Часть 4
МЕТОД РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ
1. Общие идеи метода

Метод разделения переменных применяется для решения линейных однородных уравнений с линейными однородными граничными условиями вида

$$\alpha u_x(0,t) + \beta u(0,t) = 0,$$
$$\gamma u_x(2l,t) + \delta u(2l,t) = 0. \qquad (1)$$

Обсудим ключевые принципы этого метода на примере простой задачи: найти решение одномерного уравнения теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < \infty, \qquad (2)$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$u(0,t) = 0,$$
$$u(l,t) = 0 \qquad (3)$$

и начальному условию

$$u(x,0) = f(x), \qquad (4)$$

где $f(x)$ – заданная функция.

Такая задача имеет следующую физическую интерпретацию: концы тонкого стержня длиной l поддерживаются при постоянной температуре, значение которой принимается за начало отсчета. Условие (4) задает начальное распределение температуры вдоль стержня. Требуется найти распределение температуры $u(x,t)$ в последующие моменты времени t.

Если следовать вышеприведенной интерпретации, то следует позаботься о том, чтобы в задаче с нулевыми граничными условиями начальная температура $u(x,0)$ принимала нулевые значения на концах стержня. В противном случае модель физического процесса должна включать в себя некий механизм, обеспечивающий мгновенное изменение начальной температуры до нулевой.

Частное решение уравнения (2) будем искать в виде произведения функций $X(x)$ и $T(t)$, каждая из которых зависит только от одной переменной:

$$u(x,t) = X(x)T(t). \tag{5}$$

На первом этапе предстоит найти бесконечное множество решений вида (5), удовлетворяющих граничным условиям (3). Эти простейшие решения называются **фундаментальными решениями**, а их сумма также является решением уравнения (2). Затем из этих решений $u_\lambda(x,t) = X_\lambda(x)T_\lambda(t)$ нужно составить линейную комбинацию, которая удовлетворяет начальному условию (4) и, таким образом, дает решение рассматриваемой задачи.

Подставим выражение (5) в уравнение (2) и разделим обе части полученного равенства на произведение XT:

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = a^2 \frac{X''(x)}{X(x)}, \tag{6}$$

В результате мы получили уравнение, в котором переменные x и t разделены. Поскольку левая часть этого уравнения не зависит от x, то и его правая часть не зависит от x. Аналогично устанавливается, что обе части равенства (6) не зависят от t. Это означает, что

$$\frac{T'}{T} = \lambda, \tag{7}$$

$$a^2 \frac{X''}{X} = \lambda, \tag{8}$$

где λ – некоторая константа.

Далее нужно найти решение каждого их этих двух обыкновенных дифференциальных уравнений и составить из них произведение. Общее решение уравнения (7) имеет вид

$$T_\lambda = \mathrm{const} \cdot e^{\lambda t}. \tag{9}$$

Уравнение (8) представляют собой линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка,

$$a^2 X'' - \lambda X = 0, \tag{10}$$

общее решение которого имеет вид

$$X_\lambda = \begin{cases} a_\lambda \cos \frac{\sqrt{-\lambda}}{a} x + b_\lambda \sin \frac{\sqrt{-\lambda}}{a} x, & \lambda \le 0, \\ c_\lambda \exp\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{a} x\right) + d_\lambda \exp\left(-\frac{\sqrt{\lambda}}{a} x\right), & \lambda > 0, \end{cases} \quad (11)$$

где $a_{\lambda,}$ b_λ, c_λ и d_λ – произвольные константы.

Произведение решений (9) и (11) является частным решением уравнения (2):

$$u_\lambda(x,t) = e^{\lambda t} \begin{cases} a_\lambda \cos \frac{\sqrt{-\lambda}}{a} x + b_\lambda \sin \frac{\sqrt{-\lambda}}{a} x, & \lambda \le 0, \\ c_\lambda \exp\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{a} x\right) + d_\lambda \exp\left(-\frac{\sqrt{\lambda}}{a} x\right), & \lambda > 0, \end{cases} \quad (12)$$

Теперь из этих решений нужно выделить только такие, которые удовлетворяют граничным условиям (3). Предположим сначала, что $\lambda \le 0$. Полагая $x = 0$ и $x = l$, получим

$$u_\lambda(0,t) = 0 = e^{\lambda t} a_\lambda, \quad (13)$$

$$u_\lambda(l,t) = 0 = e^{\lambda t} \left(a_\lambda \cos \frac{\sqrt{-\lambda}}{a} l + b_\lambda \sin \frac{\sqrt{-\lambda}}{a} l \right), \quad (14)$$

что влечет

$$a_\lambda = 0, \quad \sin \frac{\sqrt{-\lambda}}{a} l = 0. \quad (15)$$

Тогда

$$\frac{\sqrt{-\lambda}}{a} l = \pi n \qquad (n = 0, 1, 2, \dots) \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = -\frac{\pi^2}{l^2} a^2 n^2. \quad (16)$$

Подставляя выражения (15) и (16) в формулу (12), получим набор решений уравнения (2), каждое из которых удовлетворяет граничным условиям (3):

$$u_n(x,t) = b_n e^{-\frac{\pi^2}{l^2} a^2 n^2 t} \sin \frac{\pi n x}{l} \qquad (n = 1, 2, \dots). \quad (17)$$

Рассмотрим теперь случай $\lambda > 0$. Полагая в формуле (12) $x = 0$ и $x = l$, получим

$$u_\lambda(0,t) = 0 = e^{\lambda t}(C_\lambda + D_\lambda), \tag{18}$$

$$u_\lambda(l,t) = 0 = e^{\lambda t}\left(c_\lambda \exp\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{a}2l\right) + d_\lambda \exp\left(-\frac{\sqrt{\lambda}}{a}2l\right)\right), \tag{19}$$

что влечет

$$\begin{gathered} d_\lambda = -c_\lambda, \\ \exp\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{a}l\right) = \exp\left(-\frac{\sqrt{\lambda}}{a}l\right). \end{gathered} \tag{20}$$

Последнее равенство выполняется только при $\lambda = 0$, что приводит к тривиальному решению $u(x,t) = \mathrm{const}$ и, таким образом, решение задачи (2)–(4) следует отыскивать в виде суммы функций вида (17):

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\frac{\pi^2}{l^2}a^2n^2t} \sin\frac{\pi nx}{l}. \tag{21}$$

Очевидно, что такая сумма является решением уравнения (2) и удовлетворяет граничным условиям (3). Полагая в этой формуле $t = 0$ и учитывая начальное условие (4), получим

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{\pi nx}{l}. \tag{22}$$

Предположим, что функция $f(x)$ допускает разложение в ряд Фурье на отрезке $0 \le x \le l$. Доопределим ее нечетным образом, положив $f(-x) = -f(x)$. Тогда функцию $f(x)$ можно представить в виде ряда Фурье

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{\pi nx}{l}, \tag{23}$$

где коэффициенты Фурье b_n определяются формулой

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}\,dx. \tag{24}$$

В этом случае решение задачи (2)–(4) записывается в виде ряда

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\frac{\pi^2}{l^2}a^2n^2t}\sin\frac{\pi n x}{l}$$

с коэффициентами (24). Заметим, что в этой сумме можно оставить лишь несколько первых слагаемых, поскольку вклад гармоник с большими номерами n становится пренебрежимо малым из-за наличия под знаком суммы быстро затухающего (с ростом n) множителя $\exp\left(-\frac{\pi^2}{l^2}a^2n^2t\right)$.

1.1. Примеры

1. Пусть $u(x,0)=2\sin 3\pi x$ и $l=4$. Тогда в формуле (21) следует положить $b_{12}=2$ и $b_n=0$ при $n\neq 12$. В этом случае решение задачи (2)–(4) имеет вид

   $$u(x,t)=2\exp(-9a^2\pi^2t)\sin 3\pi x.$$

   Отметим, что из формулы (24) вытекают такие же значения коэффициентов b_n.

2. Если $f(x)=5\sin 2x$ и $l=\pi$, то в формуле (21) следует положить $b_2=5$ и $b_n=0$ при $n\neq 2$. Тогда решение задачи (2)–(4) имеет вид

   $$u(x,t)=5\exp(-4a^2t)\sin 2x.$$

3. Пусть $f(x)=4\sin x+5\sin 2x$, $a=1$ и $l=\pi$. Тогда решением задачи (2)–(4) является функция

   $$u(x,t)=4\mathrm{e}^{-t}\sin x+5\mathrm{e}^{-4t}\sin 2x.$$

4. Найти решение уравнения теплопроводности

   $$u_t=u_{xx},\quad t>0 \tag{25}$$

   на отрезке $0<x<4$, удовлетворяющее граничным условиям

   $$\begin{gathered}u(0,t)=0,\\ u(4,t)=0\end{gathered} \tag{26}$$

   и начальному условию

   $$u(x,0)=2-|x-2|. \tag{27}$$

   Решение задачи определяется формулой

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\frac{\pi^2}{16}n^2 t} \sin\frac{\pi n x}{4},$$

в которой коэффициенты разложения функции $u(x,0)$ в ряд Фурье вычисляются по формуле

$$b_n = \frac{1}{2}\int_0^4 (2 - |x-2|)\sin\frac{\pi n x}{4}\,dx \qquad (28)$$

и равны

$$b_n = \begin{cases} \dfrac{16}{\pi^2\,(2k-1)^2}(-1)^{k+1}, & n = 2k-1, \\ 0, & n = 2k. \end{cases} \qquad (29)$$

Таким образом, решение задачи (25)–(27) имеет вид

$$u(x,t) = \frac{16}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2}{16}(2k-1)^2 t}\,\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^2}\sin\frac{\pi(2k-1)x}{4}. \qquad (30)$$

Начиная с некоторого момента времени, это точное решение практически не отличается от приближенного решения

$$u(x,t) = \frac{16}{\pi^2}e^{-\frac{\pi^2}{16}t}\sin\frac{\pi x}{4}, \qquad (31)$$

которое представляет собой первое слагаемое в сумме (30) – затухающую полуволну синусоиды.

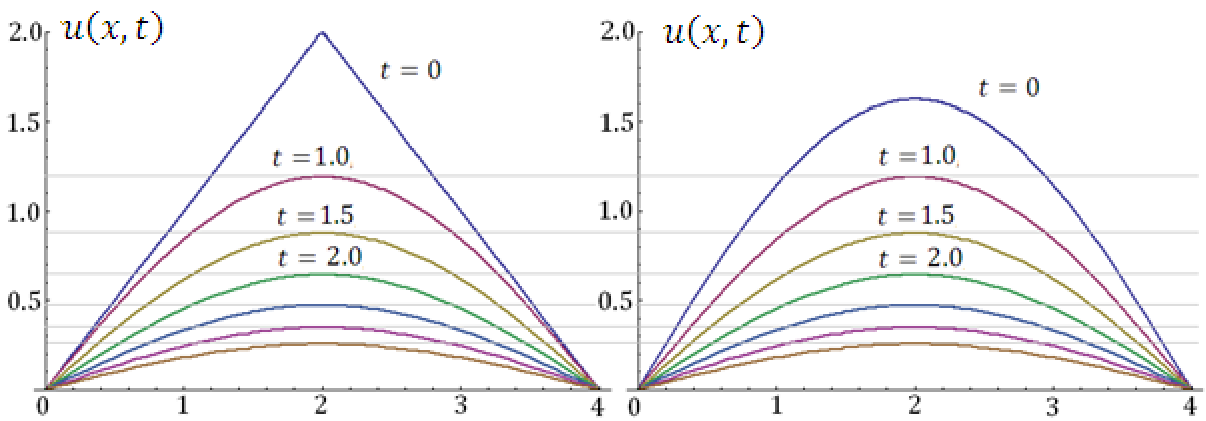

Рис. 1. Распределение температуры $u(x,t)$ в стержне в различные моменты времени t при начальном условии $u(x,0) = 2 - |x-2|$. В

левой части рисунка приведены кривые, рассчитанные по точной формуле (30). Графики в правой части получены по приближенной формуле (31). Три нижние кривые соответствуют значениям $t = 2.5,\ 3.0,\ 3.5$.

5. Найти решение уравнения

$$u_t = u_{xx}, \qquad 0 < x < 4, \quad 0 < t < \infty, \tag{32}$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$u(0,t) = 0, \qquad u(4,t) = 0 \tag{33}$$

и начальному условию

$$u(x,0) = x(x-1)(x-3)(x-4). \tag{34}$$

Решение этой задачи определяется формулами

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\frac{\pi^2}{16}n^2 t} \sin\frac{\pi n x}{4},$$

$$b_n = \frac{1}{2}\int_0^4 u(x,0)\sin\frac{\pi n x}{4}\,dx = \tag{35}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{128}{(2k-1)^5\pi^5}\left(192 - 19(2k-1)^2\pi^2\right), & n = 2k-1, \\ 0, & n = 2k. \end{cases}$$

Таким образом, точное решение можно записать в виде

$$u(x,t) = \frac{128}{\pi^5}\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2}{16}(2k-1)^2 t}\,\frac{\left(192 - 19(2k-1)^2\pi^2\right)}{(2k-1)^5}\sin\frac{\pi(2k-1)x}{4}. \tag{37}$$

Ограничиваясь первым слагаемым в этой сумме, получим приближенное решение

$$u(x,t) = \frac{128}{\pi^5} e^{-\frac{\pi^2}{16}t}\left(192 - 19\pi^2\right)\sin\frac{\pi x}{4}. \tag{38}$$

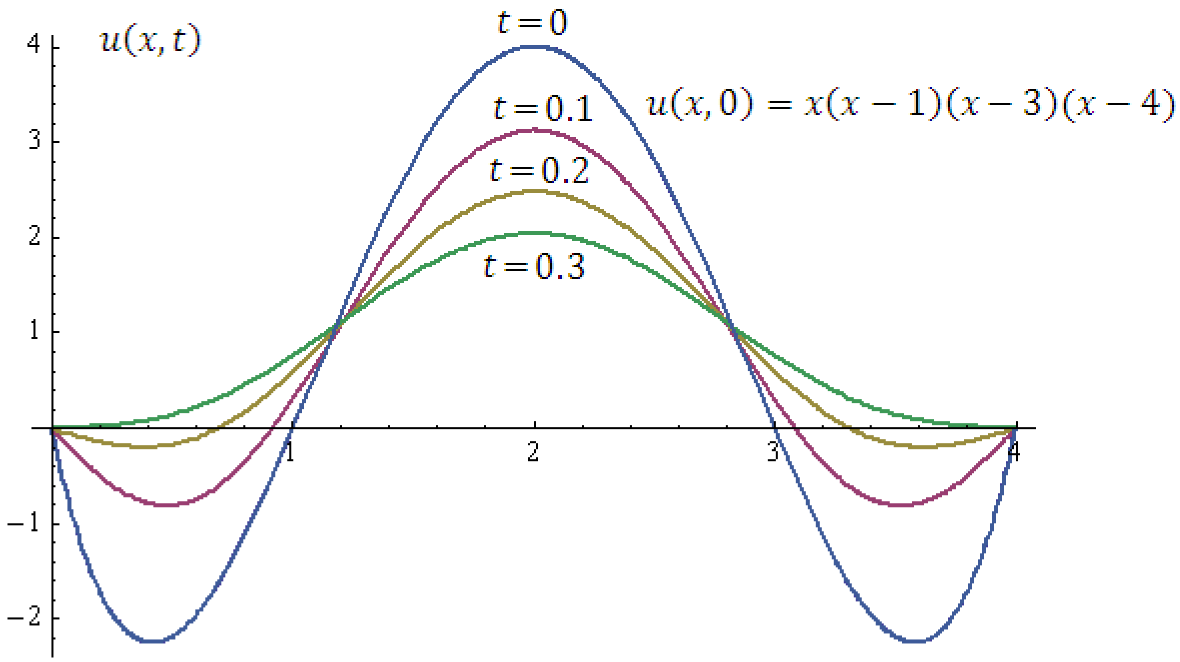

Рис. 2. Эволюция начального температурного распределение в тонком стержне.

6. Найти решение одномерного уравнения теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx},\ \ 0 < x < l,\ \ 0 < t < \infty \tag{39}$$

при начальном и граничном условиях

$$u(x,0) = f(x), \tag{40}$$

$$u(0,t) = u(l,t), \tag{41}$$

где $\mathrm{f(x)}$ – заданная функция.

Согласно формуле (28) частное решение уравнения (39) имеет вид

$$u_\lambda(x,t) = e^{\lambda t}\begin{cases} A_\lambda \cos\left(\dfrac{\sqrt{-\lambda}}{a}x\right) + B_\lambda \sin\left(\dfrac{\sqrt{-\lambda}}{a}x\right), & \lambda \le 0, \\ C_\lambda \exp\left(\dfrac{\sqrt{\lambda}}{a}x\right) + D_\lambda \exp\left(-\dfrac{\sqrt{\lambda}}{a}x\right), & \lambda > 0. \end{cases} \tag{51}$$

Чтобы удовлетворить граничному условию (50), следует выбрать $\lambda \le 0$:

$$\sqrt{-\frac{\lambda}{a}} = \frac{\pi}{l}n, \quad \lambda = -\frac{\pi^2}{l^2}a^2n^2, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

В этом случае

$$u_\lambda(2l,t) = A_\lambda \cos\left(\frac{\pi}{l}n2l\right) + B_\lambda \sin\left(\frac{\pi}{l}n2l\right) = u_\lambda(0,t).$$

Тогда решение (51) принимает вид

$$u_n(x,t) = \exp\left(-\frac{\pi^2}{l^2}a^2n^2t\right)\left(a_n \cos\frac{\pi n x}{l} + b_n \sin\frac{\pi n x}{l}\right), \qquad (52)$$

где a_n и b_n – произвольные константы.

2. Разделение переменных при отсутствии граничных условий

Возвратимся к задаче построения решения одномерного уравнения теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad t > 0 \qquad (1)$$

на отрезке $0 < x < l$ при начальном условии

$$u(x,0) = f(x), \qquad (2)$$

где $f(x)$ – заданная функция.

В предыдущем разделе было показано, что решение уравнения (1) можно представить в виде

$$u(x,t) = X(x)T(t), \qquad (3)$$

где

$$T_\lambda = \mathrm{const} \cdot e^{\lambda t}, \qquad (4)$$

$$X_\lambda = \begin{cases} A_\lambda \cos\dfrac{\sqrt{-\lambda}}{a}x + B_\lambda \sin\dfrac{\sqrt{-\lambda}}{a}x, & \lambda \le 0, \\ C_\lambda \exp\left(\dfrac{\sqrt{\lambda}}{a}x\right) + D_\lambda \exp\left(-\dfrac{\sqrt{\lambda}}{a}x\right), & \lambda > 0, \end{cases} \qquad (5)$$

A_λ, B_λ, C_λ и D_λ – произвольные константы; индекс обозначает соответствие между частным решением и значением константы λ.

Таким образом,

$$u_\lambda(x,t) = e^{\lambda t}\begin{cases} A_\lambda \cos\dfrac{\sqrt{-\lambda}}{a}x + B_\lambda \sin\dfrac{\sqrt{-\lambda}}{a}x\,, & \lambda \le 0, \\ C_\lambda \exp\left(\dfrac{\sqrt{\lambda}}{a}x\right) + D_\lambda \exp\left(-\dfrac{\sqrt{\lambda}}{a}x\right), & \lambda > 0. \end{cases} \tag{6}$$

Сумма частных решений (6) однородного уравнения (1) также является решением этого уравнения:

$$\begin{gathered} u(x,t) = \sum_{\lambda\le 0} e^{\lambda t}\left(A_\lambda \cos\frac{\sqrt{-\lambda}}{a}x + B_\lambda \sin\frac{\sqrt{-\lambda}}{a}x\right) + \\ + \sum_{\lambda>0} e^{\lambda t}\left(C_\lambda \exp\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{a}x\right) + D_\lambda \exp\left(-\frac{\sqrt{\lambda}}{a}x\right)\right). \end{gathered} \tag{7}$$

Полагая в этой формуле $t = 0$ и учитывая начальное условие (2), получим

$$\begin{gathered} f(x) = \sum_{\lambda\le 0} \left(A_\lambda \cos\frac{\sqrt{-\lambda}}{a}x + B_\lambda \sin\frac{\sqrt{-\lambda}}{a}x\right) + \\ + \sum_{\lambda>0} \left(C_\lambda \exp\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{a}x\right) + D_\lambda \exp\left(-\frac{\sqrt{\lambda}}{a}x\right)\right). \end{gathered} \tag{8}$$

Доопределим функцию $f(x)$ произвольным образом на отрезке $-l < x < 0$ и представим ее в виде ряда Фурье:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{\pi n x}{l} + b_n \sin\frac{\pi n x}{l}\right), \tag{9}$$

где коэффициенты Фурье определяются формулами

$$\begin{gathered} a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}\,dx, \\ b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{2l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx. \end{gathered} \tag{10}$$

Сравнивая выражения (8) и (9), заключаем, что в формуле (8) следует положить

$$\lambda = -\frac{a^2\pi^2 n^2}{l^2} \qquad (n = 0, 1, 2, \dots),$$
$$A_\lambda = a_n\,, \;\; B_\lambda = b_n \quad (n \neq 0), \tag{11}$$
$$A_0 = \frac{a_0}{2}.$$

Таким образом, решение задачи (1)–(2) можно отыскивать в виде (7) или на основе формулы

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\pi^2}{l^2} a^2 n^2 t\right)\left(a_n \cos\frac{\pi n x}{l} + b_n \sin\frac{\pi n x}{l}\right). \tag{12}$$

2.1. Примеры.

1. Пусть $u(x,0) = 3\cos 2\pi x$, $l = 1$. В этом случае из формул (10) и (12) следует, что $b_2 = 2$, а все другие коэффициенты a_n и b_n равны нулю. Решение задачи (1)–(2) имеет вид
$$u(x,t) = 3\exp(-4\pi^2 a^2 t)\cos 2\pi x. \tag{13}$$
Такой же результат вытекает из формулы (7), в которой следует оставить только одно слагаемое, соответствующее значению $\lambda = -4\pi^2 a^2$. При этом нужно выбрать нулевые значения для всех коэффициентов разложения – за исключением коэффициента при $\cos 2\pi x$, который, очевидно, равен трем. Следовательно,
$$u(x,t) = 3\exp(-4\pi^2 a^2 t)\cos 2\pi x.$$

2. Если $u(x,0) = 5e^{-3x}$, то решение задачи (1)–(2) можно искать в виде выражения (7), оставляя в нем один член, для которого $\lambda = 9a^2$, $C_\lambda = 5$ и $D_\lambda = 0$. Решение задачи имеет вид
$$u(x,t) = 5e^{9a^2 t}e^{-3x}. \tag{14}$$
Функция $u(x,t)$ экспоненциально возрастает с ростом t. Поэтому полученное решение имеет формальный характер и не может быть интерпретировано как распределение температуры в стержне.

3. Если функция $u(x,0)$ представляет собой линейную комбинацию тригонометрических функций $\sin kx$, $\cos mx$ и экспоненциальных

функций вида e^{px}, то решение задачи представляет собой линейную комбинацию соответствующих частных решений уравнения (1).

4. Найти решение задачи для уравнения теплопроводности на отрезке $0 < x < \pi$:

$$u_t = u_{xx}, \quad t > 0, \tag{15}$$

$$u(x,0) = 3 - 4\sin 5x + 7\cos 8x. \tag{16}$$

Разложение функции (16) в ряд Фурье содержит лишь три члена. Поэтому решение задачи определяется формулой (12), в которой $a = 1$, $l = \pi$, $a_0 = 6$, $b_5 = -4$ и $a_8 = 7$; остальные коэффициенты равны нулю:

$$u(x,t) = 3 - 4e^{-25t}\sin 5x + 7e^{-64t}\cos 8x. \tag{17}$$

5. Решить задачу для уравнения теплопроводности на отрезке $0 < x < l$:

$$u_t = u_{xx}, \quad t > 0, \tag{18}$$

$$u(x,0) = 4e^{x} - 2e^{-3x}. \tag{19}$$

Решение задачи будем искать в виде суммы частных решений вида

$$u_\lambda(x,t) = X_\lambda T_\lambda = e^{\lambda t}\left(C_\lambda e^{\sqrt{\lambda}x} + D_\lambda e^{-\sqrt{\lambda}x}\right) \tag{20}$$

с учетом начального условия

$$u_\lambda(x,0) = C_\lambda e^{\sqrt{\lambda}x} + D_\lambda e^{-\sqrt{\lambda}x}. \tag{21}$$

Полагая в этом равенстве $\lambda = 1$, $C_1 = 1$ и $D_1 = 0$, получим частное решение

$$u_1(x,t) = e^{t}e^{x}. \tag{22}$$

Подстановка $\lambda = 9$, $C_9 = 0$ и $D_9 = -2$ дает

$$u_9(x,t) = -2e^{9t}e^{-3x}. \tag{23}$$

Суммируя решения (22) и (23), получим решение задачи (18)–(9):

$$u(x,t) = e^{t}e^{x} - 2e^{9t}e^{-3x}. \tag{24}$$

7. Решить задачу

$$u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < 2, \quad t > 0, \qquad (25)$$
$$u(x,0) = x + 1.$$

Доопределим функцию $u(x,0)$ на отрезке $-2 < x < 0$ четным образом. Тогда решение определяется формулой (12), в которой следует положить $a = 1$ и $l = 2$. Коэффициенты разложения четной функции $u(x,0)$ в ряд Фурье вычисляются по формулам

$$a_n = \int_0^2 (x+1)\cos\frac{\pi n x}{2}\,dx, \qquad b_n = 0. \qquad (26)$$

Легко показать, что $a_0 = 4$,

$$a_n = \begin{cases} -\dfrac{8}{\pi^2(2k-1)^2}, & n = 2k-1, \\ 0, & n = 2k. \end{cases} \qquad (27)$$

Тогда решение задачи (25) имеет вид

$$u(x,t) = 3 - \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2}{4}(2k-1)^2 t}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos\frac{\pi(2k-1)x}{2}. \qquad (28)$$

6. Метод разделения переменных. Параболические уравнения с начальным и граничным условиями.

Пусть требуется найти решение задачи для одномерного уравнения теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx}, \;\; 0 < x < l, \;\; t > 0 \qquad (1)$$

при начальном условии

$$u(x,0) = f(x) \qquad (2)$$

и граничном условии

$$u(0,t) = u(l,t). \qquad (3)$$

Здесь $f(x)$ – заданная функция.

Согласно формуле (5.28) частное решение уравнения (1) имеет вид

$$u_\lambda(x,t) = e^{\lambda t}\begin{cases} A_\lambda \cos\left(\dfrac{\sqrt{-\lambda}}{a}x\right) + B_\lambda \sin\left(\dfrac{\sqrt{-\lambda}}{a}x\right), & \lambda \le 0, \\ C_\lambda \exp\left(\dfrac{\sqrt{\lambda}}{a}x\right) + D_\lambda \exp\left(-\dfrac{\sqrt{\lambda}}{a}x\right), & \lambda > 0. \end{cases} \qquad (4)$$

Чтобы удовлетворить граничному условию (3), следует выбрать $\lambda \le 0$:

$$\frac{\sqrt{-\lambda}}{a} = \frac{2\pi}{l}n, \quad \lambda = -\frac{4\pi^2}{l^2}a^2n^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

В этом случае

$$u_\lambda(l,t) = \exp\left(-\frac{4\pi^2}{l^2}a^2n^2t\right)\left(A_\lambda \cos\frac{2\pi}{l}nl + B_\lambda \sin\frac{2\pi}{l}nl\right) = u_\lambda(0,t).$$

Тогда решение (4) принимает вид

$$u_n(x,t) = \exp\left(-\frac{4\pi^2}{l^2}a^2n^2t\right)\left(a_n \cos\frac{2\pi nx}{l} + b_n \sin\frac{2\pi nx}{l}\right), \qquad (5)$$

где a_n и b_n – произвольные константы.

Сумма частных решений (5) однородного уравнения (1) также является решением этого уравнения:

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{4\pi^2}{l^2}a^2n^2t\right)\left(a_n \cos\frac{2\pi nx}{l} + b_n \sin\frac{2\pi nx}{l}\right). \qquad (6)$$

(Для удобства последующего изложения решение u_0 записано в виде $a_0/2$.)

Полагая в этой формуле $t = 0$ и учитывая начальное условие (49), получим

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{\pi nx}{l} + b_n \sin\frac{\pi nx}{l}\right). \qquad (54)$$

Это равенство представляет собой разложении функции $f(x)$ в ряд Фурье, если коэффициенты a_n и b_n положить равными коэффициентам Фурье функции $f(x)$:

$$a_n = \frac{1}{l}\int_0^{2l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}\,dx, \tag{55}$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_0^{2l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx. \tag{56}$$

Таким образом, решение задачи (58)–(60) отыскивается в виде

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\pi^2}{l^2}a^2n^2t\right)\left(a_n\cos\frac{\pi n x}{l} + b_n\sin\frac{\pi n x}{l}\right), \tag{57}$$

где a_n и b_n – коэффициенты Фурье функции $f(x)$.

Пример.

1. Найти решение задачи для уравнения теплопроводности на отрезке $0 < x < 2l$:

$$u_t = u_{xx}, \quad t > 0,$$
$$u(x,0) = 3\sin x + 4\cos 5x\,, \quad 0 < x < 2\pi,$$
$$u(0,t) = u(2\pi, t).$$

Решение этой задачи имеет вид

$$u(x,t) = 3e^{-t}\sin x + 4e^{-25t}\cos 5x.$$

2. Найти решение задачи для уравнения теплопроводности на отрезке $0 < x < 2l$:

$$u_t = u_{xx}, \quad t > 0,$$
$$u(x,0) = e^{-x}, \quad 0 < x < 2, \tag{58}$$
$$u(0,t) = u(2,t).$$

Решение задачи определяется формулой (57), в которой следует положить $a = 1$ и $l = 1$. Коэффициенты Фурье разложения функции $f(x) = e^x$ в ряд Фурье вычисляются по формулам (55)–(56):

$$a_0 = e^2 - 1,$$
$$a_n = \frac{e^2 - 1}{1 + \pi^2 n^2}, \tag{59}$$

$$b_n = -\frac{\pi n(e^2-1)}{1+\pi^2 n^2}.$$

Решение задачи (58) имеет вид

$$u(x,t) = (e^2-1)\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi^2 n^2 t}\frac{\cos\pi nx - \pi n\sin\pi nx}{1+\pi^2 n^2}\right). \qquad (60)$$

7. Применение методов операционного исчисления. Нестационарные уравнения параболического типа.

Постановка задачи: найти решение уравнения

$$a_{11}u_{xx} + au_x + bu_t = 0 \qquad (90)$$

на отрезке $0 < x < 2l$ для $t > 0$, удовлетворяющее начальному условию

$$u(x,0) = \varphi(x) \qquad (91)$$

и краевым условиям

$$u(0,t) = f(t), \quad \alpha u_x(2l,t) + \beta u_t(2l,t) = \gamma u(2l,t). \qquad (92)$$

Решение. Рассматривая левую часть уравнения (90) в качестве оригинала, выполним преобразование Лапласа по переменной t:

$$u(x,t) \risingdotseq U(x,p) = \int_0^{+\infty} u(x,t)e^{-pt}dt,$$

$$\begin{gathered} u_x(x,t) \risingdotseq \int_0^{+\infty} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}e^{-pt}dt = \frac{dU(x,p)}{dx}, \\ u_{xx}(x,t) \risingdotseq \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}e^{-pt}dt = \frac{d^2U(x,p)}{dx^2}, \\ u_t(x,t) \risingdotseq pU(x,p) - u(x,0) = \\ = pU(x,p) - \varphi(x). \end{gathered} \qquad (93)$$

Представим краевые условия в терминах изображений соответствующих функций:

$$u(0,t) = f(t) \qquad \Longrightarrow \qquad f(t) \risingdotseq F(p) = pU(0,p), \tag{94}$$

$$\alpha u_x(2l,t) + \beta u_t(2l,t) = \gamma u(2l,t) \qquad \Longrightarrow$$

$$\left.\left(\alpha \frac{dU(x,p)}{dx} + \beta\big(pU(x,p) - \varphi(x)\big)\right)\right|_{\mathrm{x}=2l} = \gamma U(2l,p). \tag{95}$$

В результате решение задачи (90)–(92) сводится к интегрированию обыкновенного дифференциального уравнения вида

$$a_{11}U''(x,p) + \ aU'(x,p) + bpU(x,p) = b\varphi(x), \tag{96}$$

в котором p рассматривается как параметр. Граничные условия определяются формулами (94)–(95).

Восстановление оригинала по изображению дает решение задачи (90)–(92).