ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

V.V. Konev

THE ELEMENTS OF MATHEMATICS

WorkBook

Рекомендовано в качестве учебного пособия
Редакционно-издательским советом
Томского политехнического университета

Издательство
Томского политехнического университета
2009

UDC 517

V.V. Konev. The Elements of Mathematics. Workbook. The Second Edition. Tomsk. TPU Press, 2009, 93 p.

The workbook is a supplement to the textbook of the same name.

Reviewed by: V.A. Kilin, Professor of the Higher Mathematics Department, TPU, D.Sc.

To the Student

The workbook has been written to introduce you to pre-calculus mathematics and advanced college-level mathematics.

Pre-calculus mathematics topics include:

- a ratio and proportion;
- fractional and negative exponents;
- radicals and exponents;
- operations with polynomials;
- quadratic equations;
- quadratic inequalities;
- algebraic, logarithmic, and exponential functions;
- discrete algebra;
- complex numbers.

Advanced college-level mathematics calculus topics include:

- limits of functions;
- maxima and minima of functions;
- points of inflection of functions;
- asymptotes graphs of functions;
- evaluation and application of derivatives and integrals of functions.

The workbook will help you to develop problem-solving skills and to focus your attention on important problems. You are recommended to use the corresponding textbook when you solve problems. The topics are presented in the same order as in the textbook.

In each section you will find summary and examples with explanations. The presented problems should be solved either on your own or with teacher's help. The key concepts and ideas of mathematics are explained and illustrated by means of examples and figures.

When you complete this supplement you have to be able:

- to operate with functions and plot graphs of elementary functions;
- to determine properties of functions such as the domain, range, intercepts, symmetry;
- to use the properties of algebraic, trigonometric, logarithmic, and exponential functions in solving problems;
- to analyze the properties of functions and their graphs;
- to find the extreme values of function;
- to determine the domain, range, intercepts, symmetry, intervals of increasing or decreasing, points of discontinuity, and asymptotes of functions;

- to use standard differentiation and integration techniques;
- to calculate the area of a region in the plane.

The final tests will estimate your knowledge and skill, your abilities in interpreting symbols, justifying statements and constructing proofs.

You will pass any basic algebra test if you are able:

- to recognize equivalent forms of a number, including square roots and powers of a number;
- to perform the basic operations on numbers and algebraic expressions;
- to solve simple equations and inequalities, including those involving absolute values.
- to solve systems of linear equations in one, two, or three variables;
- to expand products of binomials;
- to factor a quadratic polynomial;
- to solve a quadratic equation in one variable;
- to substitute either numerical values or algebraic expressions in place of a specified variable;
- to read Cartesian (rectangular) graphs, and use them to locate the approximate position of the x-intercepts.

Scoring scale

5	A student clearly demonstrates full understanding of all topics required, answers all given questions, and gives correct and complete answers. Minor calculation errors are admissible.
4	A student gives a complete response that contains a minor mathematical error or misstatement, or gives a correct but slightly in complete answer.
3	A student demonstrates the ability to determine an appropriate strategy for answering; gives a significant portion of the answer successfully; makes substantial progress toward a correct complete response to that portion of the question.
2	A student demonstrates a limited understanding of the question or makes only minimal progress toward a correct and complete response.
1	A student demonstrates a very limited understanding of the question and makes little or no progress toward a correct and complete response.
0	Blank or off topic answer.

Contents

Содержание

1. Вещественные числа | The Real Number System

1.1. Задачи для самопроверки | Self-testing Problems

1.1.1. Тест 1 | Quiz 1

I. Какие из нижеприведенных чисел являются натуральными? | Which of the following numbers are natural?

$5/2$	$2/5$	$-2/5$	$\lvert -3 \rvert$	7
-4	$\sqrt{9}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{(-4)^2}$	0

Ваш ответ: | Your answer:

II. Какие из вышеприведенных чисел являются целыми? | Which of the above numbers are integers?

Ваш ответ: | Your answer:

III. Пусть n – целое число. Какие из нижеприведенных чисел являются четными? | Let n be an integer. Which of the following numbers are even?

$2n$ $3n$ $4n$ $2n-1$ $2n+1$

Ваш ответ: | Your answer:

IV. Какие из вышеприведенных чисел являются нечетными? | Which of the above numbers are odd?

Ваш ответ: | Your answer:

V. Пусть $x = -8$ и $y = -4$. Какие из нижеприведенных выражений являются положительными? Какие из них являются отрицательными? | Let $x = -8$ and $y = -4$. Which of the following expressions are positive? Which of them are negative?

a) xy, b) x/y, c) $y - x$, d) $x + y$,

e) $x^2 y$, f) $2x + y^2$, g) $x - 2y$, h) $x\,|y|$.

Ваше обоснование: | Your reasoning:

1.1.2. Тест 2 | Quiz 2

I. Какие из нижеприведенных утверждений являются истинными? Исправьте неверные утверждения.

Which of the following statements are true? Correct the false propositions.

a) $5(x-y)=5x-y$,

b) $(7x)^2=7x^2$,

c) $(x+y)^2=x^2+y^2$,

d) $(x-y)^2=2x-2y$,

e) $x+x=x^2$,

f) $x^2-y^2=(x-y)(x+y)$,

g) $b^5=b^2+b^3$,

h) $a^6=a^3a^2$,

i) $(x^2)^3=x^6$,

j) $(x^2)^3=x^5$,

k) $x^{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{x^2}$,

l) $\dfrac{1}{x^{-1/2}}=x^{\frac{1}{2}}$.

Ваши ответы: | Your answers:

a) $5(x-y)=$

b) $(7x)^2=$

c) $(x+y)^2=$

d) $(x-y)^2=$

e) $x+x=$

f) $x^2-y^2=$

g) $b^5=$

h) $a^6=$

i) $(x^2)^3=$

j) $(x^2)^3=$

k) $x^{\frac{1}{2}}=$

l) $\dfrac{1}{x^{-1/2}}=$

II. Дайте правильный ответ для каждого из нижеприведенных ошибочных утверждений.

Give the true proposition for each of the false statements below.

a) $|x|<1 \;\Rightarrow\; x<1$,

b) $x<1 \;\Rightarrow\; |x|<1$,

c) $|x|>1 \;\Rightarrow\; x>1$,

d) $x>1 \;\Rightarrow\; |x|>1$,

e) $a^2<b^2 \;\Rightarrow\; a<b$,

f) $a>3, \;\Rightarrow\; 1/a>3$,

g) $\sqrt{25}=\pm 5$,

h) $\sqrt{(-3)^2}=-3$,

i) $\sqrt{x-y}=\sqrt{x}-\sqrt{y}$,

j) $\sqrt{x^2+1}=x+1$.

Ваши ответы:| Your answers:

a) $|x|<1 \quad \Rightarrow$

b) $x<1 \quad \Rightarrow$

c) $|x|>1 \quad \Rightarrow$

d) $x>1 \quad \Rightarrow$

e) $a^2<b^2 \quad \Rightarrow$

f) $a>3, \quad \Rightarrow$

g) $\sqrt{25}=$

h) $\sqrt{(-3)^2}=$

i) $\sqrt{x-y}=$

j) $\sqrt{x^2+1}=$

1.1.3. Тест 3

Quiz 3

I. Изобразите данные множества в схематическом виде на числовой оси.

Represent each of the given sets by means of a graph on the number line.

a) $\{x \mid 1<x<5\}$,

b) $\{x \mid a\leq x\leq b\}$,

c) $\{x \mid -3<x\leq 8\}$,

d) $\{x \mid 0\leq x<11\}$,

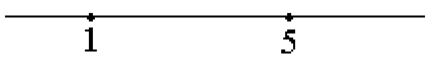
e) $\{x \mid x<7,\ x\neq 1\}$,

f) $\{x \mid x\leq 3\}$,

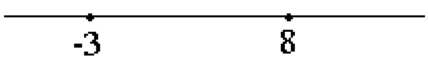
g) $\{x \mid x>2\}$,

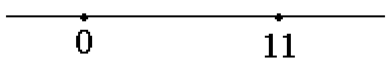
h) $\{x \mid x\geq 4\}$.

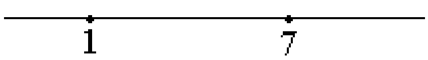
Ваши ответы: | Your answers:

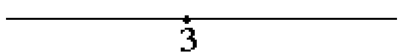
a) 

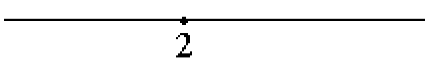
b) 

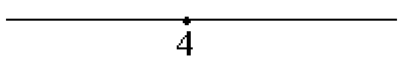
c) 

d) 

e) 

f) 

g) 

h) 

Найдите объединение $A \bigcup B$ и пересечение $A \bigcap B$ множеств A и B, если $A = \{x \mid 2 < x < 8\}$ и $B = \{x \mid 5 < x < 10\}$.

Find the union $A \bigcup B$ and intersection $A \bigcap B$ of the sets A and B, if $A = \{x \mid 2 < x < 8\}$ and $B = \{x \mid 5 < x < 10\}$.

Ваши ответы: | Your answers:

$A \bigcup B =$

$A \bigcap B =$

II. Найдите объединение $A \bigcup B$ и пересечение $A \bigcap B$ множеств A и B, если $A = \{x \mid x < 3\}$ и $B = \{x \mid x > 1\}$.

Find the union $A \bigcup B$ and intersection $A \bigcap B$ of the sets A and B, if $A = \{x \mid x < 3\}$ and $B = \{x \mid x > 1\}$.

Ваши ответы: | Your answers:

$A \bigcup B =$

$A \bigcap B =$

III. Пусть $A = \{x \mid x > 9\}$, $B = \{x \mid 2 < x < 4\}$ и $C = \{x \mid x < 3\}$.

Найдите следующие объединения и пересечения множеств: $A \bigcup B$, $A \bigcup C$, $A \bigcap B$ и $A \bigcap C$.

Let $A = \{x \mid x > 9\}$, $B = \{x \mid 2 < x < 4\}$ and $C = \{x \mid x < 3\}$

Find the following unions and intersections of the sets: $A \bigcup B$, $A \bigcup C$, $A \bigcap B$ and $A \bigcap C$.

Ваши ответы: | Your answers:

$A \bigcup B =$ $A \bigcap B =$

$A \bigcup C =$ $A \bigcap C =$

1.1.4. Тест 4

I. Если среди нижеприведенных утверждений имеются ложные - внесите в них поправки, ссылаясь на соответствующие свойства дробей. Для помощи используйте Таблицу на стр. 20.

Quiz 4

Correct those propositions below, which are false. Present the arguments you use for the corrections by referring to the suitable properties of fractions. Apply the Table for a help (see p. 20).

a) $\frac{a}{b}=\frac{5}{7} \Rightarrow a=5,\ b=7.$

b) $\frac{a+4}{4}=a,$

c) $\frac{5a-b}{8a}=\frac{5-b}{8},$

d) $\frac{3}{a}+\frac{b}{4}=\frac{3+b}{a+4},$

e) $\frac{a}{2}-\frac{a}{c}=\frac{a}{2c},$

f) $\frac{a}{4}+\frac{b}{4}=\frac{a+b}{8},$

g) $\frac{a}{b+c}=\frac{a}{b}+\frac{a}{c},$

h) $\frac{(\frac{x}{a})}{2}=\frac{2x}{a},$

i) $\frac{3}{(\frac{a}{b})}=\frac{3a}{b},$

j) $\frac{a}{4}:\frac{b}{5}=\frac{a}{20b}.$

Ваши ответы: | Select your answers:

a) $\frac{a}{b}=\frac{5}{7} \Rightarrow$

b) $\frac{a+4}{4}=$

c) $\frac{5a-b}{8a}=$

d) $\frac{3}{a}+\frac{b}{4}=$

e) $\frac{a}{2}-\frac{a}{c}=$

f) $\frac{a}{4}+\frac{b}{4}=$

g) $\frac{a}{b+c}=$

h) $\frac{(\frac{x}{a})}{2}=$

i) $\frac{3}{(\frac{a}{b})}=$

j) $\frac{a}{4}:\frac{b}{5}=$

II. Какие из нижеприведенных утверждений являются истинными?

Which of the following statements are true?

a) $\lg 8 = \lg 4 + \lg 4$,

b) $\lg 8 = \lg 2 + \lg 4$,

c) $\lg 9 = (\lg 3)^2$,

d) $\lg 9 = 2\lg 3$,

e) $2\lg x = \lg 5 \quad \Rightarrow \quad 2x = 5$,

f) $\lg a - \lg b = \lg(a-b)$.

Ваши ответы / Your answer:

a) $\lg 4 + \lg 4 =$

b) $\lg 2 + \lg 4 =$

c) $\lg 9 =$

d) $2\lg 3 =$

e) $2\lg x = \lg 5 \quad \Rightarrow \quad x =$

f) $\lg a - \lg b =$

Полезные свойства | Useful properties

$a+b=b+a$ $ab=ba$	$(a+b)+c=a+(b+c)$ $a(b+c)=ab+ac$
$\frac{a}{c}\pm\frac{b}{c}=\frac{a\pm b}{c}$	$\frac{a}{c}\pm\frac{b}{d}=\frac{ad\pm bc}{cd}$
$a=\frac{ac}{c}$	$\frac{a}{b}=\frac{ac}{bc}$
$\frac{a}{c}\cdot\frac{b}{d}=\frac{ab}{cd}$	$a:\frac{b}{c}=a\cdot\frac{c}{b}$

1.2. Задачи

Задачи 1 – 15: Используя вышеприведенные свойства и не прибегая к помощи калькулятора, вычислить следующие выражения:

Problems

Problems 1 – 15: In view of the above useful properties evaluate the following expressions without using a calculator.

1) $23+39+27+61+45=$
2) $19+523+7+81+93=$
3) $68+74-18-24-90=$
4) $21\cdot 43+57\cdot 21=$
5) $30\cdot 64-14\cdot 30=$
6) $25\cdot 93\cdot 4=$
7) $50\cdot 17\cdot 200\cdot 3=$
8) $5/7+9/7=$
9) $2-11/6=$
10) $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=$
11) $\frac{5}{6}+\frac{2}{3}=$
12) $\frac{6}{8}\cdot\frac{12}{3}=$
13) $\frac{6}{5}:\frac{9}{10}=$
14) $\frac{9}{4}\cdot\frac{5}{3}-\frac{7}{8}:\frac{1}{6}=$
15) $\frac{11}{5}:\frac{22}{3}+\frac{9}{14}:\frac{45}{7}=$

Полезные свойства | Useful properties

$a^0 = 1$	$a^1 = a$
$a^{-p} = \frac{1}{a^p}$	$(a^p)^q = a^{pq}$
$a^p a^q = a^{p+q}$	$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$
$(ab)^p = a^p b^p$	$(\frac{a}{b})^p = \frac{a^p}{b^p}$

Задачи 16 – 30: Не прибегая к помощи калькулятора, вычислить следующие выражения:

Problems 16 – 30: Without using a calculator, evaluate the following expressions:

16) $2^2 2^3 2^4 =$

17) $3^{-5} 3^7 3^{-2} =$

18) $8^5 8^{-3} / 8^2 =$

19) $12(3^{-2} - 4^{-2}) 7^{-1} =$

20) $8^{4/3} =$

21) $1024^{1/10} =$

22) $27^{2/3} =$

23) $625^{1/4} - 25^{1/2} =$

24) $((-3)(-27))^{1/4} =$

25) $(12^6 30^{-4} 3^{-3} 4^{-3} 5^7 6^7)^{1/3} =$

26) $2^{1/3} 4^{7/3} 8^{-2/3} =$

27) $(\frac{5^7 2^{11} 3^4}{10^3 6^2})^{1/2} =$

28) $(\frac{5^{-1} 6^5 5^4 6}{5^3 6^{10}})^{-1/4} =$

29) $\frac{9^{1/2}}{64^{1/6}} + \frac{625^{1/4}}{1000^{1/3}} =$

30) $\frac{81^{-1/2}}{27^{-2/3}} - \frac{32^{1/5}}{125^{1/3}}$

Полезные свойства | Useful properties

$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$	$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$
$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$	$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

Задачи 31 – 40: Упростить следующие выражения:

Problems 21 – 30: Simplify the following expressions:

31) $a^3 a^7 a^{-2} =$

32) $(a^6 b^{-3} a^0)^{\frac{1}{3}} =$

33) $(\dfrac{a^{-1} b^5 a^4 b}{a^3 b^{10}})^{-2} =$

34) $(a^{\frac{1}{2}} b^{-6} a^{-\frac{5}{2}})^{-\frac{1}{2}} =$

35) $\sqrt{a^3} (\sqrt{a})^5 =$

36) $\dfrac{\sqrt[5]{x^8}}{(\sqrt[5]{x})^3} =$

37) $\sqrt{x^4 y^3 y^5 x^{-2}} =$

38) $\sqrt[4]{\dfrac{x^{-3} y^{-5} z^7}{x y^{-1} z^3}} =$

39) $\dfrac{\sqrt[3]{x^2}\sqrt{x}}{(\sqrt[6]{x})^7} =$

40) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{256} \cdot \sqrt[6]{16} =$

Полезные свойства | Useful properties

$\log_a 1 = 0$	$\log_a a = 1$
$\log_a xy = \log_a \lvert x\rvert + \log_a \lvert y\rvert$	$\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a \lvert x\rvert - \log_a \lvert y\rvert$
$\log_a x^y = y\log_a \lvert x\rvert$	$\log_a x = \dfrac{\log_c x}{\log_c a}$
$\log_{1/a} x = -\log_a x$	$\log_{(a^b)} x = \dfrac{\log_a x}{b}$

Задачи 41 – 50: Не прибегая к помощи калькулятора, вычислить следующие выражения:

Problems 41 – 50: Without using a calculator, evaluate the following expressions:

41) $\lg 2 + \lg 5 =$

42) $\lg 25 + \lg 4 =$

43) $2\lg 5 + \lg 4 =$

44) $\log_4 64 - \log_4 16 =$

45) $4\log_3 \sqrt{3} - \dfrac{1}{2}\log_3 9 + \log_9 81 =$

46) $2\lg(4\sqrt{5}) - \lg 4 - \dfrac{1}{2}\lg 9 - 2\lg\sqrt{2} =$

47) $\log_{\frac{1}{4}} (\sqrt[3]{64}\, \dfrac{1}{256}) =$

48) $\dfrac{\log_3 8}{\log_3 2} =$

49) $\dfrac{\log_3 7}{\log_3 5} - \dfrac{\log_4 7}{\log_4 5} =$

50) $\log_4 3 \cdot \log_3 16 + 6\ln\sqrt{e} - \lg\dfrac{\sqrt{20}}{10} - \lg\dfrac{\sqrt{5}}{10} =$

Полезные свойства | Useful properties

$x = a^{\log_a x} = 2^{\log_2 x} = 3^{\log_3 x} = \ldots = 10^{\lg x} = e^{\ln x}$
$y = \log_a a^y = \log_2 2^y = \log_3 3^y = \ldots = \lg 10^y = \ln e^y$

Задачи 51 – 60: Не прибегая к помощи калькулятора, вычислить следующие выражения:

Problems 51 – 60: Without using a calculator, evaluate the following expressions:

51) $10^{\lg 3} =$

52) $3^{\log_3 \sqrt{49}} =$

53) $\dfrac{e^{2\ln 6}}{4^{2\log_4 6}} =$

54) $e^{-\ln 3 + 4\ln 2} =$

55) $(\frac{1}{5})^{-2+\log_5 3} =$

56) $e^{2\ln 4} + (\frac{1}{7})^{-\log_{49} 25} =$

57) $(\frac{1}{16})^{-\log_4 5} + 10^{\lg 2 - \lg 1} - 3^{\log_9 36} =$

58) $e^{\ln 4 \cdot \log_4 3} =$

59) $10^{\lg 7 \cdot \log_7 3} =$

60) $\dfrac{e^{-5\ln a} \cdot \ln e^{3a}}{10^{-4\lg a}} =$

1.3. Сводная таблица наиболее важных формул

Необходимо твердо запомнить все нижеприведенные тождества.

Summary Table of the Most Important Formulas

You have to remember well each of the below identities.

$a\,(b+c) = ab + ac$	$\lvert a\rvert = \begin{cases} a, & a \ge 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$
$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$	$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}$
$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{d} = \frac{ad \pm bc}{cd}$	$\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} = \frac{ab}{cd}$
$a : \frac{b}{c} = a \cdot \frac{c}{b}$	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \;\Rightarrow\; ad = bc$
$a^0 = 1$	$a^p a^q = a^{p+q}$
$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$	$a^{-p} = \frac{1}{a^p}$
$(a^p)^q = a^{pq}$	$(ab)^p = a^p b^p$
$(\frac{a}{b})^p = \frac{a^p}{b^p}$	$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$
$\sqrt{a^2} = \lvert a\rvert$	$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$
$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$	$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$
$x = a^{\log_a x}$	$y = \log_a a^y$
$\log_a 1 = 0$	$\log_a a = 1$
$\log_a xy = \log_a \lvert x\rvert + \log_a \lvert y\rvert$	$\log_a \frac{x}{y} = \log_a \lvert x\rvert - \log_a \lvert y\rvert$
$\log_a x^y = y \log_a \lvert x\rvert$	$\log_a x = \frac{\log_c x}{\log_c a}$
$\log_{1/a} x = -\log_a x$	$\log_{(a^b)} x = \frac{\log_a x}{b}$

1.4. Ответы | Answers

Тест 1 / Test 1:

I. $|-3|$, 7, $\sqrt{9}$, $\sqrt{(-4)^2}$.

II. $|-3|$, 7, - 4, $\sqrt{9}$, $\sqrt{(-4)^2}$, 0.

III. $2n$, $4n$.

IV. $3n$, $2n-1$, $2n+1$.

V. Положительные: / Positive: xy, x/y, $y-x$.

Отрицательные: / Negative: $x+y$, x^2y, $x|y|$.

Тест 2 / Test 2:

I.

a) $5(x-y)=5x-5y$.

b) $(7x)^2=49x^2$.

c) $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$.

d) $(x-y)^2=x^2-2xy+y^2$.

e) $x+x=2x$.

f) $x^2-y^2=(x-y)(x+y)$.

g) $b^5=b^2b^3$.

h) $a^6=(a^3)^2=aa^5=a^2a^4=a^2a^3$.

i) $(x^2)^3=x^6$.

j) $(x^2)^3=x^6$.

k) $x^{1/2}=\sqrt{x}$.

l) $\dfrac{1}{x^{-1/2}}=x^{1/2}$.

II.

a) $|x|<1 \Rightarrow -1<x<1$.

b) Ложь / False.

c) $|x|>1 \Rightarrow x<-1$ или / or $x>1$.

d) Ложь / False.

e) $a^2<b^2 \Rightarrow |a|<|b|$.

f) $a>3, \Rightarrow 1/a<1/3$.

g) $\sqrt{25}=5$.

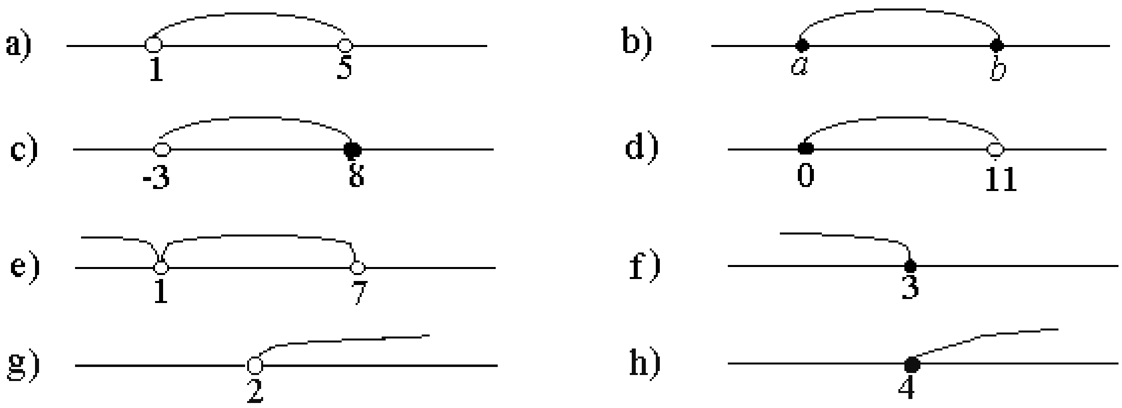
h) $\sqrt{(-3)^2}=3$.

i) Ложь / False.

j) Ложь / False.

Тест 3 / Test 3:

I.



II.

$A \bigcup B = \{x \mid 2 < x < 10\}$, $\quad A \bigcap B = \{x \mid 2 < x < 5\}$.

III.

$A \bigcup B = \{x \mid -\infty < x < +\infty\}$, $\quad A \bigcap B = \{x \mid 1 < x < 3\}$.

IV.

$A \bigcup B = \{x \mid 2 < x < 4\} \bigcup \{x \mid x > 9\}$, $\quad A \bigcap B = \varnothing$,

$A \bigcup C = \{x \mid x < 3\} \bigcup \{x \mid x > 9\}$, $\quad A \bigcap C = \varnothing$.

Тест 4 / Test 4:

I.

a) $\dfrac{a}{b} = \dfrac{5}{7} \;\Rightarrow\; a = \dfrac{5}{7}b$, b) $\dfrac{a+4}{4} = \dfrac{a}{4} + 1$,

c) $\dfrac{5a-b}{8a} = \dfrac{5}{8} - \dfrac{b}{8a}$, d) $\dfrac{3}{a} + \dfrac{b}{4} = \dfrac{12+ab}{4a}$,

e) $\dfrac{a}{2} - \dfrac{a}{c} = \dfrac{a(c-2)}{2c}$, f) $\dfrac{a}{4} + \dfrac{b}{4} = \dfrac{a+b}{4}$,

g) $\dfrac{a}{b+c} = \dfrac{a}{b+c}$, h) $\dfrac{(\frac{x}{a})}{2} = \dfrac{x}{2a}$,

i) $\dfrac{3}{(\frac{a}{b})} = \dfrac{3b}{a}$, j) $\dfrac{a}{4} : \dfrac{b}{5} = \dfrac{5a}{4b}$.

II.

a) $\lg 8 = 3\lg 2$, b) $\lg 8 = \lg 2 + \lg 4$,

c) $\lg 9 = 2\lg 3$, d) $\lg 9 = 2\lg 3$,

e) $2\lg x = \lg 5 \;\Rightarrow\; x = \sqrt{5}$, f) $\lg a - \lg b = \lg \dfrac{a}{b}$.

Задачи 1 – 15 / Problems 1 - 15:

1) $23 + 39 + 27 + 61 + 45 = (23 + 27) + (39+61) + 45 = 195.$
2) $19 + 523 + 7 + 81 + 93 = (19 + 81) + (7 + 93) + 523 = 723.$
3) $68 + 74 - 18 - 24 - 90 = (68 - 18) + (74 - 24) - 90 = 10.$
4) $21 \cdot 43 + 57 \cdot 21 = 21(43 + 57) = 2100.$
5) $30 \cdot 64 - 14 \cdot 30 = 30(64 - 14) = 1500.$
6) $25 \cdot 93 \cdot 4 = (25 \cdot 4) \cdot 93 = 9300.$
7) $50 \cdot 17 \cdot 200 \cdot 3 = 510000.$
8) $\frac{5}{7} + \frac{9}{7} = 2.$
9) $2 - 11/6 = 1/6.$
10) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$
11) $\frac{5}{6} + \frac{2}{3} = \frac{3}{2}.$
12) $\frac{6}{8} \cdot \frac{12}{3} = 3.$
13) $\frac{6}{5} : \frac{9}{10} = \frac{4}{3}.$
14) $\frac{9}{4} \cdot \frac{5}{3} - \frac{7}{8} : \frac{1}{6} = -\frac{3}{2}.$
15) $\frac{11}{5} : \frac{22}{3} + \frac{9}{14} : \frac{45}{7} = \frac{2}{5}.$

Задачи 16 – 30 / Problems 16 - 30:

16) $2^2 2^3 2^4 = 512.$
17) $3^{-5} 3^7 3^{-2} = 1.$
18) $8^5 8^{-3} / 8^2 = 1.$
19) $12(3^{-2} - 4^{-2}) 7^{-1} = \frac{1}{12}.$
20) $8^{4/3} = 16.$
21) $1024^{1/10} = 2.$
22) $27^{2/3} = 9.$
23) $625^{1/4} - 25^{1/2} = 0.$
24) $((-3)(-27))^{1/4} = 3.$
25) $(12^6 30^{-4} 3^{-3} 4^{-3} 5^7 6^7)^{1/3} = (12^6 12^{-3} 30^{-4} 30^7)^{1/3} = 360.$
26) $2^{1/3} 4^{7/3} 8^{-2/3} = 8.$
27) $\left(\frac{5^7 2^{11} 3^4}{10^3 6^2}\right)^{1/2} = 600.$
28) $\left(\frac{5^{-1} 6^5 5^4 6}{5^3 6^{10}}\right)^{-1/4} = 6.$
29) $\frac{9^{1/2}}{64^{1/6}} + \frac{625^{1/4}}{1000^{1/3}} = 2.$
30) $\frac{81^{-\frac{1}{2}}}{27^{-\frac{2}{3}}} - \frac{32^{\frac{1}{5}}}{125^{\frac{1}{3}}} = \frac{3}{5}.$

Задачи 31 – 40 / Problems 31 - 40:

31) $a^3 a^7 a^{-2} = a^8$,

32) $(a^6 b^{-3} a^0)^{1/3} = a^2 / b$,

33) $\left(\dfrac{a^{-1} b^5 a^4 b}{a^3 b^{10}}\right)^{-2} = b^8$,

34) $\left(a^{\frac{1}{2}} b^{-6} a^{-\frac{5}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}} = ab^3$,

35) $\sqrt{a^3}(\sqrt{a})^5 = a^4$,

36) $\dfrac{\sqrt[5]{x^8}}{(\sqrt[5]{x})^3} = x$,

37) $\sqrt{x^4 y^3 y^5 x^{-2}} = xy^4$,

38) $\sqrt[4]{\dfrac{x^{-3} y^{-5} z^7}{xy^{-1} z^3}} = \dfrac{z}{xy}$,

39) $\sqrt[3]{x^2}\sqrt{x}/(\sqrt[6]{x})^7 = 1$,

40) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{256} \cdot \sqrt[6]{16} = 16$.

Задачи 41 – 50 / Problems 41 - 50:

41) $\lg 2 + \lg 5 = 1$,

42) $\lg 25 + \lg 4 = 2$,

43) $2\lg 5 + \lg 4 = 2$,

44) $\log_4 64 - \log_4 16 = 1$,

45) $4\log_3 \sqrt{3} - \dfrac{1}{2}\log_3 9 + \log_9 81 = 3$,

46) $2\lg(4\sqrt{5}) - \lg 4 - \dfrac{1}{2}\lg 9 - 2\lg\sqrt{2} = 0$,

47) $\log_{\frac{1}{4}}\left(\sqrt[3]{64}\,\dfrac{1}{256}\right) = 3$,

48) $\dfrac{\log_3 8}{\log_3 2} = 3$,

49) $\dfrac{\log_3 7}{\log_3 5} - \dfrac{\log_4 7}{\log_4 5} = 0$,

50) $\log_4 3 \cdot \log_3 16 + 6\ln\sqrt{e} - \lg\dfrac{\sqrt{20}}{10} - \lg\dfrac{\sqrt{5}}{10} = 5$.

Задачи 51 – 60 / Problems 51 - 60:

51) $10^{\lg 3} = 3$,

52) $3^{\log_3 \sqrt{49}} = 7$,

53) $\dfrac{e^{2\ln 6}}{4^{2\log_4 6}} = 1$,

54) $e^{-\ln 3 + 4\ln 2} = \dfrac{16}{3}$,

55) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-2+\log_5 3} = \dfrac{25}{3}$,

56) $e^{2\ln 4} + \left(\dfrac{1}{7}\right)^{-\log_{49} 25} = 21$,

57) $\left(\dfrac{1}{16}\right)^{-\log_4 5} + 10^{\lg 2 - \lg 1} - 3^{\log_9 36} = 21$,

58) $e^{\ln 4 \cdot \log_4 3} = 3$,

59) $10^{\lg 7 \cdot \log_7 3} = 3$,

60) $\dfrac{e^{-5\ln a} \cdot \ln e^{3a}}{10^{-4\lg a}} = 3$.

2. Алгебраические выражения | Algebraic Expressions

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$
$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$
$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

2.1. Задачи | Problems

Задачи 1 – 15: Упростить следующие выражения:

Problems 1 – 15: Simplify the following expressions:

1) $\dfrac{a^2 - b^2}{a-b} =$

2) $\dfrac{a-b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} =$

3) $\dfrac{a^3 - b^3}{a-b} =$

4) $\dfrac{a-b}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}} =$

5) $\dfrac{a^3 + b^3}{a+b} =$

6) $\dfrac{a+b}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}} =$

7) $(a+b)^2 - a^2 - b^2 =$

8) $(a-b)^2 + 2ab =$

9) $\dfrac{(x+y)^3 - x^3 - y^3}{3xy} - x - y =$

10) $a - 2 - \dfrac{(1-a)^2 - 1}{a} =$

11) $x^2 + 10xy^2 + 25y^4 =$

12) $4 - 28a + 49a^2 =$

13) $a^3 + 12a^2b + 48ab^2 + 64b^3 =$

14) $(1 + a^2 - \sqrt{2}a)(1 + a^2 + \sqrt{2}a) =$

15) $(1-x)(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^9) =$

Подсказки:
2) В биноме $(a-b)$ можно распознать разность квадратов $(\sqrt{a})^2$ и $(\sqrt{b})^2$.
4) В биноме $(a-b)$ можно распознать разность кубов $(\sqrt[3]{a})^3$ и $(\sqrt[3]{b})^3$.
6) В биноме $(a+b)$ можно распознать сумму кубов.
7)–10) Используйте формулы сокращенного умножения.
11)–12) В многочленах ($x^2 + 10xy^2 + 25y^4$) и ($4 - 28a + 49a^2$) можно распознать квадрат суммы и квадрат разности, соответственно..
13) В многочлене
$$a^3 + 12a^2b + 48ab^2 + 64b^3$$
можно распознать куб суммы.
14)–15) Скажите себе: “Я могу решить любую задачу”.
И решайте…

Hints:
2) The binomial $(a-b)$ is recognizable as the difference between two squares, $(\sqrt{a})^2$ and $(\sqrt{b})^2$.
4) The binomial $(a-b)$ is recognizable as the difference between two cubes, $(\sqrt[3]{a})^3$ and $(\sqrt[3]{b})^3$.
6) The binomial $(a+b)$ is recognizable as the sum of two cubes.
7)–10) Use the formulas of expanding.
11)–12) The polynomials
$x^2 + 10xy^2 + 25y^4$, $4 - 28a + 49a^2$
are recognizable as the perfect square trinomials.
13) The polynomial
$$a^3 + 12a^2b + 48ab^2 + 64b^3$$
is recognizable as the sum cubed.
14)–15) Say yourself: “I am able to solve any problem”; then solve...

Задачи 16– 20: Упростить следующие выражения:

Problems 16 – 20; Simplify the following expressions:

16) $[(\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}):(\frac{1}{a}-\frac{1}{b+c})]\cdot[1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}]-\frac{(a+b+c)^2}{2bc}$,

17) $\left(\frac{\sqrt{5}+5}{1+\sqrt{5}+\sqrt{a}}+\frac{5-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}+\sqrt{a}}\right)\cdot\left(\sqrt{a}-\frac{4}{\sqrt{a}}+2\right)$,

18) $\frac{\frac{1}{\sqrt{a-1}}+\sqrt{a-1}}{\frac{1}{\sqrt{a+1}}-\frac{1}{\sqrt{a-1}}}:\frac{(a^2+a)\sqrt{a-1}}{(a-1)\sqrt{a+1}-(a+1)\sqrt{a-1}}$,

19) $\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\left(\frac{a^{3/2}+b^{3/2}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\frac{1}{(ab)^{-\frac{1}{2}}}\right)\cdot(a-b)^{-1}$,

20) $\frac{x^3-a^3}{x^2+2ax+a^2}:\left(\frac{x-a}{ax+a^2}-\frac{a+x}{x^2-ax}-\frac{3x+a}{a^2-x^2}\right)-\frac{(x-a)ax}{x+a}$.

Решение / Solution:

16)

$(\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}):(\frac{1}{a}-\frac{1}{b+c})=$

$1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=$

$[(\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}):(\frac{1}{a}-\frac{1}{b+c})]\cdot[1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}]=$

$[(\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}):(\frac{1}{a}-\frac{1}{b+c})]\cdot[1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}]-\frac{(a+b+c)^2}{2bc}=$

17)

$$\frac{\sqrt{5}+5}{1+\sqrt{5}+\sqrt{a}}+\frac{5-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}+\sqrt{a}}=$$

$$\sqrt{a}-\frac{4}{\sqrt{a}}+2=$$

$$\left(\frac{\sqrt{5}+5}{1+\sqrt{5}+\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{5}-5}{1-\sqrt{5}+\sqrt{a}}\right)\cdot\left(\sqrt{a}-\frac{4}{\sqrt{a}}+2\right)=$$

18)

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{a-1}}+\sqrt{a-1}}{\frac{1}{\sqrt{a+1}}-\frac{1}{\sqrt{a-1}}}=$$

$$\frac{(a^2+a)\sqrt{a-1}}{(a-1)\sqrt{a+1}-(a+1)\sqrt{a-1}}=$$

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{a-1}}+\sqrt{a-1}}{\frac{1}{\sqrt{a+1}}-\frac{1}{\sqrt{a-1}}}:\frac{(a^2+a)\sqrt{a-1}}{(a-1)\sqrt{a+1}-(a+1)\sqrt{a-1}}=$$

19)

$$\frac{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\frac{1}{(ab)^{-\frac{1}{2}}}=$$

$$\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\left(\frac{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\frac{1}{(ab)^{-\frac{1}{2}}}\right)\cdot(a-b)^{-1}=$$

20)

$$\frac{x-a}{ax+a^2}-\frac{a+x}{x^2-ax}-\frac{3x+a}{a^2-x^2}=$$

$$\frac{x^3-a^3}{x^2+2ax+a^2}:\left(\frac{x-a}{ax+a^2}-\frac{a+x}{x^2-ax}-\frac{3x+a}{a^2-x^2}\right)=$$

$$\frac{x^3-a^3}{x^2+2ax+a^2}:\left(\frac{x-a}{ax+a^2}-\frac{a+x}{x^2-ax}-\frac{3x+a}{a^2-x^2}\right)-\frac{(x-a)ax}{x+a}=$$

Задачи 21– 30: Разложить на множители многочлены

Problems 21 – 30: Factor the following polynomials

21) $x^2-2x-3=$

22) $x^2-3x-4=$

23) $x^2-4x-5=$

24) $x^2+6x+9=$

25) $x^2+5x+6=$

26) $x^3-2x^2-3x=$

27) $x^4-4x^3-5x^2=$

28) $x^3+x^2-x-1=$

29) $x^4-16=$

30) $x^4+16=$

Полезные формулы | Useful formulas

$$\frac{1}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}\mp\sqrt{b}}{a-b}$$
$$\frac{1}{\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b}}=\frac{(\sqrt[3]{a^2}\mp\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})}{a\pm b}$$

Задачи 31– 40: Освободить от иррациональностей знаменатели следующих дробей:

Problems 31 – 40: Rationalize the denominators of the following fractions:

31) $\frac{1}{\sqrt{2}}=$

32) $\frac{1}{\sqrt{3}-1}=$

33) $\frac{1}{\sqrt{5}+1}=$

34) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=$

35) $\frac{1}{\sqrt{3+\sqrt{2}}}=$

36) $\frac{1}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{5}-2)}=$

37) $\frac{1}{\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{9}}=$

38) $\frac{1}{\sqrt[3]{5}-1}=$

39) $\frac{1}{\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{2}}=$

40) $\frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}}=$

2.3. Сводная таблица наиболее важных формул | Summary Table of the Most Important Formulas

$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$
$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$
$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$
$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
$\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$
$\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}$
$\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}=\dfrac{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{a+b}$
$\dfrac{1}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}=\dfrac{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}{a+b}$
$\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}=\dfrac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{a-b}$
$\dfrac{1}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}=\dfrac{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}{a-b}$

2.4. Ответы | Answers

Задачи 1 – 15: | Problems 1 - 15:

1) $\frac{a^2-b^2}{a-b}=a+b$,

2) $\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$,

3) $\frac{a^3-b^3}{a-b}=a^2+ab+b^2$,

4) $\frac{a-b}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}=\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}$,

5) $\frac{a^3+b^3}{a+b}=a^2-ab+b^2$,

6) $\frac{a+b}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a}}=\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$,

7) $(a+b)^2-a^2-b^2=2ab$,

8) $(a-b)^2+2ab=a^2+b^2$,

9) $\frac{(x+y)^3-x^3-y^3}{3xy}-x-y=0$,

10) $a-2-\frac{(1-a)^2-1}{a}=0$,

11) $x^2+10xy^2+25y^4=(x+5y^2)^2$,

12) $4-28a+49a^2=(2-7a)^2$,

13) $a^3+12a^2b+48ab^2+64b^3=(a+4b)^3$,

14) $(1+a^2-\sqrt{2}a)(1+a^2+\sqrt{2}a)=1+a^4$,

15) $(1-x)(1+x+x^2+x^3+\cdots+x^9)=1-x^{10}$.

Задачи 16– 20: | Problems 16 - 20:

16) $$[(\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}):(\frac{1}{a}-\frac{1}{b+c})]\cdot[1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}]-\frac{(a+b+c)^2}{2bc}=$$

$$=\frac{b+c+a}{b+c-a}\cdot\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}-\frac{(a+b+c)^2}{2bc}=0,$$

17) $$\left(\frac{\sqrt{5}+5}{1+\sqrt{5}+\sqrt{a}}+\frac{5-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}+\sqrt{a}}\right)\cdot\left(\sqrt{a}-\frac{4}{\sqrt{a}}+2\right)=$$

$$=\frac{10\sqrt{a}}{a+2\sqrt{a}-4}\cdot\frac{a+2\sqrt{a}-4}{\sqrt{a}}=10,$$

18) $$\frac{\frac{1}{\sqrt{a-1}}+\sqrt{a-1}}{\frac{1}{\sqrt{a+1}}-\frac{1}{\sqrt{a-1}}}:\frac{(a^2+a)\sqrt{a-1}}{(a-1)\sqrt{a+1}-(a+1)\sqrt{a-1}}=$$

$$=\frac{a\sqrt{a+1}}{\sqrt{a-1}-\sqrt{a+1}}:\frac{a\sqrt{a+1}}{\sqrt{a-1}-\sqrt{a+1}}=1,$$

19) $$\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\left(\frac{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\frac{1}{(ab)^{-\frac{1}{2}}}\right)\cdot(a-b)^{-1}=$$

$$=\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{a-b}=1,$$

20) $$\frac{x^3-a^3}{x^2+2ax+a^2}:\left(\frac{x-a}{ax+a^2}-\frac{a+x}{x^2-ax}-\frac{3x+a}{a^2-x^2}\right)-\frac{(x-a)ax}{x+a}=$$

$$=\frac{x^3-a^3}{(x+a)^2}:\frac{x^3-a^3}{(x^2-a^2)ax}-\frac{(x-a)ax}{x+a}=$$

$$=\frac{(x-a)ax}{x+a}-\frac{(x-a)ax}{x+a}=0.$$

Задачи 21– 30: | Problems 21 - 30:

21) $x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$,

22) $x^2-3x-4=(x+1)(x-4)$,

23) $x^2-4x-5=(x+1)(x-5)$,

24) $x^2+6x+9=(x+3)^2$,

25) $x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$,

26) $x^3-2x^2-3x=x\,(x+1\,)(x-3)$,

27) $x^4-4x^3-5x^2=x^2(x+1)(x-5)$,

28) $x^3+x^2-x-1=(x+1)^2(x-1)$,

29) $x^4-16=(x^2+1)(x-1)(x+1)$,

30) $x^4+16=(x^2+2\sqrt{2}x+4)(x^2-2\sqrt{2}x+4)$.

Задачи 31– 40: | Problems 31 - 40:

31) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

32) $\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{1}{2}(\sqrt{3}+1)$,

33) $\dfrac{1}{\sqrt{5}+1}=\dfrac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$,

34) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$,

35) $\dfrac{1}{\sqrt{3+\sqrt{2}}}=\dfrac{1}{7}\sqrt{3+\sqrt{2}}(3-\sqrt{2})$,

36) $\dfrac{1}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{5}-2)}=\dfrac{1}{2}(\sqrt{3}-1)(\sqrt{5}+2)$,

37) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{9}}=\dfrac{1}{7}(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{3})$,

38) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}-1}=\dfrac{1}{4}(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{5}+1)$,

39) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{2}}=\dfrac{1}{5}(\sqrt[3]{49}+\sqrt[3]{14}+\sqrt[3]{4})$,

40) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}}=\dfrac{1}{6}(2\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{4})$.

3. Алгебраические уравнения и неравенства

Algebraic Equations and Inequalities

3.1. Линейные уравнения, содержащие $|ax+b|$

Linear Equations Involving the Absolute Value $|ax+b|$

Задачи 1 – 10: Решить уравнения

Problems 1 - 10: Solve the equations

1) $|x| = 2$,
2) $|x| = x$,
3) $|x| = -x$,
4) $|x-3| = 8$,
5) $|x+1| = x+1$,
6) $|x+1| = x+2$,
7) $|5x+2| = 3-x$,
8) $|x-9| = 1-4x$,
9) $|3x+20| = 5x-4$,
10) $|1-x| = 3x-2$.

Решение/ Solution:

1) $|x| = 2 \Rightarrow$

2) $|x| = x \Rightarrow$

3) $|x| = -x \Rightarrow$

4) $|x-3| = 8 \Rightarrow$

5) $|x+1| = x+1 \Rightarrow$

6) $|x+1| = x+2 \Rightarrow$

7) $|5x+2| = 3-x \Rightarrow$

8) $|x-9| = 1-4x \Rightarrow$

9) $|3x+20| = 5x-4 \Rightarrow$

10) $|1-x| = 3x-2 \Rightarrow$

Подсказки: Чтобы решить уравнение, содержащее $|ax+b|$, следует освободиться от символов абсолютной величины. Если $ax+b \geq 0$, то знак абсолютной величины можно просто опустить, т.е. $|ax+b| = ax+b$.

Если $ax+b<0$, то символы абсолютной величины можно также опустить, но при этом нужно изменить знак перед выражением $ax+b$, т.е. $|ax+b| = -(ax+b)$.

Hints: In order to solve an equation involving the absolute value $|ax+b|$ it is necessary to remove the absolute value symbol.

If $ax+b \geq 0$ then the absolute value symbol can be simply dropped, that is, $|ax+b| = ax+b$.

If $ax+b<0$ then the absolute value symbol can be also dropped but the minus sign has to be written in front of $(ax+b)$, that is, $|ax+b| = -(ax+b)$.

3.2. Линейные неравенства, содержащие $|ax+b|$

Linear Inequalities Involving the Absolute Value $|ax+b|$

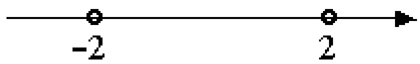
Задачи 11 – 20: Решите неравенства, содержащие абсолютные величины. Покажите решения на числовой оси.

Problems 11 - 20: Solve the following inequalities involving absolute values. Show the solution sets on the number line.

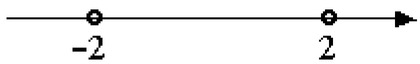
11) $|x| < 2$,
12) $|x| > 2$,
13) $|x - 3| \leq 5$,
14) $|x + 4| \geq 1$,
15) $|x| \geq -x$,
16) $|x + 1| < x + 2$,
17) $|5x + 2| \leq 6 - x$,
18) $|4x + 5| > 4x + 1$,
19) $|3 - x| > 2x + 1$,
20) $|3x - 1| \geq 5 - x$.

Решение/ Solution:

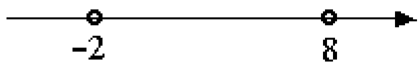
11) $|x| < 2 \Rightarrow$



12) $|x| > 2 \Rightarrow$

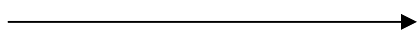


13) $|x - 3| \leq 5 \Rightarrow$

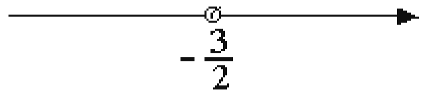


14) $|x+4| \geq 1 \;\Rightarrow$

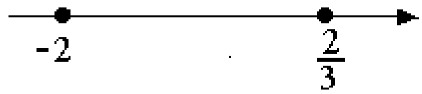
15) $|x| \geq -x \;\Rightarrow$



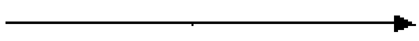
16) $|x+1| < x+2 \;\Rightarrow$



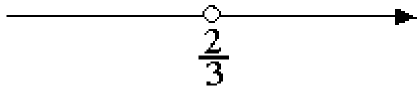
17) $|5x+2| \leq 6-x \;\Rightarrow$



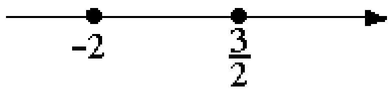
18) $|4x+5| > 4x+1 \;\Rightarrow$



19) $|3-x| > 2x+1 \;\Rightarrow$



20) $|3x-1| \geq 5-x \;\Rightarrow$

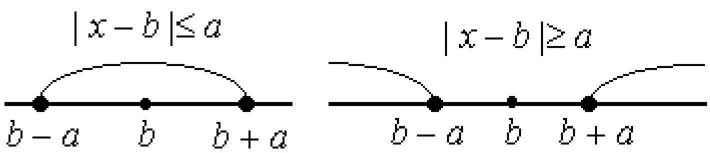


Подсказки: Чтобы решить линейное неравенство, содержащее абсолютную величину $|ax+b|$, нужно сначала избавиться от знака абсолютной величины, а затем решить два обычных неравенства.

Можно также использовать следующую интерпретацию абсолютной величины:

Hints: In order to solve a linear inequality involving the absolute value $|ax+b|$, first, it is necessary, to drop out the absolute value symbol by using the definition of the absolute value. Then solve two ordinary linear inequalities not involving the absolute value symbols.

One can use also the following interpretation of the absolute value:



Задачи 21 – 30: Решить следующие рациональные неравенства методом интервалов:

Problems 21 - 30: Solve the following rational inequalities using the chart method:

21) $x(x+1)>0$,

22) $x^3(x+1)^7>0$,

23) $\dfrac{x+5}{x-3}>0$,

24) $\dfrac{(x+2)(x-1)}{x+4}<0$,

25) $\dfrac{(x+2)(x-1)}{x+4}<x-3$,

26) $\dfrac{x+1}{x-2}<x+1$,

27) $\dfrac{x-4}{x-1}>x-4$,

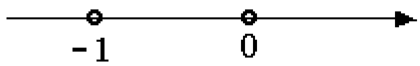
28) $\dfrac{(x-3)^2x}{x+5}\ge 0$,

29) $\dfrac{(x-7)^3x^2}{x+1}\ge 0$,

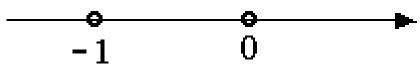
30) $\dfrac{(x-1)(x-2)^2(x-4)}{x^3}\le 0$.

Решение/ Solution:

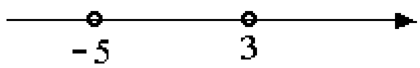
21) $x(x+1)>0 \quad \Rightarrow$



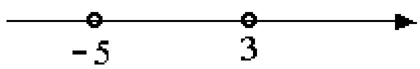
22) $x^3(x+1)^7>0 \quad \Rightarrow$



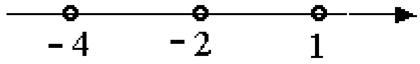
23) $(x+5)(x-3)<0 \quad \Rightarrow$



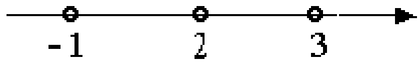
24) $\dfrac{x+5}{x-3}>0 \quad \Rightarrow$



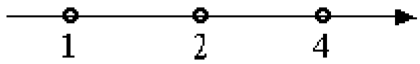
25) $\dfrac{(x+2)(x-1)}{x+4} < 0 \quad \Rightarrow$



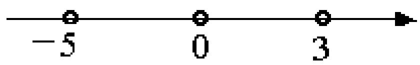
26) $\dfrac{x+1}{x-2} < x+1 \quad \Rightarrow$



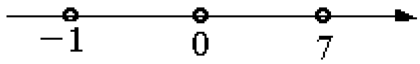
27) $\dfrac{x-4}{x-1} > x-4 \quad \Rightarrow$



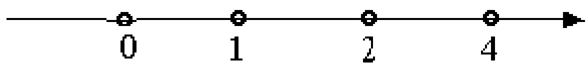
28) $\dfrac{(x-3)^2 x}{x+5} \geq 0 \quad \Rightarrow$



29) $\dfrac{(x-7)^3 x^2}{x+1} \geq 0 \quad \Rightarrow$



30) $\dfrac{(x-1)(x-2)^2(x-4)}{x^3} \leq 0 \quad \Rightarrow$



Подсказки: Процедуру решения рационального неравенства можно представить в виде следующих шагов:

– Перенесите все члены в левую часть и объедините их в единое рациональное выражение.

– Разложите на множители

Hints: To solve rational inequality, use the following stepwise procedure:

– Move all terms to the left side of an inequality, leaving zero on the right side.

– Combine the terms into a single rational expression.

числитель и знаменатель.
– Найдите критические точки (точки, в которых числитель или знаменатель обращаются в нуль). Эти точки разбивают числовую ось на интервалы.
– Определите знаки множителей на каждом интервале и отметьте те точки на числовой оси, в которых множители меняют свои знаки. Пометьте интервалы знаками “+” или “-“. Множители, не принимающие отрицательных значений, можно не принимать в расчет при условии, что точки неопределенности нанесены на числовую ось.
– Выберите интервалы, удовлетворяющие требованиям неравенства.
Если неравенство нестрогое, то следует учесть все точки, удовлетворяющие равенству.
– Запишите ответ в виде множества (или объединения множеств), в виде интервала (объединения интервалов) или в виде схематического графика на числовой оси.
Помните, что нельзя умножать обе части неравенства на выражение, знак которого неизвестен или может изменяться.

– Factor the numerator and denominator of this expression.
– Find the critical points, that is, those points in which the numerator or denominator equals zero. Divide the number line into intervals separated by the critical points.
– Analyze each factor to determine where it is negative, zero or positive. Mark each point on the line where the factor changes its sign. Label the intervals with the signs “+” or a “-“.
If some factor is never negative, it may be omitted in the chart providing you record the value of x that makes the expression zero or undefined on the number line.
– Select the intervals that satisfy the requirement of the inequality.
– Use the chart to answer the question asked.
If the inequality problem also involves the equality condition, select the appropriate critical points that satisfy given equation. Usually, these are the values of x which make the numerator equal to zero.
Write your answer in the form of a set (or union of sets), or in the interval notation (or union of intervals), or a graph on the number line. Remember that you should not multiply both sides of an inequality by an expression that contains an unknown or can change a sign.

3.3. Квадратные уравнения | Quadratic Equations

Задачи 31 – 40: Выделить полный квадрат

Problems 31 - 40: Complete the perfect square

31) $x^2 - 2x + 1$,
32) $x^2 - 2x + 5$,
33) $x^2 + 6x + 5$,
34) $9 - 8x - x^2$,
35) $4x^2 + 4x + 1$,
36) $9x^2 + 6x - 3$,
37) $(x-2)^2 + 3x - 5$,
38) $(x+3)^2 - 2x - 30$,
39) $x(x-2) - 8x + 9$,
40) $3x(3x-2) - 6x + 5$.

Примеры: | **Examples**:

- $x^2 - 6x + 10 = x^2 - 2\cdot 3x + 3^2 - 3^2 + 10 = (x-3)^2 + 1$,
- $25x^2 + 40x - 9 = (5x)^2 + 2\cdot 5x\cdot 4 + 4^2 - 4^2 - 9 = (5x+4)^2 - 25$.

Решение/ Solution:

31) $x^2 - 2x + 1 =$

32) $x^2 - 2x + 5 =$

33) $x^2 + 6x + 5 =$

34) $9 - 8x - x^2 =$

35) $4x^2 + 4x + 1 =$

36) $9x^2 + 6x - 3 =$

37) $(x-2)^2 + 3x - 5 =$

38) $(x+3)^2 - 2x - 30 =$

39) $x(x-2) - 8x + 9 =$

40) $3x(3x-2) - 6x + 5 =$

Задачи 41 – 50: Решить следующие квадратные уравнения:

Problems 41 - 50: Solve the following quadratic equations:

41) $x^2 - 2x - 3 = 0,$
42) $x^2 + 5x - 6 = 0,$
43) $x^2 + 6x + 9 = 0,$
44) $x^2 - 2x + 1 = 0,$
45) $x^2 + 6x + 5 = 0,$
46) $9 - 8x - x^2 = 0,$
47) $9x^2 + 6x - 3 = 0,$
48) $(x+3)^2 - 2x - 30 = 0,$
49) $x^2 + 7x + 10 = 0,$
50) $3x^2 + 8x + 4 = 0.$

Решение/ Solution:

41) $x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow$

42) $x^2 + 5x - 6 = 0 \Rightarrow$

43) $x^2 + 6x + 9 = 0 \Rightarrow$

44) $x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow$

45) $x^2 + 6x + 5 = 0 \Rightarrow$

46) $9 - 8x - x^2 = 0 \Rightarrow$

47) $9x^2 + 6x - 3 = 0 \Rightarrow$

48) $(x+3)^2 - 2x - 30 = 0 \Rightarrow$

49) $x^2 + 7x + 10 = 0 \Rightarrow$

50) $3x^2 + 8x + 4 = 0 \Rightarrow$

Подсказки: Квадратное уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0$$

решается любым из следующих методов:

- выделением полного квадрата;
- применением формулы корней квадратного уравнения;
- разложением на множители.

Формула корней квадратного уравнения имеет следующий вид:

Hints: Quadratic equation

$$ax^2 + bx + c = 0$$

can be solved using any of the following methods:

- completing the perfect square;
- applying the quadratic formula;
- factoring.

The quadratic formula has the following form:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Корни квадратного уравнения

$$x^2 + bx + c = 0$$

можно также найти с помощью формул

The roots of the quadratic equation

$$x^2 + bx + c = 0$$

can be also found by using the below formulas:

$$x_1 x_2 = c, \qquad x_1 + x_2 = -b.$$

3.4. Квадратные неравенства

Quadratic Inequalities

Задачи 51 – 60: Решите квадратные неравенства. Ответы представьте в схематическом виде на числовой оси.

Problems 51 – 60: Solve the quadratic inequalities. Write your answers in the form of graphs on the number line.

51) $x^2 - 2x - 3 < 0$,

52) $x^2 - 2x - 3 \geq 0$,

53) $x^2 + 5x - 6 > 0$,

54) $x^2 - 7x + 12 \geq 0$,

55) $x^2 + 2x - 8 \leq 0$,

56) $x^2 + 6x + 9 < 0$,

57) $x^2 - 10x + 25 \leq 0$,

58) $x^2 - 8x + 16 > 0$,

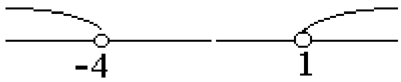
59) $x(x+9) > 5x + 5$,

60) $x(x-3) < 9x + 13$.

Пример / Example: $x^2+3x-4>0$.

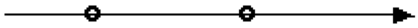
$x^2+3x-4=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=-4, \quad x_2=1$.

$\{x \mid x<-4\} \cup \{x \mid x>1\}$

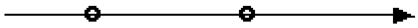


Решение/ Solution:

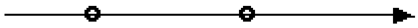
51) $x^2-2x-3<0$, $x_1 =$ $x_2 =$



52) $x^2-2x-3 \geq 0$ $x_1 =$ $x_2 =$

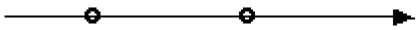


53) $x^2+5x-6>0$ $x_1 =$ $x_2 =$

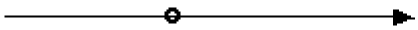


54) $x^2-7x+12 \geq 0$ $x_1 =$ $x_2 =$

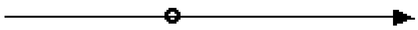
55) $x^2+2x-8 \leq 0$ $x_1 =$ $x_2 =$



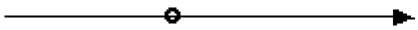
56) $x^2+6x+9<0$ $x_1 =$ $x_2 =$



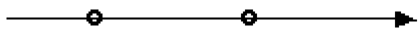
57) $x^2-10x+25 \leq 0$ $x_1 =$ $x_2 =$



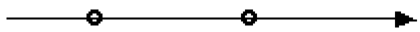
58) $x^2-8x+16>0$ $x_1 =$ $x_2 =$



59) $x(x+9) > 5x+5$ $x_1 =$ $x_2 =$



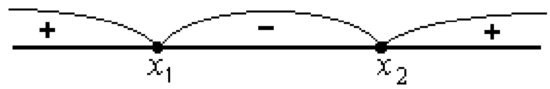
60) $x(x-3) < 9x+13$ $x_1 =$ $x_2 =$



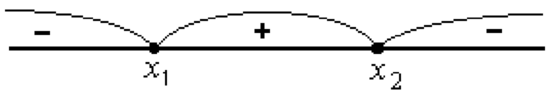
Подсказки: Чтобы решить квадратное неравенство, нужно сначала решить соответствующее квадратное уравнение. Для нахождения множества решений неравенства полезно использовать числовую ось:

Hints: To solve the quadratic inequality it is necessary, first, to solve the corresponding quadratic equation. Then it is helpful to use the number line to find the solution set of the inequality:

$$ax^2 + bx + c \quad (a > 0)$$



$$ax^2 + bx + c \quad (a < 0)$$



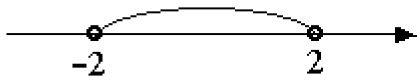
3.5. Ответы | Answers

Задачи 1– 10 / Problems 1 - 10:

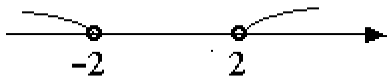
1) $|x| = 2 \Rightarrow$ $x = \pm 2$.
2) $|x| = x \Rightarrow$ $x \geq 0$.
3) $|x| = -x \Rightarrow$ $x \leq 0$.
4) $|x - 3| = 8 \Rightarrow$ $x_1 = -5$, $x_2 = 11$.
5) $|x + 1| = x + 1 \Rightarrow$ $x \geq -1$.
6) $|x + 1| = x + 2 \Rightarrow$ $x = -3/2$.
7) $|5x + 2| = 3 - x \Rightarrow$ $x_1 = 1/6$, $x_2 = -5/4$.
8) $|x - 9| = 1 - 4x \Rightarrow$ $x = -8/3$.
9) $|3x + 20| = 5x - 4 \Rightarrow$ $x = 12$.
10) $|1 - x| = 3x - 2 \Rightarrow$ $x = 3/4$.

Задачи 11 – 20 / Problems 11 - 20:

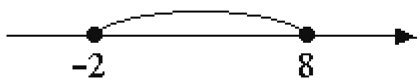
11) $|x| < 2 \Rightarrow$ $-2 < x < 2$.



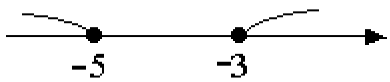
12) $|x| > 2 \Rightarrow$ $\{x \mid x < -2\} \cup \{x \mid x > 2\}$.



13) $|x - 3| \leq 5 \Rightarrow$ $-2 \leq x \leq 8$.

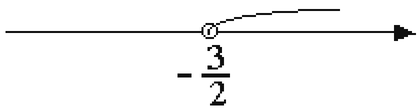


14) $|x + 4| \geq 1 \Rightarrow$ $\{x \mid x \leq -5\} \cup \{x \mid x \geq -3\}$.

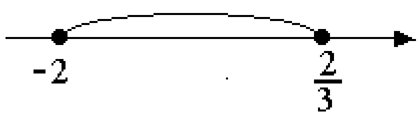


15) $|x| \geq -x \Rightarrow$ $-\infty < x < \infty$.

16) $|x + 1| < x + 2 \Rightarrow$ $x > -3/2$.

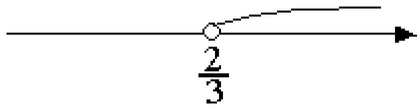


17) $|5x + 2| \leq 6 - x \Rightarrow$ $-2 \leq x \leq 2/3$.

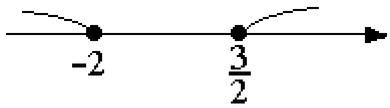


18) $|4x + 5| > 4x + 1 \Rightarrow$ $-\infty < x < \infty$.

19) $|3 - x| > 2x + 1 \quad \Rightarrow \quad x < 2/3$.



20) $|3x - 1| \geq 5 - x \quad \Rightarrow \quad \{x \mid x \leq -2\} \cup \{x \mid x \geq 3/2\}$.



Задачи 21– 30 / Problems 21 - 30:

21) $x(x+1) > 0 \quad \Rightarrow \quad \{x \mid x < -1\} \cup \{x \mid x > 0\}$.

22) $x^3(x+1)^7 > 0 \quad \Rightarrow \quad \{x \mid x < -1\} \cup \{x \mid x > 0\}$.

23) $\dfrac{x+5}{x-3} > 0 \quad \Rightarrow \quad (x+5)(x-3) > 0 \quad \Rightarrow \quad \{x \mid x < -5\} \cup \{x \mid x > 3\}$.

24) $\dfrac{(x+2)(x-1)}{x+4} < 0 \Rightarrow \quad (x+4)(x+2)(x-1) < 0 \quad \Rightarrow$

$\{x \mid x < -4\} \cup \{x \mid -2 < x < 1\}$.

25) $\dfrac{(x+2)(x-1)}{x+4} < x - 3 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{10}{x+4} < 0 \quad \Rightarrow \quad (x+4) < 0 \quad \Rightarrow$

$x < -4$.

26) $\dfrac{x+1}{x-2} < x + 1 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{(x+1)(3-x)}{x-2} < 0 \quad \Rightarrow \quad (x+1)(x-2)(x-3) > 0 \Rightarrow$

$\{x \mid -1 < x < 2\} \cup \{x \mid 3 < x\}$.

27) $\dfrac{x-4}{x-1} > x - 4 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{(x-4)(2-x)}{x-1} > 0 \Rightarrow \quad (x-1)(x-2)(x-4) < 0 \quad \Rightarrow$

$\{x \mid x < 1\} \cup \{x \mid 2 < x < 4\}$.

28) $\dfrac{(x-3)^2 x}{x+5} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{x}{x+5} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \{x \mid x < -5\} \cup \{x \mid 0 \leq x\}$.

29) $\dfrac{(x-7)^3 x^2}{x+1} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{x-7}{x+1} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \{x \mid x < -1\} \cup \{x \mid 7 \leq x\}$.

30) $\dfrac{(x-1)(x-2)^2(x-4)}{x^3} \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{(x-1)(x-4)}{x} \leq 0 \quad \Rightarrow$

$\{x \mid x < 0\} \cup \{x \mid 4 \leq x\}$.

Задачи 31– 40 / Problems 31 - 40:

31) $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$.

32) $x^2 - 2x + 5 = (x-1)^2 + 4$.

33) $x^2 + 6x + 5 = (x+3)^2 - 4$.

34) $9 - 8x - x^2 = 25 - (x+4)^2$.

35) $4x^2 + 4x + 1 = (2x+1)^2$.

36) $9x^2 + 6x - 3 = (3x+1)^2 - 4$.

37) $(x-2)^2 + 3x - 5 = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{5}{4}$.

38) $(x+3)^2 - 2x - 30 = (x+2)^2 - 25$.

39) $x(x-2) - 8x + 9 = (x-5)^2 - 16$.

40) $3x(3x-2) - 6x + 5 = (3x-2)^2 + 1$.

Задачи 41– 50 / Problems 41 - 50:

41) $x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow$ $x_1 = -1$, $x_2 = 3$.

42) $x^2 + 5x - 6 = 0 \Rightarrow$ $x_1 = 1$, $x_2 = -6$.

43) $x^2 + 6x + 9 = 0 \Rightarrow$ $x = -3$.

44) $x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow$ $x = 1$.

45) $x^2 + 6x + 5 = 0 \Rightarrow$ $x_1 = -1$, $x_2 = -5$.

46) $9 - 8x - x^2 = 0 \Rightarrow$ $x_1 = -9$, $x_2 = 1$.

47) $9x^2 + 6x - 3 = 0 \Rightarrow$ $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{1}{3}$.

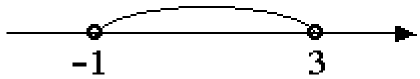
48) $(x+3)^2 - 2x - 30 = 0 \Rightarrow$ $x_1 = -7$, $x_2 = 3$.

49) $x^2 + 7x + 10 = 0 \Rightarrow$ $x_1 = -5$, $x_2 = -2$.

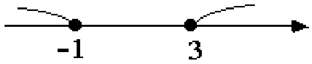
50) $3x^2 + 8x + 4 = 0 \Rightarrow$ $x_1 = -2$, $x_2 = -\frac{2}{3}$.

Задачи 51– 60 / Problems 51 - 60:

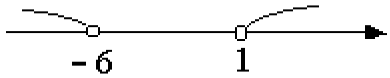
51) $x^2 - 2x - 3 < 0$



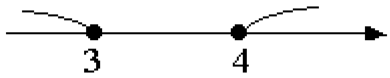
52) $x^2 - 2x - 3 \geq 0$



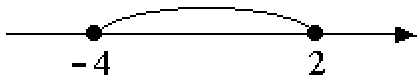
53) $x^2 + 5x - 6 > 0$



54) $x^2 - 7x + 12 \geq 0$

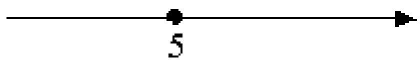


55) $x^2 + 2x - 8 \leq 0$

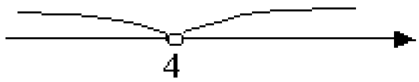


56) $x^2 + 6x + 9 < 0 \qquad \Rightarrow \qquad x \in \varnothing.$

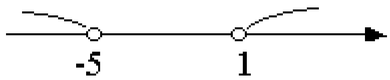
57) $x^2 - 10x + 25 \leq 0$



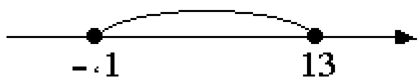
58) $x^2 - 8x + 16 > 0$



59) $x(x+9) > 5x + 5$



60) $x(x-3) < 9x + 13$



4. Показательные и логарифмические уравнения и неравенства

Exponential and Logarithmic Equations and Inequalities

4.1. Показательные уравнения

Exponential Equations

Задачи 1 – 10: Решить уравнения

Problems 1 - 10: Solve the equations

1) $7^{5-x}=1$,
2) $3^{4x-1}=3$,
3) $3^{2x+5}=27$,
4) $4^{9-6x}=2$,
5) $(\frac{2}{5})^{7-2x}=\frac{25}{4}$,
6) $(\frac{1}{4})^{x^2+4x+1}=64$,
7) $5^{|x|-2}=125$,
8) $4^{7x+6}=8^{5-x}$,
9) $36^x-4\cdot 6^x-12=0$,
10) $4^{2x}+6\cdot 12^x-7\cdot 3^{2x}=0$.

Решение/ Solution:

1) $7^{5-x}=1 \Rightarrow$

Проверка / Check-up:

2) $3^{4x-1}=3 \Rightarrow$

Проверка / Check-up:

3) $3^{2x+5}=27 \Rightarrow$

Проверка / Check-up:

4) $4^{9-6x}=2 \Rightarrow$

Проверка / Check-up:

5) $(\frac{2}{5})^{7-2x}=\frac{25}{4} \Rightarrow$

Проверка / Check-up:

6) $(\frac{1}{4})^{x^2+4x+1}=64 \quad \Rightarrow$

Проверка / Check-up:

7) $5^{|x|-2}=125 \quad \Rightarrow$

Проверка / Check-up:

8) $4^{7x+6}=8^{5-x} \quad \Rightarrow$

Проверка / Check-up:

9) $36^x-4\cdot 6^x-12=0 \quad \Rightarrow$

Проверка / Check-up:

10) $4^{2x}+6\cdot 12^x-7\cdot 3^{2x}=0 \quad \Rightarrow$

Проверка / Check-up:

Подсказки:
Используйте следующие свойства показательных выражений:

Hints:
Use the following properties of exponentials:

$$a^b=1 \quad \Rightarrow \quad b=0.$$
$$a^b=a^c \quad \Rightarrow \quad b=c.$$

Для решения Задачи 9 используйте подстановку $y=6^x$.

To solve Problem 9 use the substitution $y=6^x$.

Чтобы решить Задачу 10, сначала разделите обе части уравнения на 3^{2x}, а затем сделайте подстановку $y=(\frac{4}{3})^x$.

To solve Problem 10, divide both sides of the equation by the term 3^{2x}, then use the substitution $y=(\frac{4}{3})^x$.

4.2. Логарифмические уравнения

Logarithmic Equations

Задачи 11 – 20: Решить следующие уравнения:

Problems 11 – 20: Solve the following equations:

11) $\log_3 x = 2$,

12) $\lg x^2 = 4$,

13) $\log_5(x^2 - 2x + 6/5) = -1$,

14) $\log_4 2^{-x} = 1$,

15) $\log_2(2^x - 8) = 3$,

16) $\lg(\lg x) + \lg(\lg x^2 - 1) = 1$,

17) $\log_5 x = 2\log_5 3 + 4\log_{25} 7$,

18) $\log_2(3\log_3(\log_2 x)) = 0$,

19) $x^{\lg x} = 10$,

20) $(10^{\lg x})^{\lg x} = 10000$.

Решение/ Solution:

11) $\log_3 x = 2 \quad \Rightarrow$

Проверка / Check-up:

12) $\lg x^2 = 4 \quad \Rightarrow$

Проверка / Check-up:

13) $\log_5(x^2 - 2x + 6/5) = -1 \quad \Rightarrow$

Проверка / Check-up:

14) $\log_4 2^{-x} = 1 \quad \Rightarrow$

Проверка / Check-up:

15) $\log_2(2^x - 8) = 3 \quad \Rightarrow$

Проверка / Check-up:

16) $\lg(\lg x) + \lg(\lg x^2 - 1) = 1 \quad \Rightarrow$

Проверка / Check-up:

17) $\log_5 x = 2\log_5 3 + 4\log_{25} 7 \quad \Rightarrow$

Проверка / Check-up:

18) $\log_2(3\log_3(\log_2 x)) = 0 \quad \Rightarrow$

Проверка / Check-up:

19) $x^{\lg x} = 10 \quad \Rightarrow$

Проверка / Check-up:

20) $(10^{\lg x})^{\lg x} = 10000 \quad \Rightarrow$

Проверка / Check-up:

Подсказка:
Используйте логарифмические тождества. (См. сводную таблицу наиболее важных формул).

Hint:
Use logarithmic identities. (See Summary Table of the Most Important Formulas).

4.3. Показательные и логарифмические неравенства

Exponential and Logarithmic Inequalities

Задачи 21 – 30: Решить следующие неравенства:

Problems 21 – 30: Solve the following inequalities:

21) $3^{2x+5} < 27$,

22) $4^{9-6x} > 2$,

23) $3^{2x+5} \le 3^{x+2} + 2$,

24) $(\frac{2}{5})^{7-2x} \le \frac{25}{4}$,

25) $\log_5(x^2 - 3) > 0$,

26) $\log_3(x^2 - 6) < 1$,

27) $\lg(\log_2 x) > 1$,

28) $\log_5(\log_2 x) > 0$,

29) $\log_{\frac{1}{2}} \log_3 \frac{3x}{x-2} < 0$,

30) $\log_x(x+2) < 0$.

Решение/ Solution:

21) $3^{2x+5} < 27 \quad \Rightarrow$

22) $4^{9-6x} > 2 \quad \Rightarrow$

23) $3^{2x+5} \le 3^{x+2} + 2 \quad \Rightarrow$

24) $(\frac{2}{5})^{7-2x} \le \frac{25}{4} \quad \Rightarrow$

25) $\log_5(x^2 - 3) > 0 \quad \Rightarrow$

26) $\log_3(x^2 - 6) < 1 \quad \Rightarrow$

27) $\lg(\log_2 x) > 1 \quad \Rightarrow$

28) $\log_5(\log_2 x) > 0 \quad \Rightarrow$

29) $\log_{\frac{1}{2}} \log_3 \frac{3x}{x-2} < 0 \quad \Rightarrow$

30) $\log_x(x+2) < 0 \quad \Rightarrow$

4.4. Полезные свойства неравенств

Useful Properties of Inequalities

$\left.\begin{array}{l} a^b > a^c \\ a > 1 \end{array}\right\}$	$\Rightarrow$	$b > c$
$\left.\begin{array}{l} a^b > a^c \\ a < 1 \end{array}\right\}$	$\Rightarrow$	$b < c$
$\left.\begin{array}{l} \log_a b > \log_a c \\ a > 1 \end{array}\right\}$	$\Rightarrow$	$b > c$
$\left.\begin{array}{l} \log_a b > \log_a c \\ 0 < a < 1 \end{array}\right\}$	$\Rightarrow$	$b < c,$
$\left.\begin{array}{l} a^b > 1 \\ a > 1 \end{array}\right\}$	$\Rightarrow$	$b > 0$
$\left.\begin{array}{l} a^b > 1 \\ a < 1 \end{array}\right\}$	$\Rightarrow$	$b < 0$
$\left.\begin{array}{l} \log_a b > 0 \\ a > 1 \end{array}\right\}$	$\Rightarrow$	$b > 1$
$\left.\begin{array}{l} \log_a b > 0 \\ 0 < a < 1 \end{array}\right\}$	$\Rightarrow$	$0 < b < 1$

4.5. Ответы | Answers

Задачи 1– 10 / Problems 1 - 10:

1) $7^{5-x}=1$ $\Rightarrow$ $x=5$.
2) $3^{4x-1}=3$, $\Rightarrow$ $x=1/2$.
3) $3^{2x+5}=27$, $\Rightarrow$ $x=-1$.
4) $4^{9-6x}=2$, $\Rightarrow$ $x=17/12$.
5) $(\frac{2}{5})^{7-2x}=\frac{25}{4}$, $\Rightarrow$ $x=9/2$.
6) $(\frac{1}{4})^{x^2+4x+1}=64$, $\Rightarrow$ $x=-2$.
7) $5^{|x|-2}=125$, $\Rightarrow$ $x=\pm 5$.
8) $4^{7x+6}=8^{5-x}$, $\Rightarrow$ $x=3/17$.
9) $36^x-4\cdot 6^x-12=0$, $\Rightarrow$ $x=1$.
10) $4^{2x}+6\cdot 12^x-7\cdot 3^{2x}=0$. $\Rightarrow$ $x=0$.

Задачи 11– 20 / Problems 11 - 20:

11) $\log_3 x=2$ $\Rightarrow$ $x=9$.
12) $\lg x^2=4$ $\Rightarrow$ $x=\pm 100$.
13) $\log_5(x^2-2x+6/5)=-1$ $\Rightarrow$ $x=1$.
14) $\log_4 2^{-x}=1$ $\Rightarrow$ $x=-2$.
15) $\log_2(2^x-8)=3$ $\Rightarrow$ $x=4$.
16) $\lg(\lg x)+\lg(\lg x^2-1)=1$ $\Rightarrow$ $\lg x=\frac{5}{2}$ $\Rightarrow$ $x=10^{\frac{5}{2}}$.
17) $\log_5 x=2\log_5 3+4\log_{25} 7$ $\Rightarrow$ $x=441$.
18) $\log_2(3\log_3(\log_2 x))=0$ $\Rightarrow$ $x=2^{\sqrt[3]{3}}$.
19) $x^{\lg x}=10$ $\Rightarrow$ $\lg x=\pm 1$ $\Rightarrow$ $x_1=10$, $x_2=0.1$
20) $(10^{\lg x})^{\lg x}=10000$ $\Rightarrow$ $x^{\lg x}=10000$ $\Rightarrow$ $\lg x=\pm 4$ $\Rightarrow$ $x_1=10000$, $x_2=0.0001$.

Задачи 21– 30 / Problems 21 - 30:

21)	$3^{2x+5} < 27$	$\Rightarrow$	$x < -1$.
22)	$4^{9-6x} > 2$	$\Rightarrow$	$x < 17/12$.
23)	$3^{2x+5} \le 3^{x+2} + 2$	$\Rightarrow$	$x \le -2$.
24)	$(\frac{2}{5})^{7-2x} \le \frac{25}{4}$	$\Rightarrow$	$x \le 9/2$.
25)	$\log_5(x^2 - 3) > 0$	$\Rightarrow$	$\lvert x \rvert > 2$.
26)	$\log_3(x^2 - 6) < 1$	$\Rightarrow$	$\sqrt{6} < \lvert x \rvert < 3$.
27)	$\lg(\log_2 x) > 1$	$\Rightarrow$	$x > 1024$.
28)	$\log_5(\log_2 x) > 0$	$\Rightarrow$	$x > 2$.
29)	$\log_{\frac{1}{2}} \log_3 \frac{3x}{x-2} < 0$	$\Rightarrow$	$x > 2$.
30)	$\log_x(x + 2) < 0$	$\Rightarrow$	$0 < x < 1$.

5. Функции | Functions

5.1. Задачи | Problems

Задачи 1 – 15: Найти области определения и области изменения функций

Problems 1 - 15: Find the domain and range of the functions

1) $f(x)=\dfrac{4x+3}{2x-1}$,

2) $f(x)=\dfrac{4x-3}{2x+1}$,

3) $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$,

4) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$,

5) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-9}}$,

6) $f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+9}}$,

7) $f(x)=\sqrt{x^2-9}$,

8) $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)(x+2)}$,

9) $f(x)=\dfrac{5x^2}{x^2-3x-4}$,

10) $f(x)=\ln x$,

11) $f(x)=\ln|x|$,

12) $f(x)=\ln|x-2|$,

13) $f(x)=|\ln x|$,

14) $f(x)=\dfrac{1}{\ln x+1}$,

15) $f(x)=\dfrac{1}{\ln(x+1)}$.

Решение/ Solution:

1) $f(x)=\dfrac{4x+3}{2x-1} \quad \Rightarrow$

Domain: Range:

2) $f(x)=\dfrac{4x-3}{2x+1} \quad \Rightarrow$

Domain: Range:

3) $f(x)=\dfrac{|x|}{x} \quad \Rightarrow$

Domain: Range:

4) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+2}} \quad \Rightarrow$

Domain: Range:

5) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-9}}$ $\Rightarrow$

Domain: Range:

6) $f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+9}}$ $\Rightarrow$

Domain: Range:

7) $f(x)=\sqrt{x^2-9}$ $\Rightarrow$

Domain: Range:

8) $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)(x+2)}$ $\Rightarrow$

Domain: Range:

9) $f(x)=\dfrac{5x^2}{x^2-3x-4}$ $\Rightarrow$

Domain: Range:

10) $f(x)=\ln x$ $\Rightarrow$

Domain: Range:

11) $f(x)=\ln|x|$ $\Rightarrow$

Domain: Range:

12) $f(x)=\ln|x-2|$ $\Rightarrow$

Domain: Range:

13) $f(x)=|\ln x|$ $\Rightarrow$

Domain: Range:

14) $f(x)=\dfrac{1}{\ln x+1}$ $\Rightarrow$

Domain: Range:

15) $f(x)=\dfrac{1}{\ln(x+1)}$ $\Rightarrow$

Domain: Range:

Задача 16: Какая из формул выражает соотношение между значениями x и y в нижеприведенной таблице?

Problem 16: Which of the following formulas expresses the relationship between values of x and y in the table below?

a) $y = |x - 2|$,

b) $y = x^2 + 2$,

c) $y = |x| + 2$,

d) $y = x + 2$.

x	- 1	0	1	2
y	3	2	3	4

Решение/ Solution:

a) $y(-1) =$ $y(0) =$ $y(1) =$ $y(2) =$

b) $y(-1) =$ $y(0) =$ $y(1) =$ $y(2) =$

c) $y(-1) =$ $y(0) =$ $y(1) =$ $y(2) =$

d) $y(-1) =$ $y(0) =$ $y(1) =$ $y(2) =$

Задачи 17 - 22: Найти обратные функции:

Problems 17 - 22: Find the inverse functions of the following ones:

17) $f(x) = 4x - 1$;

18) $f(x) = \dfrac{3x - 8}{5x + 2}$;

19) $f(x) = x^2 - 6x + 8,\ x > 3$;

20) $f(x) = 3^{5x}$;

21) $f(x) = \ln\dfrac{x}{2}$;

22) $f(x) = 4\ln x$.

[1]**Подсказка**: Функции $f(x)$ и $f^{-1}(x)$ являются взаимно-обратными, если

Hint: The functions $f(x)$ and $f^{-1}(x)$ are the inverse ones of each other if

$$f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x.$$

Решение/ Solution:

17) $f(x) = 4x - 1 \quad \Rightarrow$

$f^{-1}(x) =$

Проверка / Check-up: $f(f^{-1}(x)) =$

[1] См. [1], Глава 4, стр. 84. | See [1], Chapter 4, p. 84.

$f^{-1}(f(x)) =$

18) $f(x) = \dfrac{3x-8}{5x+2} \Rightarrow$

$f^{-1}(x) =$

Проверка / Check-up: $f(f^{-1}(x)) =$

$f^{-1}(f(x)) =$

19) $f(x) = x^2 - 6x + 8, (x > 3) \Rightarrow$

$f^{-1}(x) =$

Проверка / Check-up: $f(f^{-1}(x)) =$

$f^{-1}(f(x)) =$

20) $f(x) = 3^{5x} \Rightarrow$

$f^{-1}(x) =$

Проверка / Check-up: $f(f^{-1}(x)) =$

$f^{-1}(f(x)) =$

21) $f(x) = \ln\dfrac{x}{2} \Rightarrow$

$f^{-1}(x) =$

Проверка / Check-up: $f(f^{-1}(x)) =$

$f^{-1}(f(x)) =$

22) $f(x) = 4\ln x \Rightarrow$

$f^{-1}(x) =$

Проверка / Check-up: $f(f^{-1}(x)) =$

$f^{-1}(f(x)) =$

Задачи 23 - 27: График функции $y = f(x)$ имеет следующий вид:

Problems 23 - 27: The graph of a function $y = f(x)$ is shown in Fig.1:

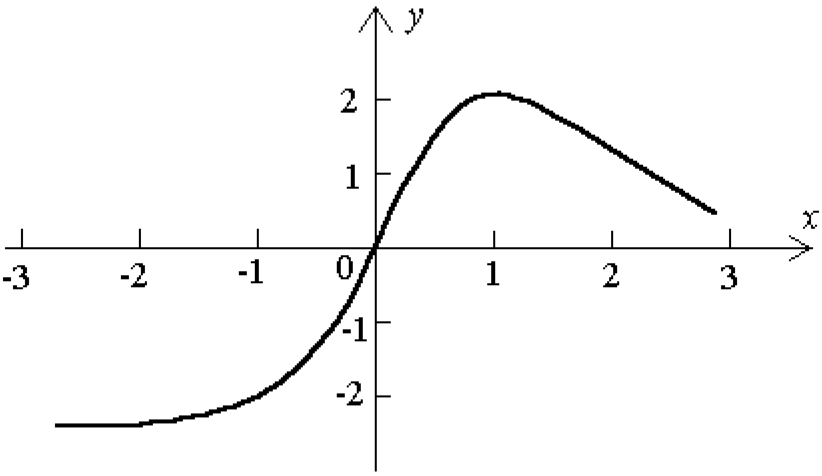


Рис. 1 | **Fig. 1**

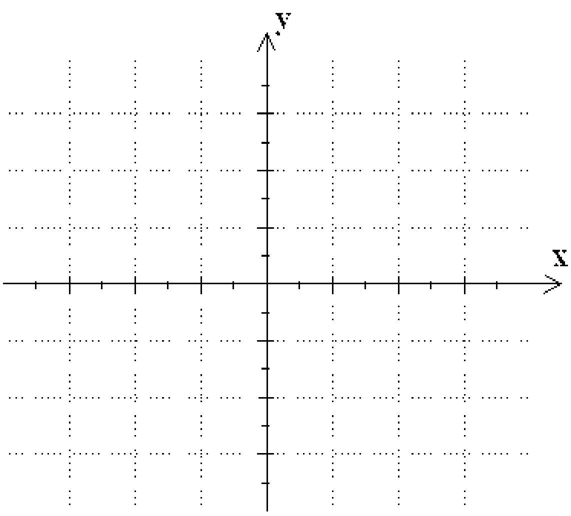
Используя этот график, построить графики следующих функций:

Using this graph plot the graphs of the following functions:

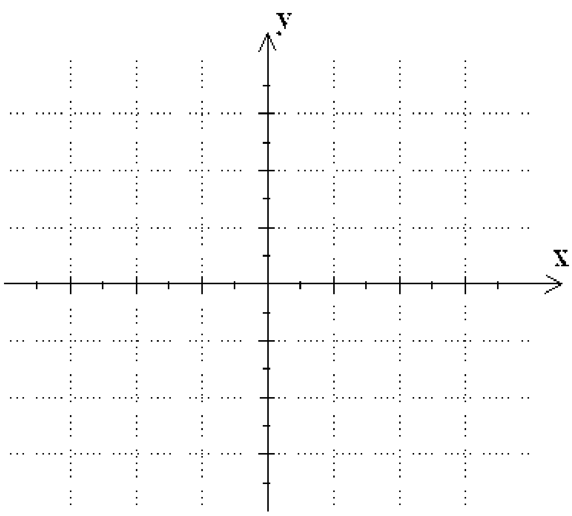
23) $y = f(|x|)$,
24) $y = |f(x)|$,
25) $y = f(x-2)$,
26) $y = f(x+3)$,
27) $y = f(x)-1$.

Решение/ Solution:

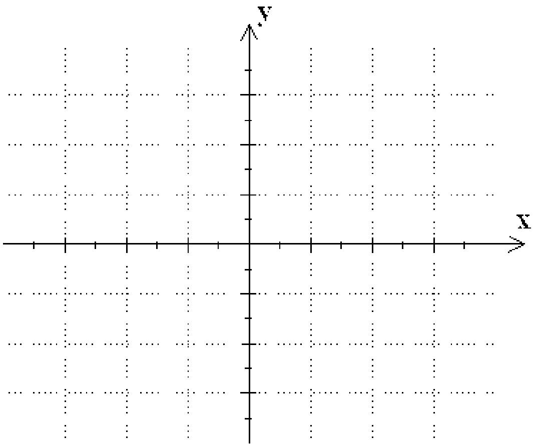
$y = f(|x|)$



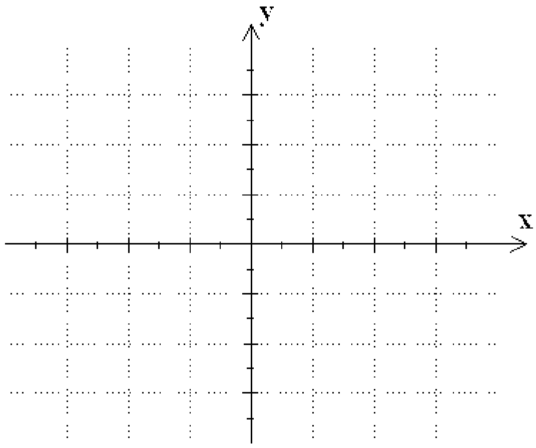
$y = |f(x)|$



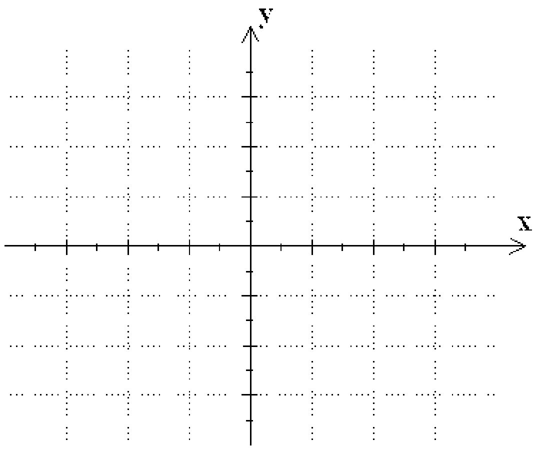
$y = f(x-2)$



$y = f(x+3)$



$y = f(x) - 1$



5.2. Графики наиболее важных функций | Graphs of the Most Important Functions

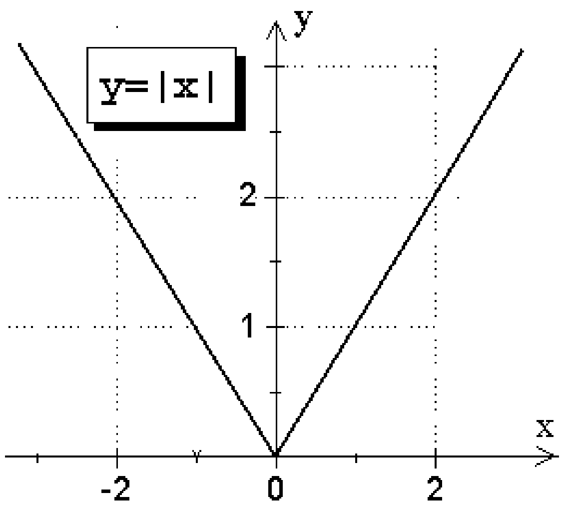


Рис. 2 | Fig. 2

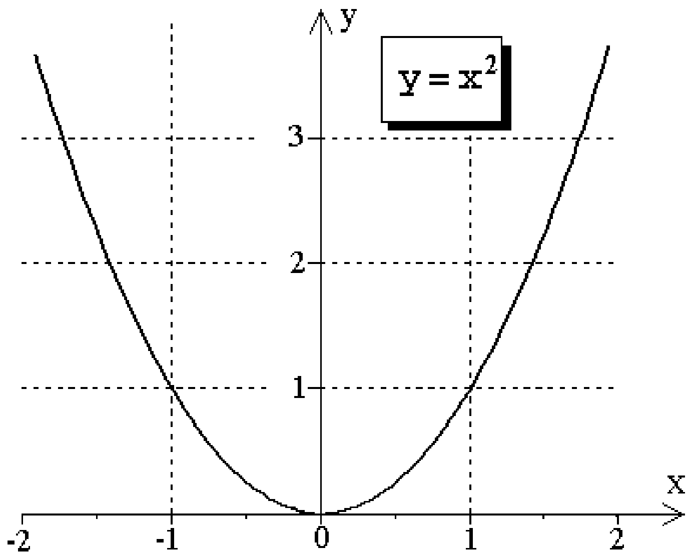


Рис. 3 | Fig. 3

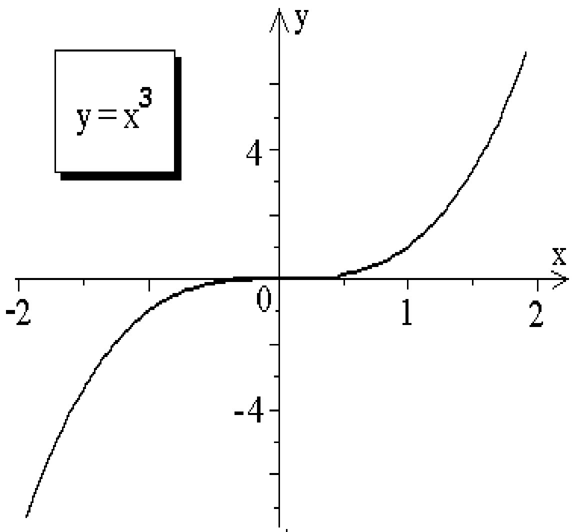


Рис. 4 | Fig. 4

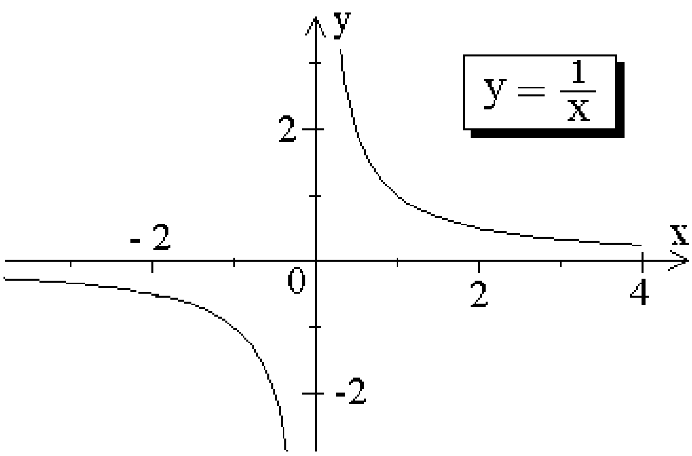


Рис. 5 | Fig. 5

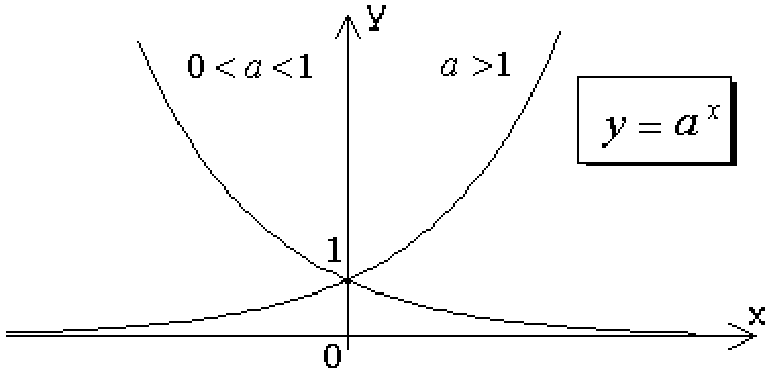


Рис. 6 | Fig. 6

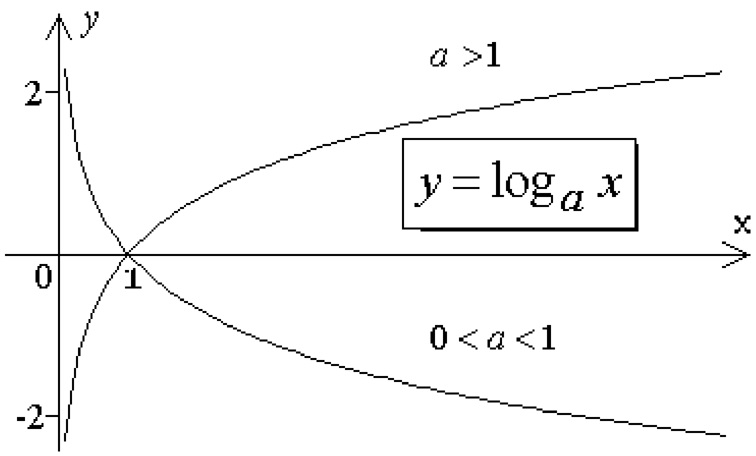


Рис. 7 | Fig. 7

5.2.1. Задачи	Problems
Задачи 28 - 37: Изобразите схематически графики функций:	**Problems 28 – 37**: Sketch the graphs of the functions:

28) $y = |x+3| + 1$,

29) $y = x^2 + 4x - 5$,

30) $y = \sqrt{-x}$,

31) $y = 4 - x^3$,

32) $y = \sqrt[3]{x}$,

33) $y = \dfrac{x}{x-2}$,

34) $y = -\dfrac{1}{x}$,

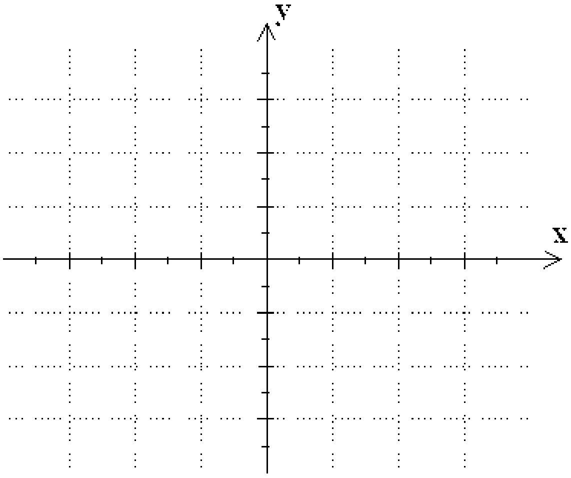
35) $y = 2^{1-x}$,

36) $y = \dfrac{1}{3^{x+1}}$,

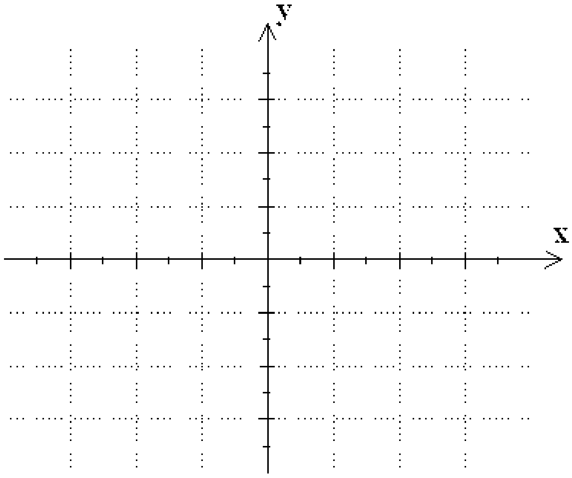
37) $y = \ln(x-4)$.

Решение/ Solution:

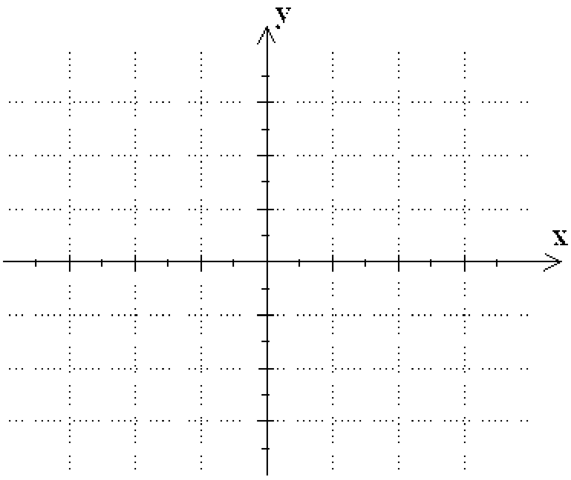
$y = |x+3| + 1$



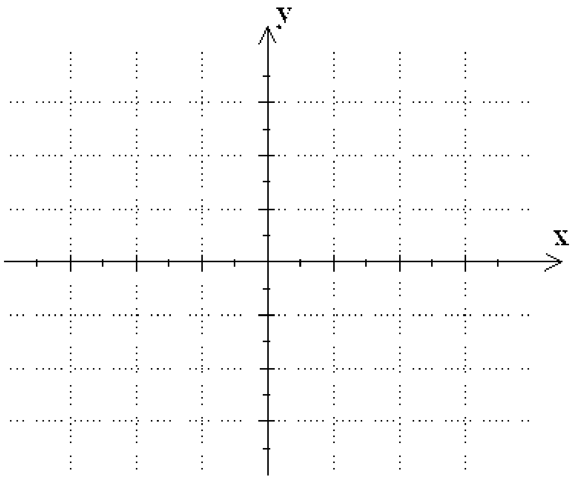
$y = x^2 + 4x - 5$



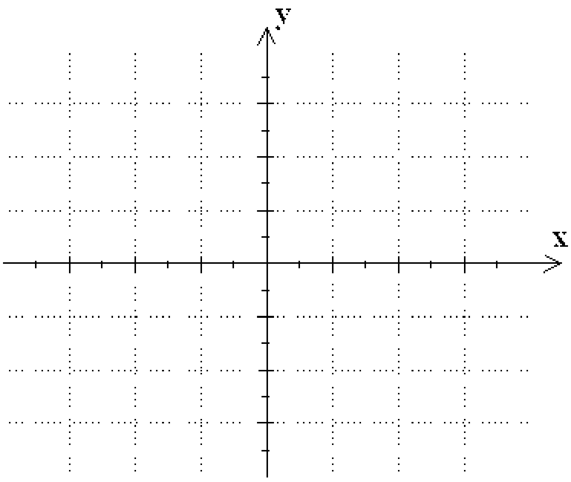
$y = \sqrt{-x}$



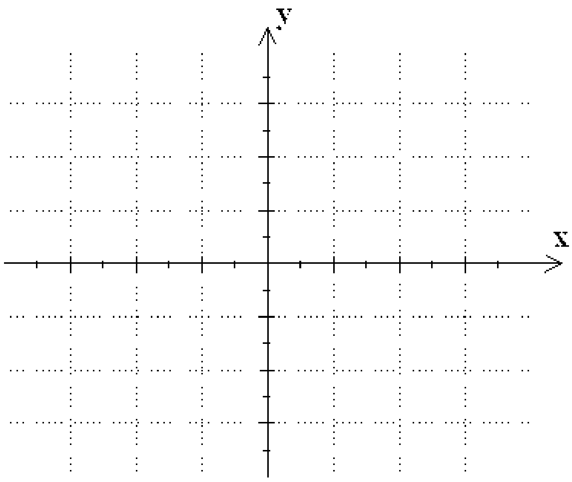
$y = 4 - x^3$



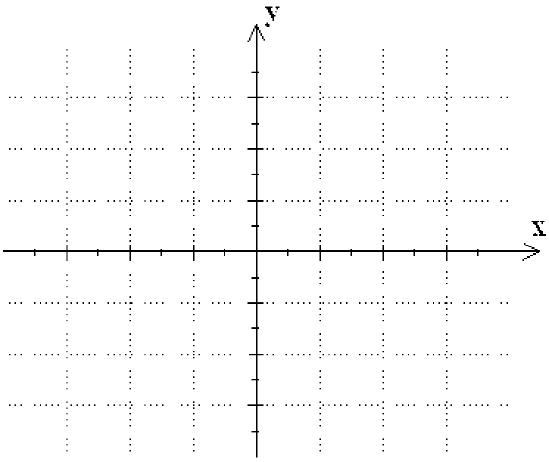
$y = \sqrt[3]{x}$



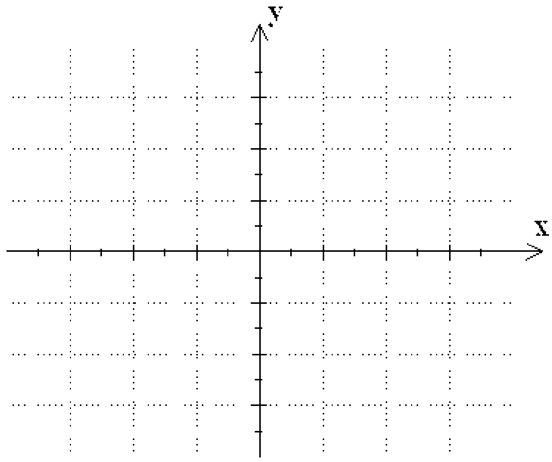
$y = \dfrac{x}{x-2}$



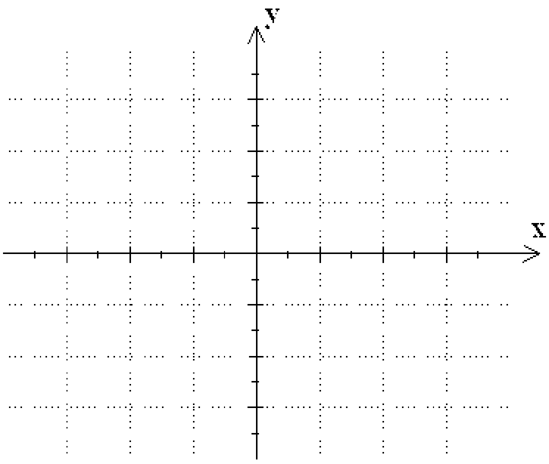
$y = -\dfrac{1}{x}$



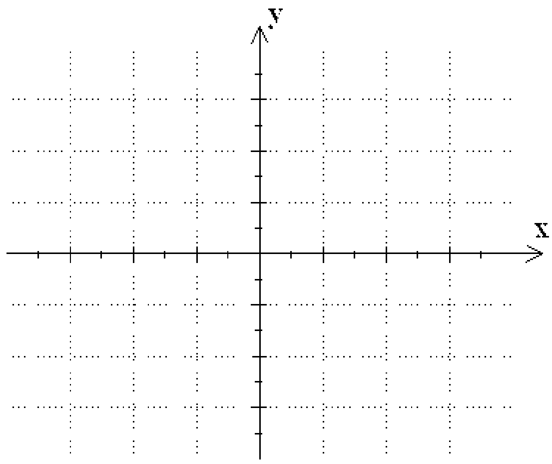
$y = 2^{1-x}$



$y = \dfrac{1}{3^{x+1}}$



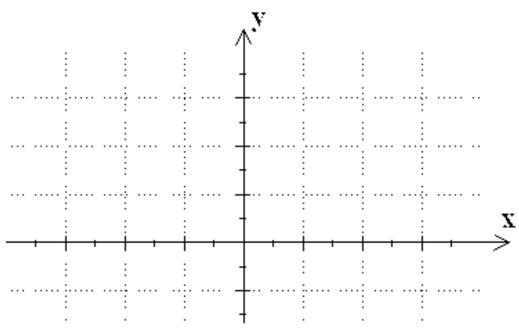
$y = \ln(x-4)$



Задачи 38: Составить уравнение прямой, проходящей через точки $A(-1,3)$ и $B(1,1)$. Покажите на графике точки пересечения прямой с координатными осями.

Problems 38: Find the equation of the straight going through the points $A(-1,3)$ and $B(1,1)$.

Sketch the graph of this line and show the intercepts.



Задачи 39: Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(2,1)$ под прямым углом к прямой $x+4y=5$.

Problems 39: Find the equation of the straight line passing through the point $A(2,1)$ at the right angle to the line $x+4y=5$.

Решение/ Solution:

Задачи 40: Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(1,2)$ параллельно прямой $2x-3y=6$.

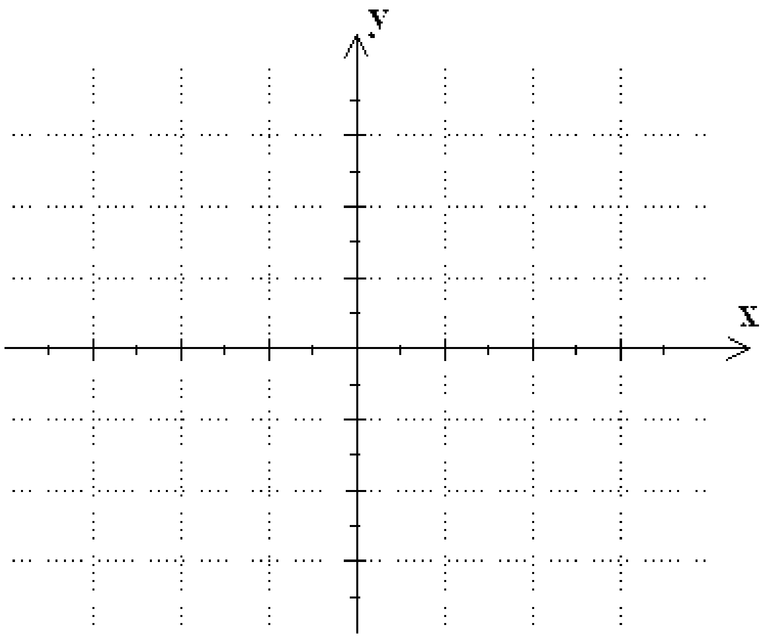
a) **Problems 40**: Find the equation of the line passing through the point $A(1,2)$ and being parallel to the line $2x-3y=6$.

Решение/ Solution:

Задача 41: Построить график функции $y=-x^2+2x+3$, указав положение вершины и точек пересечения с координатными осями.

Problem 41: Carefully sketch the graph of $y=-x^2+2x+3$, showing the location of the vertex and intercepts.

Решение/ Solution:



Задача 42: График функции $y = f(x)$ показан на Рис. 1.
Используйте этот график, чтобы вычислить приближенно $f(1)$, $f(-2)$ и $f(2.5)$.

Problem 42: Let $y = f(x)$ be the function whose graph is shown above in Fig. 1
Use the graph to approximate the following values: $f(1)$, $f(-2)$ and $f(2.5)$.

Решение/ Solution:
$f(1) =$ $\qquad$ $f(-2) =$ $\qquad$ $f(2.5) =$

Задача 43: Найти точки пересечения прямых $x - 3y = -5$ и
$2x + 7y = 3$.

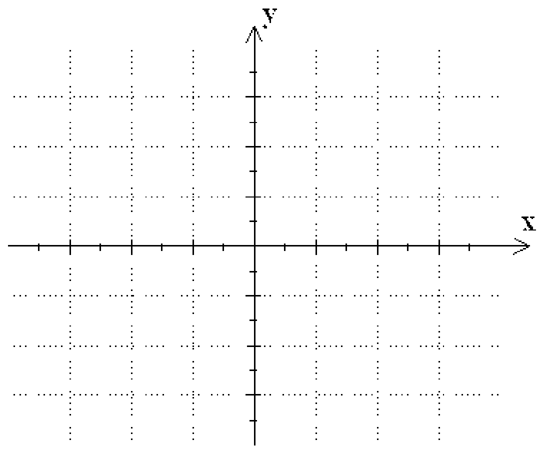
Problem 43: Find the point of intersection of the lines $x - 3y = -5$ and $2x + 7y = 3$.

Решение/ Solution:

Задача 44: Построить кривую
$$x^2 + y^2 + 2x - 6y + 1 = 0.$$

Problem 44: Draw the curve
$$x^2 + y^2 + 2x - 6y + 1 = 0.$$

Решение/ Solution:

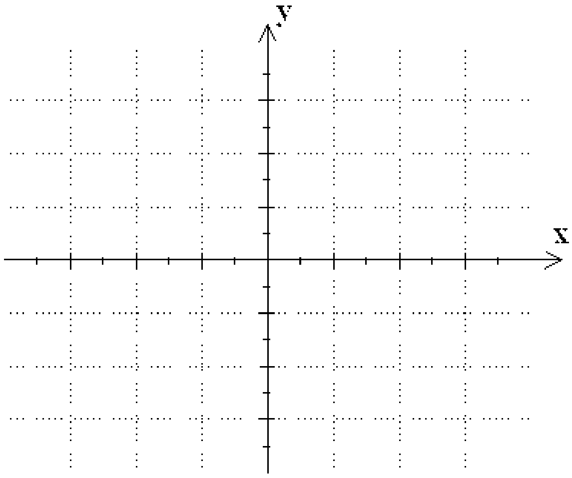


Задачи 45 - 47: Сколько точек пересечения имеют графики следующих пар функций?
a) $y = |\log|x+1||$ и $y = 1$;
b) $y = x^2 - 4|x| + 3$ и $y = \frac{1}{2}$;
c) $y = 2^{\frac{|x|}{x}}$ и $y = |x+1|$.

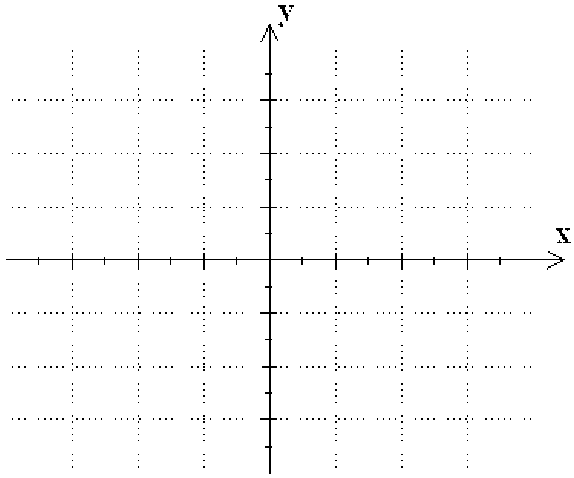
Problems 45 - 47: How many points of intersection have the graphs of the following couples of functions?
a) $y = |\log|x+1||$ and $y = 1$;
b) $y = x^2 - 4|x| + 3$ and $y = \frac{1}{2}$;
c) $y = 2^{\frac{|x|}{x}}$ and $y = |x+1|$.

Решение/ Solution:

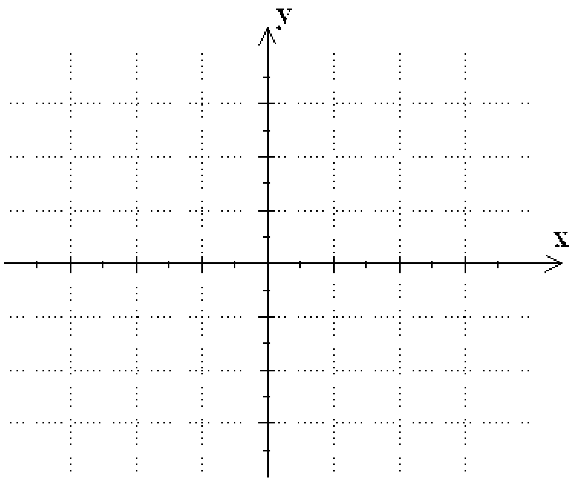
$y = \log x$, $y = \log|x+1|$



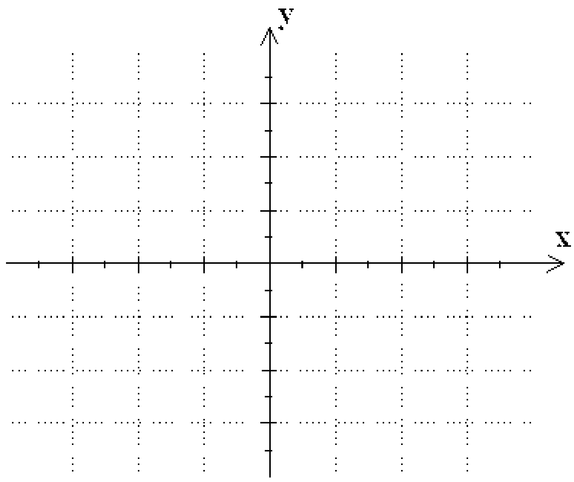
$y = |\log|x+1||$, $y = 1$



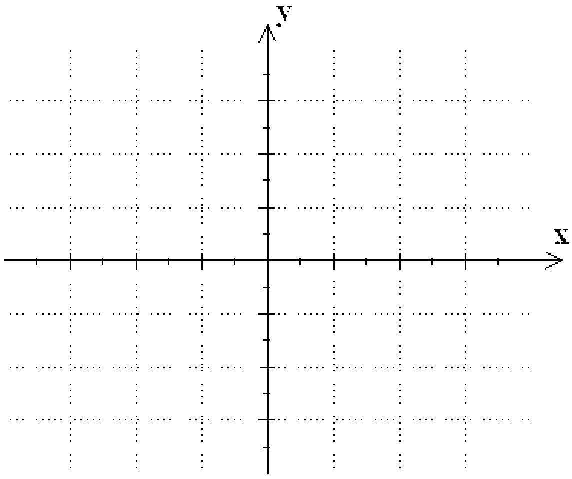
$y = x^2 - 4x + 3$, $y = x^2 + 4x + 3$



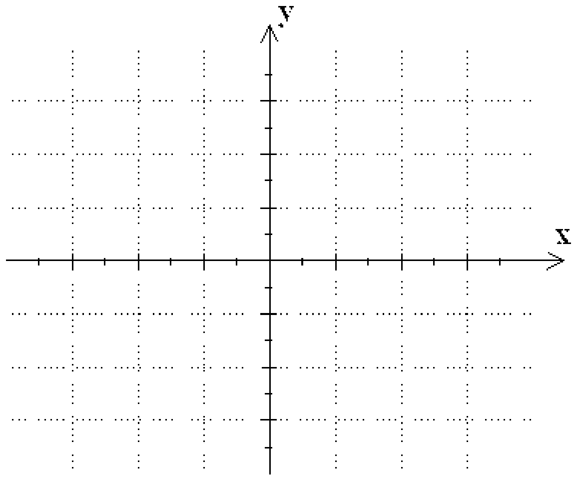
$y = x^2 - 4|x| + 3$, $y = 1/2$



$y = x + 1$, $y = 2$



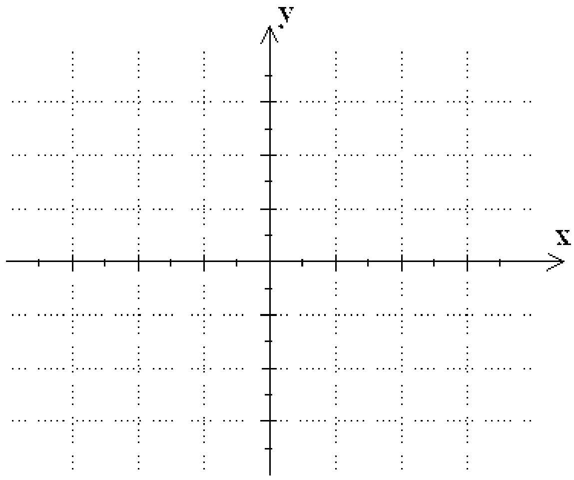
$y = |x+1|$, $y = 2^{|x|/x}$



Задача 48: В плоскости $x0y$ изобразите область, описываемую неравенствами $3x - y - 7 < 0$ и $x + 5y + 3 \geq 0$.

Problem 48: Shade the region in the xy-plane which is described by the inequalities $3x - y - 7 < 0$ and $x + 5y + 3 \geq 0$.

Решение/ Solution:

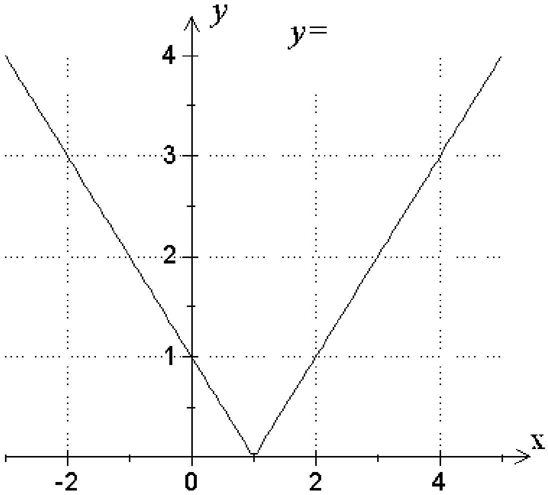


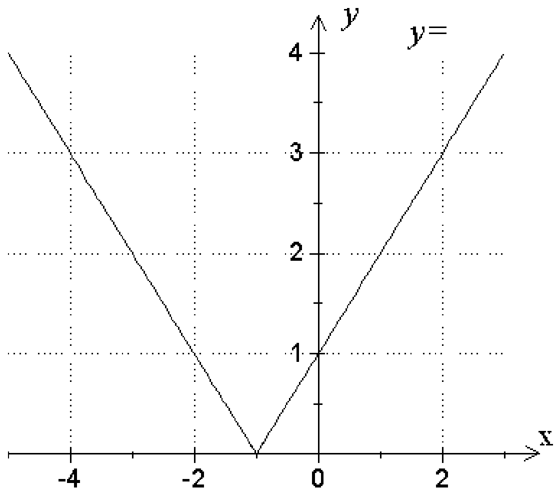
Задача 49: Найдите соответствие между функциями и их графиками.

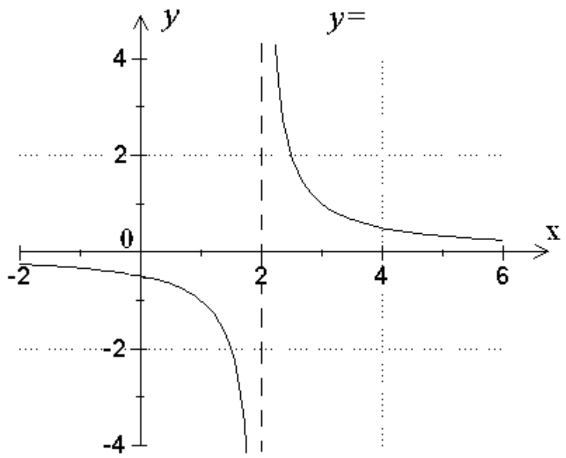
Problem 49: Match the following functions with their graphs.

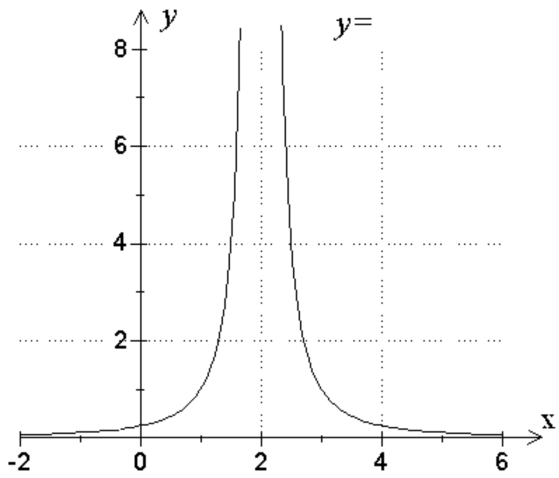
$a)\quad y = |x+1|,$ $\qquad b)\quad y = \dfrac{1}{(x-2)},$

$c)\quad y = \dfrac{1}{(x-2)^2},$ $\qquad d)\quad y = |x-1|.$









Задача 50: Найти радиус и координаты центра окружности $$x^2+y^2+8x-4x-5=0.$$	**Problem 50**: Find the radius and center of the circle $$x^2+y^2+8x-4x-5=0.$$

Решение/ Solution:

Задача 51: График параболы пересекает ось $0x$ в точках -1 и 3. Определить вид квадратичной функции, если областью ее значений являются все вещественные числа, не превышающие 4.	**Problem 51**: The graph of a parabola has x-intercepts, which are equal to (-1) and 3. Determine an expression for the corresponding quadratic function if its range consists of all numbers less than or equal to 4.

Решение/ Solution:

6. Дискретная алгебра | Discrete Algebra

6.1. [1]Арифметическая и геометрическая прогрессии: основные формулы | Arithmetic Progressions (1)-(3) and Geometric Progression (4)-(7): Basic Formulas

$$a_{n+1} = a_n + d, \tag{1}$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d, \tag{2}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (a_1 + (k-1)d) = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}, \tag{3}$$

$$a_{n+1} = a_n\, q, \tag{4}$$

$$a_n = a_1\, q^{n-1}, \tag{5}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_1 q^{k-1} = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}, \tag{6}$$

$$S_\infty = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \frac{a_1}{1-q}. \tag{7}$$

6.2. Задачи | Problems

Задача 1: Найти первый член a_1 арифметической прогрессии, если $a_6 = 5$ и $a_8 = 11$.

Problem 1: Find the first term a_1 of the arithmetic progression, if $a_6 = 5$ and $a_8 = 11$.

Решение/ Solution:

Задача 2: Найти разность d арифметической прогрессии, если $a_3 = 2$ и $a_7 = -18$.

Problem 2: Find the difference d of the arithmetic progression, if $a_3 = 2$ and $a_7 = -18$.

Решение/ Solution:

Задача 3: Найти второй a_2 и десятый a_{10} члены арифметической прогрессии, если $a_5 = 32$ и $d = 5$.

Problem 3: Find the second term a_2 and the tenth term a_{10} of the arithmetic progression, if $a_5 = 32$ and d =5.

[1] См. [4], Глава 5, стр. 102. | See [4], Chapter 5, p. 102.

Решение/ Solution:

Задача 4: Найти сумму S_{20} первых 20 членов арифметической прогрессии, если $a_4 = 1$ и $a_9 = 16$.

Problem 4: Find the sum S_{20} of the first 20 terms of the arithmetic progression, if $a_4 = 1$ and $a_9 = 16$.

Решение/ Solution:

Задача 5: Найти знаменатель q геометрической прогрессии, если $a_3 = 81$ и $a_6 = 3$.

Problem 5: Find the common ratio q of the geometric progression, if $a_3 = 81$ and $a_6 = 3$.

Решение/ Solution:

Задача 6: Найти шестой член a_6 геометрической прогрессии, если $a_1 = 256$ и $a_3 = 64$.

Problem 6: Find the sixth term a_6 of the geometric progression, if $a_1 = 256$ and $a_3 = 64$.

Решение/ Solution:

Задача 7: Вычислить сумму S_{15} первых 15 членов геометрической прогрессии и найти ее второй член a_2, если сумма первых трех членов $S_3 = 15$, а знаменатель прогрессии $q = -2$.

Problem 7: Find the sum S_{15} of the first 15 terms of the geometric progression and find its second term a_2, if the sum S_3 of the first three terms equals 15 and the common ratio q equals -2.

Решение/ Solution:

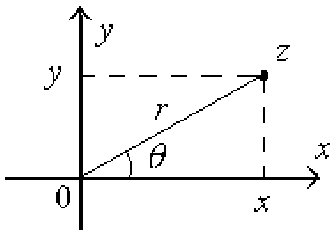
Задача 8: Вычислить сумму бесконечного числа членов убывающей геометрической прогрессии, если $a_3 = 125$, а знаменатель прогрессии $q = 1/5$.

Problem 8: Find the sum of an infinite number of terms of decreasing geometric progression, if $a_3 = 125$ and the common ratio is $q = 1/5$.

Решение/ Solution:

7. [2]Комплексные числа | Complex Numbers

7.1. Основные соотношения | Basic Relationships



$$z = x + iy,$$

$$z^* = x - iy,$$

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta,$$

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \tan\theta = \frac{y}{x},$$

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta),$$

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta,$$

$$z = re^{i\theta},$$

$$z^n = r^n e^{in\theta},$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta+2\upsilon m}{n}}, \qquad (m = 0, 1, \cdots, n-1),$$

$$\frac{1}{z} = \frac{z^*}{|z|^2}.$$

7.2. Задачи | Problems

Задача 1: Пусть z_1 и z_2 - комплексные числа. Найти сумму $z_1 + z_2$, разность $z_1 - z_2$, произведение $z_1 z_2$ и частное z_1/z_2, если $z_1 = 3 - 4i$ и $z_2 = 2 + i$.

Problem 1: Let z_1 and z_2 be complex numbers. Find the sum $z_1 + z_2$, difference $z_1 - z_2$, product $z_1 z_2$ and quotient z_1/z_2, if $z_1 = 3 - 4i$ and $z_2 = 2 + i$.

Решение/ Solution:

$z_1 + z_2 =$ $\qquad$ $z_1 - z_2 =$

$z_1 z_2 =$ $\qquad$ $z_1/z_2 =$

Задача 2: Извлечь квадратный корень из числа $z = 1 + i\sqrt{3}$.

Problem 2: Find the square roots of the complex number $z = 1 + i\sqrt{3}$.

Решение/ Solution: $r =$ $\qquad$ $\theta =$

$(\sqrt{z})_1 =$

$(\sqrt{z})_2 =$

[2] См. [4], Глава 6, стр. 109. | See [4], Chapter 6, p. 109.

Задача 3: Найти z^{2001}, если $z=\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Problem 3: Find z^{2001} if $z=\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение/ Solution: $|z|=$ $\arg z=$

$z^{2001}=$

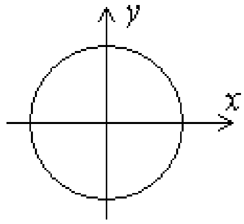
Задачи 4 - 7:
Решите приведенные ниже уравнения: и изобразите решения на окружности в комплексной плоскости:

Problem 4 - 7:
Solve the below equations and show the roots on the circle in the complex plane.

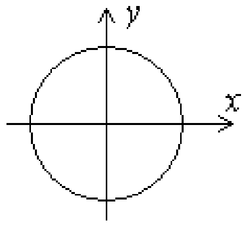
4. $z^2+1=0$,
5. $z^3-1=0$,
6. $z^4+1=0$,
7. $z^8-1=0$.

Решение/ Solution:

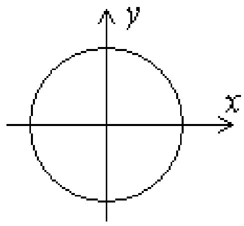
4. $z^2+1=0 \quad \Rightarrow \quad z=$



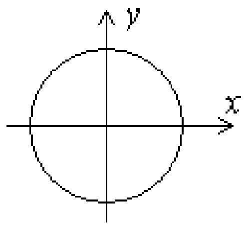
5. $z^3-1=0 \quad \Rightarrow \quad z=$



6. $z^4+1=0 \quad \Rightarrow \quad z=$



7. $z^8-1=0 \quad \Rightarrow \quad z=$



7.3. Тригонометрические приложения формулы Эйлера

Trigonometric Applications of the Euler Formula

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta,$$
$$\sin\theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) = \mathrm{Im}\, e^{i\theta},$$
$$\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \mathrm{Re}\, e^{i\theta}.$$

Задачи 8 -11: Доказать следующие формулы для синусов и косинусов суммы и разности углов:

Problems 8 - 11: Prove the following addition and subtraction formulas:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha,$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha,$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

Решение/ Solution:

8) – 9) $e^{i(\alpha+\beta)} = \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)$,

$e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha}e^{i\beta} =$

10) – 11) $e^{i(\alpha-\beta)} = \cos(\alpha-\beta) + i\sin(\alpha-\beta)$,

$e^{i(\alpha-\beta)} = e^{i\alpha}e^{-i\beta} =$

Задача 12: Доказать следующие тождества: для синусов и косинусов двойных углов:

Problem 12: Prove the following double-angle identities:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha.$$

Решение/ Solution:

$(e^{i\alpha})^2 = e^{i2\alpha} =$

$(e^{i\alpha})^2 = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^2 =$

8. [3]Пределы функций | Limits of Functions

8.1. Наиболее важные формулы | The Most Important Formulas

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \qquad (1)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1. \qquad (2)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1. \qquad (3)$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e. \qquad (4)$$

8.2. Задачи | Problems

Задачи 1 - 10: Вычислить следующие пределы:

Problems 1 - 10: Evaluate the following limits:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{8x}$,

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x^2}{3x^2}$,

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{6x}$,

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$,

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 7x}{\sin 3x}$,

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{x}$,

7) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2+4x-5}$,

8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{x}$,

9) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{6x^2+5x-2}{3x^2-4x+100}$,

10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-3x^2)}{4x^2}$.

Решение/ Solution:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{8x}=$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x^2}{3x^2}=$

[3] См. [4], Глава 7, стр. 119. | See [4], Chapter 7, p. 119.

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 2x}{6x} =$

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{x^2} =$

5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan 7x}{\sin 3x} =$

6) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{3x}-1}{x} =$

7) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x^2+4x-5} =$

8) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{3x}-1}{x} =$

9) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{6x^2+5x-2}{3x^2-4x+100} =$

10) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1-3x^2)}{4x^2} =$

9. Производные функций[4] | Derivatives of Functions

9.1. Таблица производных | A Common Table of Derivatives

$(x^n)' = nx^{n-1}$	$(a^x)' = a^x \ln a$
$(e^x)' = e^x$	$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\cos x)' = -\sin x$
$(tgx)' = (\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$(ctgx)' = (\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(arctgx)' = (\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$	$(arcctgx)' = (\cot^{-1} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

9.2. Задачи | Problems

Задача 1: Пусть $f(x) = x^3 - 5x + 4$. Найти среднюю скорость изменения $f(x)$ на интервале $[2; 3]$.

Problem 1: Let $f(x) = x^3 - 5x + 4$. Find the average rate of change of $f(x)$ over the interval [2, 3].

Решение/ Solution:

Задачи 2 - 11: Найти производные следующих функций:

Problems 2 - 11: Find the derivatives of the functions:

2) $f(x) = x^3$,

3) $f(x) = \sqrt{x}$,

4) $f(x) = \dfrac{5}{x} - 4\sqrt[3]{x} + 2x^8$,

5) $f(x) = \sin^2 2x$,

6) $f(x) = \ln(x+2)$,

7) $f(x) = \ln(x \cos x)$,

8) $f(x) = \ln(\dfrac{x\sqrt{x-3}}{x+2})$,

9) $f(x) = 3\tan x - 3\cot x$,

10) $f(x) = \dfrac{x \sin x - \cos x}{x^2}$,

11) $f(x) = \ln e^x + \sin^2 x + \cos^2 x$.

[4] См. [4], Глава 8, стр. 123. | See [4], Chapter 8, p. 123.

Решение/ Solution:

2) $(x^3)' =$

3) $(\sqrt{x})' =$

4) $(\frac{5}{x} - 4\sqrt[3]{x} + 2x^8)' =$

5) $(\sin^2 2x)' =$

6) $(\ln(x+2))' =$

7) $(\ln(x\cos x))' =$

8) $(\ln(\frac{x\sqrt{x-3}}{x+2}))' =$

9) $(3\tan x - 3\cot x)' =$

10) $(\frac{x\sin x - \cos x}{x^2})' =$

11) $(\ln e^x + \sin^2 x + \cos^2 x)' =$

9.3. Исследование функций

Чтобы исследовать функцию $f(x)$, нужно:

- Найти область ее определения.
- Установить обладает ли функция свойствами симметрии.
- Найти критические точки, т.е. точки, в которых производная $f'(x)$ обращается в нуль или не существует.
- Проверить имеются ли среди критических точек точки экстремума; если таковые имеются, то вычислить максимумы и минимумы функции.
- Найти интервалы монотонного возрастания и убывания функции.
- Найти все точки, в которых вторая производная $f''(x)$ обращается в нуль или же не существует. Проверить какие из найденных точек являются точками перегиба.
- Найти интервалы выпуклости и вогнутости кривой $y = f(x)$.
- Найти асимптоты функции.

Investigation of Functions

In order to investigate a function $f(x)$ you can follow the algorithm below:

- Find the domain of the function.
- Determine whether the function has a symmetry.
- Determine critical points by solving the equation $f'(x) = 0$ and finding the points in which the derivative $f'(x)$ does not exist.
- Check each critical point whether it is an extreme point or not. Calculate the value of the function in each extreme point.
- Find the intervals of monotonicity of the function.
- Determine the points of inflection, that is, find the solution of the equation $f''(x) = 0$. Also it is necessary to find the points, where the second derivative $f''(x)$ does not exist. Each of these points must be checked whether it is a point of inflection or not.
- Find the intervals where the curve $y = f(x)$ is concave, and where it is convex.
- Find the asymptotes for the function.

Задача 12: Найти интервалы монотонности функции

Problem 12: Find the intervals of monotonicity of the function

$$f(x) = 3x^4 + 16x^3 - 6x^2 - 48x + 1.$$

Решение/ Solution:

$(f(x))' = (3x^4 + 16x^3 - 6x^2 - 48x + 1)' =$

Задача 13: Какие из нижеприведенных функций являются четными, какие – нечетными и какие из них не обладают свойствами четности?

Problem 13: Which of the following functions are even, odd, neither even nor odd?

$$|x|,\quad x^2,\quad x^3,\quad x^4,\quad x^5,\quad \sqrt[3]{x},\quad (x+1),$$

$$\sin x,\qquad \cos x,\qquad \sin^2 x,\qquad \sin^{-1} x,\qquad \tan^7 x,\qquad x\cos x,$$

$$\ln x,\ |\ln x|,\qquad \ln|x|,\qquad \ln(x^2+1),\ \ln(x+1),$$

$$e^{-x^2},\qquad e^x,\qquad e^{-x}.$$

Решение/ Solution:

Четные функции / Even functions:

Нечетные функции / Odd functions:

Не являются ни четными, ни нечетными / Neither even nor odd functions:

Задачи 14 – 19: Разбить области определения следующих функций на конечное число интервалов возрастания и убывания функции.

Problems 14 – 19: Divide the domains of the following functions into a finite number of intervals for which the functions are strictly monotone. Indicate the intervals where the functions are increasing and where they are decreasing.

14) $f(x) = x^2(x-3)$,

15) $f(x) = (x-3)\sqrt{x}$,

16) $f(x) = x\ln x$,

17) $f(x) = e^{x^2-4x}$,

18) $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$,

19) $f(x) = \dfrac{x}{x+4}$.

Решение/ Solution:

14) $(x^2(x-3))' =$

Следовательно / Therefore:

15) $((x-3)\sqrt{x})' =$

Следовательно / Therefore:

16) $(x\ln x)' =$

Следовательно / Therefore:

17) $(e^{x^2-4x})' =$

Следовательно / Therefore:

18) $(\frac{e^x}{x})' =$

Следовательно / Therefore:

19) $(\frac{x}{x+4})' =$

Следовательно / Therefore:

Задачи 20 – 22: Найти локальные экстремумы функции $f(x)$ и классифицировать их по признакам максимума или минимума:

Problems 20 - 22: Find all local extrema of $f(x)$ and determine which of them are local minima and which are local maxima:

20) $f(x) = x^2 - 6x + 7$,

21) $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x-1}$,

22) $f(x)=x-\ln(1+x)$.

Решение/ Solution:

20) $(x^2-6x+7)'=$

21) $\left(\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}\right)'=$

22) $(x-\ln(1+x))'=$

Задачи 23 - 26: Найдите асимптоты следующих функций. Изобразите схематически графики функций и их асимптоты, не обращая внимания на экстремумы, вогнутость и т.д.

Problems 23 - 26: Find the asymptotes for the following functions. Sketch the graphs of these functions and indicate their asymptotes. No need to determine extrema, concavity, and so on.

23) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-9}$,

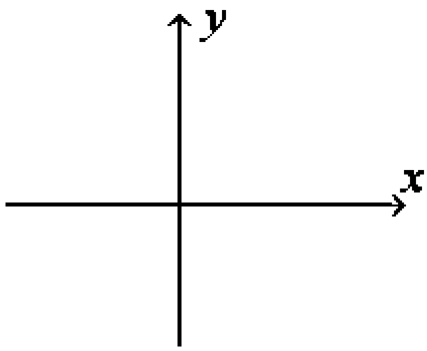
24) $f(x)=\dfrac{x^2+4}{\sqrt{x^2-4}}$,

25) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+9}$,

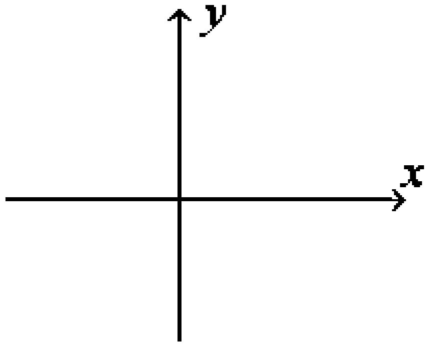
26) $f(x)=e^{2x}$.

Решение/ Solution:

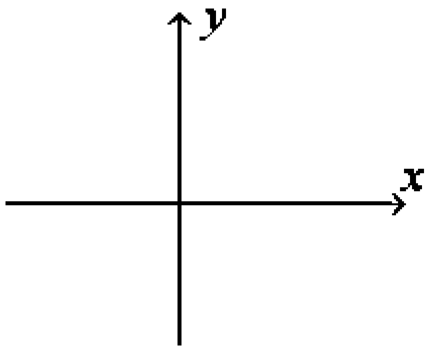
23) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-9} \quad \Rightarrow$



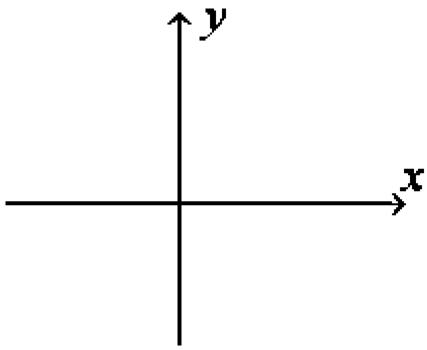
24) $f(x)=\dfrac{x^2+4}{\sqrt{x^2-4}}$ $\Rightarrow$



25) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+9}$ $\Rightarrow$



26) $f(x)=e^{2x}$ $\Rightarrow$



Задачи 27 – 30: Построить графики функций, предварительно исследовав:

- Область определения.
- Симметрию.
- Интервалы возрастания и убывания.
- Промежутки вогнутости и выпуклости.

For **Problems 27 – 30**, sketch the graphs of the functions. Extract as much information about the function as you can:

- Domain.
- Symmetry.
- Intervals of increasing, decreasing, concaving, convexity.
- Extreme points and points of

- Точки экстремума и перегиба.
- Асимптоты.

Масштабы на координатных осях $0x$ и $0y$ можно выбирать независимо, сообразуясь с соображениями наглядности.

Не поленитесь найти точки пересечения графика функции с координатными осями.

Промежуточные результаты удобно представить в виде таблиц. Один из примеров таблицы приведен ниже – для функции, определенной на интервале $[a,\infty)$ и имеющей критические точки x_1 и x_2.

inflection.

- Are there asymptotes? How does the function approach them?

Do not decide on a scale for axes until you have come to a picture of the function. It is not necessary to use the same scales for the $x-$ and $y-$axes.

Try to find the x- and y-intercepts.

It is convenient to place the calculated results in the tables.

An example of the table is given below. The function $y = f(x)$ is assumed to be defined in the interval $[a,\infty)$; x_1 and x_2 are some critical points.

x	a	$[a, x_1)$	x_1	(x_1, x_2)	x_2	$(x_2, +\infty)$
y	9	↘	2	↗	$\pm\infty$	↗
y'	-	-	0	+	does not exist	+
вывод / conclusion		$f(x)$ убывает/ is decreasing	min	$f(x)$ возрастает/ is increasing	разрыв/ discontinuity	$f(x)$ возрастает / is increasing

27) $f(x) = x^2 + \dfrac{2}{x}$,

28) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+4}$,

29) $f(x) = (2+x^2)e^{-x^2}$,

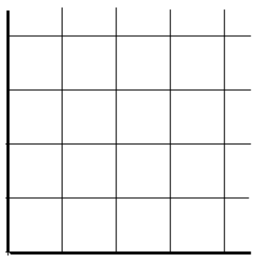
30) $f(x) = x\ln x^2$.

Решение/ Solution:

27) $f(x) = x^2 + \dfrac{2}{x}$. Domain:

Symmetry:

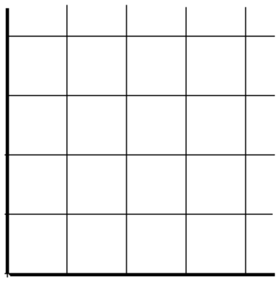
Critical points:



28) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 4}$

Domain:

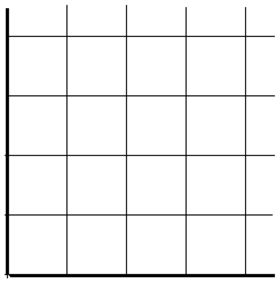
Symmetry:
Critical points:



29) $f(x) = (2 + x^2)e^{-x^2}$

Domain:

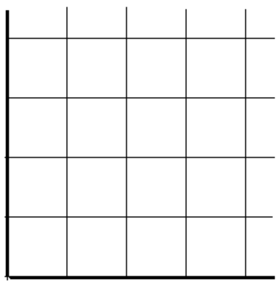
Symmetry:
Critical points:



30) $f(x) = x \ln x^2$

Domain:

Symmetry:
Critical points:



10. [5]Интегралы / Integrals

19.1. Таблица интегралов / A Table of Common Integrals

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad (n \neq -1)$	$\int \frac{dx}{x} = \ln\|x\| + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int e^x dx = e^x + C$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \cos x dx = \sin x + C$
$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C = tgx + C$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C = -ctgx + C$
$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C = arctgx + C$

10.2. Задачи / Problems

Задачи 1 - 8: Вычислите неопределенные интегралы и проверьте результаты с помощью дифференцирования.

Problems 1 - 8: Evaluate the following indefinite integrals. Check up the results by differentiating.

1) $\int (4x^3 - 6x^2 + x + 3)dx$,	2) $\int \sqrt{x} dx$,
3) $\int \frac{dx}{2x+5}$,	4) $\int \cos(1-4x)dx$,
5) $\int \cos^2 x dx$,	6) $\int \sin 4x \cos 4x dx$,
7) $\int \cos^3 x dx$,	8) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+1}$.

Решение/ Solution:

1) $\int (4x^3 - 6x^2 + x + 3)dx =$

Check-up:

[5] См. [4], Глава 9, стр. 129. | See [4], Chapter 9, p. 129.

2) $\int \sqrt{x}dx =$

Check-up:

3) $\int \frac{dx}{2x+5} =$

Check-up:

4) $\int \cos(1-4x)dx =$

Check-up:

5) $\int \cos^2 xdx =$

Check-up:

6) $\int \sin 3x \cos 3xdx =$

Check-up:

7) $\int \sin^3 xdx =$

Check-up:

8) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+3} =$

Check-up:

Задачи 9 - 10: Вычислить точно следующие интегралы, если они существуют:

Problems 9 - 10: Evaluate the following integrals exactly, if they exist:

9) $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}dx$, 10) $\int_0^1 (3x-4)^7 dx$.

Решение/ Solution:

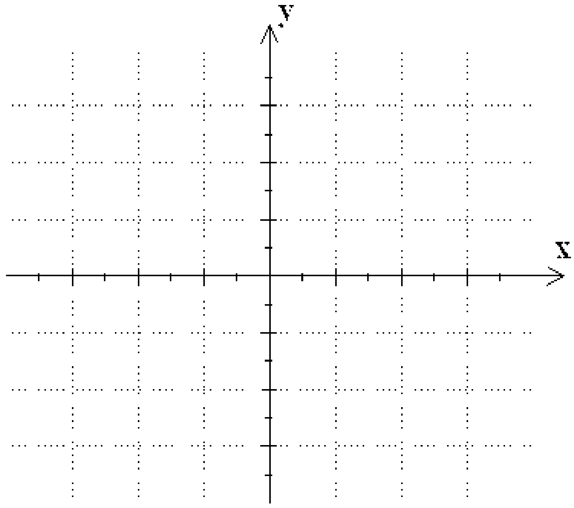
9) $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}dx =$

10) $\int_0^1 (3x-4)^7 dx =$

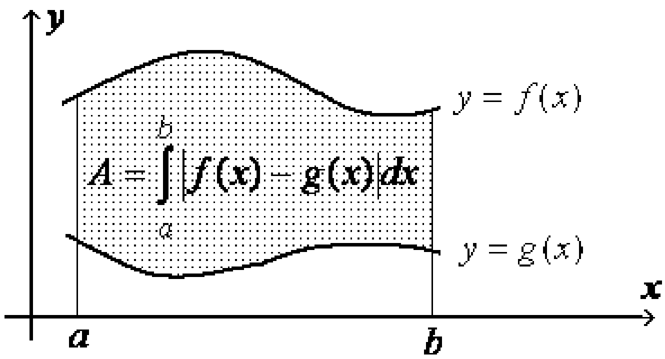
Задача 11: Найти площадь области, ограниченной

Problem 11: Find the area of the region bounded by the graphs of графиками функций $y=3x$ и $y=x^2$. | the functions $y=3x$ and $y=x^2$.

Решение/ Solution:



Подсказка / Hint:



Список литературы | References

1. V.V. Konev. Preparatory Course of Mathematics. Textbook. Tomsk. TPU Press, 2009, 108p.
2. V.V. Konev. Mathematics, Preparatory Course: Algebra. Workbook. TPU Press, 2009, 58p.
3. V.V. Konev. Mathematics, Preparatory Course: Trigonometry and Geometry. Workbook. Tomsk. TPU Press, 2009, 32p.
4. V.V. Konev. The Elements of Mathematics. Textbook. The Second Edition. Tomsk: TPU Press, 2001, 140 p.
5. V.V. Konev. Higher Mathematics, Part 2. Textbook. The Second Edition. Tomsk. TPU Press, 2009, 134p.

Valery V. Konev, Associate Professor of the Higher Mathematics Department, TPU, Ph.D.

The Elements of Mathematics

Workbook

Reviewed by: V.A. Kilin, Professor of the Higher Mathematics Department. TPU, D.Sc.