

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ**  
**Государственное образовательное учреждение высшего профес-**  
**сионального образования**  
**НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ**  
**ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ**

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В СИСТЕМАХ**  
**ЭЛЕКТРОСНАБЖЕНИЯ**

Методические указания к выполнению лабораторных работ по курсу «Математическое моделирование в системах электроснабжения»  
для студентов 1 курса магистратуры

# Лабораторная работа №1

## РАСЧЕТ УСТАНОВИВШЕГОСЯ РЕЖИМА В ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СЕТИ ЭЭС НА ОСНОВЕ УРАВНЕНИЙ В ФОРМЕ БАЛАНСОВ ТОКОВ

**Цель работы.** Моделирование установившихся режимов ЭЭС на основе линейных уравнений узловых напряжений в среде *Mathcad*.

### 1.1. Теоретические сведения

Задача расчета и анализа установившихся режимов является базовой как при проектировании, так и при управлении электроэнергетическими системами (ЭЭС). При проектировании ЭЭС расчет установившихся режимов производится с целью выбора и уточнения параметров проектируемой системы. В процессе эксплуатации подобные расчеты позволяют оперативно управлять и прогнозировать работу ЭЭС. При этом осуществляется оценка допустимости режима по техническим условиям оборудования.

Установившийся режим энергосистемы – состояние энергетической системы, характеризующееся совокупностью постоянных условий и параметров на некотором интервале времени.

Расчет установившихся режимов в ЭЭС – трудоемкая задача, так как ЭЭС включает в себя большое количество элементов, вырабатывающих, преобразующих, передающих, распределяющих, потребляющих электроэнергию и образующих сложно-замкнутую разветвленную систему. Задача расчета установившихся режимов ЭЭС заключается в определении совокупности параметров, характеризующих работу системы:

- напряжений в узлах системы,
- токов в элементах,
- потоков и потерь мощности.

Установившийся режим электрических систем можно рассчитывать при различных способах задания исходных данных в зависимости от физической сути и цели расчета. В данной работе рассмотрим наиболее простой случай, когда известны параметры всех пассивных элементов электрической цепи, то есть все сопротивления, проводимости и задающие токи  $\underline{I}_1, \underline{I}_2, \underline{I}_3 \dots$  (линейные источники тока). В этом случае в основе решения задачи лежит использование математической модели, представляющей собой линейные уравнения состояния, например, уравнения узловых напряжений в форме баланса токов.

Как правило, ЭЭС имеет сложную разветвленную структуру с большим количеством ветвей и узлов в схеме замещения. В этом случае в целях упрощения расчетов применяют матрично-топологические методы, позволяющие понизить порядок системы линейных алгебраических уравнений.

В матричной форме система уравнений, составленная по методу узловых напряжений, имеет вид

$$\underline{Y} \cdot \underline{U} = \underline{J}, \quad (1.1)$$

где  $\underline{J}$  – вектор задающих токов,

$\underline{Y} = A \underline{Y}_d A^T$  – матрица узловых проводимостей,

$\underline{U}$  – матрица узловых напряжений,

$A$  – узловая матрица,

$A^T$  – транспонированная матрица  $A$ ,

$\underline{Y}_d$  – матрица проводимостей ветвей.

На основании (1.1) матрица узловых напряжений определяется следующим образом

$$\underline{U} = \underline{Y}^{-1} \cdot \underline{J}. \quad (1.2)$$

## 1.2. Задание

Выбрать схему согласно варианту (таблицы 1.1, 1.2, 1.3, рис. 1.1).

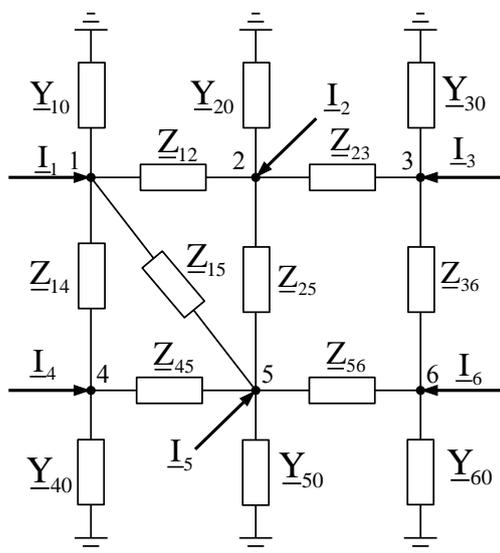


Рис. 1.1

1. Рассчитать напряжения в узлах схемы сети переменного тока, используя уравнения узловых напряжений (рис. 1.1).

2. Рассчитать токи в ветвях схемы.

3. Сделать проверку результатов по балансу токов.

Таблица 1.1

№	Сопровитления ветвей, Ом							
	$\underline{Z}_{12}$	$\underline{Z}_{23}$	$\underline{Z}_{14}$	$\underline{Z}_{15}$	$\underline{Z}_{25}$	$\underline{Z}_{36}$	$\underline{Z}_{45}$	$\underline{Z}_{56}$
1	10+j200	2+j5	0.1+j0.02	20+j120	4+j12	$\infty$	10+j10	$\infty$
2	0.1+j0.3	30+j120	$\infty$	5+j4	1+j6	9+j25	$\infty$	9+j25
3	4+j12	0.1+j0.02	10+j130	9+j25	5+j4	4+j8	10+j20	10+j20
4	12+j20	$\infty$	0.3+j0.1	2+j15	2+j5	$\infty$	6+j30	4+j8
5	5+j4	1+j6	10+j5	$\infty$	$\infty$	5+j4	1+j6	5+j4
6	$\infty$	9+j25	4+j12	1+j6	0.1+j0.1	2+j12	12+j20	10+j5
7	4+j8	2+j5	10+j5	$\infty$	4+j8	1+j2	10+j100	10+j5
8	100+j100	2+j9	5+j4	0.2+j0.1	10+j5	05+j4	$\infty$	$\infty$
9	20+j120	10+j20	$\infty$	$\infty$	4+j12	4+j8	1+j0.6	1+j2
10	0.1+j0.02	50+j120	2+j9	$\infty$	11+j12	2+j7	1+j0.5	2+j50
11	4+j8	$\infty$	40+j100	2+j9	9+j25	$\infty$	11+j12	0.1+j1
12	0.1+j0.5	2+j9	$\infty$	20+j120	10+j20	4+j12	$\infty$	12+j20

Таблица 1.2

№	Проводимости ветвей, См					
	$\underline{Y}_{10}$	$\underline{Y}_{20}$	$\underline{Y}_{30}$	$\underline{Y}_{40}$	$\underline{Y}_{50}$	$\underline{Y}_{60}$
1	0	0.02+j0.08	0.06+j0.1	0.2+j1.5	0.04+j0.1	0
2	0.07+j0.5	0	1+j10	0	0.03+j0.09	0.04+j0.1
3	0	0.03+j0.09	0	0	0	0.08+j0.8
4	0.02+j0.05	0.04+j0.1	0	0	0.01+j0.09	0.02+j0.05
5	2+j15	0.08+j0.08	0	0.01+j0.09	0	0
6	0	0	0.04+j0.1	0.02+j0.05	0.04+j0.1	0
7	0	0.08+j0.8	0.3+j1.7	0	0	0
8	0.03+j0.09	0	0	0.03+j0.09	0.01+j0.09	0.06+j0.1
9	0.01+j0.09	3+j17	0	0	0.06+j0.1	0.02+j0.05
10	0.06+j0.1	0	0	0	0.08+j0.8	0.07+j0.01
11	0.07+j0.01	0.06+j0.1	0	3+j20	0	0.03+j0.09
12	0.01+j0.09	0.07+j0.01	0.04+j0.1	0	0.01+j0.09	0

Таблица 1.3

Напряжение базисного узла $U_B = 110$ кВ							
№	Ба- зис- ный узел	Задающие токи, А					
		$\underline{I}_1$	$\underline{I}_2$	$\underline{I}_3$	$\underline{I}_4$	$\underline{I}_5$	$\underline{I}_6$
1	1	–	0.2 +j0.4	-0.1-j0.4	0.3+j0.34	0.3+j0.34	0
2	2	0.9+j0.1	–	0.6-j0.7	0	0.3-j0.5	0.62+j0.2
3	3	0.3-j0.5	0.5+j0.5	–	0.5-j0.5	0.2+j1	0.1+j0.65
4	4	0.9+j0.9	-0.8-j0.2	0	–	0.5-j0.5	0.3-j0.95
5	5	0.3+j0.55	0.45+j0.1	0.62+j0.2	0.5-j0.5	–	0.4-j0.3
6	6	0	0.2+j1	0.1+j0.65	0.3-j0.5	0.62+j0.2	–
7	1	–	0.4-j0.3	0.3-j0.95	0.9+j0.9	0.1+j0.65	0.1+j1
8	2	0.62+j0.2	–	0.5-j0.5	0	0.3-j0.95	0
9	3	0.1+j0.65	-0.35-j0.1	–	0	0.2+j1	0.4-j0.3
10	4	0.3-j0.95	0.3-j0.5	-0.35-j0.1	–	-0.35-j0.1	0.1+j1
11	5	0.4-j0.3	0.9+j0.9	0	0.62+j0.2	–	0.2+j1
12	6	0.35-j0.1	-0.3+j0.55	0.1+j1	0	0.3-j0.5	–

### 1.3. Методические указания

1. Изобразим схему цепи рис. 1.1 исключив ветви с бесконечными сопротивлениями и нулевыми проводимостями согласно варианту (рис. 1.2).

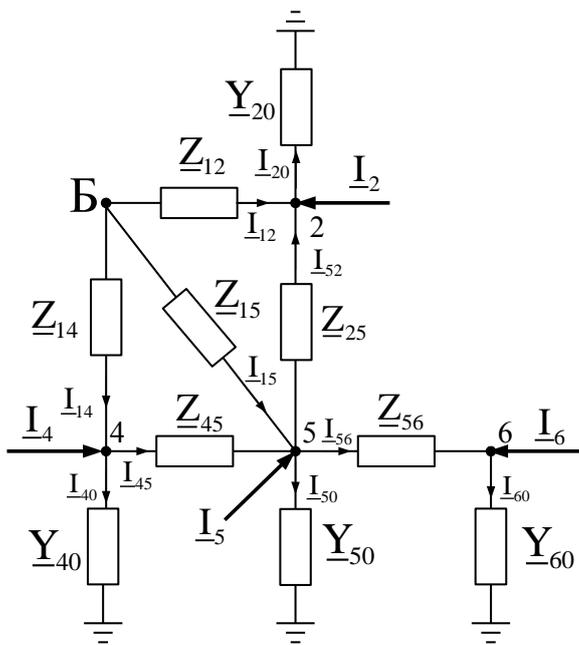


Рис. 1.2

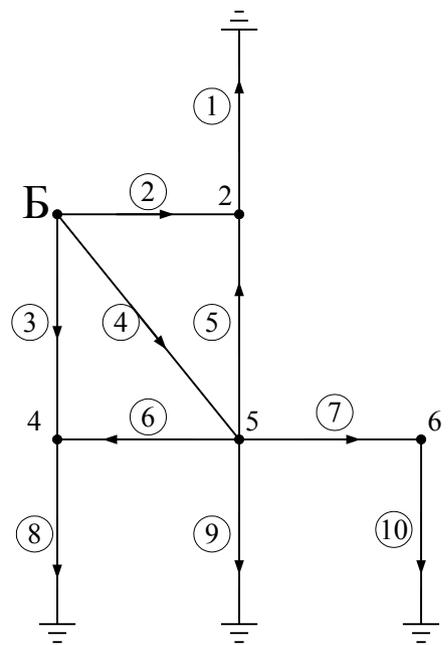


Рис. 1.3

Далее изобразим направленный граф цепи (рис. 1.3), приняв балансирующий узел также согласно варианту. Для рассматриваемого примера балансирующим является узел 1. На графе показываются:

- ветви ① ② ③ .... ⑩ ,
- узлы (Б, 2, 4, 5, 6),
- направления токов в ветвях.

Порядок нумерации ветвей и направления токов в ветвях выбираются произвольно.

Для всех вариантов напряжение базисного узла  $U_B = 110$  кВ. Для рассматриваемого примера  $U_B = U_1 = 110$  кВ.

В среде *Mathcad* желательно установить индексацию массивов с единицы командой **ORIGIN:=1** (по умолчанию индексы элементов массивов начинаются с нуля).

Сформируем матрицу узловых проводимостей  $\underline{Y}$

$$\underline{Y} = A \cdot \underline{Y}_d \cdot A^T .$$

Узловая матрица  $A$  описывает связь ветвей и узлов схемы и имеет размерность  $n \times m$ , где  $n = y - 1$  ( $y$  – число узлов),  $m$  – число ветвей. Базисный узел в матрице  $A$  не учитывается. В рассматриваемом примере  $A$  имеет размерность  $4 \times 10$  и равна

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

К узлу 2 присоединены ветви 1, 2, 5. Причем ток в 1-й ветви направлен от узла, а во 2-й и 3-ей ветвях – к узлу. Поэтому в первой строке матрицы  $A$  в первом столбце поставлена 1, а во втором и пятом столбцах ( $-1$ ). Для 4-го, 5-го и 6-го узлов (2-я, 3-я и 4-я строки матрицы  $A$ ) правила заполнения строк аналогичны.

Транспонированная матрица  $A^T$  определяется в среде *Mathcad*

$$A^T = \mathbf{1}$$

Матрица проводимостей ветвей  $\underline{Y}_d$  квадратная и имеет размерность  $m \times m$ . Для данного примера  $\underline{Y}_d$  имеет размерность  $10 \times 10$ . В главной диагонали матрицы записываются проводимости ветвей в порядке, соответствующем принятой нумерации ветвей на графе цепи. Например, проводимость 1-й ветви (рис. 1.2) равна  $Y_{20}$ , проводимость 2-й ветви  $1/Z_{12}$  и т.д.

$$Y_d := \begin{pmatrix} Y_{20} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{Z_{12}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{Z_{14}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{Z_{15}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{Z_{25}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{Z_{45}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{Z_{56}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Y_{40} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Y_{50} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Y_{60} \end{pmatrix}.$$

Далее в среде *Mathcad* осуществляем операцию умножения полученных матриц

$$\underline{Y} = A \cdot \underline{Y}_d \cdot A^T.$$

Определим вектор задающих токов  $J$ , число строк которого равно  $n$ . Для данного примера  $n = 5 - 1 = 4$ . Порядок строк должен быть таким же, как в матрице  $A$ . Первая строка соответствует узлу 2, вторая строка – узлу 4 и т.д.

Вектор  $J$  – это правые части уравнений, составленных по методу узловых напряжений, в которые входят только известные величины.

$$J := \begin{pmatrix} I_2 + \frac{U_1}{Z_{12}} \\ I_4 + \frac{U_1}{Z_{14}} \\ I_5 + \frac{U_1}{Z_{15}} \\ I_6 \end{pmatrix}.$$

Токи  $I_2, I_4, I_5, I_6$  – задающие токи, согласно исходным данным, входящие соответственно в узлы 2, 4, 5, 6. Во всех вариантах учитываются со знаком «+». Узлы 2, 4, 5 связаны с балансирующим узлом через ветви 1-2, 1-4, 1-5. Проводимости этих ветвей равны  $\underline{Y}_{12} = \frac{1}{Z_{12}}, \underline{Y}_{14} = \frac{1}{Z_{14}}, \underline{Y}_{15} = \frac{1}{Z_{15}}$ . Токи в смежных ветвях 1-2, 1-4, 1-5 учитываются в правых частях уравнений составляющими  $\frac{U_1}{Z_{12}}, \frac{U_1}{Z_{14}}, \frac{U_1}{Z_{15}}$  также всегда со знаком «+». Узел 6 с балансирующим узлом не связан.

Следующим шагом решения будет определение матрицы напряжений в узлах схемы

$$U := Y^{-1} \cdot J.$$

2. Определим токи в ветвях через известные потенциалы (рис. 1.2)

$$\underline{I}_{20} = \underline{U}_2 \underline{Y}_{20}, \quad \underline{I}_{12} = \frac{\underline{U}_1 - \underline{U}_2}{\underline{Z}_{12}}, \quad \underline{I}_{14} = \frac{\underline{U}_1 - \underline{U}_4}{\underline{Z}_{14}}.$$

Остальные токи в ветвях схемы определяются аналогично.

3. Сделаем проверку расчета по балансу токов. Согласно первому закону Кирхгофа, например, для узлов 2 и 4 (рис. 1.2) имеем

$$\begin{aligned} \underline{I}_{20} - \underline{I}_{12} - \underline{I}_{52} &= \underline{I}_2, \\ \underline{I}_{45} + \underline{I}_{40} - \underline{I}_{14} &= \underline{I}_4. \end{aligned}$$

Если эти равенства выполняются – расчет сделан верно. Расчет баланса токов можно произвести только для двух узлов.

## Лабораторная работа №2

### РАСЧЕТ УСТАНОВИВШЕГОСЯ РЕЖИМА ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СЕТИ ЭЭС НА ОСНОВЕ УРАВНЕНИЙ В ФОРМЕ БАЛАНСА МОЩНОСТЕЙ

**Цель работы.** Моделирование установившихся режимов ЭЭС на основе нелинейных уравнений узловых напряжений в среде *Mathcad*.

#### 2.1. Теоретические сведения

Если считать, что в сети известны задающие токи  $I_1, I_2$  (рис. 2.1) и параметры схемы, то задача расчета узловых напряжений и токов сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений, которая в принципе имеет точное аналитическое решение (лабораторная работа №1).

Однако при практических расчетах электрических режимов энергосистем в активных узлах обычно задаются не токи, а соответствующие мощности  $S_1, S_2, \dots$  генераторов и нагрузок.

Рассмотрим принципы составления и решения системы уравнений, составленных по методу узловых напряжений и преобразованных к общепринятой в инженерной практике форме задания исходных данных в виде мощностей, на простой трехузловой схеме (рис. 2.1).

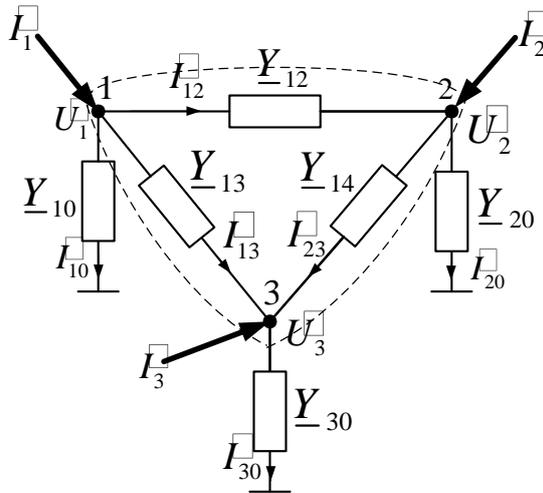


Рис. 2.1. Схема замещения сети с тремя узлами

Ток, направленный от узла будем учитывать со знаком «+», к узлу – со знаком «-». Тогда уравнения по первому закону Кирхгофа для узлов схемы

$$I_{12} + I_{13} + I_{10} = I_1, \quad (2.1)$$

$$-I_{12} + I_{23} + I_{20} = I_2, \quad (2.2)$$

$$-I_{13}-I_{23}+I_{30}=I_3, \quad (2.3)$$

Где  $I_1, I_2, I_3$  – задающие токи.

Покажем, что одно из узловых уравнений не является независимым, а вытекает из двух других. Пусть этим уравнением является (2.3).

Уравнение по первому закону Кирхгофа для фрагмента схемы, выделенного сечением (на рис. 2.1 показано пунктиром),

$$I_{10}+I_{20}+I_{30}=I_1+I_2+I_3. \quad (2.4)$$

Просуммируем уравнения (2.1) и (2.2)

$$I_{12}+I_{13}+I_{10}-I_{12}+I_{23}+I_{20}=I_1+I_2. \quad (2.5)$$

Выразим из (2.4) сумму  $I_1+I_2$  и подставим в уравнение (2.5), что после сокращений дает уравнение (2.3). Именно поэтому при использовании МУН в одном из узлов напряжение должно быть задано.

В расчетах установившихся режимов в электрических сетях этот узел приобретает также определенный физический смысл и называется балансирующим узлом.

Итак, далее рассмотрим систему из двух уравнений (2.1) и (2.2), в которой токи в ветвях выразим через узловые напряжения и проводимости

$$(U_1-U_2)\underline{Y}_{12}+(U_1-U_3)\underline{Y}_{13}+U_1\underline{Y}_{10}=I_1, \quad (2.6)$$

$$-(U_1-U_2)\underline{Y}_{12}+(U_2-U_3)\underline{Y}_{23}+U_2\underline{Y}_{20}=I_2. \quad (2.7)$$

После раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых в (2.6), (2.7) получим

$$U_1(\underline{Y}_{12}+\underline{Y}_{13}+\underline{Y}_{10})-U_2\underline{Y}_{12}-U_3\underline{Y}_{13}=I_1, \quad (2.8)$$

$$-U_1\underline{Y}_{12}+U_2(\underline{Y}_{12}+\underline{Y}_{23}+\underline{Y}_{20})-U_3\underline{Y}_{23}=I_2. \quad (2.9)$$

Необходимо определить напряжения  $U_1, U_2$ , а напряжение  $U_3$  – задается. Направление вектора  $U_3$  принимается также за ось отсчета углов всех электрических величин в схеме.

Если считать, что известны задающие токи  $I_1, I_2$  и известны параметры схемы, то задача сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений, которая в принципе имеет точное аналитическое решение.

Выразим токи  $I_1, I_2$  в (2.6), (2.7) через мощности

$$S_1=P_1+jQ_1, S_2=P_2+jQ_2.$$

Имея в виду, что  $S=UI$ , получим

$$I_1=\underline{S}_1/U_1, \quad I_2=\underline{S}_2/U_2. \quad (2.10)$$

Подставим значения (2.10) в (2.8), (2.9), тогда

$$U_1(\underline{Y}_{12}+\underline{Y}_{13}+\underline{Y}_{10})-U_2\underline{Y}_{12}-U_3\underline{Y}_{13}=\underline{S}_1/U_1, \quad (2.11)$$

$$-U_1\underline{Y}_{12}+U_2(\underline{Y}_{12}+\underline{Y}_{23}+\underline{Y}_{20})-U_3\underline{Y}_{23}=\underline{S}_2/U_2. \quad (2.12)$$

Наиболее существенное обстоятельство, которое на данном этапе следует отметить, заключается в том, что теперь уравнения стали нелинейными. Проведем дальнейшие преобразования, умножим левую и правую части уравнений (2.11) и (2.12) соответственно на  $U_1$  и  $U_2$ . Учтем также, что  $S_1=P_1+jQ_1$ ,  $S_2=P_2+jQ_2$ . Тогда

$$U_1^2(\underline{Y}_{12}+\underline{Y}_{13}+\underline{Y}_{10})-U_2U_1\underline{Y}_{12}-U_3U_1\underline{Y}_{13}=S_1, \quad (2.13)$$

$$U_2^2(\underline{Y}_{12}+\underline{Y}_{23}+\underline{Y}_{20})-U_1U_2\underline{Y}_{12}-U_3U_2\underline{Y}_{13}=S_2. \quad (2.14)$$

Первые составляющие в левой части (1.2.13) и (1.2.14) являются собственными мощностями узла, а две другие составляющие – взаимными мощностями. Уравнения (1.2.13) и (1.2.14) принято называть уравнениями в форме баланса мощностей.

Каждое из этих уравнений может быть разделено на два уравнения в вещественной форме относительно активной и реактивной мощностей, которые принято называть уравнениями в форме баланса мощностей

$$\begin{aligned} (P_{11} + P_{12} + P_{13}) - P_1 &= 0, \\ (Q_{11} + Q_{12} + Q_{13}) - Q_1 &= 0, \\ (P_{22} + P_{21} + P_{23}) - P_2 &= 0, \\ (Q_{22} + Q_{21} + Q_{23}) - Q_2 &= 0. \end{aligned} \quad (1.2.15)$$

В уравнениях (2.15) мощности являются функциями напряжений и параметров схемы. Задача расчета установившегося режима заключается в определении напряжений в узлах, при которых ни в одном из узлов небаланс мощности не превышает предварительно заданное достаточно малое значение.

Далее целесообразно рассмотреть вопрос о необходимом количестве задаваемых режимных параметров для получения решения. На данном этапе считаем, что проводимости в узлах  $\underline{Y}_{10}$  и  $\underline{Y}_{20}$  известны, хотя в общем случае они могут определяться через задаваемые в узлах мощности нагрузок, которые также могут быть функциями напряжений.

Если рассчитываемая схема имеет  $n$  узлов, то она описывается  $(n - 1)$  уравнением в комплексной форме и  $2(n - 1)$  уравнениями в действительной форме. Режим электрической сети будет полностью определен, если в каждом узле известны вещественная и мнимая составляющие напряжения (или модуль и фаза напряжения) и активная и реактивная мощности. По известным напряжениям в узлах могут быть рассчитаны перетоки мощности в ветвях. Таким образом, электрический режим схемы характеризуется  $2(n - 1)$  параметром в комплексной форме и  $4(n - 1)$  параметром в действительной форме. Следовательно, в каждом узле два режимных параметра должно быть задано, а два оставлено свободными для расчета.

В лабораторной работе считаем заданными для балансирующего узла напряжение  $\underline{U}_B$  и угол  $\delta_B = 0$ . Для остальных узлов считаем заданными активную и реактивную мощности.

## 2.2. Задание на лабораторную работу

Исходные данные по вариантам приведены в таблицах 2.1, 2.2, 2.3, рис. 2.2.

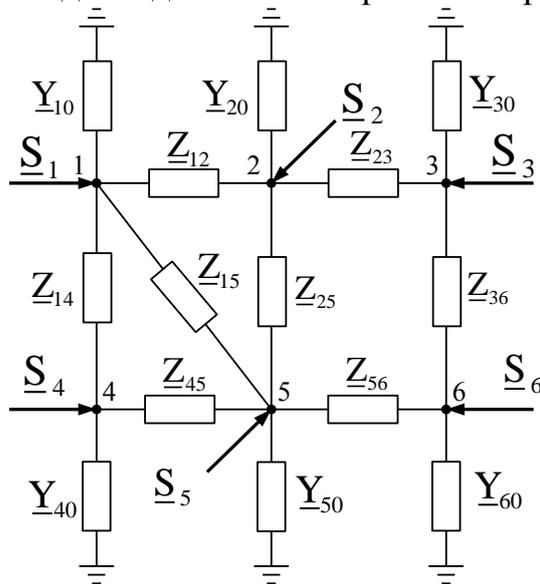


Рис. 2.2

1. Рассчитать напряжения в узлах (рис. 2.2) сети переменного тока используя решающий блок **Given Minerr**,
2. Рассчитать токи в ветвях.
3. Рассчитать потоки мощности в начале и в конце каждой ветви.
4. Рассчитать потери мощности в ветвях схемы.
5. Сделать проверку результатов по балансу мощностей.

Таблица 2.1

№	Сопротивления ветвей, Ом							
	$\underline{Z}_{12}$	$\underline{Z}_{23}$	$\underline{Z}_{14}$	$\underline{Z}_{15}$	$\underline{Z}_{25}$	$\underline{Z}_{36}$	$\underline{Z}_{45}$	$\underline{Z}_{56}$
1	$10+j200$	$\infty$	$0.1+j0.02$	$20+j120$	$4+j12$	$\infty$	$10+j10$	$\infty$
2	$0.2+j0.03$	$30+j12$	$4+j8$	$\infty$	$1+j6$	$9+j25$	$4+j8$	$9+j25$
3	$4+j12$	$0.1+j0.02$	$\infty$	$9+j25$	$5+j4$	$4+j8$	$\infty$	$10+j20$
4	$12+j20$	$9+j25$	$0.3+j0.01$	$20+j150$	$2+j5$	$1+j12$	$6+j30$	$4+j8$
5	$5+j4$	$1+j6$	$\infty$	$1+j5$	$4+j8$	$2+j20$	$\infty$	$5+j4$
6	$2+j12$	$\infty$	$3+j8$	$\infty$	$0.1+j0.1$	$\infty$	$12+j20$	$10+j5$
7	$4+j8$	$2+j5$	$10+j5$	$30+j10$	$4+j8$	$\infty$	$10+j100$	$\infty$
8	$10+j10$	$2+j9$	$\infty$	$2+j9$	$10+j5$	$3+j30$	$\infty$	$5+j20$
9	$20+j120$	$\infty$	$4+j20$	$1+j6$	$4+j12$	$\infty$	$1+j10$	$0.3+j0.02$
10	$0.1+j0.02$	$\infty$	$2+j9$	$10+j25$	$11+j12$	$\infty$	$10+j5$	$\infty$
11	$1+j8$	$9+j25$	$5+j5$	$\infty$	$9+j25$	$2+j9$	$11+j12$	$5+j4$
12	$4+j12$	$2+j9$	$12+j20$	$20+j12$	$\infty$	$3+j9$	$1+j8$	$7+j8$

Таблица 2.2

№	Проводимости ветвей, См					
	$\underline{Y}_{10}$	$\underline{Y}_{20}$	$\underline{Y}_{30}$	$\underline{Y}_{40}$	$\underline{Y}_{50}$	$\underline{Y}_{60}$
1	0.06+j0.1	0	0	0.2+j1.5	0.04+j0.1	0
2	0.07+j0.5	0	0	1+j4	0.03+j0.09	0
3	0.05+0.3	0.03+j0.09	0	0	0.06+j0.1	0
4	0.02+j0.05	0	0	0.03+j0.09	0.01+j0.09	0
5	0	0.08+j0.08	0.06+j0.1	0	0.07+j0.03	0
6	0.02+j2	0	0	0.02+j0.05	0	0.03+j0.09
7	0.03+j0.09	0.08+j0.8	0.3+j1.7	0	0.06+j0.1	0
8	0	0.06+j0.1	0.07+j0.5	0	0.01+j0.09	0
9	0.01+j0.09	0	0	0.05+j0.7	0.06+j0.1	0.02+j0.05
10	0.06+j0.1	0.07+j0.5	0	0	0.08+j0.8	0
11	0	0.06+j0.1	0.03+j0.9	0	0	0
12	0.01+j0.09	0	0	0.04+j0.1	0.01+j0.09	0

Таблица 2.3

Задающие мощности, МВА							
№	Базовый узел	$\underline{S}_1$	$\underline{S}_2$	$\underline{S}_3$	$\underline{S}_4$	$\underline{S}_5$	$\underline{S}_6$
1	4	12-j13	0	0	20+j45	10-j40	0
2	5	12-j20	0	0	20+j90	2+j30	0
3	1	10+j65	20+j100	0	0	20-j30	0
4	5	90+j90	0	0	15+j50	20+j10	0
5	2	0	30+j55	10-j60	0	0	45+j10
6	4	2+j25	0	0	2+j60	20-j70	0
7	2	30-j9	12+j80	0	0	40-j30	0
8	3	0	50-j50	10+j20	0	62+j20	0
9	4	35-j100	0	0	20+j100	35+j50	0
10	1	35-j100	30-j50	0	0	4+j20	0
11	3	0	20+j75	40-j30	0	10+j20	0
12	4	30+j55	0	0	2+j3	30-j50	0

### 2.3. Методические указания

1. Для схемы, составленной согласно варианту, сделать эквивалентные преобразования и получить схему, число узлов в которой равно 3. Пример возможных преобразований представлен на рис. 2.3. В полученной схеме за базисный принят узел 1.

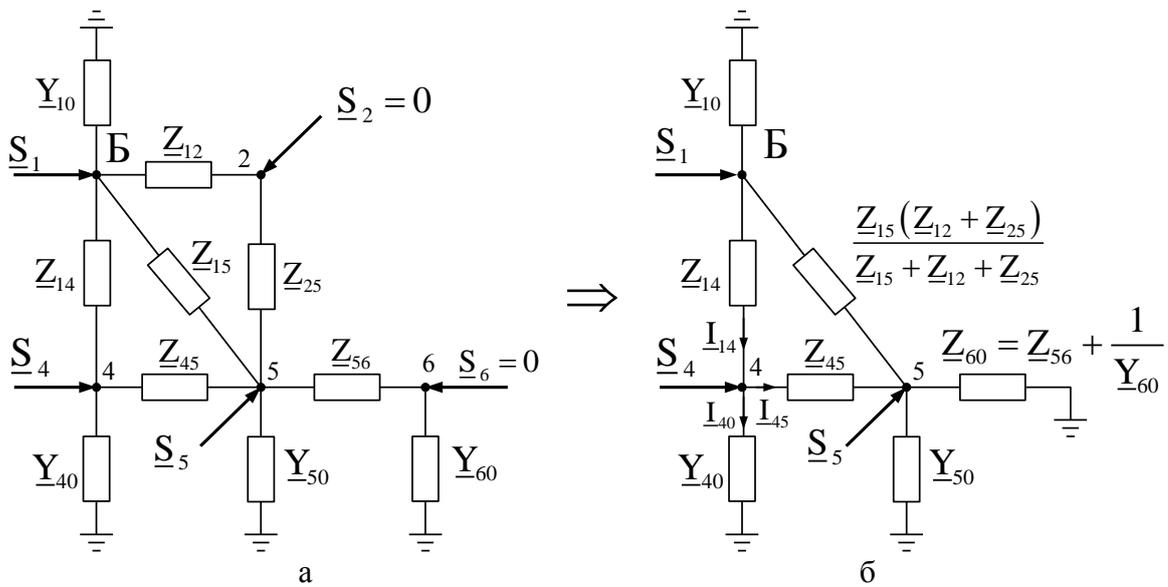


Рис. 2.3

Для полученной схемы (рис. 2.3, б) по методу узловых напряжений запишем систему уравнений в форме баланса мощностей аналогичную системе (2.4), (2.5). Решим полученную систему уравнений и определим напряжения в узлах 4 и 5 в среде *Mathcad* двумя способами:

- с помощью функции **MinErr**.

В среде *Mathcad* желательно установить индексацию массивов с единицы командой **ORIGIN:=1** (по умолчанию индексы элементов массивов начинаются с нуля).

В файле *Mathcad* задают:

◆ исходные сопротивления и проводимости цепи (рис. 2.3, а)

$$Y_{10} := 0.02 + 0.04i \quad Y_{40} := 0.01 + 0.06i \quad \dots$$

и так далее.

◆ рассчитанные проводимости цепи

$$Y_{60} := \frac{1}{Z_{60}} \quad Y_{14} := \frac{1}{Z_{14}} \quad Y_{45} := \frac{1}{Z_{45}} \quad Y_{15} := \frac{Z_{15} + Z_{12} + Z_{25}}{Z_{15} \cdot (Z_{12} + Z_{25})}$$

◆ мощности узлов, для которых рассчитываются напряжения

$$S_4 := 20 + 30i \quad S_5 := 13 - 46i$$

◆ напряжение базисного узла

$$U_1 := 110$$

Функция **MinErr(X1, X2, X3,...)** определяет значения  $X_1, X_2, X_3, \dots$ , дающие приближенные решения системы нелинейных уравнений, приводящие к минимальной ошибке (используется в вычислительном блоке **Given**).

В файле *Mathcad*:

♦ задают начальные приближения для неизвестных потенциалов узлов (обычно напряжение базисного узла)

$$U_4 := U_1 \quad U_5 := U_1$$

♦ вычислительный блок

**Given**

$$U_4^2 \cdot (Y_{14} + Y_{40} + Y_{45}) - U_5 \cdot \bar{U}_4 \cdot Y_{45} - U_1 \cdot \bar{U}_4 \cdot Y_{14} - \bar{S}_4 = 0$$

$$U_5^2 \cdot (Y_{15} + Y_{50} + Y_{45} + Y_{60}) - U_4 \cdot \bar{U}_5 \cdot Y_{45} - U_1 \cdot \bar{U}_5 \cdot Y_{15} - \bar{S}_5 = 0$$

$$\begin{pmatrix} U_4 \\ U_5 \end{pmatrix} := \text{MinErr}(U_4, U_5)$$

$$\begin{pmatrix} U_4 \\ U_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 115.4 + 0.27i \\ 109.6 - 4.13i \end{pmatrix}$$

$\bar{U}_4$  – сопряженное комплексное значение напряжения  $U_4$  (клавиши **Shift** “”).

В системе уравнений используется не обычный знак равенства «=», а знак приближенного равенства «≈», шаблон которого расположен **View** → **Toolbars** → **Boolean**.

2. Рассчитаем токи в ветвях через известные напряжения узлов. Фазный ток в продольной части линии по закону Ома равен

$$\underline{I}_{kj} = \frac{U_k - U_j}{\sqrt{3}Z_{kj}}.$$

Например,

$$\underline{I}_{14} = \frac{U_1 - U_4}{\sqrt{3}Z_{14}}.$$

3. Рассчитаем перетоки мощностей. Мощность трех фаз в начале продольной части линии  $kj$  равна

$$\underline{S}_{kj}^H = \sqrt{3}U_k \bar{I}_{kj}.$$

Мощность в конце продольной части линии  $kj$  равна

$$\underline{S}_{kj}^K = \sqrt{3}U_j \hat{I}_{kj}.$$

4. Потери мощности в продольной части линии, т.е. в сопротивлении  $Z_{kj}$ , равны разности потоков мощности в начале и в конце линии, т.е.

$$\Delta \underline{S}_{kj} = \underline{S}_{kj}^H - \underline{S}_{kj}^K.$$

5. Сделаем проверку расчета по балансу мощностей для любых двух узлов. Например, для узла 4 должно выполняться равенство

$$\underline{S}_4 = U_4 (\hat{I}_{45} + \hat{I}_{40} - \hat{I}_{14}).$$

# Лабораторная работа №3

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ЭЛЕКТРОТЕХНИКЕ

### Уравнения переменных состояния

**Цель работы.** Исследование возможностей применения метода переменных состояния и графического моделирования в двумерном пространстве в среде *Mathcad* при решении электротехнических задач.

### 3.1. Теоретические сведения

Метод переменных состояния – один из методов расчета переходных процессов и установившихся режимов. Суть метода переменных состояния заключается в составлении и решении системы уравнений состояния – уравнений, разрешенных относительно первых производных токов (потокосцеплений) индуктивных элементов и напряжений (зарядов) емкостных элементов. При этом уравнения переменных состояния – это уравнения Кирхгофа, записанные для мгновенных значений и представленные в нормализованной форме (форме Коши) [1]. Эти уравнения включают в себя кроме переменных состояния только параметры элементов цепи и источников.

В качестве переменных, их называют переменными состояния, обычно выбирают величины, подчиняющиеся законам коммутации, а именно – ток в индуктивном и напряжение на емкостном элементах. При таком выборе переменных порядок системы будет минимальным.

Для расчета токов и напряжений в электрической цепи методом переменных состояния желательно, чтобы схема замещения цепи удовлетворяла некоторым условиям, в противном случае составление уравнений состояния становится намного сложнее. Во-первых, схема не должна содержать зависимых источников (как, например, в схеме замещения транзистора), и, во-вторых, в ней не должно быть особых контуров, состоящих только из емкостных элементов и источников ЭДС, и особых сечений, у которых в каждой ветви есть индуктивные элементы или источники тока.

Дифференциальные уравнения состояния для цепи  $n$ -го порядка записываются в матричной форме

$$\dot{X} = AX + BV, \quad (3.1)$$

где  $\dot{X}$  – матрица-столбец производных переменных состояния (размера  $n \times 1$ ),

$X$  – матрица-столбец переменных состояния (размера  $n \times 1$ ),

$V$  – матрица-столбец ЭДС и токов источников (размера  $m \times 1$ ),

$A$  – квадратная матрица порядка  $n$ ,

$B$  – матрица связи (размера  $n \times m$ ),

$n$  – число переменных состояния,

$m$  – число источников.

Для выходных величин (если определяются зависимые величины – напряжение на индуктивности, ток в емкости и т.д.) в матричной форме система алгебраических уравнений имеет вид

$$W = MX + NV, \quad (3.2)$$

где  $W$  – матрица-столбец (размера  $l \times 1$ ),

$M$  – матрица связи (размера  $l \times n$ ),

$N$  – матрица связи (размера  $l \times m$ ),

$l$  – число неизвестных.

Элементы этих матриц определяются топологией и параметрами цепи.

### 3.2. Задание

Выбрать схему электрических соединений согласно варианту (таблица 3.1, рис. 3.1).

1. Сформировать математическую модель цепи в виде системы уравнений переменных состояния.
2. Рассчитать ток в индуктивном и напряжение на емкостном элементах в среде *Mathcad*, полагая  $e(t) = E = const$  ( $j(t) = J = const$ ), сделать проверку: рассчитать собственные числа главного определителя и корни характеристического уравнения.
3. Сформировать графическую модель процесса в среде *Mathcad*.
4. Используя закон Ома и законы Кирхгофа, определить частное решение системы – ток в индуктивности  $I_L$  и напряжение на емкости  $U_c$  в установившемся режиме. Сравнить результаты, полученные в п.3, 4.

Таблица 3.1

№	L, мГн	E <sub>m</sub> , В	J <sub>m</sub> , А	C, мкФ	R, Ом	№	L, мГн	E <sub>m</sub> , В	J <sub>m</sub> , А	C, мкФ	R, Ом
1	150	4	-	40	10	11	210	10	-	65	9
2	200	-	3	45	2	12	200	-	5	85	10
3	300	3	-	60	6	13	250	4	-	35	3
4	150	-	4	30	25	14	400	-	8	90	5
5	500	2	-	100	4	15	250	2	-	48	6
6	250	-	6	40	7	16	300	-	9	80	2
7	350	7	-	40	3	17	150	9	-	40	8
8	120	-	2	20	10	18	200	-	3	60	6
9	100	5	-	15	5	19	300	10	-	50	9
10	300	-	4	70	8	20	150	-	8	70	10

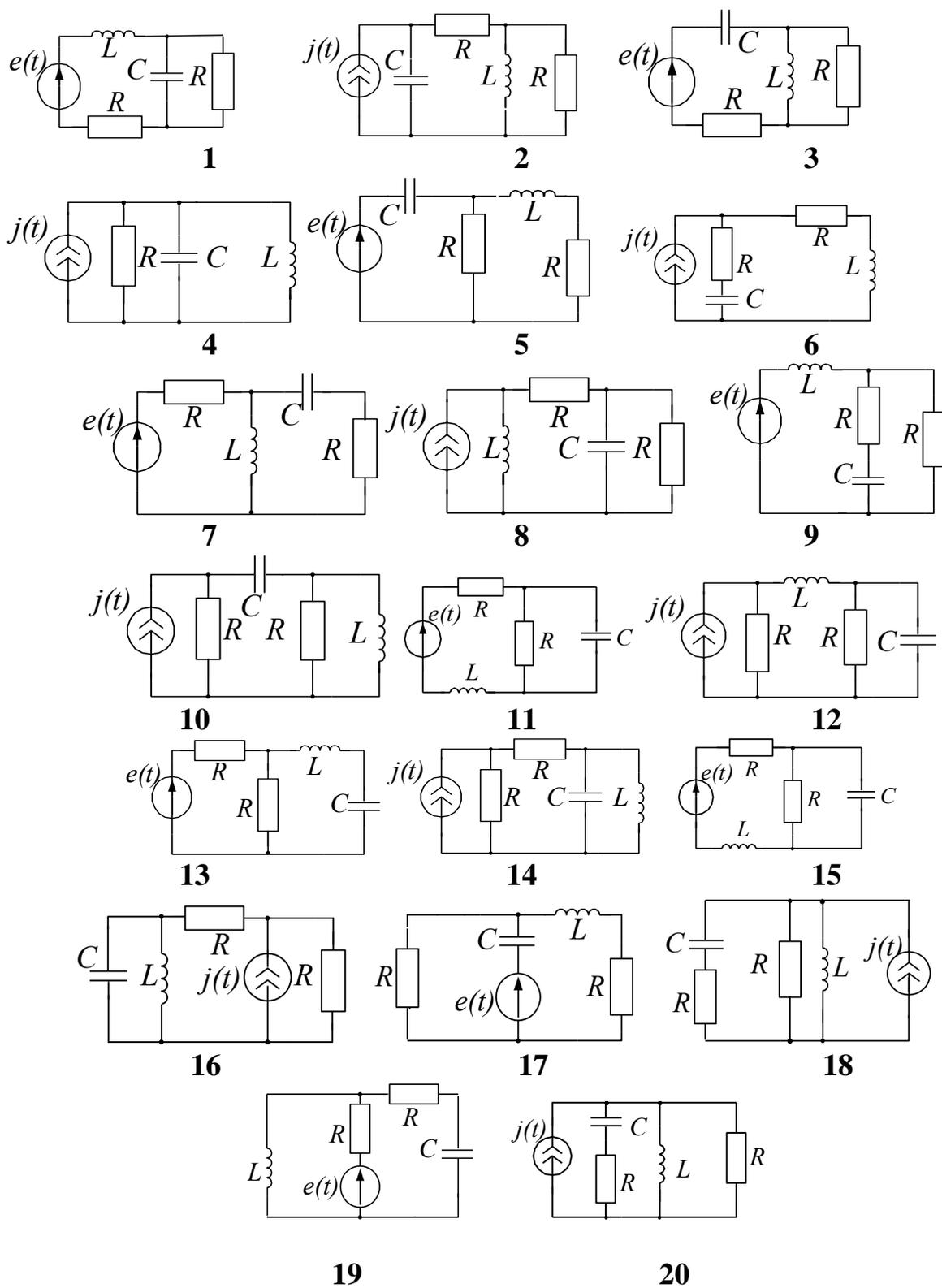


Рис. 3.1

### 3.3. Методические указания

В схеме (рис. 3.2)  $L = 0,01$  Гн,  $C = 2$  мкФ,  $R = 10$  Ом,  $e(t) = E = 1$  В определить методом переменных состояния напряжение на емкости и ток в индуктивности.

1. Электрическую схему, содержащую два реактивных элемента, можно описать двумя дифференциальными уравнениями первого порядка. Полученную систему можно решить непосредственно, важно лишь, чтобы выбранные переменные однозначно определяли поведение цепи и позволяли наиболее просто найти начальные значения.

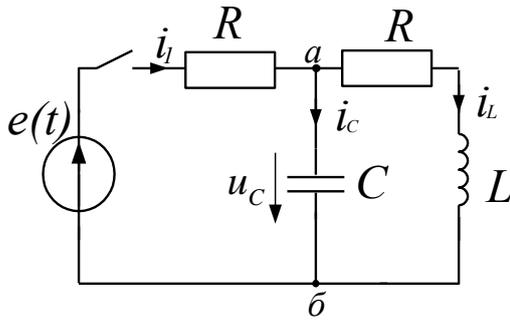


Рис. 3.2

Для схемы по рис. 3.2, в качестве переменных состояния выберем ток в индуктивности  $i_L$  и напряжение на емкости  $u_c$ .

Записывая систему уравнений по законам Кирхгофа и учитывая, что  $i_c = C \frac{du_c}{dt}$ , а

$$u_L = L \frac{di_L}{dt}, \text{ имеем}$$

$$\begin{aligned} i_1 &= C \frac{du_c}{dt} + i_L, \\ i_1 R + u_c &= e(t), \\ L \frac{di_L}{dt} + i_L R - u_c &= 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Из второго уравнения системы (3.3) выразим ток  $i_1 = \frac{e(t) - u_c}{R}$ . Подставим это выражение в первое уравнение

$$\begin{aligned} \frac{e(t)}{R} - \frac{u_c}{R} &= C \frac{du_c}{dt} + i_L, \\ L \frac{di_L}{dt} + i_L R - u_c &= 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Выразим из системы (3.4) производные

$$\begin{aligned} \frac{du_c}{dt} &= -\frac{1}{CR} u_c - \frac{1}{C} i_L + \frac{1}{CR} e(t), \\ \frac{di_L}{dt} &= \frac{1}{L} u_c - \frac{R}{L} i_L = 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Запишем систему дифференциальных уравнений переменных состояния (3.5) в матричной форме.

$$\begin{pmatrix} \frac{du_c}{dt} \\ \frac{di_L}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{CR} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_c \\ i_L \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{CR} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot e. \quad (3.6)$$

2. Решим систему (3.6) с помощью пакета *Mathcad*.

### Документ *Mathcad* 3.1

Задаем исходные данные

$$E := 1 \quad R := 10 \quad L := 0.01 \quad C := 0.000002$$

$$x := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad A := \begin{pmatrix} \frac{-1}{R \cdot C} & \frac{-1}{C} \\ \frac{1}{L} & \frac{-R}{L} \end{pmatrix} * \quad B := \begin{pmatrix} \frac{1}{C \cdot R} \\ 0 \end{pmatrix} * \quad v := E$$

Определяем собственные числа матрицы A

$$\lambda := \text{eigenvals}(A) \quad \lambda = \begin{pmatrix} -4.896 \times 10^4 \\ -2.043 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

**Проверка.** Определим корни характеристического уравнения через импеданс схемы  $Z(p)$ . По методу входного сопротивления определим эквивалентное сопротивление схемы относительно зажимов ветви с емкостью

$$\frac{1}{Cp} + \frac{R(R + Lp)}{2R + Lp} = Z(p). \quad (3.7)$$

Приведя (3.7) к общему знаменателю и приравняв к нулю получим квадратное уравнение

$$p^2 + \left( \frac{1}{CR} + \frac{R}{L} \right) p + \frac{2}{LC} i_L = 0. \quad (3.8)$$

Определим корни уравнения (3.8)

### Продолжение документа *Mathcad* 3.1

$$a2 := 1 \quad a1 := \frac{1}{R \cdot C} + \frac{R}{L} \quad a0 := \frac{2}{L \cdot C}$$

$$Z(p) := a2 p^2 + a1 \cdot p + a0$$

$$p := \begin{pmatrix} a0 \\ a1 \\ a2 \end{pmatrix}$$

$$\delta = \begin{pmatrix} -4.896 \times 10^4 \\ -2.043 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

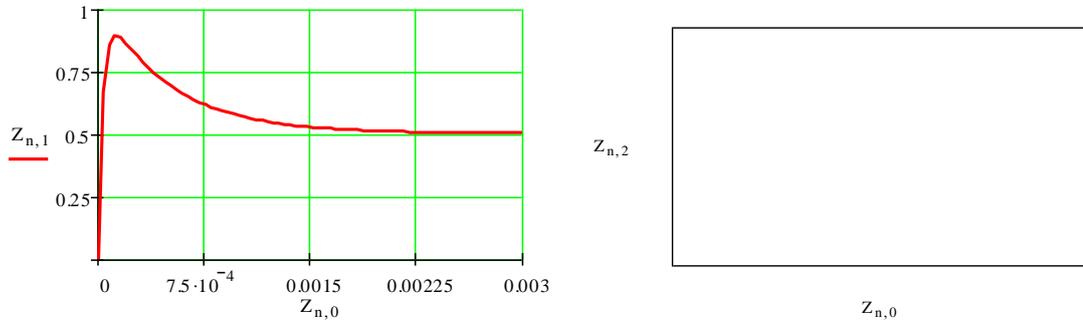
Решим систему обыкновенных дифференциальных уравнений (3.6) методом Рунге-Кутты (функция **rkfixed(x, t1, t2, n, D)**)

$$D(t, x) := A \cdot x + B \cdot v \quad Z := \text{rkfixed}(x, 0, 0.04, 1000, D) \quad n := 0..rows(Z)$$

### 3. Графическая модель в среде *Mathcad*.

Напряжение на емкости

Ток в индуктивности



б

Рис. 3.3

4. Определим значения напряжения и тока, рассчитываемых в установившемся режиме, как произведение обратной матрицы *A* и матрицы *B*

$$A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.05 \end{pmatrix}$$

Определим частное решение системы (3.5), соответствующее установившемуся (принужденному) режиму. При  $E = const$  ток в индуктивности  $I_L = const$  и напряжение на емкости и  $U_c = const$ . Очевидно, что при постоянном источнике  $\frac{dU_c}{dt} = 0, \frac{dI_L}{dt} = 0$ . Подставив постоянные величины в систему (3.5) и сократив первое уравнение на величину  $1/C$ , а второе уравнение на  $1/L$ , получим

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{R}U_c - I_L + \frac{1}{R}E, \\ 0 &= U_c - RI_L. \end{aligned} \quad (3.7)$$

После несложных преобразований (3.7) имеем

$$I_L = \frac{E}{2R}, U_c = \frac{E}{2}. \quad (3.8)$$

Как известно, для постоянного тока в установившемся режиме емкость является разрывом, а индуктивность – короткой. Из схемы рис. 3.2 очевидно, что при таких условиях ток через индуктивность  $I_L = \frac{E}{2R} = \frac{1}{20} = 0,05$  А, а напряжение на емкости  $U_c = \frac{E}{2} = 0,5$  В, что соответствует установившемуся режиму на графиках рис. 3.2 и формулам (3.8), полученным на основании (3.5).

**Лабораторная работа №4**  
**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ**  
**В ЭЛЕКТРОТЕХНИКЕ**  
**Дифференциальные уравнения второго порядка**

**Цель работы.** Исследование возможностей применения дифференциальных уравнений второго порядка и графического моделирования в двухмерном пространстве в среде *MathCAD* при решении электротехнических задач.

### 2.1. Теоретические сведения

В современной энергетике используется большое число различных автоматических устройств (датчики, усилители, гидравлические и пневматические исполнительные устройства и т.д.). Они состоят из разнообразных элементов, выполняют различные функции, отличаются принципом действия, схемными и конструктивными решениями.

В автоматических системах элементы автоматики чаще всего работают в неустановившихся, переходных режимах. Это связано с тем, что внешние силы, действующие на автоматическую систему, как правило, непрерывно и случайно изменяются, поэтому исследование поведения элементов автоматических устройств в переходных режимах, в динамике, представляет собой важную задачу.

В большинстве случаев рассмотрение переходных режимов работы элементов автоматики приводит к дифференциальным уравнениям того или иного вида. В результате физическая задача определения выходной величины (тока, напряжения) элемента автоматики сводится к математической задаче составления некоторого дифференциального уравнения и отыскания решения этого уравнения. В данной лабораторной работе ограничимся изучением так называемых обыкновенных линейных систем, поведение которых описывается обыкновенными линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами.

При составлении дифференциального уравнения используют основные законы той отрасли науки и техники, к которой относится нелинейный элемент. Такими законами могут быть законы Кирхгофа для электрических устройств, законы Ньютона для механических устройств и т.д.

В общем случае дифференциальное уравнение имеет вид

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n x_2}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x_2}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dx_2}{dt} + a_0 x_2 = \\ = b_m \frac{d^m x_1}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x_1}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dx_1}{dt} + b_0 x_1. \end{aligned} \quad (7)$$

где  $x_1$  – известная входная величина,  $x_2$  – неизвестная выходная величина.

В задачах, решаемых в электротехнике, обычно  $x_1$  – ток или ЭДС внешнего источника,  $x_2$  – неизвестный ток в ветви или напряжение на каком-либо элементе.

В общем случае порядок дифференциального уравнения (7) может быть любым. Однако на практике в большинстве случаев автоматическую систему стремятся разбить на звенья и составляют дифференциальное уравнение для каждого звена в отдельности, причем порядок каждого дифференциального уравнения обычно не выше второго. Это обусловлено тем, что решение дифференциального уравнения с порядком выше второго представляет собой сложную задачу, даже при использовании современной вычислительной техники.

Пусть (7) имеет второй порядок, тогда дифференциальное уравнение будет иметь следующий вид

$$a_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} + a_1 \frac{dx_2}{dt} + a_0 x_2 = b_2 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + b_1 \frac{dx_1}{dt} + b_0 x_1. \quad (8)$$

## 2.2. Задание

Выбрать схему электрических соединений согласно варианту (таблица 3.1, рис. 3.1), считая  $e(t) = E \cos 200t$ ,  $j(t) = J \cos 200t$ .

1. Сформировать математическую модель цепи в виде дифференциального уравнения второго порядка

а) относительно тока в индуктивности  $i_L$ ,

б) относительно напряжения на емкости  $u_C$ .

2. Получить характеристическое уравнение цепи, определить его корни и постоянную времени  $\tau$ . Выразить коэффициенты уравнения в относительных единицах.

3. В среде *MathCAD* решить дифференциальные уравнения, полученные в п.1. Сформировать графическую модель, построив графики переходных процессов напряжения на емкости  $u_C(t)$ , тока в индуктивности  $i_L(t)$  для интервала времени  $5\tau_{max}$ .

### Методические указания

В схеме (рис. 4.1)

$L = 0,25$  Гн,  $C = 5 \cdot 10^{-5}$  мкФ,

$R_1 = 10$  Ом,  $R_2 = 10$  Ом

$j(t) = 2 \cos 200t$  А.

**1а.** Получим дифференциальное уравнение второго порядка для схемы относительно тока в индуктивности.

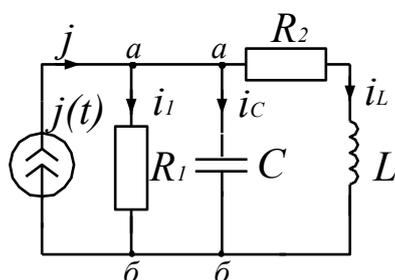


Рис. 4.1

Выбранные положительные направления токов показаны на рис. 2.1. Дифференциальные уравнения цепи, полученные по законам Кирхгофа имеют вид

$$j = i_1 + i_L + i_C,$$

$$L \frac{di_L}{dt} + i_L R_2 - u_C = 0, \quad (5)$$

$$L \frac{di_L}{dt} + i_L R_2 - i_1 R_1 = 0.$$

Из первого уравнения системы (5) выразим ток  $i_1$

$$i_1 = j - i_L - i_C. \quad (6)$$

Из второго уравнения системы (5)

$$u_C = L \frac{di_L}{dt} + i_L R_2 \quad (7)$$

Тогда

$$i_C = C \frac{du_C}{dt} = C \left[ L \frac{d^2 i_L}{dt^2} + R_2 \frac{di_L}{dt} \right]. \quad (8)$$

Подставив в третье уравнение системы (5) уравнения (6) и (8), получим

$$L \frac{di_L}{dt} + i_L R_2 - R_1 \left( j - i_L - C \left[ L \frac{d^2 i_L}{dt^2} + R_2 \frac{di_L}{dt} \right] \right) = 0. \quad (9)$$

После раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых имеем

$$R_1 L C \frac{d^2 i_L}{dt^2} + (L + C R_1 R_2) \frac{di_L}{dt} + (R_1 + R_2) i_L = R_1 j. \quad (10)$$

Представим уравнение (10) в канонической форме, когда коэффициент при высшей производной равен единице

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \left( \frac{1}{C R_1} + \frac{R_2}{L} \right) \frac{di_L}{dt} + \left( \frac{1}{C L} + \frac{R_2}{L C R_1} \right) i_L = \frac{1}{C L} j. \quad (11)$$

Представим (11) в общем виде по аналогии с (8)

$$a_2 \frac{d^2 i_L}{dt^2} + a_1 \frac{di_L}{dt} + a_2 i_L = b_0 j,$$

где  $a_2 = 1$ ,  $a_1 = \frac{1}{C R_1} + \frac{R_2}{L}$ ,  $a_0 = \frac{1}{C L} + \frac{R_2}{L C R_1}$ ,  $b_0 = \frac{1}{C L}$ .

Далее учтем, что

$$j(t) = J_m \cos \omega t = 2 \cos 200 t.$$

Тогда

$$a_2 \frac{d^2 i_L}{dt^2} + a_1 \frac{di_L}{dt} + a_2 i_L = b_0 J_m \cos \omega t.$$

Подставив известные параметры цепи, получим

$$1 \frac{d^2 i_L}{dt^2} + 2040 \frac{di_L}{dt} + 1,6 \cdot 10^5 i_L = 8 \cdot 10^4 \cos 200 t. \quad (12)$$

**16.** Далее выведем дифференциальное уравнение второго порядка для схемы на рис. 2.1 относительно напряжения на емкости.

Согласно второму закону Кирхгофа  $i_1 = u_C / R_1$ . Выразим из первого уравнения системы (5) ток в индуктивности

$$i_L = j - \frac{u_C}{R_1} - C \frac{du_C}{dt}. \quad (13)$$

Подставив (13) во второе уравнение системы (5), получим

$$L \left( \frac{dj}{dt} - \frac{1}{R_1} \frac{du_C}{dt} - C \frac{d^2 u_C}{dt^2} \right) + R_2 \left( j - \frac{u_C}{R_1} - C \frac{du_C}{dt} \right) - u_C = 0.$$

После раскрытия скобок, приведения подобных слагаемых и деления каждого члена уравнения на  $CL$  (коэффициент при высшей производной) имеем

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \left( \frac{1}{CR_1} + \frac{R_2}{L} \right) \frac{du_C}{dt} + \left( \frac{1}{CL} + \frac{R_2}{LCR_1} \right) \cdot u_C = \frac{1}{C} \frac{dj}{dt} + \frac{R_2}{CL} j. \quad (14)$$

Представим (14) в виде аналогичном (8)

$$a_2 \frac{d^2 u_C}{dt^2} + a_1 \frac{du_C}{dt} + a_0 u_C = b_1 \frac{dj}{dt} + b_0 j. \quad (15)$$

где  $a_2 = 1$ ,  $a_1 = \frac{1}{CR_1} + \frac{R_2}{L}$ ,  $a_0 = \frac{1}{CL} + \frac{R_2}{LCR_1}$ ,  $b_1 = \frac{1}{C}$ ,  $b_0 = \frac{R_2}{CL}$ .

Необходимо обратить внимание, что коэффициенты  $a_2$ ,  $a_1$ ,  $a_0$  в левых частях уравнений (12) и (15) совпадают.

Далее учтем, что

$$j(t) = J_m \cos \omega t = 2 \cos 200 t,$$

$$\frac{dj}{dt} = -\omega J_m \sin \omega t = -400 \sin 200 t.$$

Тогда

$$a_2 \frac{d^2 u_C}{dt^2} + a_1 \frac{du_C}{dt} + a_0 u_C = -b_1 \omega J_m \sin \omega t + b_0 J_m \cos \omega t. \quad (16)$$

Подставив в (16) заданные параметры цепи, получим

$$1 \frac{d^2 u_C}{dt^2} + 2040 \frac{du_C}{dt} + 1,6 \cdot 10^5 u_C = -8 \cdot 10^6 \sin 200 t + 8 \cdot 10^6 \cos 200 t. \quad (17)$$

**2.** Характеристическое уравнение, соответствующее дифференциальному уравнению, как известно, составляется с помощью алгебраизации соответствующего однородного уравнения. В рассматриваемом примере можно получить одинаковые характеристические уравнения на основании (11) или (14). Правые части дифференциальных уравнений приравняются к нулю, так как вид и длительность переходного процесса не зависят от внешних источников, а зависят только от параметров и топологии цепи.

Итак, характеристическое уравнение для цепи рис. 2.1 имеет вид

$$\begin{aligned} a_2 p^2 + a_1 p + a_0 &= 0, \\ p^2 + 2040 p + 160000 &= 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Уравнение (18) имеет два корня, которые в общем случае могут быть действительными или комплексно-сопряженными. Для рассматриваемого примера

$$p_1 = -1958 \frac{1}{c}, \quad p_2 = -81,7 \frac{1}{c}. \text{ Максимальная постоянная времени}$$

$$\tau = \left| \frac{1}{p_{\min}} \right| = \frac{1}{81,7} = 0,012 \text{ с.}$$

Как известно, длительность переходного процесса не превышает  $5\tau$ , то есть в данном случае 0.06 с.

### **Переход от именованных к относительным единицам при решении дифференциального уравнения**

В уравнениях (12), (17) коэффициенты  $a_2, a_1, a_0, b_1, b_0$  при именованных единицах (генри, фарады, Омы) значительно отличаются друг от друга по величине, что приводит к определенным трудностям при отыскании решения. Целесообразно перейти к относительным единицам. За базовые величины примем:

- для сопротивлений – сопротивление емкости  $x_B = x_C$ ;
- для частоты – частоту источника  $\omega_B = \omega$ , то есть  $\omega_* = 1$
- для токов – амплитуду источника тока  $J_B = J_m$ , то есть  $J_{m*} = 1$ .

В рассматриваемом примере  $x_C = \frac{1}{\omega C} = 100 \text{ Ом}$ ,  $x_L = \omega L = 50 \text{ Ом}$ .

Относительные сопротивления в этом случае равны

$$x_{C*} = \frac{x_C}{x_B} = 1, \quad x_{L*} = \frac{x_L}{x_B} = 0,5, \quad x_{R1*} = \frac{x_{R1}}{x_B} = 0,1, \quad x_{R2*} = \frac{x_{R2}}{x_B} = 0,1.$$

Относительная индуктивность и емкость

$$L_* = \frac{x_{L*}}{\omega_*} = 0,5, \quad C_* = \frac{1}{x_{C*} \omega_*} = 1.$$

Тогда в (12) коэффициенты будут равны

$$a_2 = 1, \quad a_1 = 10,2, \quad a_0 = 4, \quad b_0 = 2$$

и уравнения (12), (17) примут следующий вид

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + 10,2 \frac{di_L}{dt} + 4i_L = 2 \cos 200t, \quad (19)$$

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + 10,2 \frac{du_C}{dt} + 4u_C = -1 \sin \omega t + 0,2 \cos \omega t. \quad (20)$$

Как видно, коэффициенты левой и правой частей (19), (20) отличаются друг от друга в значительно меньшей степени, чем в уравнениях ( ).

### 3. Решение дифференциального уравнения в среде *MathCAD*

Решим дифференциальные уравнения (19), (20).

Воспользуемся функцией **Odesolve**, для решения одиночных дифференциальных уравнений. Эта функция используется в составе вычислительного блока, открывающегося директивой **Given**. В вычислительном блоке после директивы **Given** задается само уравнение и начальные условия: значение искомой величины в нулевой момент времени и значение первой производной искомой величины также в нулевой момент времени.

После расчета аналитическое выражение для этой функции не выводится, однако с ней можно выполнять математические операции, например, дифференцировать.

Для рассматриваемого примера искомые величины – ток в индуктивности  $i_L(t)$  и напряжение на емкости  $u_C(t)$ .

Как известно, ток в индуктивности и напряжение на емкости согласно законам коммутации не изменяются мгновенно. Коммутация для схемы на рис. 4.1 заключается в подключении цепи к источнику тока, следовательно, ток в индуктивности до коммутации был равен нулю

$$i_L(0-) = i_L(0+) = 0.$$

Для документа **MathCAD** введем обозначение

$$x1(t) = i_L(t), \quad x2(t) = u_C(t).$$

Тогда

$$x1(0) = i_L(0-) = 0, \quad x2(0) = u_C(0) = 0.$$

Начальные значения производной тока и напряжения в нулевой момент времени

$$\left. \frac{di_L}{dt} \right|_{t=0} = \frac{u_L(0+)}{L}, \quad \left. \frac{du_C}{dt} \right|_{t=0} = \frac{i_C(0+)}{C}.$$

Введем обозначения

$$x1'(0) = \left. \frac{di_L}{dt} \right|_{t=0}, \quad x2'(0) = \left. \frac{du_C}{dt} \right|_{t=0}.$$

Поскольку расчет ведется в относительных единицах, то

$$x1'(0) = \frac{u_{L*}(0+)}{L_*}, \quad x2'(0) = \frac{i_{C*}(0+)}{C_*}.$$

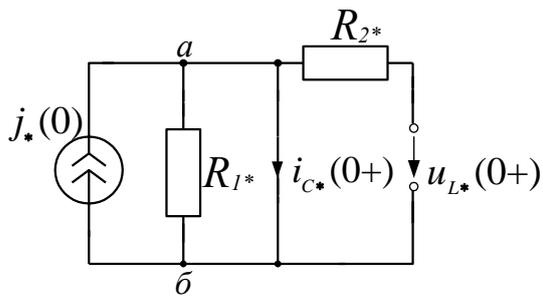


Рис. 4.2

Для рассматриваемого примера, считая в начальный момент емкость закороткой (так как  $u_c(0^-) = 0$ ), а индуктивность разрывом (так как  $i_L(0^-) = 0$ ), получим (рис. 4.2)

$$u_{L^*}(0+) = 0,$$

$$i_{C^*}(0+) = j_{m^*}(0) = J_{m^*} = 1.$$

То есть принимаем

$$x1'(0) = 0, \quad x2'(0) = 1$$

Для построения графика напряжения на индуктивности воспользуемся известной формулой

$$u_{L^*}(t) = L_* \frac{dx1(t)}{dt}.$$

### Документ MathCAD

#### Решение дифференциального уравнения относительно тока в индуктивности

$$a1 := 10.2 \quad a0 := 4 \quad b0 := 2$$

Given

$$\frac{d^2}{dt^2} x1(t) + a1 \cdot \frac{d}{dt} x1(t) + a0 \cdot x1(t) = b0 \cdot J_{m0} \cos(t)$$

$$x1(0) = 0 \quad x1'(0) = 0$$

$$x1 := \text{Odesolve}(t, 6.285)$$

x1(t)



t

Рис. 4.3

## Документ MathCAD

### Решение дифференциального уравнения относительно напряжения на емкости

$$a1:= 10.2 \quad a0:= 4 \quad b1:= 1 \quad b0:= 0.2$$

Given

$$\frac{d^2}{dt^2}x\chi(t) + a1 \cdot \frac{d}{dt}x\chi(t) + a0 \cdot x\chi(t) = -b1 \cdot J_{moe} \sin(t) + b0 \cdot J_{moe} \cos(t)$$

$$x1(0) = 0 \quad x1'(0) = 1$$

$$x2:= \text{Odesolve}(t, 6.285)$$

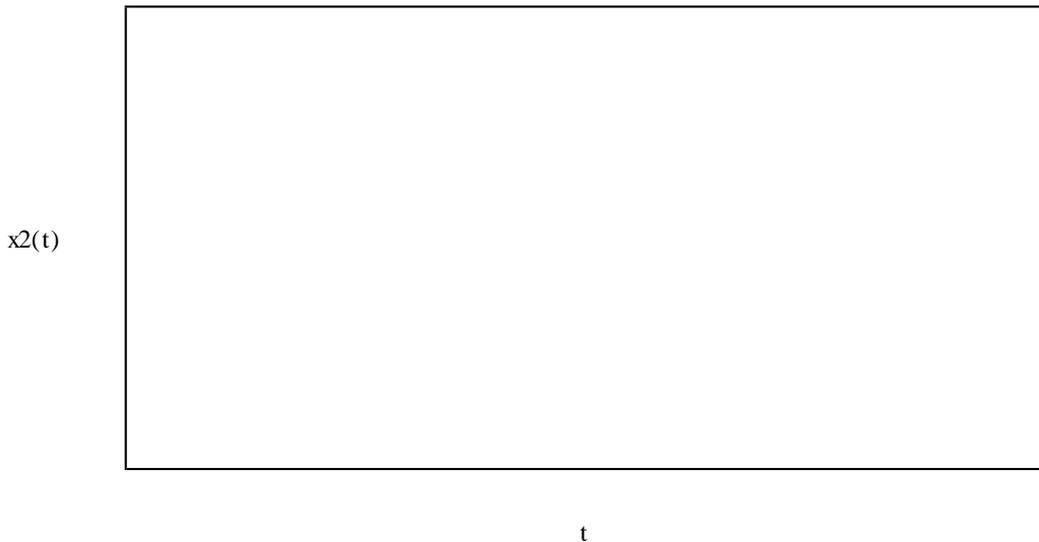


Рис. 4.4

#### Примечания

В дифференциальном уравнении и при задании  $x1(0)$ ,  $x1'(0)$ ,  $x2(0)$ ,  $x2'(0)$  применяется не обычный знак равенства «=», а знак приближенного равенства «≈». Шаблон данного оператора расположен:

**View → Toolbars → Boolean**

Шаблон оператора дифференцирования расположен:

**View → Toolbars → Calculus**

Для перехода к именованным единицам достаточно умножить найденную зависимость тока в индуктивности на базовую величину

$$i_L(t) = x1(t) \cdot J_B.$$

Графики тока и напряжения построены для временного интервала, равного двум периодам ( $4\pi = 12,56$  рад). Период для источника тока равен

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{6,28}{200} = 0,0314 \text{ с.}$$

Таким образом, интервал  $4\pi$  соответствует 0,0628 с. На рис. 4.5 показана зависимость тока в индуктивности от времени в именованных единицах.

$U(t)$

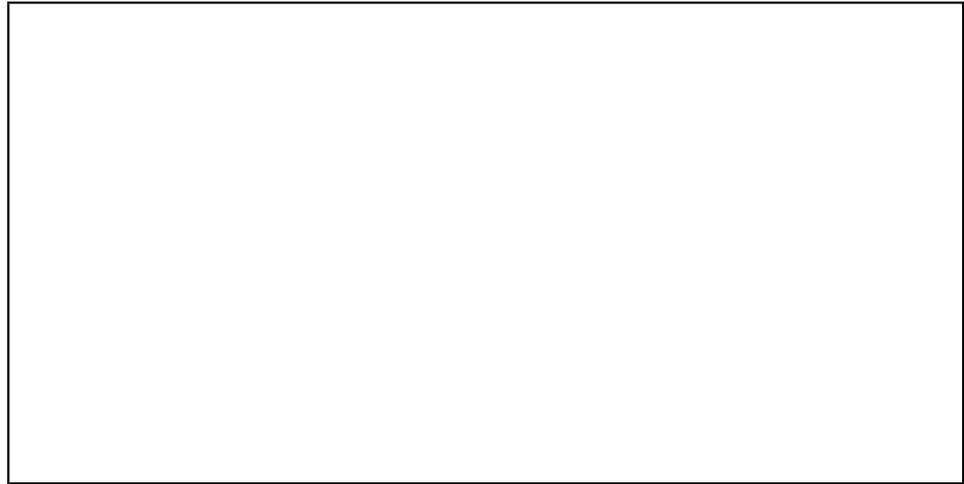


Рис. 4.5<sup>t</sup>

Для напряжения на емкости базовой величиной является его принужденное значение. Для схемы рис. 4.1 напряжение на емкости в новом установившемся режиме можно определить по закону Ома, применив правило разброса,

$$\begin{aligned} \underline{U}_{Cnp} &= \underline{I}_{Cnp}(-jx_C) = \frac{\underline{J}_m \underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 - jx_C}(-jx_C) = \\ &= \frac{5e^{j90}(9,615 + j1,923)}{(9,615 + j1,923) - j100}(-j100) = 49,75e^{j96^0} \text{ В.} \end{aligned}$$

где  $\underline{Z}_1 = \frac{R_1 jx_L}{R_1 + jx_L} = \frac{10 \cdot j50}{10 + j50} = 9,615 + j1,923 \text{ Ом.}$

Переходный процесс заканчивается примерно через 0.06 с, это соответствует 12 рад. Как видно (рис. 4.4), принужденное напряжение в установившемся режиме  $U_{Cnp*} \approx 0,1$ , что в именованных единицах соответствует примерно 50 В.

# Лабораторная работа №5

## РАСЧЕТ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЦЕПЯХ, СОДЕРЖАЩИХ ИНДУКТИВНО-СВЯЗАННЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

**Цель работы.** Моделирование переходных процессов в цепях, содержащих индуктивно-связанные элементы в среде *Mathcad*.

### 5.1. Теоретические сведения

Многие устройства, применяемые в энергетике, имеют индуктивно-связанные элементы. К таким устройствам относятся генераторы, двигатели, трансформаторы, токоограничивающие двоянные реакторы и др. Конструкция и принципы работы таких устройств изучаются в дисциплинах «Электрические машины», «Электрическая часть станций». В дисциплине «Переходные процессы» рассматриваются электромеханические переходные процессы в цепях, содержащих вращающиеся машины.

В отдельных случаях, например при выборе защит трансформаторов, имеют значение количественные характеристики переходного процесса. Как известно, при разомкнутой вторичной обмотке трансформатора по его первичной обмотке протекает ток холостого хода, значение которого составляет несколько процентов номинального тока этой обмотки. Однако при включении трансформатора в цепь на номинальное напряжение возникает переходный процесс, в течение которого могут возникать толчки тока, превышающие номинальный ток в несколько раз.

Переходный процесс в трансформаторах протекает относительно быстро, поэтому токи включения не представляют опасности непосредственно для трансформатора. Однако эти токи необходимо учитывать при расчете релейной защиты, чтобы избежать излишних срабатываний защиты и отключений трансформатора. Принципы действия защит, их выбор, расчет уставок изучаются в курсе «Релейная защита и автоматика энергосистем».

В рамках данной лабораторной работы рассматриваются следующие вопросы:

- общие принципы расчета цепей, содержащих индуктивно-связанные элементы;
- оценка влияния взаимной индуктивности на характер и длительность переходного процесса.

### 5.2. Задание

Рассмотрим переходный процесс в цепи, у которой две обмотки имеют индуктивную связь. Вторичная цепь замкнута накоротко, а первичная подключается к источнику постоянного напряжения

$$u(t) = U = 100 \text{ В.}$$

Выбрать параметры схемы рис. 5.1 согласно варианту (таблица 5.1).

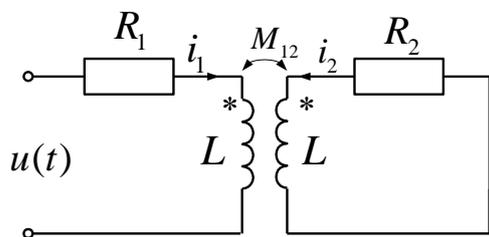


Рис. 5.1

1. Определить токи  $i_1$   $i_2$  в переходном режиме классическим методом.
2. Определить токи  $i_1$   $i_2$  методом переменных состояния.
3. Сравнить полученные результаты. Сделать выводы о влиянии взаимной индуктивности на вид и длительность переходного процесса.

Таблица 5.1

№	L мГн	K <sub>св</sub>	R <sub>1</sub> Ом	R <sub>2</sub> Ом		L мГн	K <sub>св</sub>	R <sub>1</sub> Ом	R <sub>2</sub> Ом
1	15	0.9	0.003	0.04	7	35	0.85	0.003	0.07
2	20	0.8	0.001	0.02	8	12	0.95	0.002	0.03
3	10	0.85	0.002	0.03	9	10	0.9	0.004	0.05
4	15	0.95	0.005	0.05	10	30	0.8	0.006	0.06
5	20	0.9	0.007	0.06	11	25	0.85	0.007	0.08
6	25	0.8	0.009	0.08	12	20	0.95	0.008	0.07

### 5.3. Методические указания

1. В схеме рис. 5.1 для всех вариантов примем нулевые начальные условия  $i_1(0-) = 0$  и  $i_2(0-) = 0$ .

► Записать уравнения по второму закону Кирхгофа для первого и второго контуров схемы рис. 5.1 (обратите внимание на направление тока  $i_2$  во вторичной обмотке).

$$R_1 i_1 + L \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = U, \quad (5.1)$$

$$R_2 i_2 + L \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} = 0. \quad (5.2)$$

► Как известно, решение дифференциального уравнения записывается в виде суммы принужденной и свободной составляющих

$$\begin{aligned} i_1(t) &= i_{1np}(t) + i_{1св}(t), \\ i_2(t) &= i_{2np}(t) + i_{2св}(t). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Определить принужденные составляющие токов в первичной и вторичной обмотках при  $U = \text{const}$ .

► Наличие индуктивных связей не увеличивает числа корней характеристического уравнения. Схема рис. 5.1 имеет два места накопления энергии – две индуктивности, значит, характеристическое уравнение будет иметь два корня, а свободная составляющая будет представлять собой сумму двух экспонент

$$\begin{aligned} i_{1\tilde{n}\tilde{a}}(t) &= \tilde{A}_1 e^{p_1 t} + \tilde{A}_2 e^{p_2 t}, \\ i_{2\tilde{n}\tilde{a}}(t) &= B_1 e^{p_1 t} + B_2 e^{p_2 t}. \end{aligned}$$

Для определения корней характеристического уравнения воспользуемся методом входного сопротивления, который заключается в том, что вместо характеристического уравнения составляют выражение для эквивалентного характеристического сопротивления схемы, при этом индуктивности заменяют операторными изображениями  $pL$ , емкости – операторными изображениями  $1/pC$ . Далее приравнивают эквивалентное характеристическое сопротивление схемы к нулю.

Эквивалентное входное сопротивление относительно зажимов источника после развязки индуктивной связи определяется на основании схемы рис. 5.2.

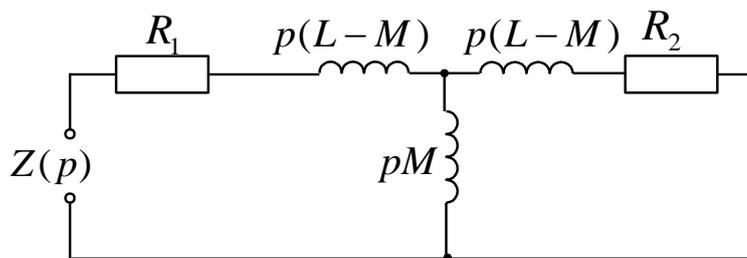


Рис. 5.2

После вывода выражения для  $Z(p)$  для расчета корней можно воспользоваться операциями **Given, Find**.

$Z(p) := \dots$

Given

$Z(p) = 0$

Find(p) float, 4  $\rightarrow$

**float** – ключевое слово режима автоматических символьных преобразований, задающее вывод результатов в виде чисел с плавающей точкой.

► Чтобы вычислить постоянные  $A_1, A_2$  кроме начального значения токов в первичной и вторичной обмотках ( $i_1(0) = 0$  и  $i_2(0) = 0$ ) нужно найти значения производных при нуле-

вом моменте времени  $\frac{di_1}{dt}_{t=0}$  и  $\frac{di_2}{dt}_{t=0}$ .

Необходимо умножить (5.1) на  $L$ , а (5.2) на  $M$ , получим

$$LR_1 i_1 + L^2 \frac{di_1}{dt} + LM \frac{di_2}{dt} = LU, \quad (5.4)$$

$$MR_2 i_2 + ML \frac{di_2}{dt} + M^2 \frac{di_1}{dt} = 0, \quad (5.5)$$

Далее вычтем выражение (5.4) из выражения (5.5) при  $t = 0$

$$L^2 \frac{di_1}{dt}_{t=0} - M^2 \frac{di_1}{dt}_{t=0} = LU,$$

откуда находим

$$\frac{di_1}{dt}_{t=0} = \frac{LU}{L^2 - M^2}.$$

Определение  $\frac{di_2}{dt}_{t=0}$  проводится аналогично. Только выражение (5.1) умножается на  $M$ , а выражение (5.2) на  $L$ . Далее из (5.1) вычитают (5.2) и получают выражение для  $\frac{di_2}{dt}_{t=0}$ .

При  $t = 0$  из (5.3) следует

$$i_1(0) = i_{1r\delta}(0) + A_1 + A_2,$$

$$\frac{di_1}{dt}_{t=0} = p_1 A_1 + p_2 A_2,$$

$$i_2(0) = i_{2r\delta}(0) + B_1 + B_2,$$

$$\frac{di_2}{dt}_{t=0} = p_1 B_1 + p_2 B_2.$$

Отсюда определяем постоянные интегрирования  $A_1, A_2, B_1, B_2$ .

► По полученным выражениям построить зависимости  $i_1(t), i_2(t)$  в среде *MathCAD*.

2. Суть метода переменных состояния и правила записи системы уравнений в матричной форме (3.1) изложены в лабораторной работе №3.

Из уравнений (5.1), (5.2) выразить  $\frac{di_1}{dt}, \frac{di_2}{dt}$ . Записать систему уравнений в матричной форме

$$\dot{X} = AX + BV. \quad (5.6)$$

Решить систему (5.6) с помощью пакета *MathCAD* (Документ *Mathcad 3.1*).

Сформировать графическую модель в среде *MathCAD*.

3. Сравнить результаты, полученные в п.1 и п.2. Сделать выводы о влиянии взаимной индуктивности на вид и длительность переходного процесса.

## Лабораторная работа №6

### ОЦЕНКА СХОДИМОСТИ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ УСТАНОВИВШЕГОСЯ РЕЖИМА И ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ

**Цель работы.** Оценить матрицу проводимостей с точки зрения сходимости решения в среде *Mathcad*.

#### 6.1. Теоретические сведения

Установившийся режим электрических систем и цепей рассчитывают при различных способах задания исходных данных в зависимости от цели и физической сути расчета. Самый простой случай – известны параметры всех пассивных элементов электрической цепи, заданы постоянные значения источников тока во всех узлах, кроме балансирующего и напряжение базисного узла.

Обычно в качестве исходных данных задают сопротивления продольных ветвей (линий электропередач, трансформаторов и т.д), проводимости на землю (проводимости линий электропередачи, реакторов и т.д.), а также информацию о топологической схеме (схеме соединения) электрической системы. Вся эта информация содержится в матрице собственных и взаимных проводимостей узлов  $\underline{Y}$ , полученной согласно методу узловых напряжений (лабораторная работа 1).

Отметим, что уравнения узловых напряжений нашли очень широкое применение при расчетах установившихся режимов сложных электрических систем с помощью ЭВМ. Матрица собственных и взаимных проводимостей узлов  $\underline{Y}$  играет в этих расчетах важную роль.

Матрица  $\underline{Y}$  – симметрическая, то есть  $Y_{kj} = Y_{jk}$ . Важнейшим свойством матрицы  $\underline{Y}$  является большое количество нулевых элементов. Это объясняется тем, что, если узлы не соединены между собой ветвью, то их взаимная проводимость равна нулю. Как правило, в электрической системе каждый узел связан лишь с небольшим количеством соседних узлов.

Эффективность расчетов сильно повышается, если учитывать наличие нулевых элементов в матрице  $\underline{Y}$ . В этом случае экономится память, так как запоминаются лишь ненулевые элементы, и уменьшается количество выполняемых операций, так как не производятся арифметические действия с нулевыми элементами.

Другая важная особенность матрицы  $\underline{Y}$  заключается в том, что ее коэффициенты могут различаться в несколько сотен и даже тысяч раз. Это объясняется сильным различием параметров сети. Например, при применении устройств продольной компенсации сопротивление линии электропередач может быть очень мало. Малое сопротивление имеет также ветвь, в которой содержится только выключатель, в то время как сопротивления обмоток высокого и низкого напряжения трансформаторов могут иметь большое сопро-

тивление. Для трехобмоточных трансформаторов и автотрансформаторов сопротивление обмотки среднего напряжения близко к нулю и т.д.

Эффективность расчета во многом зависит от выбора метода решения системы линейных уравнений. Методы можно разделить на две группы: точные (прямые) и итерационные (приближенные).

**Точными методами** называются такие, которые в предположении, что все вычисления ведутся точно (без округлений), позволяют получить точные значения неизвестных в результате конечного числа операций. Однако практически все вычисления ведутся с округлениями, поэтому и значения неизвестных, полученных точным методом, будут содержать погрешности (метод Гаусса).

**Итерационными методами** называются такие, которые даже в предположении, что вычисления ведутся без округлений, позволяют получить решение системы уравнений лишь с заданной точностью (простая итерация, метод Зейделя).

Для эффективного использования данных методов и получения практических рекомендаций по их применению необходимо произвести оценку матрицы с точки зрения существования решения и оценки погрешности вычислений.

При анализе системы алгебраических уравнений очень важной величиной является степень обусловленности матриц. Чтобы понять эту величину, рассмотрим две системы уравнений

$$\begin{cases} 3,5x + 1y = 2,8, \\ 4x + y = 2,9. \end{cases} \quad (6.1)$$

$$\begin{cases} 0,2x + y = 2, \\ 15x + y = 4. \end{cases} \quad (6.2)$$

Запишем (6.1), (6.2) в матричной форме

$$\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{B}_1, \quad \mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 3,5 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 2,8 \\ 2,9 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{B}_2, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 0,2 & 1 \\ 15 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

На основании (6.1), (6.2) запишем зависимости

$$\begin{cases} y(x) = 2,8 - 3,5x, \\ y(x) = 2,9 - 4x. \end{cases} \quad (6.3)$$

$$\begin{cases} y(x) = 2 - 0,2x, \\ y(x) = 4 - 15x. \end{cases} \quad (6.4)$$

Построим прямые по (6.3), (6.4).

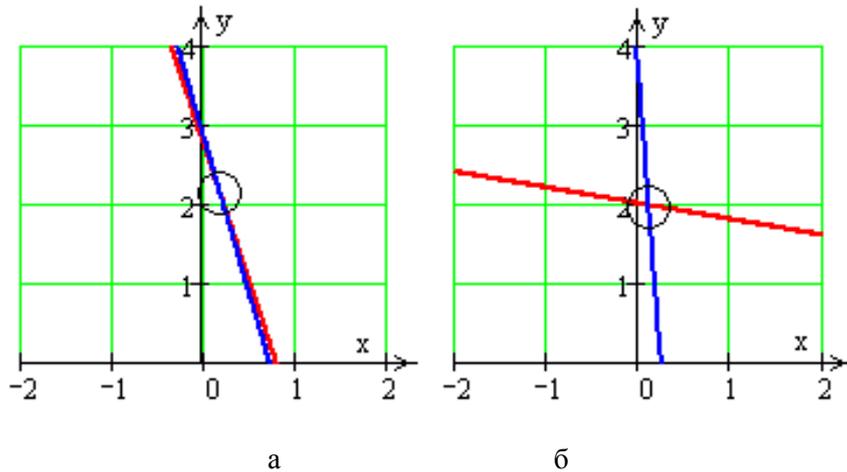


Рис. 6.1

Система уравнений (6.3) имеет плохо обусловленную матрицу, то есть, прямые линии очень близки друг другу, прямые практически сливаются (рис. 6.1, а). Это означает, что если точность расчета будет недостаточно высокая, то решение будет сложно найти. Для системы уравнений (6.4) наблюдается ярко выраженная точка пересечения (рис. 6.1, б), то есть система имеет хорошую обусловленность.

Очевидно, что такая графическая оценка обусловленности матриц в общем случае не приемлема. Степень обусловленности системы характеризуется так называемыми **числами обусловленности**, которые вычисляются на основании норм матрицы.

При анализе систем линейных алгебраических уравнений обычно используются три легко вычисляемые нормы матрицы

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{i,j}|, \quad (6.5)$$

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \max(\sqrt{\lambda}), \quad (6.6)$$

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{i,j}|. \quad (6.7)$$

где  $\|\mathbf{A}\|_1$  – норма матрицы, которая равняется наибольшей из сумм абсолютных величин элементов одного столбца матрицы,

$\|\mathbf{A}\|_2$  – бесконечная (спектральная) норма матрицы, равная корню квадратному из максимального собственного значения матрицы  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T$ ,

$\|\mathbf{A}\|_\infty$  – норма матрицы, которая равняется наибольшей из сумм абсолютных величин элементов одной строки матрицы.

Для сходимости линейных процессов простой итерации и метода Зейделя при любом начальном приближении достаточно, чтобы любая из указанных норм была меньше единицы.

$$\begin{aligned}\|\mathbf{A}\|_1 &< 1, \\ \|\mathbf{A}\|_2 &< 1, \\ \|\mathbf{A}\|_\infty &< 1.\end{aligned}\tag{6.8}$$

Однако условия (6.8) только достаточные, но отнюдь не необходимые. Несоблюдение любого из условий (6.8) еще не значит, что итерационный процесс расходится. Выполнение же любого из этих условий означает, что итерационные методы сходятся. Проверка достаточных условий сходимости может быть легко осуществлена до непосредственного расчета.

Нормы прямых матриц для нашего примера

$$\|\mathbf{A}_1\|_1 = 3,5 + 4 = 7,5; \quad \|\mathbf{A}_2\|_1 = 0,2 + 15 = 15,2.$$

Определим обратные матрицы

$$\mathbf{A}_1^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 8 & -7 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{A}_2^{-1} = \begin{pmatrix} -0,068 & 0,068 \\ 1,014 & -1,014 \end{pmatrix}.$$

Нормы обратных матриц

$$\|\mathbf{A}_1^{-1}\|_1 = 2 + 8 = 10; \quad \|\mathbf{A}_2^{-1}\|_1 = 0,068 + 1,014 = 1,081.$$

Числа обусловленности матриц  $\mathbf{A}_1$  и  $\mathbf{A}_2$  могут быть определены следующим образом

$$\alpha_1 = \|\mathbf{A}\|_1 \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\|_1,\tag{6.9}$$

$$\alpha_2 = \|\mathbf{A}\|_2 \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\|_2,\tag{6.10}$$

$$\alpha_\infty = \|\mathbf{A}\|_\infty \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\|_\infty.\tag{6.11}$$

Определим числа обусловленности для рассматриваемого примера по (6.9)

$$\alpha_{11} = \|\mathbf{A}_1\| \cdot \|\mathbf{A}_1^{-1}\| = 7,5 \cdot 10 = 75; \quad \alpha_{12} = \|\mathbf{A}_2\| \cdot \|\mathbf{A}_2^{-1}\| = 15,2 \cdot 1,081 = 16,432.$$

Как видно, число обусловленности для системы (6.3) больше, чем число обусловленности для системы (6.4). Таким образом, чем меньше число обусловленности, тем лучше.

На практике определенную ошибку в расчет вносят:

- погрешность при определении параметров элементов схемы замещения,
- ошибки измерений задающих токов и узловых напряжений.

В данной работе будем считать, что параметры элементов определены с достаточной точностью. Уровень возможных ошибок измерений можно оценить, например, ориентируясь на класс точности измерительных приборов.

## 6.2. Задание

1. Принять для анализа матрицу собственных и взаимных проводимостей узлов  $\underline{Y}$ , вектор задающих токов  $\underline{J}$  и вектор напряжений узлов  $\underline{U} = \underline{Y}^{-1} \cdot \underline{J}$ , полученные в лабораторной работе №1.

2. Определить с какой точностью будут рассчитаны потенциалы узлов, если класс точности приборов 10%.

3. Определить нормы матрицы  $\|\mathbf{A}\|_1, \|\mathbf{A}\|_2, \|\mathbf{A}\|_\infty$  и числа обусловленности  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_\infty$  матрицы собственных и взаимных проводимостей узлов  $\underline{Y}$  по формулам (6.5) – (6.7), (6.9) – (6.11) и с помощью встроенных функций **norm1(Y), norm2(Y), normi(Y), cond1(Y), cond2(Y), condi(Y)**. Сравнить полученные результаты.

4. Изменить величины  $\underline{Z}_{ij}, \underline{Y}_{ij}$ , заданные в таблицах 1.1, 1.2, таким образом, чтобы сопротивления ветвей  $\underline{Z}_{ij}$  и  $\frac{1}{\underline{Y}_{ij}}$  отличались друг от друга по величине не более чем на 50%. Выполнить пункты 2, 3 при измененной матрице. Сравнить полученные результаты.

### 6.3. Методические указания

1. Из лабораторной работы №1 возьмите вектор напряжений узлов

$$\underline{U} = \underline{Y}^{-1} \cdot \underline{J}. \quad (6.12)$$

2. Задайте вектор погрешности

$$\Delta J := J \cdot \delta$$

где  $\delta := 0.1$  – погрешность приборов.

Рассчитайте вектор напряжений узлов с учетом заданной погрешности

$$U\delta := \underline{Y}^{-1} \cdot (J + \Delta J). \quad (6.13)$$

Вычтите из (6.13) уравнение (6.12) и определите относительную погрешность расчета напряжений узлов

$$\Delta U := U - U\delta$$

Определите модули комплексных чисел вектора  $\Delta U$  с помощью оператора векторизации.

$$\delta_u := \overrightarrow{|\Delta U|}. \quad (6.14)$$

Шаблон модуля находится: **Вид** → **Панели инструментов** → **Калькулятор**. Векторизация осуществляется помещением соответствующего модуля вектора под знак длинной стрелки, шаблон которой находится: **Вид** → **Панели инструментов** → **Матрица**.

В векторе (6.14) определите член с максимальным значением.

3. Определите собственные числа (корни) матриц  $Y$  и  $Y \cdot Y^T$

$$\lambda_1 := \text{eigenvals}(Y) \qquad \lambda_2 := \text{eigenvals}(Y \cdot Y^T)$$

Сделайте векторизацию матрицы  $\lambda 2$

$$\lambda 2_m := \overrightarrow{|\lambda 2|}$$

Определить нормы матрицы  $Y$  по выражениям

$$A1_j := \sum_{i=1}^4 |Y_{i,j}| \quad \text{Normal} := \max(A1)$$

$$A2 := \max(\sqrt{\lambda 2_m}) \quad A2 = \blacksquare$$

$$A1_i := \sum_{j=1}^4 |Y_{j,i}| \quad \text{Normal}_i := \max(A1)$$

Определите нормы матрицы с помощью встроенных функций:

**norm1(Y)** – L1 норма матрицы  $Y$ ,

**norm2(Y)** – L2 норма матрицы  $Y$ ,

**normi(Y)** – неопределенная норма матрицы  $Y$ .

Определите числа обусловленности матрицы  $Y$  по выражениям (6.9) – (6.11).

Определите числа обусловленности с помощью встроенных функций:

**cond1(Y)** – число обусловленности для матрицы  $Y$ , вычисленное в норме L1,

**cond2(Y)** – число обусловленности для матрицы  $Y$ , вычисленное в норме L2,

**condi(Y)** – число обусловленности для матрицы  $Y$ , основанное на равномерной норме.

4. Принять значения сопротивлений и проводимостей ветвей  $Z_{ij}$ ,  $Y_{ij}$  согласно варианту по таблицам 6.1, 6.2.

Таблица 6.1

№	Сопротивления ветвей, Ом							
	$Z_{12}$	$Z_{23}$	$Z_{14}$	$Z_{15}$	$Z_{25}$	$Z_{36}$	$Z_{45}$	$Z_{56}$
1	1+j2	2+j5	1+j3	2+j1	4+j2	$\infty$	1+j1	$\infty$
2	1+j3	3+j1	$\infty$	5+j4	1+j6	9+j5	$\infty$	3+j2
3	4+j1	1+j2	1+j3	9+j2.5	5+j4	4+j8	1+j2	1+j6
4	2+j2	$\infty$	3+j1	2+j15	2+j5	$\infty$	6+j3	4+j8
5	5+j4	1+j6	10+j5	$\infty$	$\infty$	5+j4	1+j6	5+j4
6	$\infty$	9+j2.5	4+j1.2	1+j6	1+j5	2+j12	1.2+j2	1+j5
7	4+j8	2+j5	10+j5	$\infty$	4+j8	1+j2	5+j1	1+j5
8	2+j1	2+j9	5+j4	2+j1	1+j5	5+j4	$\infty$	$\infty$
9	2+j1	1+j2	$\infty$	$\infty$	4+j12	4+j8	1+j0.6	1+j2
10	1+j2	5+j1	2+j9	$\infty$	1+j1.2	2+j7	1+j0.5	2+j5
11	4+j8	$\infty$	4+j1	2+j9	9+j2.5	$\infty$	1+j1.2	1+j1
12	1+j5	2+j9	$\infty$	2+j1	1+j2	4+j1.2	$\infty$	1.2+j2

Таблица 6.2

№	Проводимости ветвей, См					
	$\underline{Y}_{10}$	$\underline{Y}_{20}$	$\underline{Y}_{30}$	$\underline{Y}_{40}$	$\underline{Y}_{50}$	$\underline{Y}_{60}$
1	0	$1/\underline{Z}_{12}$	$1/\underline{Z}_{12}$	$1/\underline{Z}_{12}$	$1/\underline{Z}_{12}$	0
2	$1/\underline{Z}_{12}$	0	$1/\underline{Z}_{12}$	0	$1/\underline{Z}_{12}$	$1/\underline{Z}_{12}$
3	0	$1/\underline{Z}_{14}$	0	0	0	$1/\underline{Z}_{14}$
4	$1/\underline{Z}_{25}$	$1/\underline{Z}_{25}$	0	0	$1/\underline{Z}_{25}$	$1/\underline{Z}_{25}$
5	$1/\underline{Z}_{12}$	$1/\underline{Z}_{12}$	0	$1/\underline{Z}_{12}$	0	0
6	0	0	$1/\underline{Z}_{15}$	$1/\underline{Z}_{15}$	$1/\underline{Z}_{15}$	0
7	0	$1/\underline{Z}_{12}$	$1/\underline{Z}_{12}$	0	0	0
8	$1/\underline{Z}_{12}$	0	0	$1/\underline{Z}_{12}$	$1/\underline{Z}_{12}$	$1/\underline{Z}_{12}$
9	$1/\underline{Z}_{12}$	$1/\underline{Z}_{12}$	0	0	$1/\underline{Z}_{12}$	$1/\underline{Z}_{12}$
10	$1/\underline{Z}_{12}$	0	0	0	$1/\underline{Z}_{12}$	$1/\underline{Z}_{12}$
11	$1/\underline{Z}_{12}$	$1/\underline{Z}_{12}$	0	$3+j20$	0	$1/\underline{Z}_{12}$
12	$1/\underline{Z}_{12}$	$1/\underline{Z}_{12}$	$1/\underline{Z}_{12}$	0	$1/\underline{Z}_{12}$	0

Сохраните созданный в среде Mathcad файл под новым именем. Выполните пункты 1 – 3 при новых значениях  $\underline{Z}_{ij}$ ,  $\underline{Y}_{ij}$ . Сравните полученные результаты.

## Лабораторная работа №7

### МОДЕЛИРОВАНИЕ АСИНХРОННОГО ДВИГАТЕЛЯ

**Цель работы.** Создание математической модели асинхронного двигателя в установившемся режиме работы в среде *MathCAD*.

#### 7.1. Теоретические сведения

Свойства нагрузки оказывают непосредственное влияние на устойчивость параллельной работы станций. Однако характеристики нагрузки существенны не только с этой точки зрения. В определенных условиях нагрузка сама может оказаться неустойчивой. Так, например, известно, что у асинхронных двигателей при значительном снижении напряжения, когда тормозной момент превышает вращающий момент, на их выводах происходит «опрокидывание», и они останавливаются.

На рис. 7.1 приведена схема замещения асинхронного двигателя, при построении которой не учитывались потери активной мощности в стали, а также в меди статора. Эта схема часто упрощается и приводится к виду, изображенному на рис. 7.2, где индуктивное сопротивление цепи намагничивающего тока отнесено непосредственно к выводам двигателя.

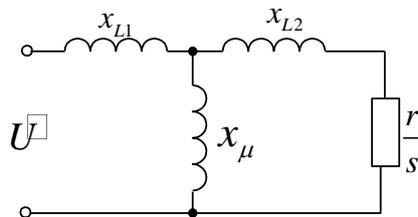


Рис. 7.1

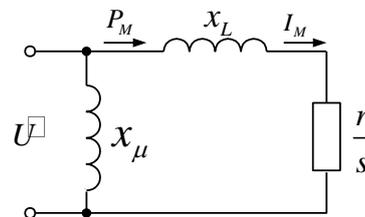


Рис. 7.2

Сопротивление  $x_L$  в схеме рис. 7.2 представляет собой сумму индуктивных сопротивлений рассеяния статора и ротора

$$x_L = x_{L1} + x_{L2} .$$

Активная мощность  $P_M$  в схеме рис. 7.2 представляет собой мощность, получаемую двигателем из сети, которая определяется, как произведение вращающего момента  $M_{вр}$  на угловую скорость вращения магнитного потока двигателя  $\omega$

$$P_M = M_{вр} \omega .$$

Угловая скорость вращения магнитного потока двигателя при неизменной частоте сети остается постоянной при любом скольжении двигателя, и, следовательно, вращающий момент двигателя  $M_{вр}$  пропорционален мощности  $P_M$ , а в относительных единицах может быть принят численно ей равным.

На рис. 7.1 показана характеристика установившегося режима работы двигателя  $P_M = f(s)$  и характеристика тормозного момента  $P_D = f(s)$ , преодолеваемого двигателем, т.е. момента сопротивления со стороны приводимого двигателем механизма. В общем случае характеристика тормозного момента имеет падающий характер, однако в расчетах эту характеристику часто считают горизонтальной и полагают  $P_T(s) = \text{const}$ .

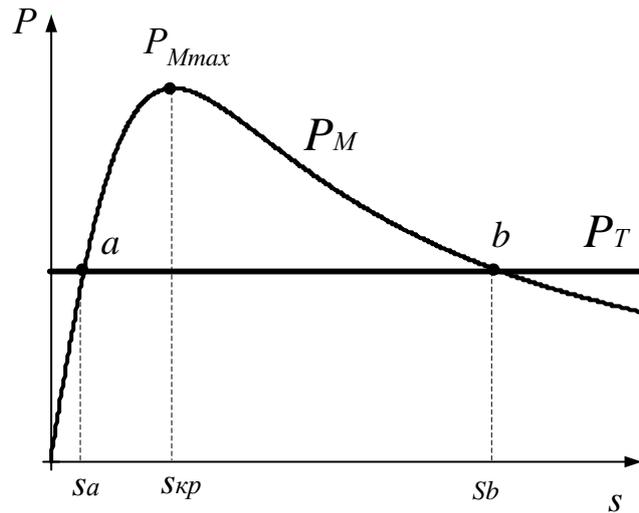


Рис. 7.1

Как видно, установившийся режим работы двигателя возможен при двух точках пересечения характеристики момента двигателя и тормозного момента. Однако лишь одна из них определяет устойчивый и, следовательно, реально осуществимый режим.

### 7.2. Задание

Расчет ведется в относительных единицах (для упрощения индексы \* опускаются). Примем  $U_{ном} = 1$ .

Для схемы рис. 7.2

1. Вывести зависимости активной и реактивной мощностей от скольжения  $P_M = f(s)$ ,  $Q_M = f(s)$  и построить в среде *MathCAD* при

$$U = 1; U = 0,9; U = 0,7; U = 0,5.$$

2. При выбранном согласно варианту (таблица 7.1) тормозном моменте  $P_T$  по зависимостям п.1 определить скольжение, соответствующее установившемуся режиму двигателя, а также напряжение, при котором произойдет «опрокидывание» двигателя.

3. Определить при  $U = 1$  максимальную мощность двигателя  $P_{Mmax}$  и критическое скольжение  $s_{kp}$ , при котором она достигается (так называемый опрокидывающий момент) **аналитически** и по зависимостям п.1.

4. Определить математический критерий статической устойчивости двигателя.

Таблица 7.1

Вар	x о.е.	r о.е.	$P_T$ о.е.	Ва р	x о.е.	r о.е.	$P_T$ о.е.
<b>1</b>	6	1	0,04	<b>13</b>	6,2	1	0,055
<b>2</b>	5	1	0,05	<b>14</b>	6,1	1	0,036
<b>3</b>	5,5	1	0,06	<b>15</b>	5,9	1	0,06
<b>4</b>	6,3	1	0,03	<b>16</b>	5,7	1	0,044
<b>5</b>	5,8	1	0,04	<b>17</b>	5,4	1	0,052
<b>6</b>	5,7	1	0,055	<b>18</b>	5,5	1	0,06
<b>7</b>	6	1	0,036	<b>19</b>	6,3	1	0,03
<b>8</b>	6,2	1	0,06	<b>20</b>	5,8	1	0,04
<b>9</b>	6,1	1	0,044	<b>21</b>	6,7	1	0,055
<b>10</b>	5,9	1	0,052	<b>22</b>	5,8	1	0,04
<b>11</b>	5,7	1	0,045	<b>23</b>	6,6	1	0,05
<b>12</b>	5,4	1	0,038	<b>24</b>	6	1	0,06

### 7.3. Методические указания

1. Выразите по закону Ома ток  $I_M$  в схеме рис. 7.2 (в комплексной форме), считая известными напряжение и сопротивления. Определите модуль тока. Подставьте полученное выражение в закон Джоуля-Ленца для активной и реактивной мощностей

$$P_M = I_M^2 \frac{r}{s}, \quad (7.1)$$

$$Q_M = I_M^2 x_L. \quad (7.2)$$

Постройте полученные зависимости в среде *MathCAD* при указанных значениях напряжения на входе двигателя.

2. Постройте на графике  $P_M = f(s)$  характеристику тормозного момента  $P_T(s) = \text{const}$ . По точке пересечения данной прямой с зависимостью  $P_M(s)$  при  $U = 1$  найти скольжение двигателя в нормальном рабочем режиме.

При значительных снижениях напряжения (на 30% и более) зависимость  $P_M(s)$  проходит ниже или касается зависимости  $P_T(s)$ . В результате происходит нарушение устойчивой работы двигателя, двигатель затормаживается, резко возрастает потребляемый ток и реактивная мощность. Таким образом, опрокидывание двигателя происходит при напряжении, когда тормозной момент будет больше или равен максимальному вращающему моменту.

3. Максимум активной мощности двигателя можно найти, определяя производную от выражения (7.1) по скольжению и приравнявая ее к нулю

$$\frac{dP_M}{ds} = 0. \quad (7.3)$$

Из (7.3) выражается критическое скольжение  $s_{кр}$ , подставляется в (7.1) и при этом значении определяется  $P_{Mmax}$ .

Координаты точек графика с дискретностью, определяемой заданным шагом изменения абсциссы, можно выявить с помощью команды *Trace* (трассировка).

4. Критерием статической устойчивости двигателя является положительный знак избыточного момента  $\Delta P = \Delta P_M - \Delta P_T$ .

Постройте в среде *MathCAD* производной  $\frac{dP_M}{ds}$  от скольжения  $s$ . Такое построение производится автоматически, без вывода формулы. С помощью полученного графика определить  $s_{кр}$ , сравнить с  $s_{кр}$ , полученным в п.3.