the quotient of the limits of the functions (provided that $\lim_{x\to a}g(x)\neq 0$):

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}. \qquad (6)$$

7.1. Некоторые важные пределы

Some important limits

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \qquad (7)$$



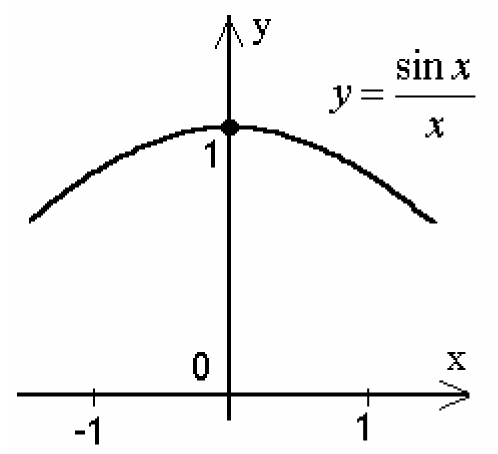


Рис. 1 | Fig. 1

Формула (7) иллюстрируется Рис. 1, на котором представлены графики функций $y = \sin x$, $y = x$ и $y = \sin x / x$. В некоторой окрестности точки $x = 0$ графики синусоиды и прямой фактически совпадает друг с другом. Таким образом, $\sin x / x \to 1$ при $x \to 0$.

Formula (7) is illustrated by Fig. 1, where graphs of the functions $y = \sin x$, $y = x$ and $y = \sin x / x$ are shown. In some vicinity of the point $x = 0$ the graphs of sine and the straight line coincide with each other. Therefore, $\frac{\sin x}{x} \to 1$ as $x \to 0$.

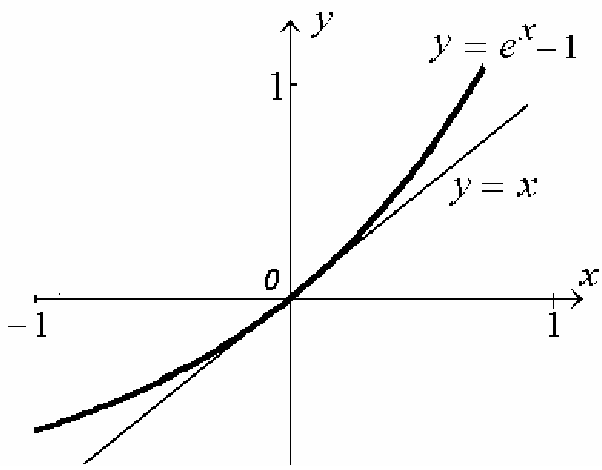


Рис. 2 Fig. 2

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1. \tag{8}$$

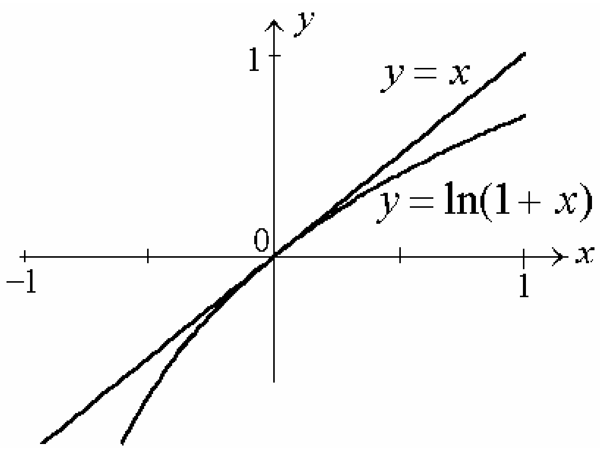


Рис. 3 Fig. 3

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1. \tag{9}$$

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = e. \tag{10}$$

Эта формула служит определением числа e.

This formula gives the definition of the number e.

7.2. Непрерывность функций

Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если существует конечный предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, который совпадает со значением функции в точке x_0: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Функция $f(x)$ называется непрерывной на некотором множестве D, если она непрерывна в каждой точке этого множестве. Если же в какой-то точке непрерывность нарушается, то говорят, что функция имеет разрыв в этой точке.

Свойства непрерывности:

I. Сумма и произведение любого конечного числа непрерывных функций есть непрерывная функция.

II. Частное от деления непрерывных функций есть непрерывная функция (при условии, что знаменатель отличен от нуля).

III. Все элементарные функции непрерывны там, где они определены.

Примеры:

Continuity of functions

A function $f(x)$ is called continuous at a point x_0 if the limit $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ is finite and it equals the value of the function at the point x_0: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

A function $f(x)$ is said to be continuous on some set D, if it is continuous at each point of D. Otherwise, if $f(x)$ is not continuous at some point, it is said that the function is discontinuous at this point or that $f(x)$ has a discontinuity at the point.

Continuity properties:

The sum of a finite number of continuous functions is a continuous function and the product of a finite number of continuous functions is a continuous function.

The quotient of two continuous functions is a continuous function wherever the denominator is non-zero.

All elementary functions are continuous in their domains.

Examples:

- $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}\frac{5}{2} = \frac{5}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x} = \frac{5}{2}.$$
- $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-4x)}{x} = -4\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-4x)}{-4x} = -4.$$
- $$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{7x} = \frac{3}{7}\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{3x} = \frac{3}{7}.$$

8. Производные функций

8.1. Средняя скорость изменения функции

Средняя скорость изменения функции $f(x)$ на интервале $[x, x+\Delta x]$ определяется как

Derivatives of Functions

The average rate of change of a function

The average rate of change of $f(x)$ over the interval $[x, x+\Delta x]$ is defined as

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \qquad (1)$$

Другое название этой величины – разностное отношение, а единицами измерения являются единицы $f(x)$ на единицы x.

Часто задаваемый вопрос: Как вычислить $f(x)$ при $(x+\Delta x)$?

Ответ: Замените все символы x суммой $(x+\Delta x)$, которую обязательно заключите в скобки и не помещайте в них ничего другого.

Так, если $f(x) = 5x^2 - 3x + 2$, то

This value is known also as the difference quotient. Its units of measurement are units of $f(x)$ per unit of x.

FAQ (Frequently Asked Question): How can I evaluate the function $f(x)$ at $(x+\Delta x)$?

Answer: Wherever you see an x, replace it by the sum $(x+\Delta x)$, putting parentheses around this sum. Do not put anything else inside the parentheses.

So if $f(x) = 5x^2 - 3x + 2$, then

$$f(x+\Delta x) = 5(x+\Delta x)^2 - 3(x+\Delta x) + 2.$$

Затем упростите это выражение.

Пример 1:

Пусть $f(x) = x^2 + 3x - 1$. Тогда средняя скорость изменения функции $f(x)$ на интервале [1, 3] равна

Then this expression has to be simplified.

Example 1: Let $f(x) = x^2 + 3x - 1$. Then the average rate of change of $f(x)$ over the interval [1, 3] is

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(3) - f(1)}{3-1} = \frac{17-3}{2} = 7.$$

Если $f(x)$ описывает путь, пройденный частицей (в метрах), а Δx - время ее движения (в секундах), то $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ - средняя скорость движения частицы. Единицами измерения средней скорости изменения являются

If $f(x)$ represents the traversed path of a particle (in meters) and Δx represents the time since the beginning of its motion (in seconds), then $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ is the average velocity of motion of the particle. The units of measurement of the метры в секунду. Таким образом, рассматриваемая частица движется со средней скоростью семь метров в секунду.

average rate of change are meters per second. Thus, the given particle had an average velocity of seven meters per second over the period from the first to the third seconds.

8.2. Мгновенная скорость изменения функции

The instantaneous rate of change of a function

Если Δx стремится к нулю, то средняя скорость изменения функции $f(x)$ на интервале $[x, x+\Delta x]$ стремится к мгновенной скорости изменения функции $f(x)$ в точке x.

Мгновенная скорость изменения функции $f(x)$ называется производной от функции $f(x)$ и обозначается символом $\dfrac{df(x)}{dx}$:

If Δx approaches zero, then the average rate of change of $f(x)$ over the interval $[x, x+\Delta x]$ approaches the instantaneous rate of change of $f(x)$ at x.

The instantaneous rate of change of $f(x)$ is called the derivative of $f(x)$ and denoted by the symbol $\dfrac{df(x)}{dx}$:

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \qquad (2)$$

Для производной от $f(x)$ используется также обозначение $f'(x)$, которое произносится как “f штрих от x”.

Производную от функции можно вычислить численно, графически или с помощью алгебраических формул. Чтобы численно найти $f'(x)$ в заданной точке, нужно составить таблицу значений функции $f(x)$ и воспользоваться приближенной формулой

The derivative of the function $f(x)$ is also denoted by the symbol $f'(x)$ that is read as “f prime of x”.

The derivative of function at a point can be found numerically, graphically or using algebraic formulae.

To compute the value of $f'(x)$ (for a given value of x) numerically, one can use a table of values of the function $f(x)$ and the following approximate formula:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \qquad (3)$$

Такой подход дает хорошее приближение, а иногда и позволяет угадать точное значение производной.

This approach gives a good approximation, sometimes allowing us to guess the exact value of the derivative.

Пример 2: Продолжим работу с функцией $f(x) = x^2 + 3x - 1$ из предыдущего примера. Формула

Example 2: Let us continue with the function $f(x) = x^2 + 3x - 1$ of the above example. The formula

$$f'(1) \approx \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} \qquad (4)$$

дает приближенное значение производной $f'(x)$ в точке $x = 1$. Эти значения, вычисленные при различных Δx, представлены в нижеприведенной таблице.

gives an approximate value of the derivative $f'(x)$ evaluated at $x = 1$. The table below shows the values of the derivative $f'(1)$ for several values of Δx.

Таблица 1 | **Table 1**

Δx	1	0.1	0.01	0.001	0.000001
$f'(1)$	6	5.1	5.01	5.001	5.000001

Нетрудно заметить, что последовательность значений $f'(1)$ все ближе и ближе приближается к числу 5 с уменьшением Δx. Поэтому можно заключить, что точное значение $f'(1)$ равно пяти, что и соответствует действительности.

Для быстрой оценки достаточно воспользоваться одним малым значением Δx и вычислить разностное отношение (1). Чем меньше Δx, тем лучше оценка. Иногда для быстрой оценки производной в точке предпочтительнее использовать следующее сбалансированное отношение:

It is easy to see that the succession of values of $f'(1)$ gets closer and closer to number five for smaller and smaller values of Δx. So one can conclude that the exact value of $f'(1)$ is the number five. This conclusion is true.

In order to get a quick approximation we can use a single small value of Δx and compute the difference quotient (1). The smaller Δx gives the better approximation. One can also use another quick approximation. Sometimes the following balanced quotient gives a better estimate of the derivative:

$$f'(x) \approx \frac{f(x + \Delta x/2) - f(x - \Delta x/2)}{\Delta x}. \qquad (5)$$

8.3. Геометрическая интерпретация производной

Посмотрите на Рис. 1, на котором приведен фрагмент графика функции $y = f(x)$. На рисунке также показаны секущая, проходящая через точки $A(x, y)$ и $B(x, y_2)$ кривой $y = f(x)$, и касательная к точке A.

The Geometric Interpretation of the Derivative

Let us look at Fig.1 where a fragment of the graph of a function $y = f(x)$ is shown. The drawing also includes the secant line that goes through points $A(x, y)$ and $B(x, y_2)$ on the curve $y = f(x)$, and the tangent line that touches the curve at the point A.

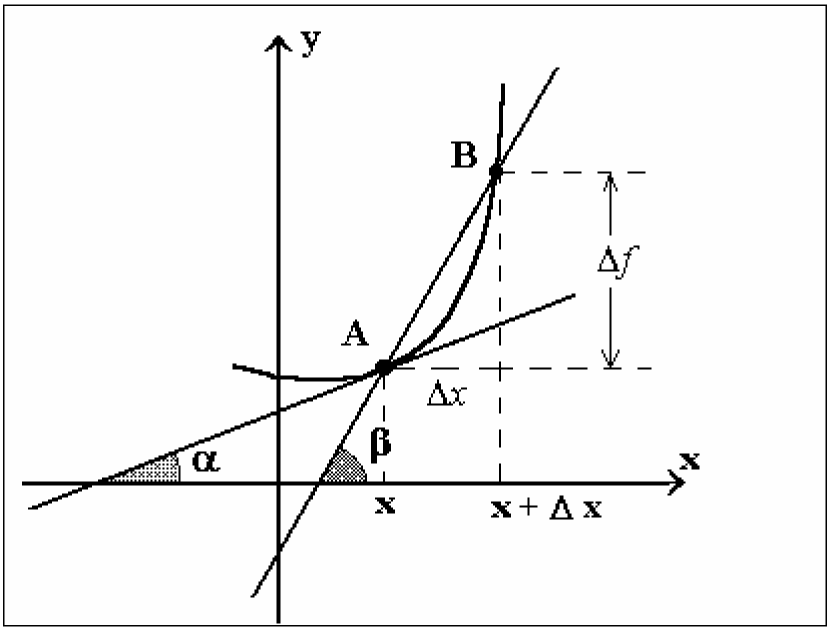


Рис. 1 | Fig. 1

Очевидно, что определение (1) средней скорости изменения функции $f(x)$ на интервале $[x, x+\Delta x]$ представляет собой просто алгебраическую формулу для нахождения углового коэффициента секущей *AB*, т.е. отношение противолежащего катета к прилежащему:

It can be seen that definition (1) of the average rate of change of $f(x)$ over the interval $[x, x+\Delta x]$ is nothing more than an algebraic formula for finding of the slope of a secant line. We take simply the ratio of the opposite side to the adjacent side of the triangle. This gives the slope of the secant line *AB*:

$$\tan\beta = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}. \qquad (6)$$

Предельным положением секущей AB при движении точки B к точке A по дуге кривой $y = f(x)$ (что означает $\Delta x \to 0$) является касательная в точке A. Таким образом, угловой коэффициент касательной равен пределу углового коэффициента секущей при $\Delta x \to 0$:

If the point B moves in the arc of the circle $y = f(x)$ in the direction of the point A (that means $\Delta x \to 0$), then the terminal position of the secant line coincides with the tangent line at the point A.
Therefore, the slope of the tangent line is the limit of the slope of the secant line when Δx approach zero:

$$\tan\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \tan\beta = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{df(x)}{dx}. \qquad (7)$$

Следовательно, производную $f'(x)$ можно интерпретировать как угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке (x, y).

Thus, the derivative $f'(x)$ can be interpreted as the slope of the tangent line on the graph of the function $y = f(x)$ at the point (x, y).

8.4. Правила дифференцирования

Differentiation Rules

Необходимо свободно освоить следующие правила дифференцирования:

I. Постоянный множитель c можно выносить за знак производной:

There are a few rules for differentiation that you need to be familiar with.
If c is a constant, then the derivative of c times a function is c times the derivative of the function:

$$(c\, f(x))' = c\, f'(x). \qquad (8)$$

Доказательство:

Proof:

$$(c\, f(x))' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c\, f(x+\Delta x) - c\, f(x)}{\Delta x}$$

$$= c \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = c\, f'(x).$$

II. Если существуют $f'(x)$ и $g'(x)$, то производная от суммы равна сумме производных, а производная от разности равна разности производных:

If $f'(x)$ and $g'(x)$ exist, then the derivative of a sum is the sum of the derivatives, and the derivative of a difference is the difference of the derivatives:

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x). \qquad (9)$$

Доказательство: | **Proof**:

$$(f(x) \pm g(x))' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(f(x+\Delta x) \pm g(x+\Delta x)) - (f(x) \pm g(x))}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(f(x+\Delta x) - f(x)) \pm (g(x+\Delta x) - g(x))}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(f(x+\Delta x) - f(x))}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(g(x+\Delta x) - g(x))}{\Delta x}$$
$$= f'(x) \pm g'(x).$$

III. Если существуют $f'(x)$ и $g'(x)$, то | If $f'(x)$ and $g'(x)$ exist then

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x), \tag{10}$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}, \quad (g(x) \neq 0). \tag{11}$$

8.5. Таблица производных | A Common Table of Derivatives

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$
$$(a^x)' = a^x \ln a$$
$$(e^x)' = e^x$$
$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$
$$(\sin x)' = \cos x$$
$$(\cos x)' = -\sin x$$
$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$
$$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$
$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$
$$(\cot^{-1} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

9. Неопределенные интегралы

9.1. Определение и свойства

Функция $F(x)$ называется **первообразной** функции $f(x)$, если $F'(x) = f(x)$ для всех x из области определения $f(x)$.

Итак, первообразная это такая функция, производная от которой равна данной функции.

Пример 1: Функция $F(x)$ является первообразной для $F'(x)$.

Пример 2: Функция $\sin(x^2)$ является первообразной функции $2x\cos(x^2)$, так как

Indefinite Integrals

The Definition and Properties

The function $F(x)$ is called a **primitive** of a function $f(x)$ if $F'(x) = f(x)$ for all in the domain of $f(x)$.

In other words, a primitive is a function whose derivative equals the given function.

Example 1: The function $F(x)$ is a primitive of $F'(x)$.

Example 2: The function $\sin(x^2)$ is a primitive of $2x\cos(x^2)$ since

$$(\sin x^2)' = \cos x^2 \cdot (x^2)' = \cos x^2 \cdot 2x .$$

Если известна одна первообразная $F(x)$ функции $f(x)$, то известны все ее первообразные, любую из которых можно представить в виде $F(x) + C$, где C - произвольная константа. Совокупность всех первообразных функции называется ее **неопределенным интегралом**. Неопределенный интеграл от функции $f(x)$ обозначается символом $\int f(x)dx$, который читается как "Интеграл от $f(x)$ по переменной x".

If a primitive $F(x)$ of the function $f(x)$ is known then all primitives of $f(x)$ are known each of which can be represented as $F(x) + C$, where C is an arbitrary constant. The set of all primitives of $f(x)$ is called the **indefinite integral** of the function $f(x)$. The indefinite integral of $f(x)$ is denoted by the symbol $\int f(x)dx$, which is read as "The integral of $f(x)$ with respect to x".

$$F'(x) = f(x) \qquad \Rightarrow \qquad \int f(x)dx = F(x) + C .$$

Здесь $f(x)$ - подынтегральная функция;
$f(x)dx$ - **подынтегральное**

The function $f(x)$ under the integral sign is called the integrand.
The x is the integration variable.
The symbol dx is the differential

выражение; x - переменная интегрирования; dx - дифференциал переменной x.
Произвольную константу C называют постоянной интегрирования.

of x.
An arbitrary constant C is said to be a constant of integration.

Неопределенные интегралы имеют следующие свойства:
I. Дифференцирование - операция, обратная интегрированию:

All indefinite integrals have the following properties:
Differentiation is the inverse operation to indefinite integration:

$$(\int f(x)dx)' = f(x), \tag{1a}$$

$$d\int f(x)dx = f(x)dx. \tag{1b}$$

Это свойство непосредственно следует из определения интеграла. Его легко запомнить, потому что дифференцирование как бы “компенсирует“ интегрирование, так что рядом стоящие символы d и $\int$ взаимно уничтожают друг друга.

These formulas follow from the definition of indefinite integrals and can be easily memorized using the following rule:
Symbols d and $\int$ cancel each other if they follow one after the other.

II. Интегрирование - операция, обратная дифференцированию:

Integration is the inverse operation to differentiation:

$$\int f'(x)dx = \int df(x) = f(x) + C. \tag{2}$$

Это свойство вполне очевидно, так как $f(x)$ является первообразной для $f'(x)$. Обратите внимание, что рядом стоящие символы $\int$ и d взаимно уничтожают друг друга. Не забывайте, однако, добавлять постоянную интегрирования, если интегрирование следует за дифференцированием, а не наоборот.

This property is evident since the function $f(x)$ is a primitive of $f'(x)$. Note that integration of the derivative of $f(x)$ yields the function itself. However, do not forget to add a constant of integration when integration is the last operation.

III. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

A constant factor can be taken outside the integral sign:

$$\int cf(x)dx = c\int f(x)dx. \quad (3)$$

IV. Интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме интегралов:

The integral of an algebraic sum of functions equals the algebraic sum of the integrals of each of the functions:

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx. \quad (4)$$

V. Если $\int f(x)dx = F(x) + \mathrm{C}$, то для любой дифференцируемой функции $u = u(x)$

If $\int f(x)dx = F(x) + \mathrm{C}$ then for any differentiable function $u = u(x)$

$$\int f(u)du = F(u) + \mathrm{C}. \quad (5)$$

Рассмотрим несколько простых **примеров**, иллюстрирующих свойства интегралов.

Consider some elementary **examples** to illustrate the properties of indefinite integrals before going on.

- $\frac{d}{dx}\int \sin^3 3x dx = \sin^3 3x.$
- $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int (\tan x)' dx = \tan x + C.$
- $\int (2x-3)dx = 2\int x dx - 3\int dx = 2\frac{x^2}{2} - 3x + C = x^2 - 3x + C..$

9.2. Таблица интегралов

A Table of Common Integrals

Для составления таблицы интегралов возьмем за основу таблицу производных. В качестве примера рассмотрим производную степенной функции: $(x^k)' = kx^{k-1}$. Преобразуем эту формулу.
Во-первых, заменим k на $(n+1)$:

Let us recall the derivatives of elementary functions. For instance, the power rule states that $(x^k)' = kx^{k-1}$.
This formula can be transformed as follows.
First, we substitute $(n+1)$ for k:

$$(x^{n+1})' = (n+1)x^n.$$

Затем разделим обе части полученного равенства на $(n+1)$ (при условии, что $n \neq -1$) и

Then we divide both sides of the equality by $(n+1)$ (provided that $n \neq -1$) and read the formula from внесем постоянный множитель под знак производной:

right to left:

$$x^n = \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)'.$$

Следовательно, $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ является первообразной функции x^n:

Therefore, the function $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ is a primitive of x^n, so the power rule for integration is the following:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$$

Аналогичным образом можно поступить с производными других элементарных функций и преобразовать оставшуюся часть таблицы производных в таблицу интегралов:

The derivatives of all elementary functions can be treated likewise. Then the table of derivatives can be easily transformed into the table of common integrals. Thus, we have a list of common indefinite integrals:

Таблица 1 | **Table 1**

N	Производные / Derivatives	Интегралы / Integrals
1)	$x^n = \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)'$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad (n \neq -1)$
2)	$\frac{1}{x} = (\ln x)'$	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$
3)	$a^x = \left(\frac{a^x}{\ln a}\right)'$ $e^x = (e^x)'$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ $\int e^x dx = e^x + C$
4)	$\sin x = (-\cos x)'$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
5)	$\cos x = (\sin x)'$	$\int \cos x dx = \sin x + C$
6)	$\frac{1}{\cos^2 x} = (\tan x)'$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$
7)	$\frac{1}{\sin^2 x} = (-\cot x)'$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$

9.3. Интегрирование заменой переменной

Интегрирование – значительно более сложная задача, чем дифференцирование. Так, чтобы продифференцировать функцию, достаточно следовать простым правилам. При этом тип функции практически не имеет значения - с точки зрения самой возможности получения результата. Совсем не так обстоит дело с интегрированием функций.

К основным методам интегрирования относятся метод замены переменной (метод подстановки) и метод интегрирования по частям. Метод подстановки помогает привести интеграл к табличному виду.

Для удобства все подстановки можно разбить на два типа: $u = g(x)$ или $x = u(t)$. В обоих случаях речь идет о замене переменной в той или иной форме. Обычно подстановка $u = g(x)$ применяется для вычисления интегралов вида

$$\int f(g(x))g'(x)dx.$$

В этом случае

$$u = g(x) \Rightarrow du = g'(x)dx,$$

так что

Integration by Substitution

Evaluating integrals is much more difficult than evaluating derivatives. As for derivatives, there is a systematic procedure based on the chain rule that effectively allows any derivative to be worked out. However, there is not any similar procedure for integrals.

The basic techniques of integration are substitutions and integration by parts.

The technique of substitutions helps to reduce integrals to common indefinite integrals, which are given in Table 1.

For convenience sake, substitutions may be subdivided into two classes: $u = g(x)$ or $x = u(t)$.

In both cases we change the variable of integration - in one way or another. As a rule, the substitution $u = g(x)$ is used when a given integral has the form

$$\int f(g(x))g'(x)dx.$$

Then the substitution $u = g(x)$ implies

$$du = g'(x)dx,$$

and so we obtain

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du.$$

В результате исходная проблема интегрирования преобразуется в другую. Однако, если не удается вычислить и полученный интеграл, то, возможно, следует

Therefore, the initial integration problem is transformed into another integration problem. However, if we can not integrate the function, then another method of integration применить другой метод интегрирования.

Метод замены переменной является почти универсальным и используется для решения широкого круга проблем - в частности, для обобщения таблицы интегралов. Так, рассмотрим, для примера правило интегрирования степенной функции:

may be required.

The technique of substitution is quite general and can be used in a wide variety of problems. In particular, one can generalize the table of common integrals applying the technique of substitutions.

Let us consider, for instance, the power rule:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad (n \neq -1).$$

Сделаем подстановку $x = u(t)$, где $u(t)$ - некоторая дифференцируемая функция. Тогда

Let $u(t)$ be any differentiable function. If we use the substitution $x = u(t)$, then the power rule can be formulated as follows:

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C .$$

Эта формула внешне не отличается от предыдущей. Однако теперь символ u является не только переменной интегрирования, но и функцией переменной t. Следовательно, $du = u'dt$, так что обобщенное правило интегрирования степенной функции имеет вид

This formula is exactly the same as the original power rule. The only difference is the interpretation of the symbol u as a function of a variable t and so $du = u'dt$.

Therefore, we obtain the following generalized power rule:

$$\int u^n(t)u'(t)dt = \frac{u^{n+1}(t)}{n+1} + C .$$

Подобным образом можно интерпретировать всю таблицу интегралов, рассматривая переменные в качестве функций.

One can interpret each of the common integrals in a similar way by considering the variable of integration as a function.

Пример 1: Каждый из данных интегралов

Example 1: Each of the following integrals

$$\int \frac{(\arctan x)^4}{1+x^2}dx, \quad \int \frac{dx}{(\arctan x)(1+x^2)}, \qquad \int e^{(\arctan x)} \frac{dx}{1+x^2}$$

имеет следующую структуру:

has the following structure:

$$\int f(\arctan x)\frac{dx}{1+x^2} = \int f(\arctan x)(\arctan x)' dx$$

$$= \int f(\arctan x) d(\arctan x).$$

Следовательно, для их вычисления можно использовать подстановку $u = \arctan x$. Затем нужно вернуться к исходной переменной, подставляя вместо u соответствующую функцию от x. Окончательные результаты имеют следующий вид:

Therefore, the substitution $u = \arctan x$ is fairly suitable for each of them. Once the solution has been found in terms of u, one needs to replace u in it by the corresponding function of x.
So the final solutions are the following:

$$\int \frac{(\arctan x)^4}{1+x^2}dx = \int (\arctan x)^4 d(\arctan x)$$

$$= \int u^4 du = \frac{u^5}{5} + C = \frac{\arctan^5 x}{5} + C.$$

$$\int \frac{dx}{(\arctan x)(1+x^2)} = \int \frac{d(\arctan x)}{\arctan x}$$

$$= \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|\arctan x| + C.$$

$$\int e^{(\arctan x)} \frac{dx}{1+x^2} = \int e^{(\arctan x)} d(\arctan x)$$

$$= \int e^u du = e^u + C = e^{\arctan x} + C.$$

Эти решения можно легко проверить дифференцированием. Проверим справедливость последнего результата:

One can easily check these solutions by differentiating.
Let us check, e.g., the last integral:

$$(e^{\arctan x})' = e^{\arctan x} \cdot (\arctan x)' = \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2}.$$

Проверили: все нормально.

That is O.K.

Пример 2: Нижеприведенные интегралы внешне не очень похожи друг на друга. Однако каждый из них легко приводится к табличному виду

Example 2: Each of the integrals below is reduced to the following table integral

$$\int \frac{dx}{\cos^2 u} = \tan u + C$$

Выражения под знаком косинуса более чем прозрачно намекают на конкретные замены переменных.

by making use of the appropriate substitution in view of the arguments of cosines.

- $\int \frac{dx}{\cos^2(3x-4)} = \frac{1}{3}\tan(3x-4) + C,$ $\quad$ ($u = 3x-4$, $du = 3dx$).
- $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\cos^2(\sqrt{x})} = 2\tan(\sqrt{x}) + C,$ $\quad$ ($u = \sqrt{x}$, $du = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$).
- $\int \frac{x^4 dx}{\cos^2(x^5)} = \frac{1}{5}\tan(x^5) + C,$ $\quad$ ($u = x^5$, $du = 5x^4 dx$).
- $\int \frac{dx}{x\cos^2(\ln x)} = \tan(\ln x) + C,$ $\quad$ ($u = \ln x$, $du = \frac{dx}{x}$).
- $\int \frac{e^x dx}{\cos^2(e^x)} = \tan e^x + C,$ $\quad$ ($u = e^x$, $du = e^x dx$).

Заметим, что в простых и очевидных ситуациях достаточно лишь мысленно сделать замену переменной.

Formal substitutions into the integral really are not necessary.

9.4. Интегрирование по частям

Integration by Parts

Формула интегрирования по частям имеет вид

The formula for integration by parts states that

$$\int u dv = uv - \int v du \tag{6}$$

где functions $u(x)$ и $v(x)$ - любые дифференцируемые функции.

for any differentiable functions $u(x)$ and $v(x)$.

Эта формула связывает друг с другом два интеграла, $\int u dv$ и $\int v du$. Если удается вычислить

This formula allows us to transform one problem of integration into another. If one of the two integrals, $\int u dv$ or $\int v du$, is easily evaluated, один из них, то легко находится и другой. В этом и состоит суть метода интегрирования по частям.

Процедура интегрирования по частям состоит из двух этапов.

Во-первых, подынтегральную функцию $f(x)$ нужно представить в виде произведения: вспомогательных функций $u(x)$ и $v'(x)$:

it can be used to find the other one. This is the main idea of the method of integration by parts.

In practice, the procedure of integrating by parts consists of the following steps:

First, intermediary functions $u(x)$ and $v'(x)$ are introduced to represent the function $f(x)$ as the product of these factors:

$$\int f(x)dx = \int u(x)v'(x)dx = \int u(x)dv(x).$$

Например, можно положить $u = f(x)$, что означает $v'(x) = 1$.

Во-вторых, нужно продифференцировать $u(x)$ и проинтегрировать $v'(x)$, чтобы найти $du = u'dx$ и $v = \int v'dx$. На этом этапе постоянную интегрирования можно положить равной нулю.

Затем применяем формулу (6) и работаем с интегралом $\int vdu$.

For example, one can set $u = f(x)$, which implies $v'(x) = 1$.

Next it is necessary to differentiate $u(x)$ and integrate $v'(x)$ to find, respectively, $du = u'dx$ and $v = \int v'dx$. Note that a constant of integration can be taken $C = 0$ at this step.

Then we use formula (6) and try to evaluate the integral $\int vdu$.

- Самым сложным этапом метода интегрирования по частям является выбор вспомогательных функций, поскольку не существует универсального правила, применимого во всех случаях. Понимание приходит только с опытом. Поэтому на первых порах можно попробовать сделать хоть какой-нибудь выбор и посмотреть – будет ли полученный интеграл проще исходного. Если нет, то нужно испытать другой выбор, перебирая различные варианты до тех пор, пока не будет найден

- The main problem one faces when dealing with the method of integration by parts is the choice of the intermediary functions. There is no general rule to follow. It is a matter of experience and nothing more. At first, in order to understand this technique better, it is necessary to make a choice and perform the calculations. If the new integral is simpler than the given one, then the choice is a good one; otherwise, go back and make another choice. In such a way one can easily appreciate whether the choice of $u(x)$ is the best one. It is possible that you need to evaluate a наилучший. Обычно достаточно решить несколько примеров, чтобы научиться ощущать правильный выбор. В качестве ориентиров можно использовать простые критерии: интеграл от v' должен вычисляться достаточно просто, а производная от $u(x)$ должна быть простой функцией.

few integrals before you will start to feel the right choice. One can be based on the following criteria:
The integral of v' should be easily evaluated.
The derivative of $u(x)$ should be a simple function.

Пример 2: Вычислить интеграл

$$\int \arctan x dx .$$

Решение: Пусть $u = \arctan x$ и $v' = 1$. Тогда $du = \frac{dx}{1+x^2}$ и $v = x$.
Интегрируем по частям:

Example 2: Evaluate the integral

$$\int \arctan x dx .$$

Solution: Let $u = \arctan x$ and $v' = 1$. Then $du = \frac{dx}{1+x^2}$ and $v = x$.
Integrate by parts:

$$\int \arctan x dx = x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} dx .$$

Полученный интеграл вычисляется подстановкой $z = 1 + x^2$, откуда следует, что $dz = d(1+x^2) = 2xdx$, т.е. $xdx = \frac{1}{2} dz$.
Таким образом,

To evaluate the new integral we use the substitution $z = 1 + x^2$, which implies $dz = d(1+x^2) = 2xdx$, and so $xdx = \frac{1}{2} dz$.
Therefore,

$$\int \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{dz}{z} = \frac{1}{2} \ln |z| = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) .$$

Окончательный результат имеет следующий вид:

Hence, the final solution is the following:

$$\int \arctan x dx = x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C .$$

Пример 3: Вычислить интеграл $\int x\ln^2 xdx$.

Решение: Пусть $u=\ln^2 x$ и $dv=xdx$.

Тогда $du=\frac{2\ln xdx}{x}$ и $v=\frac{x^2}{2}$.

Интегрируем по частям:

Example 3: Evaluate the integral $\int x\ln^2 xdx$.

Solution: Let $u=\ln^2 x$ and $dv=xdx$.

Then $du=\frac{2\ln xdx}{x}$ and $v=\frac{x^2}{2}$.

The formula of integration by parts gives

$$\int x\ln^2 xdx=\frac{x^2}{2}\ln^2 x-\int x\ln xdx.$$

Вторично применяем метод интегрирования по частям, полагая $u=\ln x$ и $dv=xdx$.

Тогда $du=\frac{dx}{x}$ и $v=\frac{x^2}{2}$.

Следовательно,

Now we have to integrate by parts a second time, setting $u=\ln x$ and $dv=xdx$.

Then $du=\frac{dx}{x}$ and $v=\frac{x^2}{2}$.

Therefore,

$$\int x\ln xdx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{2}\int xdx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}.$$

Окончательный результат имеет следующий вид:

The final result is the following:

$$\int x\ln^2 xdx=\frac{x^2}{2}\ln^2 x-(\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4})+C=\frac{x^2}{4}(2\ln^2 x-2\ln x+1)+C.$$

Список литературы | References

1. V.V. Konev, Mathematics: Preparatory Course. Textbook. TPU Press, 2009, 104p.
2. V.V. Konev, Mathematics: Algebra, Exercise Book. TPU Press, 2009, 60p.
3. V.V. Konev, Mathematics: Geometry and Trigonometry, Exercise Book. TPU Press, 2009, 34p.
4. K.P. Arefiev, O.V. Boev, A.I. Nagornova, G.P. Stoljarova, A.N. Harlova. Higher Mathematics, Part 1. Textbook. TPU Press, 2009, 97p.
5. V.V. Konev, Higher Mathematics, Part 2. Textbook. TPU Press, 2009, 114p.
6. D. Cohen, Precalculus. West Publishing Company, 1997, 1018p.

Valery V. Konev, Associate Professor of the Higher Mathematics Department, TPU, Ph.D.

The Elements of Mathematics

Textbook

Editor: V.A. Kilin, Professor of the Higher Mathematics Department, TPU, D.Sc.