МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

Г.В. Носов, Е.О. Кулешова, В.А. Колчанова

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

УСТАНОВИВШИЙСЯ РЕЖИМ В ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЯХ

*Рекомендовано в качестве учебного пособия
Редакционно-издательским советом
Томского политехнического университета*

Издательство
Томского политехнического университета
2011

УДК 621.3.11(075.8)
ББК 31.211я73
Н 845

Носов Г.В.
Н 845 Теоретические основы электротехники. Установившийся режим: учебное пособие / Г.В. Носов, Е.О. Кулешова, В.А. Колчанова; Национальный исследовательский Томский политехнический университет. − Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2011. – 216 с.
ISBN 0-00000-000-0

В пособии рассмотрены основные положения теории линейных электрических цепей и их свойства. Приведены методы решения задач по следующим разделам: цепи постоянного тока, цепи однофазного синусоидального и трехфазного токов. Теоретический материал закрепляется примерами и контрольными заданиями с методическими указаниями по их выполнению с использованием программно- интегрированной среды Mathcad.

Пособие предназначено для самостоятельной работы студентов Электротехнического института Томского политехнического университета.

УДК 621.3.011(075.8)
ББК 31.211я73

Рецензенты
Ведущий научный сотрудник Института оптики атмосферы им. В.Е. Зуева СО РАН, доктор физико-математических наук,
Ф.Ю. Канев

Кандидат технических наук, доцент кафедры ТОЭ ТУСУРа,
Т.В. Ганджа

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Теоретические основы электротехники (ТОЭ) – это техническая дисциплина, связанная с изучением теории электричества и электромагнетизма, являющаяся базовым общетехническим курсом для электротехнических и электроэнергетических специальностей вузов.

Электроэнергетика – это отрасль энергетики, включающая в себя производство, передачу, сбыт и потребление электрической энергии. Электроэнергетика является наиболее важной отраслью энергетики и основой функционирования экономики и жизнеобеспечения, что объясняется такими преимуществами электроэнергии перед энергией других видов, как относительная лёгкость передачи на большие расстояния, распределения между потребителями, а также преобразования в другие виды энергии (механическую, тепловую, химическую, световую и др.). Отличительной чертой электрической энергии является практическая одновременность её генерирования и потребления, так как электрический ток распространяется по сетям со скоростью, близкой к скорости света.

Основная часть электроэнергии вырабатывается крупными электростанциями: тепловыми (ТЭС), гидравлическими (ГЭС), атомными (АЭС). Электростанции, объединённые между собой и с потребителями высоковольтными линиями электропередачи (ЛЭП), образуют электрические системы.

Становление электроэнергетики определялось, с одной стороны, созданием электростанций и топливной базы для них, сооружением линий электропередачи и разработкой электрической аппаратуры и энергетического оборудования, с другой – развитием теоретических основ электротехники – необходимого условия для научного обоснования энергетического строительства. В этих целях были осуществлены важные исследования в области техники высоких напряжении, теории устойчивости электрических систем, разработаны методы расчёта мощных генераторов, трансформаторов и других электрических машин, электропривода, электрических аппаратов; создана электротехнология, внедрено автоматизированное управление электрическими системами, использованы методы физического и математического моделирования при расчёте и изучении электроэнергетических систем.

1. ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОСТАТИКИ

1.1. Электрические заряды. Закон Кулона

В процессе эксплуатации нефтяных и газовых скважин, а также магистральных трубопроводов возможна *электризация* оборудования за счет трения и внешних электромагнитных полей, что может привести к электрическим разрядам, взрывам и пожарам. Это обуславливает необходимость изучения основ электростатики.

Все вещества состоят из атомов и молекул. Важнейшими структурными элементами атомов являются элементарные частицы материи. Рассмотрим основные свойства двух из них: протонов и электронов.

Протоны – частицы, обладающие положительным электрическим зарядом. Они входят в состав атомного ядра, сообщая ему положительный заряд.

Электроны – мельчайшие отрицательно заряженные частицы, которые с огромной скоростью вращаются вокруг ядра по замкнутым орбитам. Заряд электрона $e = -16 \cdot 10^{-20}$ Кл. Это элементарный, т.е. наименьший, отрицательный электрический заряд. Число электронов в атомах различных химических элементов неодинаково. Так, например, атом водорода имеет один электрон, который вращается вокруг ядра по одной орбите, а натрия – 11 электронов, вращающихся по трем орбитам: на первой, ближней к ядру – 2, на второй – 8 и на третьей – 1.

В атомах различных химических веществ, находящихся в обычном состоянии, существует электрическое равновесие: общий отрицательный заряд электронов равен положительному заряду ядра. В этом случае атомы, а значит, и все вещество, состоящее из этих атомов, электрически нейтральны, т.е. суммарный заряд q тела, образованного этим веществом, равен нулю. Если атом теряет один или несколько электронов, то равновесие электрических зарядов нарушается и атом превращается в положительный ион. Если же атом получает лишние электроны, то он заряжается отрицательно, превращаясь в отрицательный ион. Процесс превращения нейтрального атома в положительный или отрицательный ион называется *ионизацией*.

Тело называют электрически заряженным, если в нем преобладают положительные или отрицательные заряды. Избыток тех или других зарядов в рассматриваемом теле возникает в результате передачи заряженных частиц от одного тела другому или их перемещением внутри тела из одной его области в другую область. Такая *электризация* тел может быть осуществлена трением или в результате других физических и химических процессов. Электрически заряженное тело характеризуется суммарным положительным или отрицательным зарядом q, который измеряется в кулонах (Кл).

Электрически заряженные тела (частицы) с зарядами q_1 и q_2 взаимодействуют друг с другом с силой $\boldsymbol{F}$, которая является векторной величиной и измеряется в ньютонах (Н). При разноименных зарядах тела притягиваются друг к другу (рис. 1.1, а), а при одноименных – отталкиваются (рис. 1.1, б).

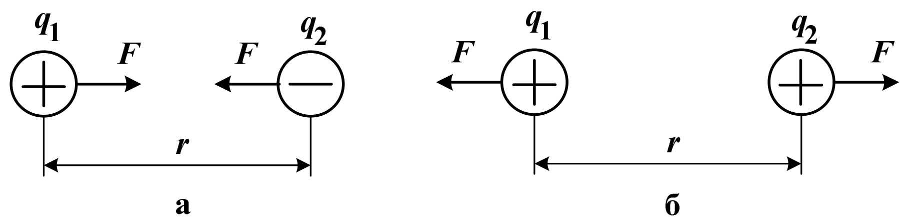


Рис. 1.1.

Заряженные тела называются *точечными*, если их линейные размеры малы по сравнению с расстоянием r между телами. Величина силы их взаимодействия F зависит от величины зарядов q_1 и q_2, расстояния r между ними и среды, в которой находятся электрические заряды.

Связь между этими величинами была сформулирована французским ученым Кулоном в 1775 году: *величина силы взаимодействия двух неподвижных точечных заряженных тел прямо пропорциональна произведению зарядов этих тел, обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними и зависит от среды.*

Закон Кулона выражается следующей формулой:

$$F = \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi\varepsilon_{\text{a}} r^2}, \qquad (1.1)$$

где ε_{a}– абсолютная диэлектрическая проницаемость среды, которая учитывает влияние среды на величину силы.

Из формулы (1.1) следует, что для разноименных зарядов q_1 и q_2 величина силы F получается отрицательной, что указывает на притяжение точечных тел, а для одноименных зарядов F положительна, что свидетельствует об отталкивании тел.

Различные вещества имеют разную абсолютную диэлектрическую проницаемость $\varepsilon_{\text{а}}$. Абсолютная диэлектрическая проницаемость вакуума ε_0 называется *электрической постоянной*. Её размерность выражается в фарадах на метр (Ф/м). Опытным путем установлено, что

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi \cdot 10^9} = 8{,}85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м.}$$

Величина, показывающая, во сколько раз абсолютная диэлектрическая проницаемость вещества $\varepsilon_{\text{а}}$ больше электрической постоянной ε_0, называется относительной диэлектрической проницаемостью этого вещества ε_r, которая не имеет размерности. Таким образом, $\varepsilon_{\text{а}} = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0$. Для большинства диэлектриков ε_r относительно мало зависит от электрических условий и температуры, а поэтому считается значением постоянным. В табл. 1.1 приведены значения ε_r для некоторых веществ (диэлектриков).

Таблица 1.1

Диэлектрик	ε_r	Диэлектрик	ε_r
Воздух	1	Миканит	5,2
Трансформаторное масло	2,2	Фарфор	5,8
Резина	2,7	Мрамор	8,3
Бумага парафинированная	4,3	Стекло	6–10

Пример 1.1. Определить силу взаимодействия двух точечных тел с зарядами $q_1 = 25 \cdot 10^{-6}$ Кл и $q_2 = -4 \cdot 10^{-6}$ Кл, помещенных в трансформаторное масло на расстоянии r = 10 см друг от друга.

Решение. По табл. 1.1 находим относительную диэлектрическую проницаемость трансформаторного масла $\varepsilon_r = 2{,}2$.

Абсолютная диэлектрическая проницаемость трансформаторного масла

$$\varepsilon_a = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0 = 2{,}2 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} = 19{,}47 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м.}$$

Расстояние между зарядами:

$$r = 10\,\text{см} = 10 \cdot \frac{1}{100}\,\text{м} = 10 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

Сила взаимодействия электрических зарядов:

$$F = \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi\varepsilon_a r^2} = \frac{25 \cdot 10^{-6} \cdot (-4) \cdot 10^{-6}}{4 \cdot 3{,}14 \cdot 19{,}47 \cdot 10^{-12} \cdot 100 \cdot 10^{-4}} = -41 \text{ Н,}$$

причем тела притягиваются к друг другу ($F < 0$).

1.2. Электростатическое поле

Электростатическое поле создается неподвижными и неизменными электрическими зарядами. Электростатическое поле является частным случаем электромагнитного поля и проявляется механическими силами, которые испытывают неподвижные заряженные тела, вносимые в это поле. Если в некоторое электростатическое поле вносить точечное тело с весьма малым пробным положительным зарядом $+q$, не искажающим исследуемое поле, то в каждой точке поля на это тело будет действовать определенная по значению и направлению механическая сила $\boldsymbol{F}$. Эта сила характеризует *напряженность электростатического поля* $\boldsymbol{E}$*, которая равна отношению силы* $\boldsymbol{F}$*, действующей на неподвижное положительно заряженное пробное тело, помещенное в данную точку поля, к величине заряда* q *этого тела*. Напряженность является векторной величиной, модуль которой рассчитывается как

$$E = \frac{F}{q}, \tag{1.2}$$

причем размерность напряженности вольт на метр (В/м), т.к. Н=Дж/м=А·В·с/м и Кл=А·с, т.е. Н/Кл=В/м.

Используя формулы (1.1) и (1.2) можно определить величину напряженности электростатического поля, создаваемое уединенным точечным телом с зарядом q_1 в некоторой точке А (с пробным зарядом q_2),отстоящей от этого тела на расстоянии r_1:

$$E_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_{\text{a}} r_1^2}. \tag{1.3}$$

Аналогично можно определить величину напряженности электростатического поля, создаваемое другим уединенным точечным телом с зарядом q_2 в той же точке А, отстоящей от этого тела на расстоянии r_2:

$$E_2 = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_a r_2^2}. \tag{1.4}$$

Направления векторов $\boldsymbol{E_1}$ и $\boldsymbol{E_2}$ в точке А определяются знаками зарядов q_1 и q_2 соответственно: *при положительном заряде тела вектор напряженности направлен от тела вдоль прямой, соединяющей заряд и точку* А*, а при отрицательном заряде тела вектор* *напряженности направлен к телу по прямой, соединяющей заряд и точку* А (рис. 1.2).

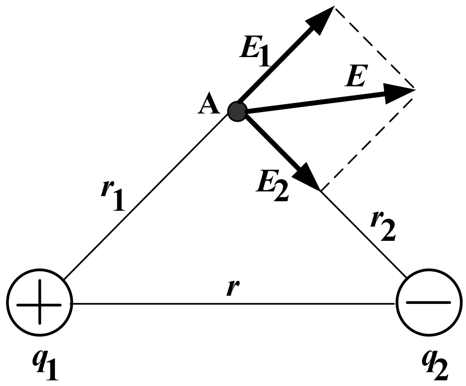


Рис. 1.2.

При этом вектор напряженности $\boldsymbol{E}$ в точке А результирующего электростатического поля, создаваемого зарядами q_1 и q_2 , находится как геометрическая сумма векторов $\boldsymbol{E}_1$ и $\boldsymbol{E}_2$.

Важной характеристикой электростатического поля является *потенциал* φ *численно равный работе, которая может быть совершена силами поля при перемещении положительного единичного заряда* q *из данной точки поля* А *в точку, потенциал которой принят равным нулю*:

$$\varphi = \frac{\int_{\text{A}}^{0} F \cdot dr}{q}. \tag{1.5}$$

Потенциал является скалярной величиной и измеряется в вольтах (Дж/Кл=В). Потенциал бесконечно удаленной точки или потенциал поверхности Земли обычно принимается равным нулю. Потенциал φ может принимать положительные и отрицательные значения. Положительное значение потенциала в точке А означает положительную работу сил поля при перемещении частицы с зарядом q. Отрицательное значение потенциала в точке А свидетельствует о том, что силы поля будут препятствовать движению частицы с зарядом q из данной точки А в точку, потенциал принят равным нулю. При этом работа сил отрицательна и возможна только за счет внешнего источника.

Используя формулы (1.1–1.5) можно рассчитать потенциалы электростатического поля, создаваемые по отдельности точечными уединенными телами с зарядами q_1 и q_2 в точке А (рис. 1.2):

$$\varphi_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_a r_1}; \ \ \varphi_2 = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_a r_2}. \tag{1.6}$$

Потенциал φ в точке А результирующего электростатического поля, создаваемого зарядами q_1 и q_2 , находится как алгебраическая сумма потенциалов φ_1 и φ_2 , рассчитанных с учетом знаков зарядов, т.е.

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2. \tag{1.7}$$

Разность потенциалов двух точек поля называется *электрическим напряжением U, которое равно работе, затрачиваемой на перемещение единичного заряда из одной точки* (А) *поля в другую точку* (В):

$$U = \varphi_A - \varphi_B \text{ , В.} \tag{1.8}$$

Графически картина электростатического поля изображается с помощью силовых и эквипотенциальных линий. *Силовая линия* – это линия в каждой точке которой вектор напряженности $\boldsymbol{E}$ направлен по касательной. Силовые линии начинаются на положительных зарядах и заканчиваются на отрицательных зарядах. Силовые линии проводят с определенной плотностью, т.е. так, чтобы число силовых линий, проходящих через единицу поверхности, перпендикулярной силовым линиям, было равно или пропорционально значению напряженности поля в данном месте. *Однородное* электростатическое поле имеет во всех точках одинаковые векторы напряженности. Силовые линии однородного поля параллельны и расположены с одинаковой плотностью. *Эквипотенциальная линия* в каждой точке имеет одинаковое значение потенциала, причем разность потенциалов ($\Delta\varphi$) соседних эквипотенциальных линий должна быть постоянной. На рис. 1.3 приведена картина электростатического поля двух разноименно заряженных точечных тел.

Пример 1.2. Электрические заряды точечных тел равны $q_1 = 4 \cdot 10^{-10}$ Кл; $q_2 = -3 \cdot 10^{-10}$ Кл. Расстояние между зарядами r = 14,1 см. Определить модуль напряженности E и потенциал φ электростатического поля в точке А при $r_1 = r_2$ = 10 см (рис. 1.2), если заряды находятся в воздухе.

Решение. По таблице 1.1 определяем для воздуха $\varepsilon_r = 1$, тогда

$$\varepsilon_a = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0 = 1 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} = 8{,}85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м.}$$

Определяем по формуле (1.3) напряженность в точке А от первого точечного заряда

$$E_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_{\text{а}} r_1^2} = \frac{4 \cdot 10^{-10}}{4\pi \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 0{,}1^2} = 360 \text{ В/м}.$$

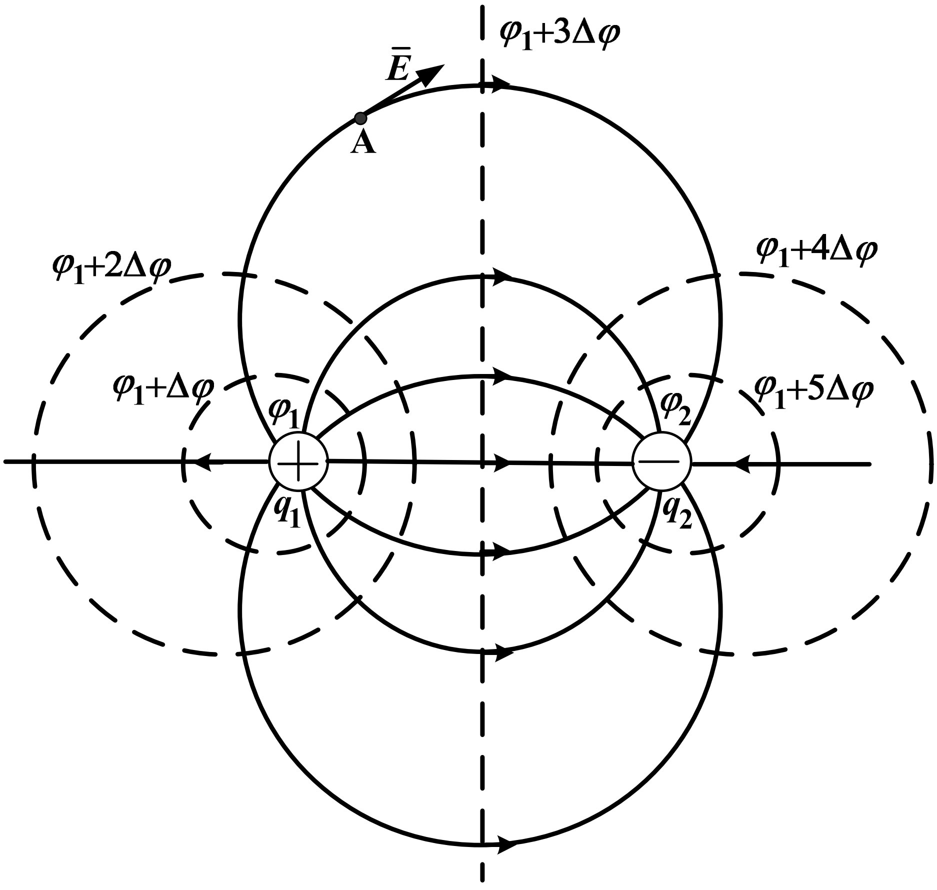


Рис. 1.3.

Определяем по формуле (1.4) напряженность в точке А от второго точечного заряда

$$E_2 = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_{\text{а}} r_2^2} = \frac{-3 \cdot 10^{-10}}{4\pi \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 0{,}1^2} = -270 \text{ В/м}.$$

В масштабе 1:1 чертим расположение зарядов и точки А (рис. 1.2). На чертеже строим вектора $\boldsymbol{E}_1$ и $\boldsymbol{E}_2$ в точке А, например, в масштабе 90 В/м в 1 см. При этом учитываем знаки зарядов и соответствующих напряженностей (рис. 1.2): вектор $\boldsymbol{E}_1$ направлен от точечного тела с зарядом q_1 вдоль прямой, соединяющей этот заряд и точку А (E_1>0), вектор $\boldsymbol{E_2}$ направлен к точечному телу с зарядом q_2 вдоль прямой, соединяющей этот заряд и точку А (E_2<0). Графически складываем вектора $\boldsymbol{E_1}$ и $\boldsymbol{E_2}$: строим параллелограмм из этих векторов и измеряем его диагональ, которая получается равной 5 см. После умножения длины этой диагонали на масштаб построения векторов 90 В/м в 1 см получаем искомый модуль напряженности электростатического поля в точке А: E=5·90=450 В/м.

По формулам (1.6) находим потенциалы в точке А от первого

$$\varphi_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_a r_1} = \frac{4 \cdot 10^{-10}}{4\pi \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 0{,}1} = 36 \text{ В}$$

и второго точечного заряда

$$\varphi_2 = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_a r_2} = \frac{-3 \cdot 10^{-10}}{4\pi \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 0{,}1} = -27 \text{ В.}$$

В результате искомый потенциал электростатического поля в точке А будет равен

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = 36 + (-27) = 9 \text{ В.}$$

1.3. Поляризация диэлектрика и электризация проводника внешним электростатическим полем

К диэлектрикам относятся вещества (табл. 1.1), у которых практически отсутствуют свободные заряды. При внесении диэлектрика в электростатическое поле под действием сил поля орбиты электронов смещаются в направлении, противоположном полю, вследствие чего ядра атомов оказываются уже не в центрах электронных орбит (рис. 1.4, а), а на некотором расстоянии от них (рис. 1.4, б). С точки зрения электрических свойств такой атом (молекулу) можно рассматривать как *электрический диполь*, т.е. как пару разноименных точечных зарядов $+q$ и $-q$ (рис. 1.4, в), находящихся на небольшом расстоянии h друг от друга (плечо диполя).

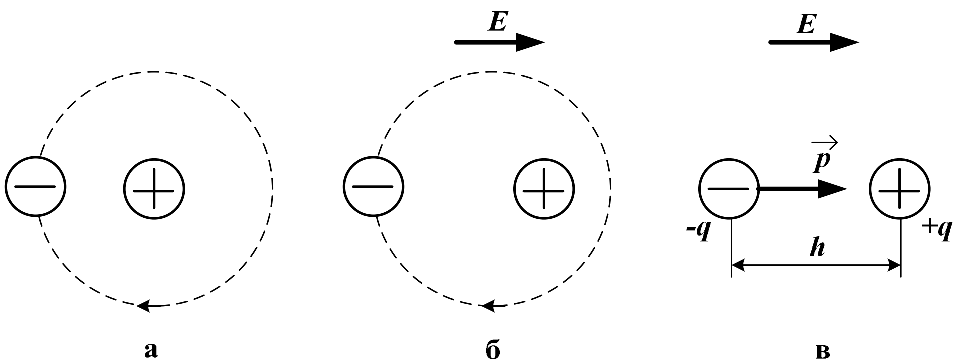


Рис. 1.4.

Заряды, образующие диполи диэлектрика, являются *связанными*, а произведение величины заряда q и плеча h называют *электрическим моментом диполя*:

$$p = q \cdot h. \tag{1.9}$$

Электрический момент диполя $\vec{p}$ – векторная величина, направленная от отрицательного заряда диполя $-q$ к положительному заряду $+q$ (рис. 1.4, в). Электрический момент измеряется в Кл·м. Таким образом, молекулы диэлектриков во внешнем поле становятся диполями, электрические моменты $\vec{p}$ которых стремятся расположиться в направлении внешнего поля (рис. 1.5). При исчезновении поля исчезает и смещение электронных орбит. Явление смещения называется *поляризацией диэлектрика*.

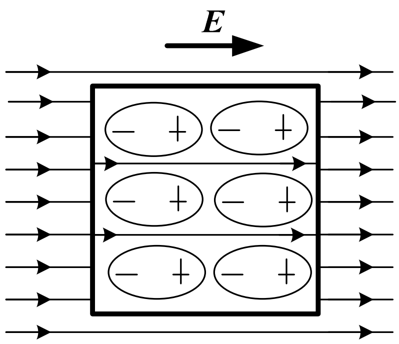


Рис. 1.5.

Поляризованные молекулы создают свое электростатическое поле, направленное противоположно внешнему полю. Таким образом, в диэлектрике результирующее поле отличается от внешнего поля. Если абсолютная диэлектрическая проницаемость внешней среды меньше абсолютной диэлектрической проницаемости внесенного диэлектрика, то поле внутри диэлектрика ослабляется по сравнению с внешним полем и имеет такое же направление (рис. 1.5). Если же абсолютная диэлектрическая проницаемость внешней среды больше абсолютной диэлектрической проницаемости внесенного диэлектрика, то поле внутри диэлектрика усиливается по сравнению с внешним полем и имеет противоположное направление. Способность диэлектрика поляризоваться под действием электростатического поля оценивается относительной диэлектрической проницаемостью ε_r (табл. 1.1), которая показывает, во сколько раз ослабляется внешнее поле (уменьшается напряженность E) в диэлектрике, размещенном в вакууме или воздухе. На противоположных сторонах диэлектрика (рис. 1.5) оказываются сосредоточены положительные и отрицательные связанные заряды с некоторой поверхностной плотностью $\sigma_{\text{СВЯЗ}}$, имеющей размерность Кл/м^2. При этом внутри диэлектрика положительные и отрицательные заряды диполей взаимно уравновешиваются. Суммарный заряд поляризованного диэлектрика будет равен нулю.

Для определения $\sigma_{\text{СВЯЗ}}$ примем, что внешняя среда имеет абсолютную диэлектрическую проницаемость ε_0, а прямоугольное тело из диэлектрика, расположенное во внешнем однородном поле с напряженностью E согласно рис. 1.5, характеризуется проницаемостью $\varepsilon_{\text{а}} = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0$. В этом случае постоянная поверхностная плотность отрицательных связанных зарядов на поверхности диэлектрика, в которую входят силовые линии внешнего поля, приближенно без учета искажения поля определиться так

$$\sigma_{\text{СВЯЗ}} \approx \varepsilon_0 \left(\frac{E}{\varepsilon_r} - E \right) = \varepsilon_0 \frac{(1-\varepsilon_r)}{\varepsilon_r} E, \qquad (1.10)$$

т.е. при $\varepsilon_r = 1$ имеем $\sigma_{\text{СВЯЗ}} = 0$, а при $\varepsilon_r > 1$ получаем $\sigma_{\text{СВЯЗ}} < 0$.

Очевидно, что на противоположной поверхности диэлектрика поверхностная плотность положительных связанных зарядов будет отличаться только знаком. При этом величина напряженности равномерного результирующего поля в диэлектрике (здесь и далее E_0 – исходная напряженность внешнего поля до внесения в его тела)

$$E_{\text{РЕЗ}} = \frac{E}{\varepsilon_r} \approx \frac{3}{2+\varepsilon_r} \cdot E_0, \qquad (1.11)$$

определяемая из граничного условия

$$\varepsilon_0 E = \varepsilon_0 \varepsilon_r E_{\text{РЕЗ}}, \tag{1.12}$$

должна быть меньше *пробивной напряженности* $E_{\text{ПР}}$, при которой наступает *пробой* диэлектрика и диэлектрик теряет свои изолирующие свойства и становится проводником. Значения пробивной напряженности $E_{\text{ПР}}$ при нормальных условиях и однородном постоянном поле для некоторых диэлектриков приведены в табл. 1.2.

Таблица 1.2

Диэлектрик	$E_{\text{ПР}}$ кВ/мм	Диэлектрик	$E_{\text{ПР}}$ кВ/мм
Воздух	3	Миканит	15–20
Мрамор	3–4	Резина	15–20
Трансформаторное масло	5–15	Полистирол	20–30
Бумага парафинированная	10–25	Полиэтилен	50
Фарфор	15–20	Слюда	80–200

К проводникам относятся вещества, которые имеют достаточно много хаотически перемещающихся свободных зарядов – электронов у металлов и ионов у электролитов. При внесении проводника в электростатическое поле под действие сил поля положительные свободные заряды будут перемещаться по направлению поля, а отрицательные – навстречу полю. В результате на противоположных поверхностях проводника будут накапливаться заряды разных знаков, создающие собственное поле, направленное навстречу внешнему полю. Такое разделение зарядов (электризация проводника) будет проходить до тех пор, пока величина напряженности результирующего поля в проводнике не станет равной нулю, т.е. $E_{\text{РЕЗ}} = 0$. При этом во всех точках проводника потенциал φ будет одинаков. Явление разделения свободных электрических зарядов в проводящем теле под действием внешнего электростатического поля называется *электростатической индукцией*.

Таким образом, электростатическое поле будет отсутствовать не только в сплошном проводнике (рис. 1.6), но и внутри металлической оболочки. Это свойство используется для защиты приборов от действия внешних электростатических полей: для этого прибор заключают в металлическую оболочку или сетку-экран.

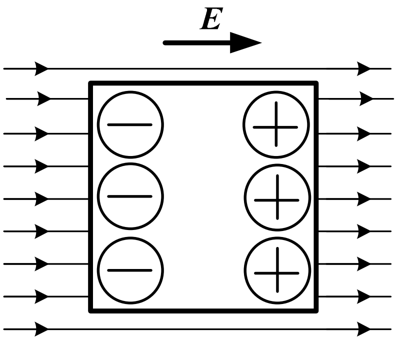


Рис. 1.6.

Для определения поверхностной плотности свободных зарядов $\sigma_{\text{СВОБ}}$ (Кл/м^2) примем, что внешняя среда имеет абсолютную диэлектрическую проницаемость ε_0, а прямоугольное тело из проводника располагается во внешнем однородном поле с напряженностью E согласно рис. 1.6. В этом случае постоянная поверхностная плотность свободных отрицательных зарядов на поверхности проводника, в которую входят силовые линии внешнего поля, приближенно без учета искажения поля определиться на основании граничного условия так

$$\sigma_{\text{СВОБ}} \approx -\varepsilon_0 E \approx -3\varepsilon_0 E_0 \ . \tag{1.13}$$

На противоположной поверхности проводника поверхностная плотность свободных положительных зарядов будет отличаться только знаком, т.е. суммарный заряд тела равен нулю.

Очевидно, что для цилиндрического или сферического тела радиуса R , расположенного во внешнем поле с напряженностью E согласно рис. 1.7, приближенно без учета искажения поля поверхностная плотность зарядов составит

$$\sigma \approx -\sigma_m \cdot \cos(\alpha) \ , \tag{1.14}$$

где σ_m– максимальная поверхностная плотность отрицательных зарядов при $\alpha = \pi$, определяемая по (1.10) для диэлектрика и по (1.13) для проводника.

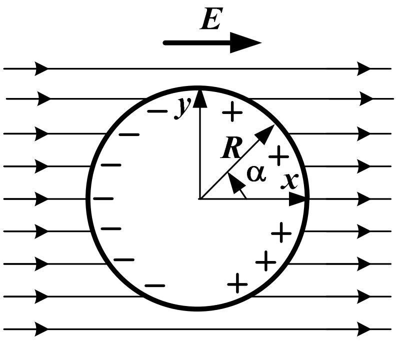


Рис. 1.7.

Пример 1.3. Определить поверхностные плотности отрицательных связанных $\sigma_{\text{СВЯЗ}}$ и свободных зарядов $\sigma_{\text{СВОБ}}$ прямоугольных тел из резины и меди соответственно. Тела расположены в воздухе и напряженность внешнего электростатического поля E=100 В/м.

Решение. Из таблицы 1.1 определяем для резины $\varepsilon_r = 2,7$, причем абсолютная диэлектрическая проницаемость воздуха равна ε_0.

По формуле (1.10) находим поверхностную плотность отрицательных связанных зарядов тела из резины, которая является диэлектриком:

$$\sigma_{\text{СВЯЗ}} \approx \varepsilon_0 \frac{(1-\varepsilon_r)}{\varepsilon_r} E = 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot \frac{(1-2,7)}{2,7} \cdot 100 = -5,57 \cdot 10^{-10} \text{ Кл/м}^2.$$

По формуле (1.13) рассчитываем поверхностную плотность свободных отрицательных зарядов тела из меди, которая является проводником:

$$\sigma_{\text{СВОБ}} \approx -\varepsilon_0 E = -8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 100 = -8,85 \cdot 10^{-10} \text{ Кл/м}^2.$$

1.4. Расчет дипольного момента

Любую систему тел с суммарным нулевым зарядом можно представить в виде эквивалентного диполя с дипольным моментом

$$\vec{p} = \sum_k q_k \cdot \vec{r_k} = \int \vec{r} dq = p_x \cdot \vec{1_x} + p_y \cdot \vec{1_y} + p_z \cdot \vec{1_z}, \tag{1.15}$$

где $\vec{r_k}$ – радиус-вектор дискретной системы точечных зарядов, направленный из произвольно выбранного начала отсчета в заряд q_k; $\vec{r}$ – радиус-вектор сплошной системы зарядов, направленный из произвольно выбранного начала отсчета в элемент с зарядом $dq = \sigma \cdot dS,\ dq = \rho \cdot dV,\ dq = \tau \cdot dl$;

σ, ρ, τ – поверхностная, объемная и линейная плотности связанных или свободных зарядов тел соответственно;

$\overrightarrow{1_x}, \overrightarrow{1_y}, \overrightarrow{1_z}$ – единичные векторы, направленные по осям *x*, *y*, *z* системы координат соответственно;

p_x, p_y, p_z – проекции вектора дипольного момента на оси *x*, *y*, *z* .

Модуль вектора дипольного момента будет равен

$$p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2} \; . \qquad (1.16)$$

Так, если точечный заряд q_k дискретной системы *к*-зарядов относительно произвольно выбранного начала прямоугольной системы координат имеет радиус-вектор

$$\overrightarrow{r_k} = x_k \cdot \overrightarrow{1_x} + y_k \cdot \overrightarrow{1_y} + z_k \cdot \overrightarrow{1_z} \; , \qquad (1.17)$$

то из формулы (1.15) получаем вектор дипольного момента эквивалентного диполя, выходящий из того же начала координат:

$$\vec{p} = \sum_k (q_k \cdot x_k) \cdot \overrightarrow{1_x} + \sum_k (q_k \cdot y_k) \cdot \overrightarrow{1_y} + \sum_k (q_k \cdot z_k) \cdot \overrightarrow{1_z} \; , \qquad (1.18)$$

где x_k, y_k, z_k – координаты точечного заряда q_k в выбранной системе координат.

Определим дипольный момент для прямоугольного диэлектрического или проводящего тела с заданной постоянной поверхностной плотностью отрицательных зарядов σ, определяемой по формулам (1.10) или (1.13). Тело имеет геометрические размеры *a*, *b*, *c* . Начало прямоугольной системы координат выберем в центре тела так, чтобы оси были параллельны плоскостям тела (рис. 1.8), тогда радиус-вектор отрицательных поверхностных зарядов σ будет следующим

$$\overrightarrow{r_1} = -0{,}5a \cdot \overrightarrow{1_x} + y \cdot \overrightarrow{1_y} + z \cdot \overrightarrow{1_z} \; , \qquad (1.19)$$

а для положительных зарядов $(-\sigma)$ радиус-вектор будет равен

$$\overrightarrow{r_2} = 0{,}5a \cdot \overrightarrow{1_x} + y \cdot \overrightarrow{1_y} + z \cdot \overrightarrow{1_z} \; . \qquad (1.20)$$

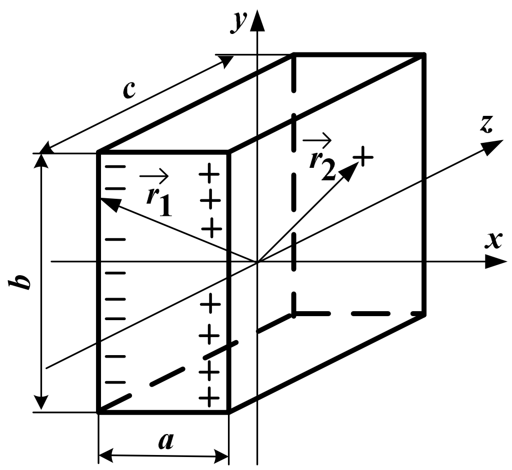


Рис. 1.8.

Подстановка (1.19) и (1.20) в (1.15) позволяет получить вектор дипольного момента заряженного прямоугольного тела

$$\vec{p} = \int \vec{r} \cdot dq = \int \vec{r_1} \cdot \sigma dS - \int \vec{r_2} \cdot \sigma dS = \int \vec{r_1} \cdot \sigma dy \cdot dz - \int \vec{r_2} \cdot \sigma dy \cdot dz =$$

$$= \int\limits_{-0,5b}^{0,5b} dy \int\limits_{-0,5c}^{0,5c} (-0,5a \cdot \vec{1_x} + y \cdot \vec{1_y} + z \cdot \vec{1_z}) \cdot \sigma dz -$$

$$- \int\limits_{-0,5b}^{0,5b} dy \int\limits_{-0,5c}^{0,5c} (0,5a \cdot \vec{1_x} + y \cdot \vec{1_y} + z \cdot \vec{1_z}) \cdot \sigma dz =$$

$$= -\sigma \cdot abc \cdot \vec{1_x} \ , \qquad (1.21)$$

который направлен из начала координат по оси *x* по направлению от отрицательных зарядов к положительным зарядам ($\sigma < 0$).

Найдем дипольный момент весьма тонкого заряженного кольца радиуса *R* и толщиной *d* при $R \gg d$, имеющего линейную плотность связанных или свободных зарядов

$$\tau \approx -\tau_m \cdot \cos(\alpha), \qquad (1.22)$$

где $\tau_m = d \cdot \sigma_m$, Кл/м – максимальная линейная плотность отрицательных зарядов при $\alpha = \pi$, причем σ_m берется согласно (1.14).

Начало прямоугольной системы координат *x*, *y* выберем в центре кольца так, чтобы кольцо располагалось в плоскости *x*, *y* и ось *x* была направлена в точку с максимальной положительной линейной плотностью зарядов (рис. 1.7). В этих условиях радиус-вектор будет следующим

$$\vec{r} = R\cos(\alpha)\cdot\vec{1_x} + R\sin(\alpha)\cdot\vec{1_y} \ . \tag{1.23}$$

Подстановка (1.23) в (1.15) с учетом (1.22) позволяет найти вектор дипольного момента заряженного кольца

$$\vec{p} = \int \vec{r}dq = \int \vec{r}\cdot\tau dl = \int_0^{2\pi}\left[R\cos(\alpha)\cdot\vec{1_x} + R\sin(\alpha)\cdot\vec{1_y}\right]\cdot\tau\cdot Rd\alpha =$$

$$= -\tau_m R^2\cdot\left[\int_0^{2\pi}\cos(\alpha)^2 d\alpha\right]\cdot\vec{1_x} - \tau_m R^2\cdot\left[\int_0^{2\pi}\sin(\alpha)\cdot\cos(\alpha)d\alpha\right]\cdot\vec{1_y} =$$

$$= -\tau_m\cdot\pi R^2\cdot\vec{1_x} \ , \tag{1.24}$$

который по-прежнему направлен из начала координат по оси x от отрицательных зарядов к положительным зарядам ($\tau_m < 0$).

Рассчитаем дипольный момент весьма тонкого заряженного диска радиуса R , у которого поверхностная плотность зарядов изменяется согласно (1.14). Как и для кольца выбреем начало координат x, y в центре диска (рис. 1.7), тогда при $0 \le r \le R$ радиус-вектор будет равен

$$\vec{r} = r\cos(\alpha)\cdot\vec{1_x} + r\sin(\alpha)\cdot\vec{1_y} \ , \tag{1.25}$$

где r – удаление от начала координат.

Подстановка (1.25) в (1.15) с учетом (1.14) позволяет определить вектор дипольного момента заряженного диска

$$\vec{p} = \int \vec{r}dq = \int \vec{r}\cdot\sigma dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{R}\left[r\cos(\alpha)\cdot\vec{1_x} + r\sin(\alpha)\cdot\vec{1_y}\right]\cdot\sigma\cdot(rdrd\alpha) =$$

$$= -\sigma_m\cdot\left[\int_0^{2\pi}\cos(\alpha)^2 d\alpha\int_0^{R} r^2 dr\right]\cdot\vec{1_x} - \sigma_m\cdot\left[\int_0^{2\pi}\sin(\alpha)\cos(\alpha)d\alpha\int_0^{R} r^2 dr\right]\cdot\vec{1_y} =$$

$$= -\sigma_m\cdot\frac{\pi R^3}{3}\cdot\vec{1_x} \ , \tag{1.26}$$

который направлен из начала координат по оси x ($\sigma_m < 0$).

Вычислим дипольный момент заряженного сферического тела радиуса R , у которого поверхностная плотность зарядов зависит от одной координаты θ и изменяется подобно (1.14). Выберем начало прямоугольной системы координат в центре сферы так, чтобы ось z была направлена в точку с максимальной поверхностной плотностью заряда (рис. 1.9). Радиус-вектор получается следующим

$$\vec{r} = R\cos(\alpha)\sin(\theta)\cdot\vec{1_x} + R\sin(\alpha)\sin(\theta)\cdot\vec{1_y} + R\cos(\theta)\cdot\vec{1_z} \ . \tag{1.27}$$

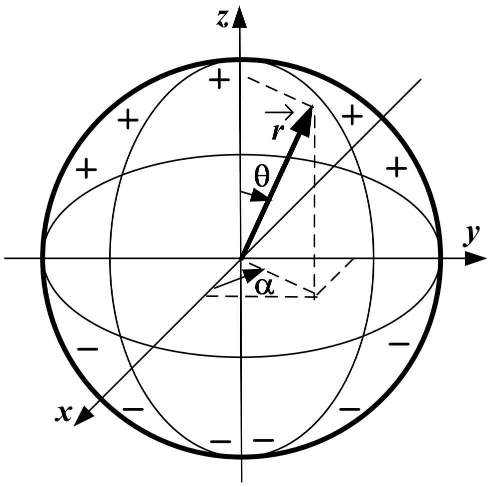


Рис. 1.9.

Подстановка (1.27) в (1.15) с учетом (1.14) для угла θ позволяет рассчитать вектор дипольного момента заряженной сферы

$$\vec{p} = \int \vec{r} dq = \int \vec{r} \cdot \sigma dS = \int \int \vec{r} \cdot \left[-\sigma_m \cdot \cos(\theta) \right] \cdot \left[R^2 d\alpha \cdot \sin(\theta) d\theta \right] =$$

$$= -\sigma_m R^3 \cdot \left[\int_0^{2\pi} \cos(\alpha) d\alpha \int_0^{\pi} \sin(\theta)^2 \cos(\theta) d\theta \right] \cdot \vec{1_x} -$$

$$-\sigma_m R^3 \cdot \left[\int_0^{2\pi} \sin(\alpha) d\alpha \int_0^{\pi} \sin(\theta)^2 \cos(\theta) d\theta \right] \cdot \vec{1_y} -$$

$$-\sigma_m R^3 \cdot \left[\int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\pi} \sin(\theta) \cos(\theta)^2 d\theta \right] \cdot \vec{1_z} = -\sigma_m \cdot \frac{4\pi R^3}{3} \cdot \vec{1_z}, \qquad (1.28)$$

который направлен из начала координат по оси z ($\sigma_m < 0$).

Определим дипольный момент двух разноименно заряженных параллельных нитей длиной l при расстоянии между ними a, когда нити имеют постоянную линейную плотность зарядов $-\tau$ и $+\tau$. Начало прямоугольной системы координат выберем в центре между нитями так, чтобы ось z была параллельна нитям и плоскость $z0x$ совпадала с плоскостью нитей (рис. 1.10). В результате радиус-вектор отрицательно заряженной нити ($-\tau$) будет равен

$$\vec{r_1} = -0{,}5a \cdot \vec{1_x} + 0 \cdot \vec{1_y} + z \cdot \vec{1_z} \ , \qquad (1.29)$$

а для положительно заряженной нити ($+\tau$) получится таким

$$\vec{r_2} = 0{,}5a \cdot \vec{1_x} + 0 \cdot \vec{1_y} + z \cdot \vec{1_z} \ . \qquad (1.30)$$

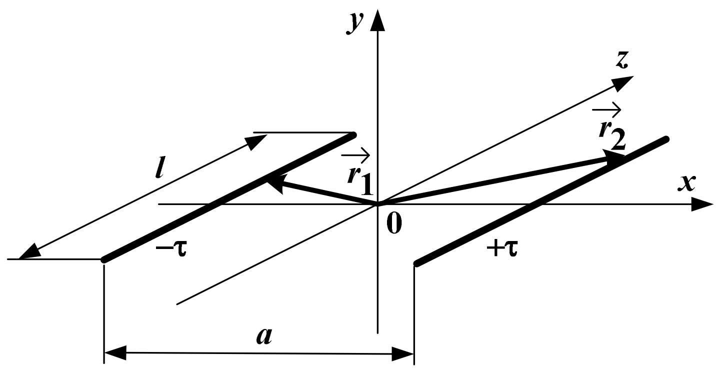


Рис. 1.10.

Подстановка (1.29) и (1.30) в (1.15) дает возможность рассчитать вектор дипольного момента двух разноименно заряженных параллельных нитей

$$\vec{p} = \int \vec{r} \cdot dq = -\int \vec{r_1} \cdot \tau dl + \int \vec{r_2} \cdot \tau dl = -\int \vec{r_1} \cdot \tau dz + \int \vec{r_2} \cdot \tau dz =$$

$$= -\tau \int\limits_{-0,5l}^{0,5l} \left[-0,5a \cdot \vec{1_x} + z \cdot \vec{1_z} \right] \cdot dz + \tau \int\limits_{-0,5l}^{0,5l} \left[0,5a \cdot \vec{1_x} + z \cdot \vec{1_z} \right] \cdot dz =$$

$$= \tau \cdot a \cdot l \cdot \vec{1_x}\ , \qquad (1.31)$$

который направлен из начала координат по оси x ($\tau > 0$).

Найдем дипольный момент заряженной прямолинейной нити длиной l. Начало прямоугольной системы координат выберем в центре нити так, чтобы ось z совпадала с ней (рис. 1.11).

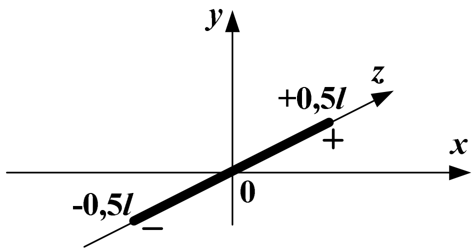


Рис. 1.11.

Суммарный заряд нити равен нулю и изменение линейной плотности заряда вдоль нити примем равным

$$\tau = \tau_m \cdot \sin(\frac{\pi z}{l})\,. \qquad (1.32)$$

Радиус-вектор будет совпадать с осью z:

$$\vec{r} = z \cdot \vec{1_z}. \tag{1.33}$$

Подстановка (1.32) и (1.33) в (1.15) дает возможность найти вектор дипольного момента заряженной прямолинейной нити

$$\vec{p} = \int \vec{r} \cdot dq = \int \vec{r_1} \cdot \tau dl = \tau_m \cdot \left[\int_{-0,5l}^{0,5l} z \cdot \sin(\frac{\pi z}{l}) dz \right] \cdot \vec{1_z} = \tau_m \cdot \frac{2l^2}{\pi^2} \cdot \vec{1_z}, \tag{1.34}$$

который направлен из начала координат по оси z ($\tau_m > 0$).

Пример 1.4. Определить вектор дипольного момента дискретной системы трех точечных зарядов: $q_1 = -5 \cdot 10^{-10}$ Кл; $q_2 = 3 \cdot 10^{-10}$ Кл; $q_3 = 2 \cdot 10^{-10}$ Кл. Заряды имеют следующие координаты:
заряд $q_1 - x_1 = 0,\ y_1 = -2$ м, $z_1 = 0$; заряд $q_2 - x_2 = 0,\ y_2 = 1$ м, $z_2 = 0$;
заряд $q_3 - x_3 = 3$ м, $y_3 = 0,\ z_3 = 2$ м.

Решение. По формуле (1.18) рассчитываем вектор дипольного момента:

$$\vec{p} = \sum_k (q_k \cdot x_k) \cdot \vec{1_x} + \sum_k (q_k \cdot y_k) \cdot \vec{1_y} + \sum_k (q_k \cdot z_k) \cdot \vec{1_z} =$$

$$= (q_1 \cdot x_1 + q_2 \cdot x_2 + q_3 \cdot x_3) \cdot \vec{1_x} + (q_1 \cdot y_1 + q_2 \cdot y_2 + q_3 \cdot y_3) \cdot \vec{1_y} +$$

$$+ (q_1 \cdot z_1 + q_2 \cdot z_2 + q_3 \cdot z_3) \cdot \vec{1_z} =$$

$$= (2 \cdot 10^{-10} \cdot 3) \cdot \vec{1_x} + (5 \cdot 10^{-10} \cdot 2 + 3 \cdot 10^{-10} \cdot 1) \cdot \vec{1_y} + (2 \cdot 10^{-10} \cdot 2) \cdot \vec{1_z} =$$

$$= \left[6 \cdot \vec{1_x} + 13 \cdot \vec{1_y} + 4 \cdot \vec{1_z} \right] \cdot 10^{-10} \text{ Кл·м.}$$

По формуле (1.16) находим модуль этого вектора

$$p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2} = 10^{-10} \cdot \sqrt{6^2 + 13^2 + 4^2} = 14{,}87 \cdot 10^{-10} \text{ Кл·м.}$$

1.5. Электростатическое поле на далёких расстояниях

В ряде случаев возникает задача о нахождении напряженности и потенциала на расстояниях, которые значительно превышают размеры заряженных тел. Такие расстояния называются *далёкими*. При расчете полей на далёких расстояниях заряженные тела с суммарными зарядами отличными от нуля заменяют точечными зарядами и расчет ведется по известным формулам (1.3–1.7).

В свою очередь при расчете полей на далёких расстояниях заряженные тела с суммарным нулевым зарядом заменяют эквивалентными диполями и определяют их вектора дипольного момента, которые затем используются при расчете напряженности и потенциала. Так если известен вектор дипольного момента $\vec{p}$, выходящий из выбранного начала координат, то на далеком расстоянии *r* от этого начала координат в некоторой точке А (рис. 1.12) потенциал находится по следующей формуле:

$$\varphi = \frac{p \cdot \cos(\theta)}{4\pi\varepsilon_а r^2} \ , \tag{1.35}$$

где *p* – модуль вектора дипольного момента, определяемый по (1.16);
θ – угол между радиусом *r* и вектором $\vec{p}$.

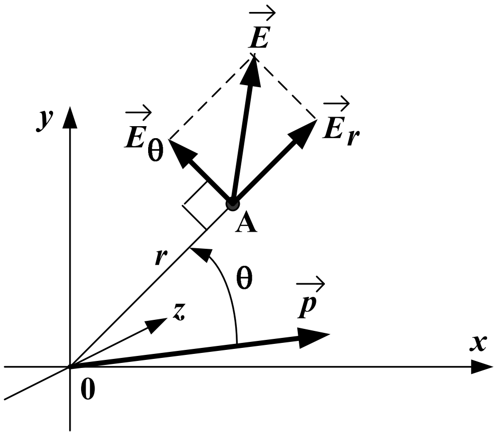


Рис. 1.12

В свою очередь величины составляющих вектора напряженности в точке А рассчитываются так:

$$E_r = \frac{2p\cos(\theta)}{4\pi\varepsilon_а r^3}; \ E_\theta = \frac{p\sin(\theta)}{4\pi\varepsilon_а r^3} \ , \tag{1.36}$$

где E_r – величина составляющей вектора напряженности $\overrightarrow{E_r}$, которая направлена вдоль радиуса *r* от начала координат;
E_θ – величина составляющей вектора напряженности $\overrightarrow{E_\theta}$, которая направлена перпендикулярно радиусу *r* в направлении увеличения угла θ и лежащая в плоскости этого угла.
Результирующий вектор напряженности $\vec{E}$ в точке А находится как геометрическая сумма векторов $\overrightarrow{E_r}$ и $\overrightarrow{E_\theta}$ (рис. 1.12), причем модуль этого вектора будет равен

$$E = \sqrt{E_r^2 + E_\theta^2} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_a r^3} \cdot \sqrt{3\cos(\theta)^3 + 1}\,. \tag{1.37}$$

Если точка А имеет координаты *x*, *y* и *z*, а вектор дипольного момента записан как (1.15) и имеет модуль (1.16), то тогда угол θ можно рассчитать по следующей формуле:

$$\theta = \arccos\left[\frac{x \cdot p_x + y \cdot p_y + z \cdot p_z}{p \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right]. \qquad (1.38)$$

Потенциал и напряженность в точке А от нескольких векторов дипольного момента определяются методом наложения: потенциалы от отдельных дипольных моментов складываются алгебраически, а результирующий вектор напряженности находится как геометрическая сумма векторов напряженности, создаваемых каждым дипольным моментом в отдельности.

Пример 1.5. Определить потенциал и модуль вектора напряженности в точке А, расположенной в воздухе на оси *y* на расстоянии r=10 м от начала прямоугольной системы координат. Вектор дипольного момента равен

$$\vec{p} = 5 \cdot 10^{-8} \cdot \vec{1}_x + 5 \cdot 10^{-8} \cdot \vec{1}_y + 0 \cdot \vec{1}_z \text{ Кл·м.}$$

Решение. По формуле (1.16) находим модуль вектора дипольного момента

$$p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2} = 10^{-8} \cdot \sqrt{5^2 + 5^2 + 0^2} = 7{,}07 \cdot 10^{-8} \text{ Кл·м.}$$

По формуле (1.38) находим угол между вектором дипольного момента и радиусом *r*, совпадающим с осью *y*

$$\theta = \arccos\left[\frac{0 \cdot 5 \cdot 10^{-8} + 10 \cdot 5 \cdot 10^{-8} + 0 \cdot 0}{7{,}07 \cdot 10^{-8} \cdot \sqrt{0^2 + 10^2 + 0^2}}\right] = 45^\circ.$$

По формуле (1.35) вычисляем потенциал в точке А

$$\varphi = \frac{p \cdot \cos(\theta)}{4\pi\varepsilon_\text{a} r^2} = \frac{7{,}07 \cdot 10^{-8} \cdot \cos(45^\circ)}{4\pi \cdot 1 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 10^2} = 4{,}5 \text{ В.}$$

По формулам (1.36) определяем величины составляющих вектора напряженности в точке А

$$E_r = \frac{2p\cos(\theta)}{4\pi\varepsilon_a r^3} = \frac{2 \cdot 7{,}07 \cdot 10^{-8} \cdot \cos(45^\circ)}{4\pi \cdot 1 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 10^3} = 0{,}9 \text{ В/м;}$$

$$E_\theta = \frac{p\sin(\theta)}{4\pi\varepsilon_a r^3} = \frac{7{,}07 \cdot 10^{-8} \cdot \sin(45^\circ)}{4\pi \cdot 1 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 10^3} = 0{,}45 \text{ В/м.}$$

По формуле (1.37) рассчитываем модуль вектора напряженности в точке А

$$E = \sqrt{E_r^2 + E_\theta^2} = \sqrt{0{,}9^2 + 0{,}45^2} = 1{,}006 \text{ В/м.}$$

2. ПАРАМЕТРЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Электрическая цепь – это совокупность соединенных проводниками источников и приемников электромагнитной энергии. Электрическая цепь служит для передачи, распределения и преобразования электромагнитной энергии. Источники преобразуют различные виды энергии в электромагнитную энергию – аккумуляторы, электромашинные генераторы и другие устройства.

Приемники – это накопители и потребители электромагнитной энергии. Накопители запасают и затем отдают в цепь электромагнитную энергию – это индуктивные и емкостные накопители. Потребители преобразуют электромагнитную энергию в другие виды энергии – это нагреватели, лампы, двигатели и другие устройства. Свое назначение электрическая цепь выполняет при наличии в ней электрического тока и напряжения.

Ток – это упорядоченное движение зарядов, равное скорости их перемещения через поперечное сечение участка цепи

$$i = \frac{dq}{dt},\ \text{А} = \frac{\text{Кл}}{\text{с}}. \tag{2.1}$$

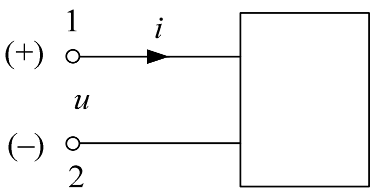


Рис. 2.1.

Для однозначного определения тока за положительное направление достаточно выбрать одно из двух его возможных направлений.

Напряжение равно энергии, затрачиваемой на перемещение единицы заряда из одной точки цепи в другую точку и равно разности потенциалов этих точек

$$u = \frac{dW}{dq} = \varphi_1 - \varphi_2,\ \text{В} = \frac{\text{Дж}}{\text{Кл}}. \tag{2.2}$$

Потенциал φ – это скалярная величина, определяемая с точностью до постоянной и равная работе по переносу единицы положительного заряда из данной точки в точку с $\varphi = 0$. Положительное направление напряжения связано с принятым положительным направлением тока (рис. 2.1).

Постоянные ток и напряжение неизменны во времени и генерируются источниками постоянного тока и напряжения, например: аккумуляторами, генераторами и т.д. При этом вводятся обозначения:

$$i=I,\ u=U,\ P=UI.$$

Мощность характеризует преобразование энергии на участке цепи и равна скорости изменения этой энергии

$$P=\frac{dW}{dt}=u\cdot i,\ \text{Вт}=\frac{\text{Дж}}{\text{с}}. \qquad (2.3)$$

Если $P>0$ – то энергия потребляется на данном участке цепи, а если $P<0$ – то энергия генерируется на этом участке цепи.

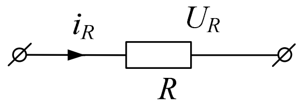
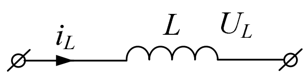
Линейные элементы схем замещения

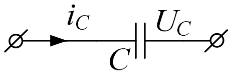
Для облегчения расчета и анализа цепей их заменяют схемами замещения, составляемые из пассивных и активных элементов. Математическое описание этих элементов отражает реальные физические процессы, происходящие в электрических цепях. Линейные цепи характеризуются линейными уравнениями для токов и напряжений и заменяются линейными схемами замещения. Линейные схемы замещения составляются из линейных пассивных и активных элементов, вольтамперные характеристики которых линейны.

1. Пассивные линейные элементы схем замещения.

Взаимосвязь между напряжением и током для идеальных пассивных линейных элементов, их изображения на схемах и энергетические зависимости приведены в табл. 2.1

Таблица 2.1

Элементы	Характеристики		Мощность и энергия
	Напряжение	Ток	
	$u_R=R\cdot i_R$	$i_R={u_R}/{R}$	$p=i_R^2R={u_R^2}/{R}$
	$u_L=L\dfrac{di_L}{dt}$	$i_L=\dfrac{1}{L}\int u_L dt$	$W=\dfrac{Li_L^2}{2}$

	$u_C = \frac{1}{C}\int i_C dt$	$i_C = C\frac{du_C}{dt}$	$W = \frac{Cu_C^2}{2}$

Резистивные элементы необратимо преобразуют электромагнитную энергию в тепло, причем величина сопротивления R (Ом) постоянна.

Индуктивные элементы запасают электромагнитную энергию W в магнитном поле, причем величина индуктивности L (Гн) постоянна.

Схема замещения катушки состоит из последовательно соединенных резистивного и индуктивного элементов (рис. 2.2).

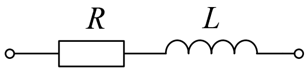


Рис. 2.2.

Емкостные элементы запасают электромагнитную энергию в электрическом поле, причем величина емкости C (Ф) постоянна.

Схема замещения конденсатора состоит из параллельно соединенных резистивного и емкостного элементов (рис. 2.3).

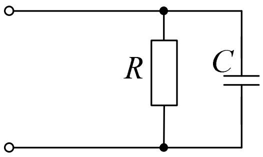


Рис. 2.3.

Примечание:

1) При постоянном токе напряжение индуктивного элемента $U_L = L\frac{dI_L}{dt} = 0,$ а значит, индуктивный элемент – "закоротка" (рис. 2.4).

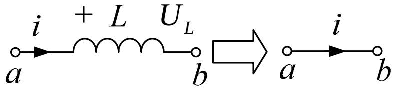


Рис. 2.4.

2) При постоянном напряжении ток емкости $I_C = C\frac{dU_C}{dt} = 0,$ а значит, емкостный элемент – "разрыв" (рис. 2.5).

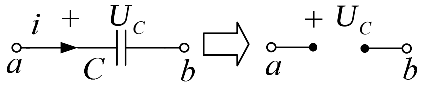
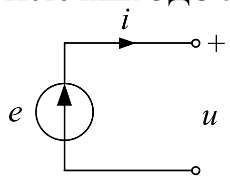
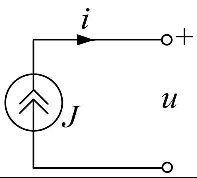


Рис. 2.5.

2. Активные элементы схем замещения.

К активным элементам схем замещения относятся источники энергии, которые делятся на два типа: источники ЭДС (электродвижущая сила) и источники тока. Источники могут быть независимыми и зависимыми (управляемыми). Изображение идеальных источников на схемах и их характеристики приведены в табл. 2.2.

Таблица 2.2

Элементы и их изображения	Характеристики	Генерируемая мощность
Источник ЭДС *e* 	$u=e$	$p=e\cdot i$
Источник тока *J* 	$i=J$	$p=u\cdot J$

Идеальный источник ЭДС *e* характеризуется напряжением *u*, которое не зависит от протекающего тока *i*, причем сопротивление этого источника равно нулю.

Идеальный источник тока *J* характеризуется током *i*, который не зависит от его напряжения *u*, причем сопротивление его равно бесконечности.

Активные и пассивные элементы применяются для составления схем замещения реальных источников электромагнитной энергии (например, схема замещения аккумулятора рис. 2.6).

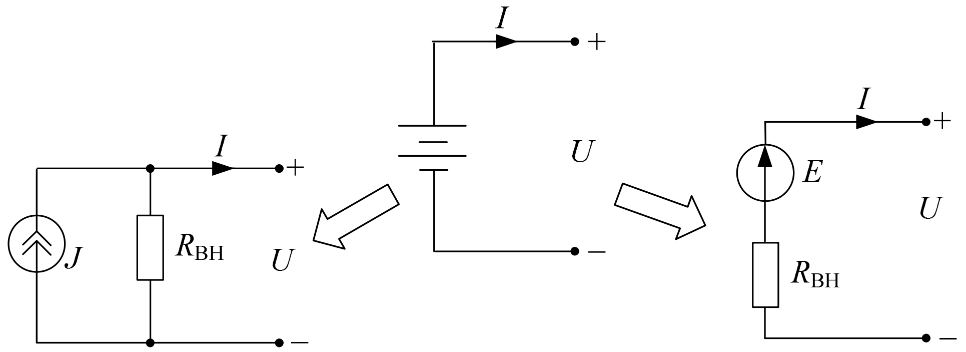


Рис. 2.6.

Топологические понятия

Топологические понятия применяются при анализе и расчете схем замещения электрических цепей.

Ветвь – это часть схемы, содержащая элементы цепи, по которой течет один ток.

Узел – это точка схемы, к которой подходит не менее трех ветвей.

Контур – это замкнутая часть схемы, образованная ее ветвями, причем в элементарный контур не входят другие контуры.

В качестве примера рассмотрим схему, изображенную на рис. 2.7. Здесь a, b, c, d – *узлы* схемы; ab, ac, ad, bc, bd – *ветви*; abda, abdca, abcda и т.д. – *контуры*; причем abca, bdcb, acda – *элементарные контуры*.

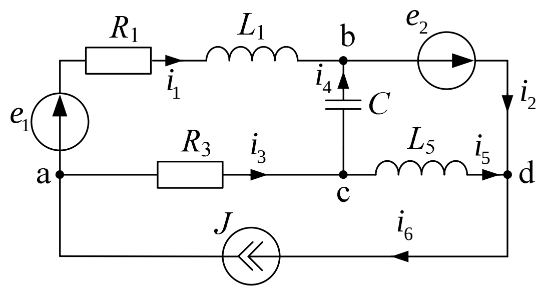


Рис. 2.7.

3. ПОСТОЯННЫЙ ТОК

3.1.Законы Кирхгофа

Законы Кирхгофа справедливы для линейных и нелинейных цепей при постоянных и переменных напряжениях и токах.

Первый закон Кирхгофа

Для любого узла цепи алгебраическая сумма токов равна нулю, причем со знаком "+" принимаются токи, выходящие из узла:

$$\sum i_k = 0 . \qquad (3.1)$$

В качестве примера рассмотрим узел а, изображенный на рис. 3.1. Ток i_1 входит в узел а, а токи i_2 и i_3 выходят из узла а. Таким образом, первый закон Кирхгофа для узла а будет иметь вид: $-i_1 + i_2 + i_3 = 0$.

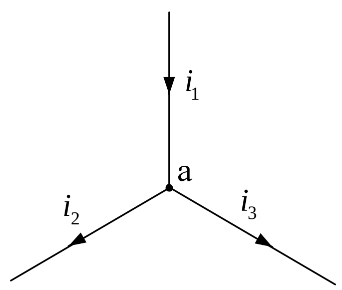


Рис. 3.1.

Физически первый закон Кирхгофа – это закон непрерывности электрического тока.

Второй закон Кирхгофа

Для любого контура цепи алгебраическая сумма напряжений на пассивных элементах равна алгебраической сумме ЭДС и напряжений источников тока. Со знаком "+" принимаются те слагаемые, положительные направления которых совпадают с направлением обхода контура

$$\sum \pm i_k R_k = \sum \pm e_k + \sum \pm u_{J_k} . \qquad (3.2)$$

Второй закон Кирхгофа для контура, изображенного на рис. 3.2 будет иметь вид: $-i_1 R_1 + i_2 R_2 = u + e - u_J$.

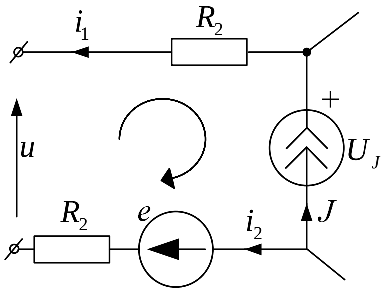


Рис. 3.2.

Физически второй закон Кирхгофа характеризует равновесие напряжений в любом контуре цепи.

Метод законов Кирхгофа

Метод законов Кирхгофа заключается в решении системы уравнений, составленных по первому и второму законам Кирхгофа. По первому закону Кирхгофа необходимо составить

$$n_1 = n_{у} - 1 \qquad (3.3)$$

уравнений, а по второму закону Кирхгофа

$$n_2 = n_{в} - n_{у} + 1 \qquad (3.4)$$

уравнений, где

$n_{у}$ – число узлов схемы;

$n_{в}$ – число ветвей схемы.

Решение системы уравнений, составленных по законам Кирхгофа, позволяет определить все токи и напряжения в рассматриваемой цепи.

3.2. Теорема Телледжена

Для любого момента времени сумма вырабатываемых мощностей источников равна сумме потребляемых мощностей во всех пассивных элементах рассматриваемой цепи

$$\sum \pm e_k i_k + \sum \pm U_{J_q} J_q = \sum u_n i_n \text{ или } P_{в} = P_{п}. \qquad (3.5)$$

Эта теорема является законом сохранения энергии в электрической цепи и применяется как *баланс мощностей* для проверки правильности расчетов.

Составим баланс мощностей для резистивной цепи с постоянными напряжениями и токами для примера, изображенного на рис. 3.3.

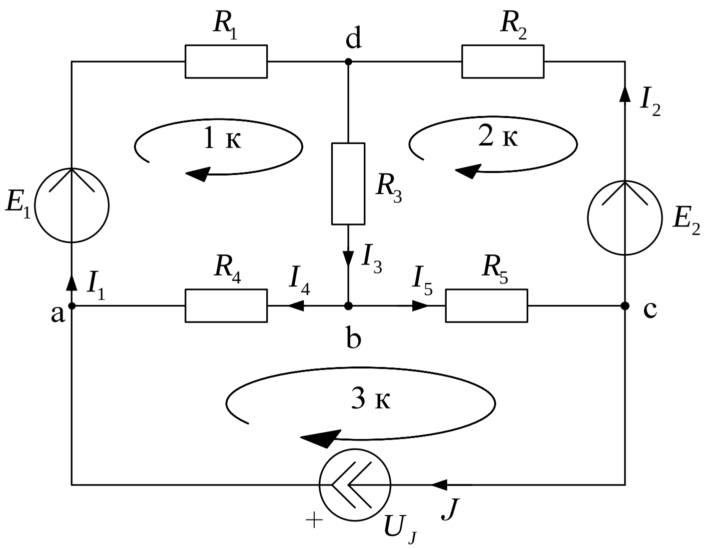


Рис. 3.3.

$$P_в = E_1 I_1 + E_2 I_2 + U_J J = \ldots \text{Вт};$$

$$P_п = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 + I_4^2 R_4 + I_5^2 R_5 = \ldots \text{Вт}.$$

Погрешность расчетов определяется по формуле (3.6) и не должна превышать 3%

$$\delta_P \% = \frac{|P_в - P_п|}{P_в} \cdot 100 \le 3\%. \tag{3.6}$$

3.3. Потенциальная диаграмма

Потенциальная диаграмма – это графическое изображение второго закона Кирхгофа, которая применяется для проверки правильности расчетов в линейных резистивных цепях. Потенциальная диаграмма строится для контура без источников тока, причем потенциалы точек начала и конца диаграммы должны получиться одинаковыми.

Рассмотрим контур abcda (рис. 3.4) схемы, изображенной на рис. 3.3. В ветке ab между резистором R_1 и ЭДС E_1 обозначим дополнительную точку k.

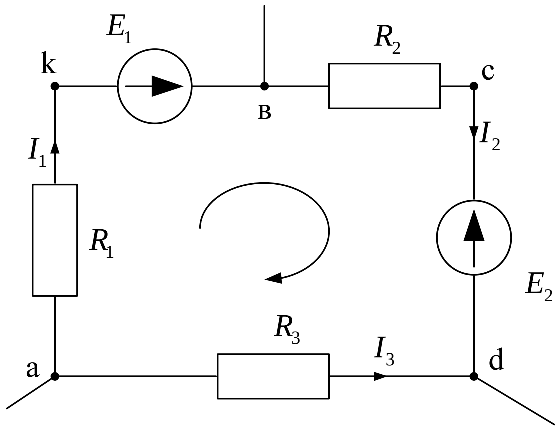


Рис. 3.4.

Потенциал любого узла принимаем равным нулю (например, $\varphi_a = 0$), выбираем обход контура и определяем потенциалы точек контура:

$\varphi_a = 0;$

$\varphi_k = \varphi_a - I_1 R_1;$

$\varphi_b = \varphi_k + E_1;$

$\varphi_c = \varphi_b - I_2 R_2;$

$\varphi_d = \varphi_c - E_2;$

$\varphi_a = \varphi_d + I_3 R_3 = 0.$

При построении потенциальной диаграммы необходимо учитывать, что сопротивление ЭДС равно нулю (рис. 3.5).

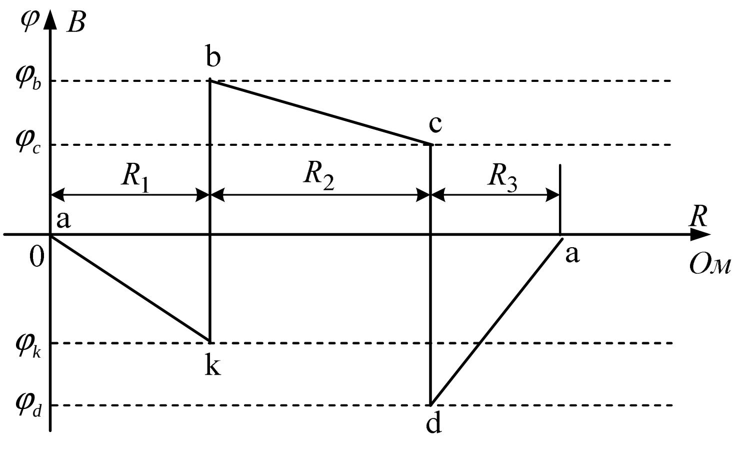


Рис. 3.5.

3.4.Метод контурных токов

Метод контурных токов используется для расчета резистивных линейных цепей с постоянными токами и для расчета комплексных схем замещения линейных цепей с гармоническими токами. При этом в расчет вводятся контурные токи – это фиктивные токи, которые замыкаются в независимых замкнутых контурах, отличающихся друг от друга наличием хотя бы одной новой ветви.

В качестве примера рассмотрим контур, изображенный на рис. 3.6.

Обозначим контурные токи I_{11}, I_{22}, I_{33}, I_{44}.

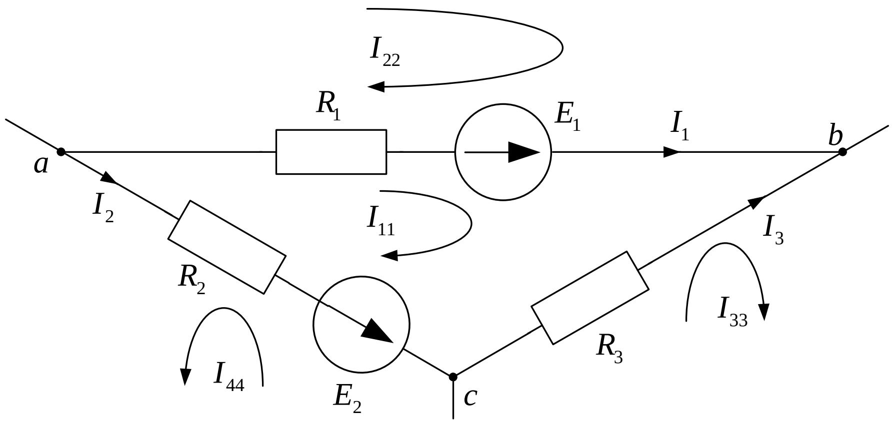


Рис. 3.6.

Ток в каждой ветви равен алгебраической сумме контурных токов через нее проходящих, причем со знаком “+” берут те контурные токи, направления которых совпадает с направлением тока в ветви.

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= I_{11} - I_{22} \\ I_2 &= -I_{11} - I_{44} \\ I_3 &= I_{33} - I_{11} \end{aligned}\right\} \text{ – токи ветвей контура.}$$

По второму закону Кирхгофа для данного контура (рис. 3.6) запишем уравнение:

$$R_1 I_1 - R_3 I_3 - R_2 I_2 = E_1 - E_2$$

или

$$R_1\left(I_{11} - I_{22}\right) - R_3\left(I_{33} - I_{11}\right) - R_2\left(I_{11} - I_{44}\right) = E_1 - E_2.$$

Тогда для контура с током I_{11} (рис. 3.6) получаем:

$$\left(R_1 + R_2 + R_3\right) I_{11} - R_1 I_{22} - R_3 I_{33} + R_2 I_{44} = E_1 - E_2.$$

Таким образом, для рассматриваемого контура уравнение по методу контурных токов записывается следующим образом:

$$R_{kk}I_{kk} + \sum \pm R_{km}I_{mm} = E_{kk}, \qquad (3.3)$$

где

R_{kk} – суммарное сопротивление k – контура;

I_{kk} – контурный ток k – контура;

R_{km} – общее сопротивление между k – контуром и m – контуром;

I_{mm} – соседний контурный ток m – контура;

E_{kk} – суммарная ЭДС k – контура.

Контурный ток рассматриваемого контура умножается на сумму сопротивлений своего контура, причем перед этим произведением ставится знак "+". Соседний контурный ток умножается на общее сопротивление между соседним и рассматриваемым контурными токами, причем перед этим произведением ставится знак "+", если направления этих контурных токов в общем сопротивлении совпадают между собой, и ставится знак "–", если направления их не совпадают. В правой части уравнения записывается алгебраическая сумма ЭДС рассматриваемого контура, причем со знаком "+" берутся те ЭДС, направления которых совпадают с направлением рассматриваемого контурного тока. Для контура с источником тока контурное уравнение не составляется, так как контурный ток этого контура известен и равен току источника тока, причем через источник тока должен проходить только один контурный ток.

Таким образом, по методу контурных токов необходимо решить значительно меньше уравнений по сравнению с методом законов Кирхгофа.

3.5.Метод узловых потенциалов

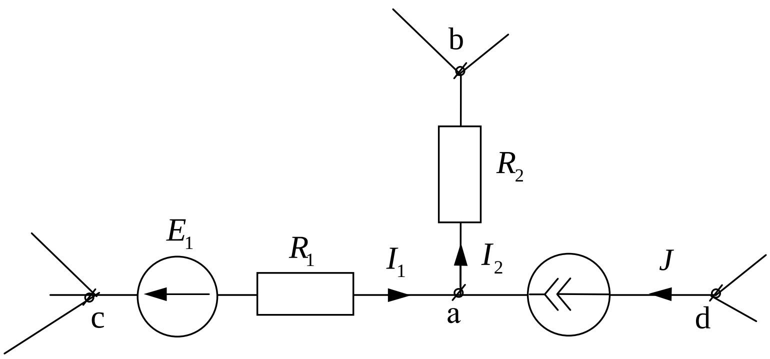


Рис. 3.7.

Метод узловых потенциалов используется для расчета сложных линейных схем замещения с постоянными или гармоническими напряжениями и токами. Расчетные уравнения данного метода могут быть доказаны при помощи законов Кирхгофа и обобщенного закона Ома. Получим расчетное уравнение метода узловых потенциалов для узла “a” некоторой схемы.

По обобщенному закону Ома:

$I_1 = (\varphi_c - \varphi_a - E_1)\cdot Y_1$; $I_2 = (\varphi_c - \varphi_b)\cdot Y_2$, где $Y_1 = 1/R_1$, $Y_2 = 1/R_2$.

По первому закону Кирхгофа для узла “a”:

$-I_1 + I_2 - J = 0$ или $-(\varphi_c - \varphi_a - E_1)\cdot Y_1 + (\varphi_a - \varphi_b)\cdot Y_2 = J$.

Тогда $(Y_1 + Y_2)\cdot \varphi_a - Y_2 \cdot \varphi_b - Y_1 \cdot \varphi_c = -E_1 \cdot Y_1 + J$.

Т.е. в общем виде для k – узла:

$$Y_{kk} \cdot \varphi_k - \sum Y_{mk} \cdot \varphi_m = I_k^{(y)}, \qquad (3.4)$$

где Y_{kk} – узловая проводимость k – узла,

φ_k – потенциал k – узла,

Y_{mk} – проводимость ветви, содержащей k и m узлы,

$I_k^{(y)} = \sum \pm E_q Y_q + \sum \pm J_q$ – узловой ток k – узла.

Таким образом, потенциал φ_k рассматриваемого k – узла умножается на сумму проводимостей ветвей подходящих к этому узлу, причем перед этим произведением всегда ставится знак “+” и проводимость ветви с источником тока равна нулю. Потенциал φ_m соседнего m – узла умножается на проводимость ветви, соединяющей рассматриваемый k – узел с m – узлом, причем перед этим произведением всегда ставится знак “–”. В правой части уравнения записывается узловой ток рассматриваемого k – узла, равный алгебраической сумме подходящих к этому узлу токов источников тока и произведений подходящих к этому узлу ЭДС на проводимости своих ветвей. В узловом токе со знаком “+” берутся те слагаемые, у которых источники тока и ЭДС направлены в рассматриваемый k – узел. Потенциал одного из узлов принимается равным нулю, причем за такой узел принимается узел, соединенный с корпусом или “землей”, или один из узлов, к которому подходит ветвь с нулевым сопротивлением и ЭДС.

Таким образом, для схемы с n_y узлами по методу узловых потенциалов составляется система, содержащая не более $n_1 = n_y - 1$ уравнений, из решения которых определяются потенциалы узлов, а затем по обобщенному закону Ома рассчитываются токи и напряжения в ветвях схемы.

3.6. Метод преобразования

На основе приведенных ниже правил можно реализовать метод преобразований для расчета тока или напряжения в k – ветви схемы. Для этого схема преобразуется до одного контура с искомым током или напряжением, где эти величины легко определяются.

Преобразования резистивных и комплексных схем используются для их упрощения и могут быть доказаны при помощи законов Ома и Кирхгофа. Приведем правила преобразований без доказательства на примере резистивных цепей.

Правило разброса тока

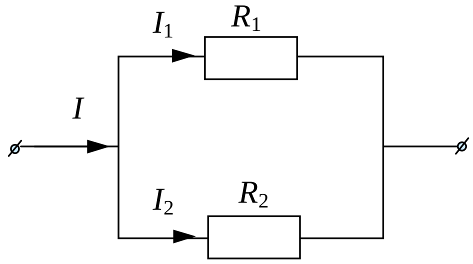


Рис. 3.8.

Токи I_1 и I_2 в двух параллельных пассивных ветвях с сопротивлениями R_1 и R_2 соответственно (рис. 3.8) по правилу разброса тока определяются следующим образом:

$$I_1 = I\frac{R_2}{R_1 + R_2};\ I_2 = I\frac{R_1}{R_1 + R_2}. \tag{3.5}$$

Обобщенный закон Ома

Зная потенциалы узлов можно определить токи по обобщенному закону Ома. Если ветвь содержит источник ЭДС (рис. 3.9), то ток в этой ветви равен отношению разности высшего (из которого ток «вытекает») и низшего потенциалов плюс ЭДС (если ЭДС совпадает с направлением тока, иначе берется знак «-») к сопротивлению в этой ветви.

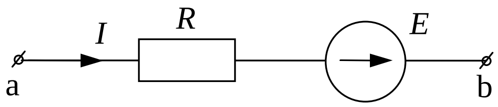


Рис. 3.9.

$$I = \frac{\varphi_a - \varphi_b + E}{R}, \tag{3.6}$$

В случае, когда ветвь содержит сопротивление и источник тока (рис. 3.10), напряжение на источнике тока определяется как разность потенциалов φ_a и φ_b плюс произведение тока источника на сопротивление находящееся в этой ветви.

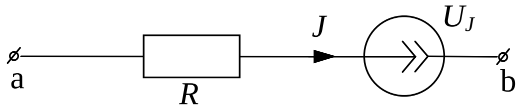


Рис. 3.10.

$$U_J = \varphi_b - \varphi_a + RJ\,. \tag{3.7}$$

Последовательное соединение ЭДС и сопротивлений

При последовательном соединении сопротивлений (рис. 3.11) эквивалентное сопротивление определяется как сумма последовательно соединенных сопротивлений.

$$R_{экв}=R_1+R_2+\ldots+R_N \tag{3.8}$$

Эквивалентное ЭДС определяется как алгебраическая сумма последовательно соединенных ЭДС. Со знаком «+» учитываются те ЭДС, направления которых совпадают с эквивалентной ЭДС (рис. 3.11).

$$E_{экв}=\Sigma\pm E_k \tag{3.9}$$

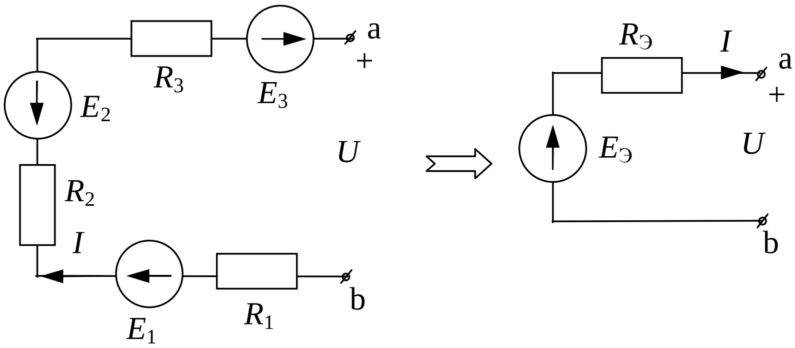


Рис. 3.11.

По формулам (3.8) и (3.9) для примера, приведенного на рис. 3.11 получаем:

$$E_Э = E_1 - E_2 + E_3\,,\; R_Э = R_1 + R_2 + R_3\,.$$

Параллельное соединение источников тока

Параллельно соединенные источники тока можно заменить эквивалентным источником тока (рис. 3.12), значение которого равно алгебраической сумме значений исходных источников. Причем со знаком «+» учитываются те значения источников тока, направления которых совпадают с направлением эквивалентного источника тока (3.10).

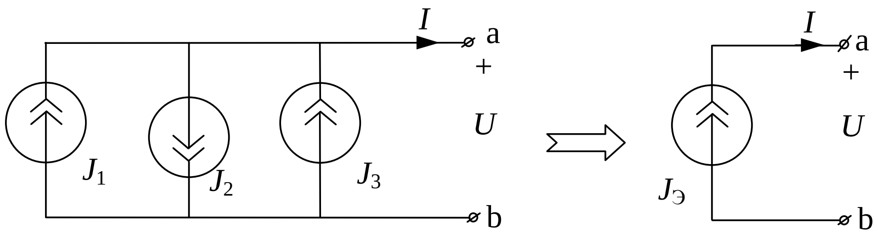


Рис. 3.12.

$$J_{экв}=\Sigma\pm J_k \tag{3.10}$$

Для примера, приведенного на рис. 3.12 по формуле (3.10) получаем:

$$J_Э = J_1 - J_2 + J_3.$$

Параллельное соединение ЭДС, источников тока и сопротивлений

Параллельно соединенные ЭДС, источники тока и сопротивления (рис. 3.13) можно заменить эквивалентными ЭДС и сопротивлением. При этом эквивалентное сопротивление определяется как

$$R_{экв} = \frac{1}{1/R_1 + 1/R_2 + \dots 1/R_N} \tag{3.11}$$

При этом надо учитывать, что сопротивление ветви содержащей источник тока равно ∞.

Эквивалентное ЭДС определяется по формуле:

$$E_{экв} = \frac{E_1}{R_1} \tag{3.12}$$

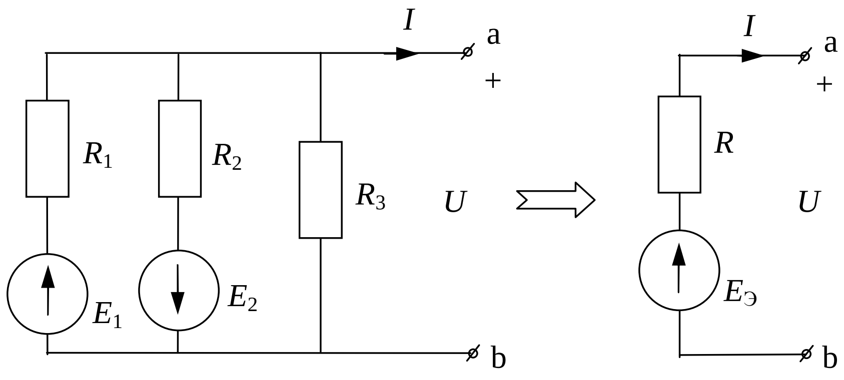


Рис. 3.13.

$$E_Э = \left(\frac{E_1}{R_1} - \frac{E_2}{R_2}\right) \cdot R_Э, \quad R_Э = \frac{1}{1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3}.$$

Замена источника тока на источник ЭДС и наоборот

$$E = JR_1, \quad R_1 = R_2.$$

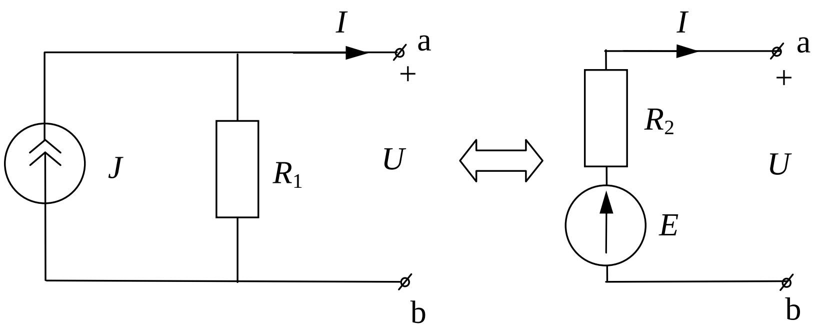


Рис. 3.14.

Преобразование треугольника в звезду и наоборот

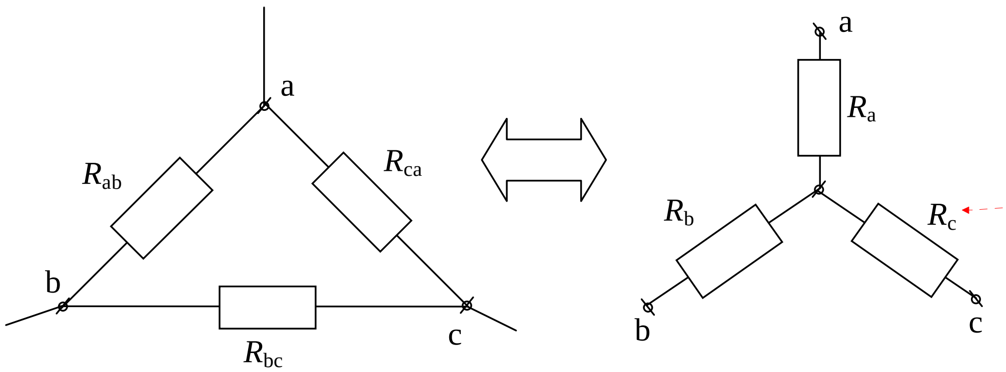


Рис. 3.15.

$$R_{ab} = R_a + R_b + \frac{R_a \cdot R_b}{R_c}, \; R_a = \frac{R_{ab} \cdot R_{ca}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}},$$
$$R_{bc} = R_b + R_c + \frac{R_b \cdot R_c}{R_a}, \; R_b = \frac{R_{ab} \cdot R_{bc}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}, \qquad (3.13)$$
$$R_{ca} = R_c + R_a + \frac{R_c \cdot R_a}{R_b}. \; R_c = \frac{R_{bc} \cdot R_{ca}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}.$$

Перенос источников ЭДС

Данное преобразование особо хорошо использовать в случае, если в схеме есть ветвь, содержащая только источник ЭДС (рис. 3.16, а). В этом случае источник ЭДС можно вынести за узел (рис. 3.16, б), что позволяет упростить схему, исключив одну ветвь и один узел (рис. 3.16, с).

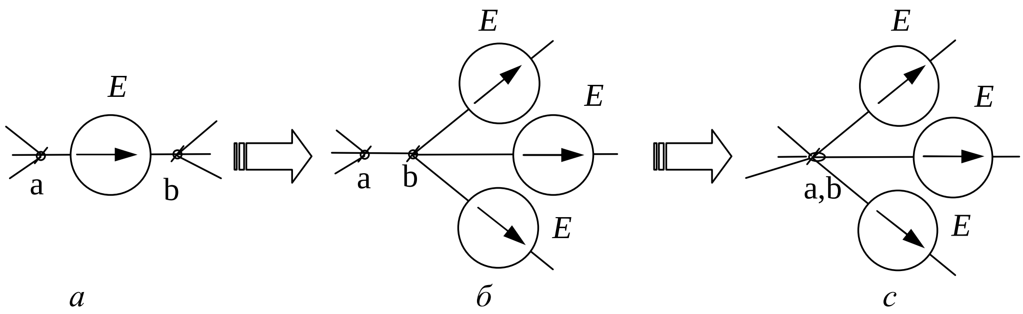
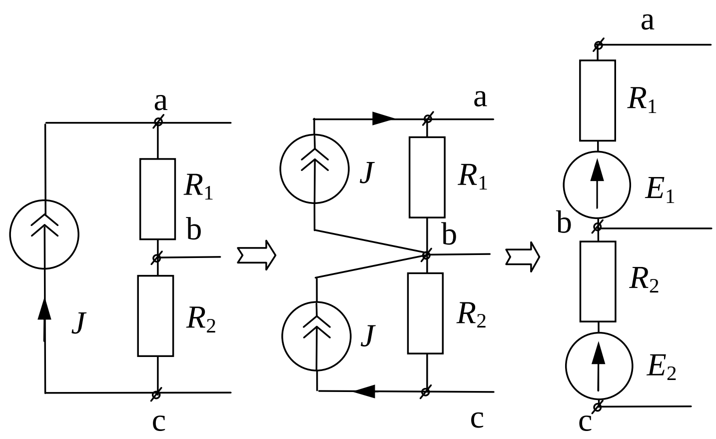


Рис. 3.16.

Перенос источников тока

В случае если источник тока J подключен к сопротивлениям R_1 и R_2 как показано на рис. 3.17, а, его можно разбить на два источника, по величине равных J и подключенных параллельно каждому сопротивлению (рис. 3.17, б). Воспользовавшись преобразованием замены источника тока на источник ЭДС (рис. 3.17, с), получаем схему, в которой на одну ветвь будет меньше.



а *б* *с*

Рис. 3.17.

$$E_1 = JR_1, \quad E_2 = JR_2.$$

3.7.Метод наложения

Метод наложения справедлив для линейных цепей и основывается на принципе наложения.

Принцип наложения

Ток (напряжение) в любой ветви можно рассматривать как алгебраическую сумму составляющих от действия каждого источника в отдельности. При этом со знаком "+" пишутся те составляющие, направления которых совпадает с направлением результирующих величин.

$$I_k = \sum \pm I_k^{(n)} \tag{3.14}$$

$$U_k = \sum \pm U_k^{(n)} \tag{3.15}$$

При этом для расчета составляющих токов и напряжений исходная схема разбивается на подсхемы, в каждой из которых действует один источник ЭДС или тока, причем остальные источники ЭДС закорочены, а ветви с остальными источниками тока разорваны.

Определим ток I_1 для схемы рис. 3.18 с помощью метода наложения.

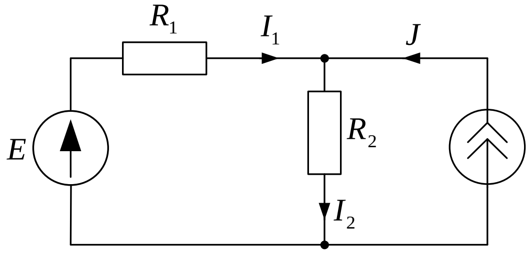


Рис. 3.18.

а) Рассмотрим подсхему с ЭДС *E* (рис. 3.19)

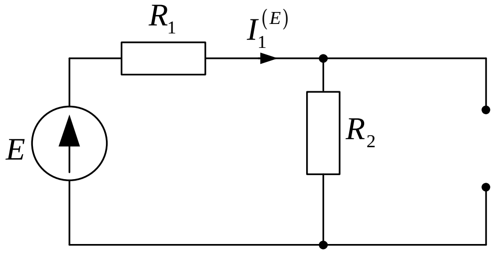


Рис. 3.19.

$$I_1^{(E)} = \frac{E}{(R_1 + R_2)}.$$

б) Рассмотрим подсхему с источником тока *J* (рис. 3.20)

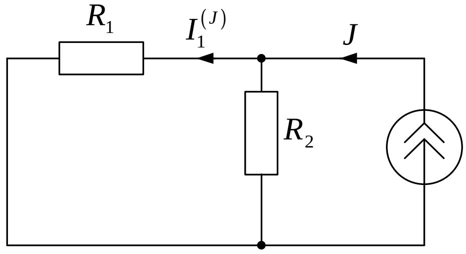


Рис. 3.20.

$$I_1^{(J)} = \frac{JR_2}{(R_1 + R_2)}.$$

Искомый ток I_1 исходной схемы (рис. 3.18) определится следующим образом:

$$I_1 = I_1^{(E)} - I_1^{(J)} = \frac{E}{R_1 + R_2} - \frac{JR_2}{R_1 + R_2}.$$

3.8. Метод эквивалентного генератора

Метод эквивалентного генератора основывается на теореме об эквивалентном генераторе.

Теорема об эквивалентном генераторе

Теорема об эквивалентном генераторе применяется для расчета и анализа линейных цепей с постоянными или гармоническими токами и напряжениями. Эта теорема доказывается при помощи теоремы компенсации и принципа наложения. Любой активный двухполюсник, рассматриваемый относительно двух зажимов (выводов), можно представить в виде эквивалентного источника ЭДС или тока, с ЭДС и током равными соответственно напряжению холостого хода или току короткого замыкания относительно этих зажимов (рис. 3.21). При этом внутреннее сопротивление этих источников равно эквивалентному сопротивлению активного двухполюсника относительно рассматриваемых зажимов.

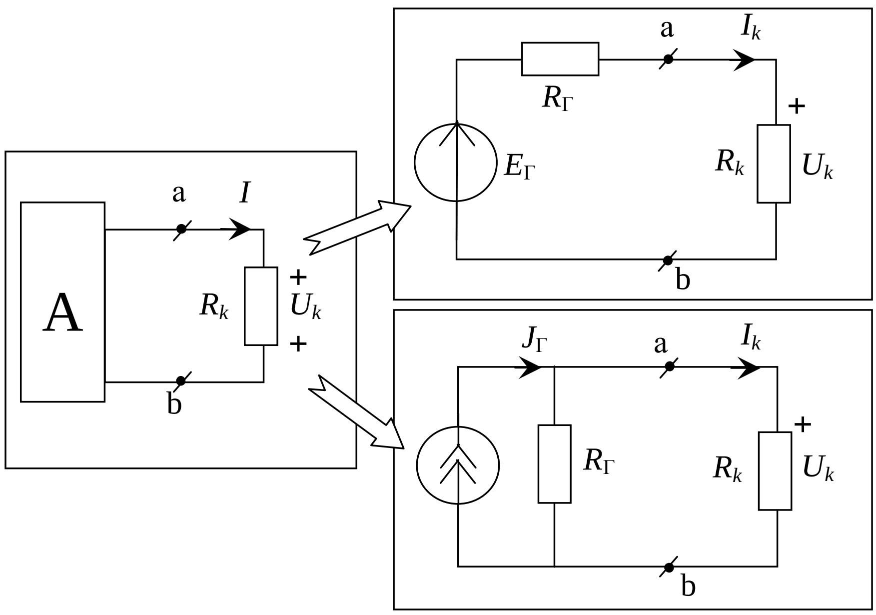


Рис. 3.21.

Где $E_Г = U_k^{(\text{хх})}$, когда I_k=0 при R_k=∞;

$J_Г = \dfrac{E_Г}{R_Г} = I_k^{(\text{кз})}$, когда U_k=0 при R_k=0;

$R_Г = R_{ab}$,

"А" – активный двухполюсник, содержащий источники ЭДС и тока.

Эта теорема используется как метод эквивалентного генератора для расчета некоторого тока, протекающего в k - ветви

$$I_k = \frac{E_Г}{R_Г + R_k} = \frac{J_Г \cdot R_Г}{R_Г + R_k} = \frac{J_Г}{1 + R_k / R_Г} \qquad (3.16)$$

где $E_Г = U_k^{(\text{хх})}$, $J_Г = I_k^{(\text{кз})}$, $R_Г = R_{\text{экв}}$.

Графическое определение I_k и U_k приведено на рис. 3.22.

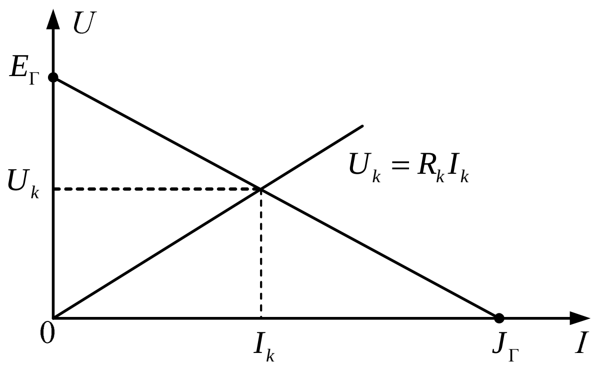


Рис. 3.22.

В качестве примера рассмотрим схему, изображенную на рис. 3.23. Необходимо определить токи I_1 и I_2.

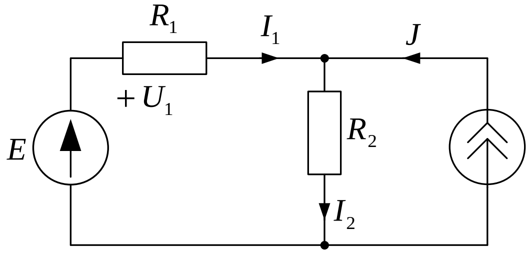


Рис. 3.23.

Для этого вместо сопротивления R_1 делаем разрыв ($R_1=\infty$) и из полученной схемы (рис. 3.24) определяем напряжение холостого хода.

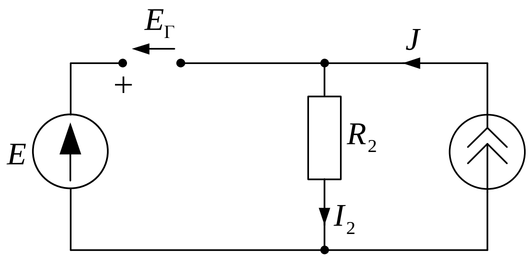


Рис. 3.24.

Для определения $R_Г$ перерисовываем схему в следующем виде (рис. 3.25):

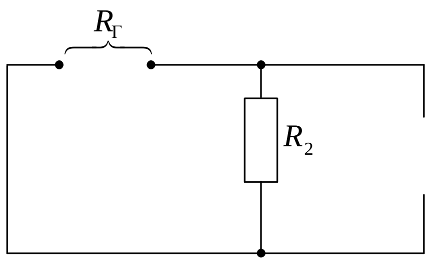


Рис. 3.25.

Для тока I_1 имеем:

$$E_Г = E - R_2 J;\ J_Г = E/R_2 - J;\ R_Г = R_2;$$

$$I_1 = \frac{E_Г}{(R_Г + R_1)} = \frac{E}{(R_1 + R_2)} - \frac{R_2 J}{(R_1 + R_2)}.$$

Ток I_2 найдем по первому закону Кирхгофа: $I_2=I_1+J$.

4. ЗАДАНИЕ №1

Линейные электрические цепи с постоянными напряжениями и токами

Для заданной схемы с постоянными во времени источниками ЭДС и тока, принимая

$$e_1(t) = E_1,\ e_2(t) = E_2,\ e_3(t) = 0,\ J(t) = J,$$

выполнить следующее.

1. Изобразить схему, достаточную для расчета токов ветвей, соединяющих узлы, помеченные буквами, указав их номера и направления.
2. Определить токи во всех ветвях схемы и напряжение на зажимах источника тока:
   - по законам Кирхгофа,
   - методом контурных токов,
   - методом узловых потенциалов.
   - Составить баланс вырабатываемой и потребляемой мощностей.
   - Определить ток в ветви ab:
   - методом наложения,
   - методом преобразований.
3. Рассматривая цепь относительно сопротивления R ветви ab как активный двухполюсник, заменить его эквивалентным генератором, определить параметры эквивалентного генератора и рассчитать ток в ветви ab, построить внешнюю характеристику эквивалентного генератора и по ней графически определить ток в ветви ab.
4. Для любого контура без источника тока построить потенциальную диаграмму.
5. Определить показание вольтметра.
6. Сравнить результаты вычислений, оценить трудоемкость методов расчета и сформулировать выводы по выполненным пунктам задания.

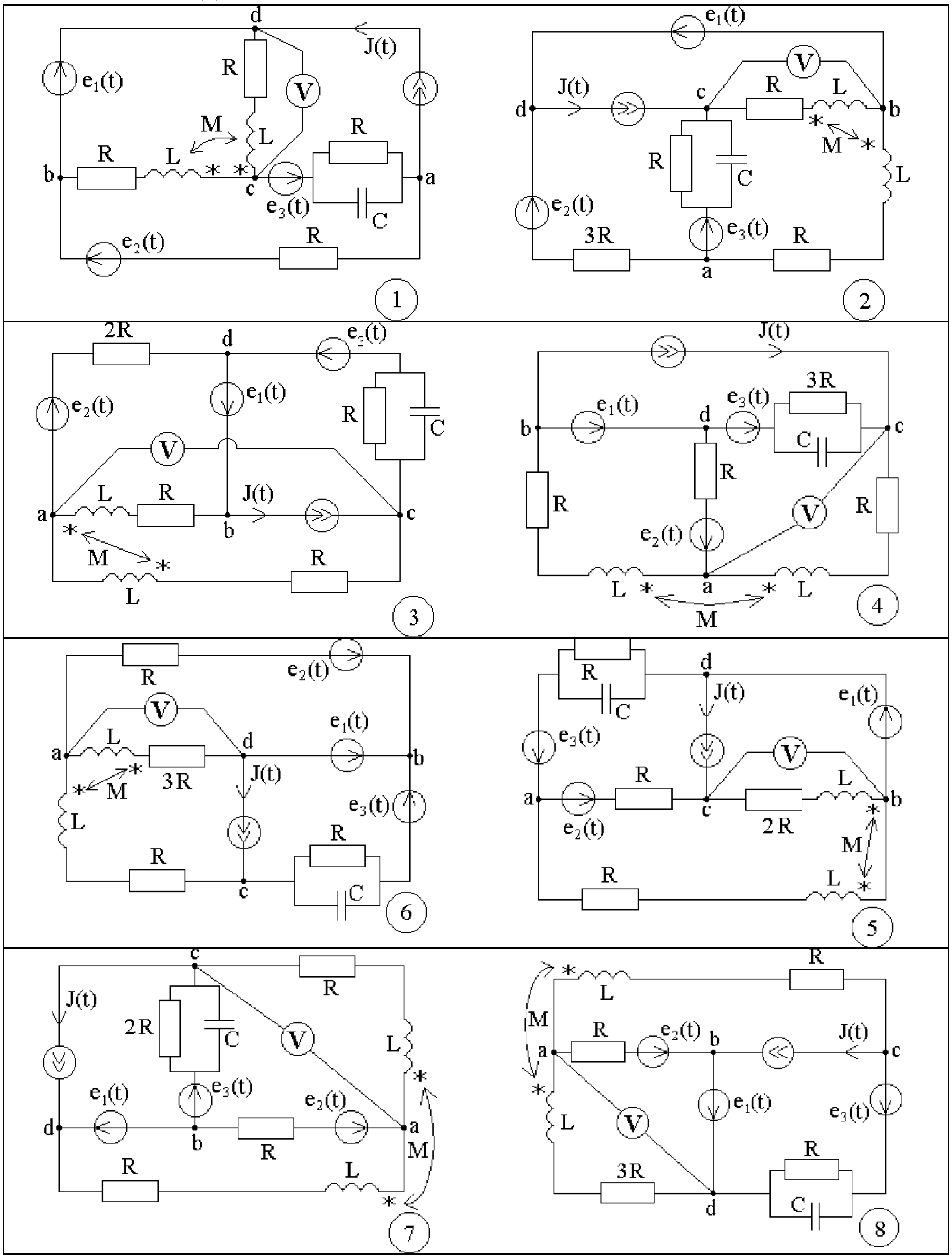
Таблица 1

№	E_1	E_2	α_1	α_2
–	В	В	град	град
1	110	200	0	-90
2	120	190	30	-60
3	130	180	45	-45
4	140	170	60	-30
5	150	160	90	-120
6	160	150	120	0
7	170	140	150	30
8	180	130	180	45
9	190	120	210	60
0	200	110	240	90

Таблица 2

№	J	β	R	L	C
–	А	град	Ом	мГн	мкФ
1	1	120	10	31.85	318.4
2	2	135	20	63.69	159.2
3	3	150	30	95.54	106.1
4	4	180	40	127.39	79.6
5	5	60	50	159.24	63.6
6	1	-90	60	191.08	53
7	2	-60	70	222.93	45.4
8	3	-45	80	254.78	39.8
9	4	-30	90	286.62	35.3
0	5	0	100	318.47	31.8

Схемы заданий 1–2



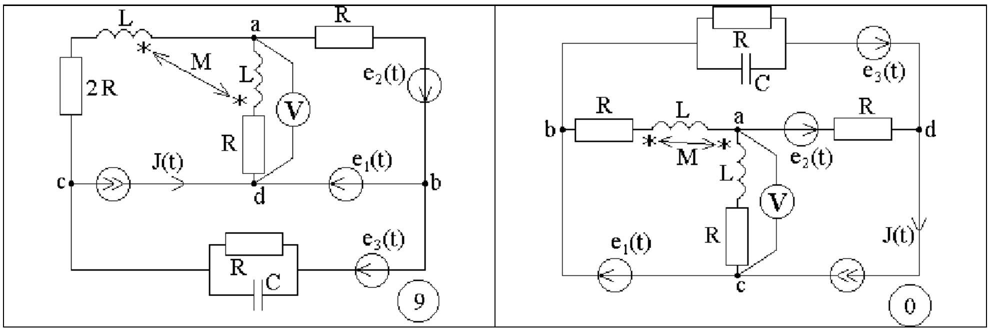


Рис. 4.1.

Примечание: объем задания определяет лектор;
1-ая цифра номера задания – номер строки в таблице 1;
2-ая цифра номера задания – номер строки в таблице 2;
3-ья цифра номера задания – номер схемы.

4.1. Методические указания к заданию № 1.

Для заданной схемы дано:
$e_1(t) = E_1$, В; $e_2(t) = E_2$, В; $e_3(t) = 0$, В; $J(t) = J$, А.

E_1	E_2	J	α_1	α_2	β	R	L	C	ω	M
В	В	А	град	град	град	Ом	мГн	мкФ	рад/с	мГн
100	200	2	30	45	-60	100	318,47	31,8	314	$L/2$

Схема:

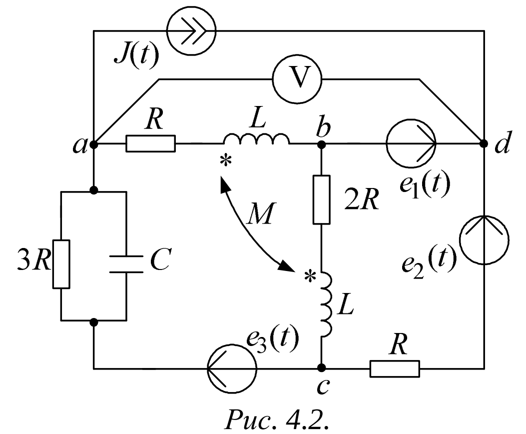


Рис. 4.2.

Изображаем схему, достаточную для расчета постоянных токов ветвей, соединяющих узлы, помеченные буквами. При этом учитываем, что индуктивный элемент L для постоянного тока является “закороткой”, а емкостный элемент C при постоянном напряжении представляет собой “разрыв” ветви, причем взаимная индуктивность M влияния на постоянные токи не оказывает. Указываем произвольно номера и направления токов в ветвях схемы. Данная схема имеет: $n_у = 4$ узла, $n_в = 6$ ветвей, $n_I = 5$ неизвестных токов.

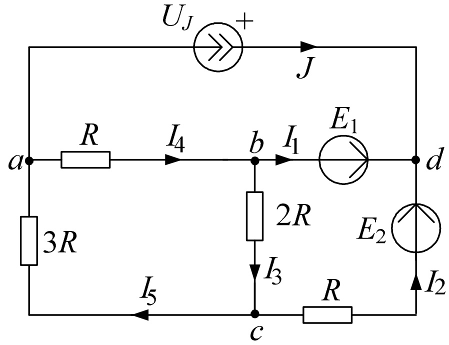


Рис. 4.3.

Определяем токи во всех ветвях схемы и напряжение на зажимах источника тока.

Используем законы Кирхгофа

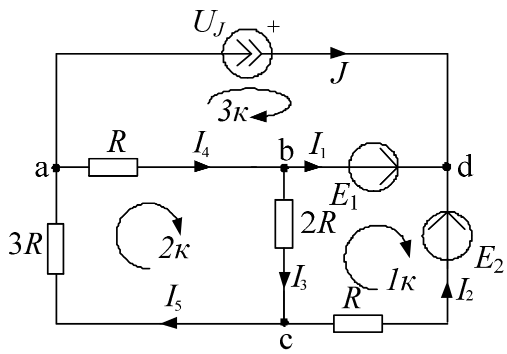


Рис. 4.4.

Рассчитаем число уравнений, которые необходимо составить: $n_1 = n_у - 1 = 3$ уравнений по первому закону Кирхгофа, $n_2 = n_в - n_1 = 3$ уравнений по второму закону Кирхгофа.

Выбираем 3 узла (например, ***a***, ***b***, ***c***) и составляем уравнения по первому закону Кирхгофа:

узел ***a***: $J + I_4 - I_5 = 0$,

узел ***b***: $I_1 + I_3 - I_4 = 0$,

узел ***c***: $I_2 - I_3 + I_5 = 0$.

Для трех элементарных контуров составляем уравнения по второму закону Кирхгофа

1 контур: $-R \cdot I_2 - 2R \cdot I_3 = E_1 - E_2$,

2 контур: $2R \cdot I_3 + R \cdot I_4 + 3R \cdot I_5 = 0$,

3 контур: $-R \cdot I_4 = U_J - E_1$.

Полученные $n = n_1 + n_2 = n_в = 6$ уравнений записываем совместно в матричном виде т.е.

$$\begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ 1k \\ 2k \\ 3k \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -R & -2R & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2R & R & 3R & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -R & 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ U_J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -J \\ 0 \\ 0 \\ E_1 - E_2 \\ 0 \\ -E_1 \end{bmatrix} \text{ или } A \times X = B,$$

которые решаем на ЭВМ при помощи программы *MathCad*. Для этого в программу вводим матрицу коэффициентов при заданном $R = 100$ Ом:

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -100 & -200 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 200 & 100 & 300 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -100 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Затем вводим в программу матрицу правой части уравнений при $E_1 = 100$ В; $E_2 = 200$ В; $J = 2$ А:

$$B := \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ -100 \\ 0 \\ -100 \end{bmatrix}.$$

Далее вводим в программу уравнение $X := A^{-1} \cdot B$ и получаем решение:

$$X = \begin{bmatrix} -2.143 \\ 0.143 \\ 0.429 \\ -1.714 \\ 0.286 \\ 271.429 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, значения токов и напряжения на источнике тока получились следующие:
$I_1 = -2.143$ А; $I_2 = 0.143$ А; $I_3 = 0.429$ А; $I_4 = -1.714$ А; $I_5 = 0.286$ А; $U_J = 271.429$ В.

Для предварительной проверки полученных результатов подставляем найденные токи и напряжение U_J в одно из уравнений, составленное по первому закону Кирхгофа, и в одно уравнение, составленное по второму закону Кирхгофа.
Например:
a: $J + I_4 - I_5 = -1.714 - 0.286 + 2 = 0$,
3 контур: $-R \cdot I_4 = -100 \cdot (-1.714) = 171.4 = U_J - E_1 = 271.429 - 100 =$
$= 171.429$, т.е. уравнения выполняются.

Используем метод контурных токов

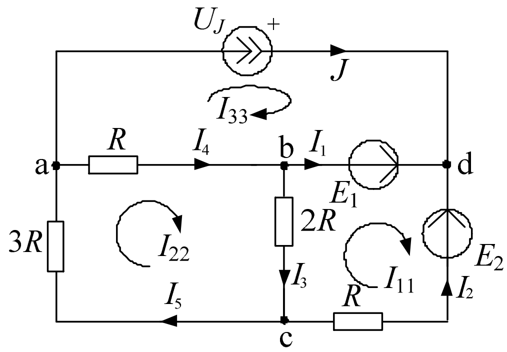


Рис. 4.5.

Рассчитываем число контурных токов, которые необходимо направить в схеме – $n_{кт} = n_в - n_у + 1 = 3$, и число контурных уравнений, которые необходимо будет решить – $n_{ку} = n_I - n_у + 1 = 2$.

Обозначаем $n_{кт} = 3$ контурных тока как I_{11}, I_{22}, I_{33} и направляем их в независимых контурах, которые отличаются друг от друга наличием хотя бы одной новой ветви, причем, через источник тока должен проходить один контурный ток, например, I_{33}, тогда $I_{33} = J$.

Для двух неизвестных контурных токов I_{11} и I_{22} составляем $n_{ку} = 2$ уравнения

для I_{11}: $(R+2R)\cdot I_{11} - 2R\cdot I_{22} - 0\cdot I_{33} = E_1 - E_2$;

для I_{22}: $-2R\cdot I_{11} + (R+2R+3R)\cdot I_{22} - R\cdot I_{33} = 0$.

Полученные контурные уравнения можно записать в матричном виде $(I_{33} = J)$

$$\begin{bmatrix} 3R & -2R \\ -2R & 6R \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_{11} \\ I_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 - E_2 \\ R\cdot J \end{bmatrix}$$

и решить на ЭВМ при помощи программы *MathCad* как в п.2.1. Эти уравнения можно решить также методами подстановки, Крамера или Гаусса.

Например, для решения системы из двух контурных уравнений

$$\begin{bmatrix} 300 & -200 \\ -200 & 600 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_{11} \\ I_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -100 \\ 200 \end{bmatrix}$$

используем метод Крамера. Найдем определители системы уравнений:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 300 & -200 \\ -200 & 600 \end{vmatrix} = 300\cdot 600 - (-200)\cdot(-200) = 14000;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -100 & -200 \\ 200 & 600 \end{vmatrix} = (-100)\cdot 600 - 200\cdot(-200) = -20000;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 300 & -100 \\ -200 & 200 \end{vmatrix} = 300\cdot 200 - (-100)\cdot(-200) = 40000.$$

Тогда $I_{11} = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = -0.143\,\text{А}$; $I_{22} = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = 0.286\,\text{А}$.

Далее находим реальные токи в ветвях схемы с учетом контурных токов, проходящих в этих ветвях:

$I_1 = I_{11} - I_{33} = -2.143\,\text{А}$; $I_2 = -I_{11} = 0.143\,\text{А}$; $I_3 = I_{22} - I_{11} = 0.429\,\text{А}$; $I_4 = I_{22} - I_{33} = -1.714\,\text{А}$; $I_5 = I_{22} = 0.286\,\text{А}$.

Напряжение на зажимах источника тока найдем при помощи второго закона Кирхгофа для контура с I_{33}:

$$U_J - E_1 = -R\cdot I_4,$$

тогда $U_J = E_1 - R \cdot I_4 = 271.4$ В.

Найденные токи в ветвях схемы и напряжение на зажимах источника тока совпадают с результатами п.2.1.

Используем метод узловых потенциалов.

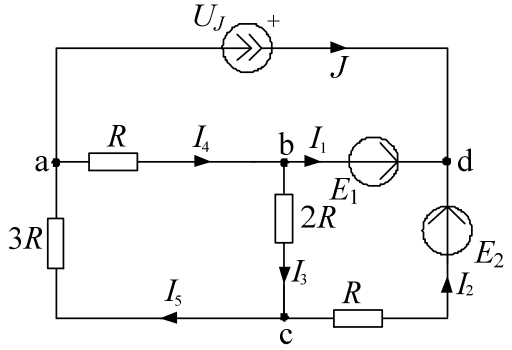


Рис. 4.6.

Потенциал одного из узлов принимаем равным нулю. Таким узлом будет один из узлов ветви без сопротивления, например, $\varphi_b = 0$. Тогда, учитывая $E_1 = \varphi_d - \varphi_b$, находим $\varphi_d = E_1 + \varphi_b = E_1 = 100$ В.

Для неизвестных потенциалов φ_a и φ_c составляем расчетные уравнения:

для φ_a: $\left(\dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{3R}\right) \cdot \varphi_a - \dfrac{1}{3R} \cdot \varphi_c - \cancel{\dfrac{1}{R} \cdot \varphi_b}^{\,0} = -J$;

для φ_c: $-\dfrac{1}{3R} \cdot \varphi_a + \left(\dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{2R} + \dfrac{1}{3R}\right) \cdot \varphi_c - \cancel{\dfrac{1}{2R} \cdot \varphi_b}^{\,0} - \dfrac{1}{R} \cdot \varphi_d = -\dfrac{1}{R} E_2$;

Полученные уравнения можно записать в матричном виде ($\varphi_d = E_1$):

$$\begin{bmatrix} \left(\dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{3R}\right) & \left(-\dfrac{1}{3R}\right) \\ \left(-\dfrac{1}{3R}\right) & \left(\dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{2R} + \dfrac{1}{3R}\right) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \varphi_a \\ \varphi_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -J \\ \dfrac{1}{R} \cdot E_1 - \dfrac{1}{R} \cdot E_2 \end{bmatrix}$$

и решить на ЭВМ при помощи программы *MathCad* как в п.2.1. или методами подстановки, Крамера или Гаусса.

Например, для решения системы из двух уравнений

$$\begin{bmatrix} 0.01333 & -0.00333 \\ -0.00333 & 0.01833 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \varphi_a \\ \varphi_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

используем метод Гаусса. Для этого перепишем эти уравнения следующим образом

$$\begin{cases} \varphi_a - \dfrac{0.00333}{0.01333} \cdot \varphi_c = -\dfrac{2}{0.01333}; \\ -\varphi_a + \dfrac{0.01833}{0.00333} \cdot \varphi_c = -\dfrac{1}{0.00333}. \end{cases}$$

Складываем эти уравнения

$$\cancel{\varphi_a} - \cancel{\varphi_a} + \frac{0.01833}{0.00333} \cdot \varphi_c - \frac{0.00333}{0.01333} \cdot \varphi_c = -\frac{2}{0.01333} - \frac{1}{0.00333},$$ тогда

$$\varphi_c = \frac{-2/0.01333 - 1/0.00333}{0.01833/0.00333 - 0.00333/0.01333} = -85.7\,\text{В}.$$

Затем находим

$$\varphi_a = \frac{0.00333}{0.01333} \cdot \varphi_c - \frac{2}{0.01333} = -171.4\,\text{В}.$$

Далее используем обобщенный закон Ома и первый закон Кирхгофа:

$$I_2 = \frac{\varphi_c - \varphi_d + E_2}{R} = 0.143\,\text{А};$$

$$I_3 = \frac{\cancel{\varphi_b}^{\,0} - \varphi_c}{2R} = 0.429\,\text{А};$$

$$I_4 = \frac{\varphi_a - \cancel{\varphi_b}^{\,0}}{R} = -1.714\,\text{А};$$

$$I_5 = \frac{\varphi_c - \varphi_a}{3R} = 0.286\,\text{А};$$

$$I_1 = -J - I_2 = -2.143\,\text{А};$$

$$U_J = \varphi_d - \varphi_a = 271.447\,\text{В}.$$

Таким образом, найденные токи и напряжение на зажимах источника тока совпадают с результатами п.2.1. и п.2.2.

Для проверки правильности расчетов составляем баланс вырабатываемой $P_в$ и потребляемой $P_п$ мощности:

$P_в = E_1 I_1 + E_2 I_2 + U_J J = 357{,}192$ Вт;

$P_n = I_2^2 \cdot R + I_3^2 \cdot 2R + I_4^2 \cdot R + I_5^2 \cdot 3R = 357,217$ Вт.

Таким образом, получаем допустимую относительную погрешность расчетов

$$\delta_P\% = \frac{\left|P_в - P_п\right|}{P_в} \cdot 100 = 0,0069\% \le 3\%.$$

Определяем ток в ветви *ab* тремя методами.

Используем метод наложения

Для расчета тока I_4, который протекает в ветви *ab*, исходную схему с постоянными токами разобьем на три подсхемы с одним источником ЭДС или тока.

Расчет подсхемы с ЭДС E_1.

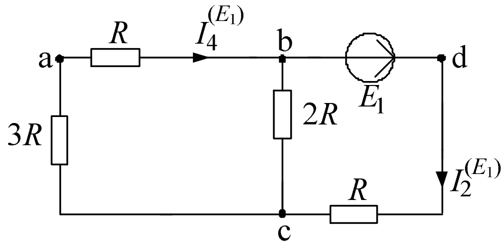


Рис. 4.7.

По закону Ома: $I_2^{(E_1)} = \dfrac{E_1}{R + \dfrac{2R \cdot (3R + R)}{2R + (3R + R)}} = 0,428$ А, тогда по правилу разброса находим частичный искомый ток, создаваемый ЭДС E_1:

$$I_4^{(E_1)} = I_2^{(E_1)} \frac{2R}{2R + (3R + R)} = 0,143 \text{ А}.$$

Расчет подсхемы с ЭДС E_2.

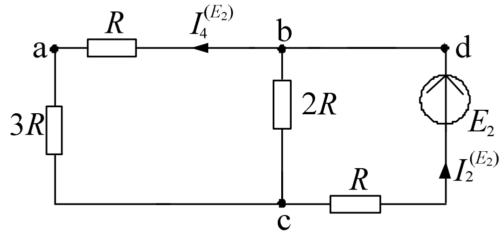


Рис. 4.8.

По закону Ома: $I_2^{(E_2)} = \dfrac{E_2}{R + \dfrac{2R\cdot(3R+R)}{2R+(3R+R)}} = 0{,}857\,\text{А},$ тогда

$$I_4^{(E_2)} = I_2^{(E_2)} \cdot \frac{2R}{2R+(3R+R)} = 0{,}286\,\text{А}.$$

Расчет подсхемы с источником тока J.

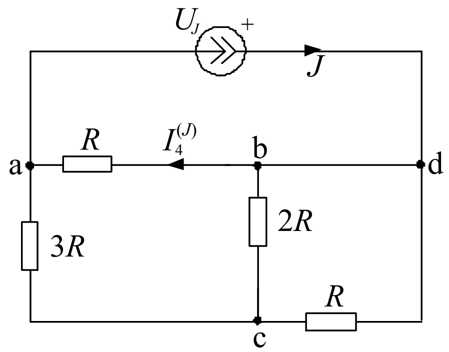


Рис. 4.9.

Узлы *b* и *d* объединяем, тогда по правилу разброса

$$I_4^{(J)} = J \cdot \frac{3R + \dfrac{2R\cdot R}{2R+R}}{R + \left(3R + \dfrac{2R\cdot R}{2R+R}\right)} = 1{,}571\ \text{А}.$$

Находим результирующий ток I_4, как алгебраическую сумму частичных токов (частичный ток, совпадающий по направлению с результирующим током, берем со знаком “+”):

$$I_4 = I_4^{(E_1)} - I_4^{(E_2)} - I_4^{(J)} = 0{,}143 - 0{,}286 - 1{,}571 = -1{,}714\ \text{А}.$$

Рассчитанный ток I_4 совпадает с током I_4, найденным в п.2.

Используем метод преобразований

Для расчета тока I_4 исходную схему относительно ветви *ab* преобразуем до одноконтурной схемы, в которой будет протекать искомый ток I_4.

Для этого преобразования проведем в несколько этапов. Вначале перенесем источник тока J на сопротивления ветвей *ac* и *cd*:

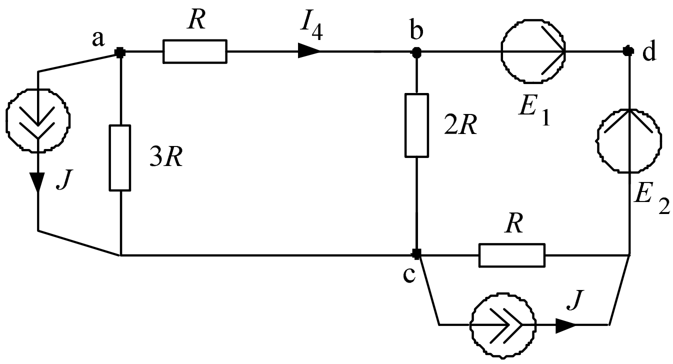


Рис. 4.10.

Затем преобразуем источники тока в ЭДС:

$$E_3 = 3R \cdot J = 600 \text{ В и } E_4 = R \cdot J = 200 \text{ В}.$$

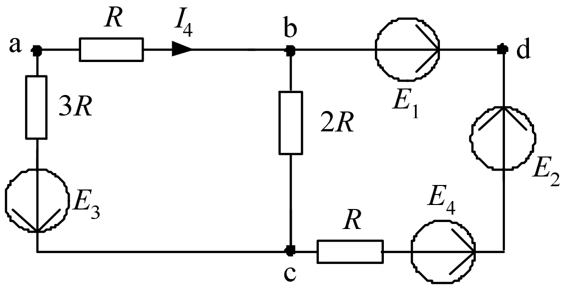


Рис. 4.11.

Далее преобразуем параллельное соединение ЭДС и сопротивления ветвей *bc* и *cdb*:

$$R_э = \frac{1}{1/2R + 1/R} = 66,666 \text{ Ом};$$

$$E_э = \left(\frac{E_2 + E_4 - E_1}{R}\right) \cdot R_э = 200 \text{ В}.$$

В результате получаем одноконтурную схему с искомым током I_4:

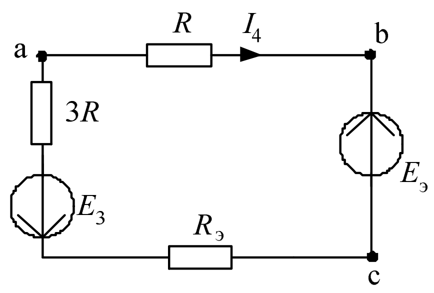


Рис. 4.12.

Тогда по закону Ома:

$$I_4 = \frac{-E_3 - E_э}{R + 3R + R_э} = -1{,}714 \text{ А.}$$

Найденный ток I_4 совпадает с результатами п.2. и п.4.1.4.

Определяем ток в ветви ab методом эквивалентного генератора

Находим напряжение холостого хода $U_4^{(xx)}$ в ветви *ab*.

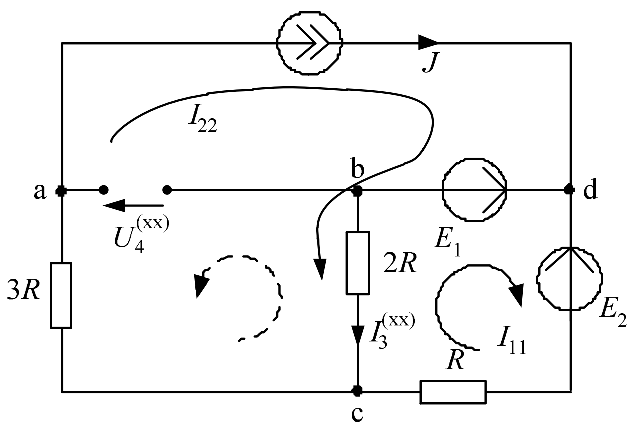


Рис. 4.13.

По методу контурных токов:

$$I_{22} = J\,;$$

$$\left(2R + R\right) \cdot I_{11} - 2R \cdot I_{22} = E_1 - E_2\,,$$

тогда $I_{11} = \dfrac{E_1 - E_2 + 2R \cdot I_{22}}{2R + R} = 1$ А; $I_3^{(xx)} = I_{22} - I_{11} = 2 - 1 = 1$ А.

По 2 закону Кирхгофа: $U_4^{(xx)} = -3R \cdot J - 2R \cdot I_3^{(xx)} = -800\,\text{В}$, тогда ЭДС эквивалентного генератора равна $E_Г = U_4^{(xx)} = -800\,\text{В}$.

Находим сопротивление эквивалентного генератора $R_Г$:

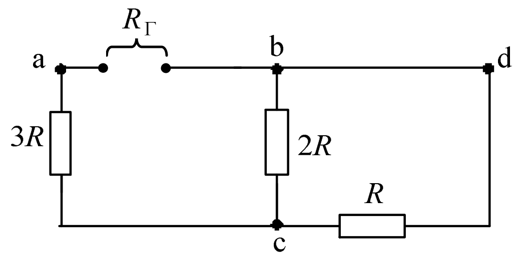


Рис. 4.14.

$$R_Г = 3R + \frac{R \cdot 2R}{R + 2R} = 366.666 \text{ Ом}.$$

Находим ток короткого замыкания $I_4^{(кз)}$ эквивалентного генератора:

$$I_4^{(кз)} = J_Г = \frac{E_Г}{R_Г} = -2.182 \text{ А}.$$

Находим ток в ветви ***ab*** аналитически по двум формулам:

$$I_4 = \frac{E_Г}{R_Г + R} = -1.714 \text{ А};$$

$$I_4 = \frac{J_Г}{1 + R/R_Г} = -1.714 \text{ А}.$$

Находим ток в ветви ***ab*** графически:

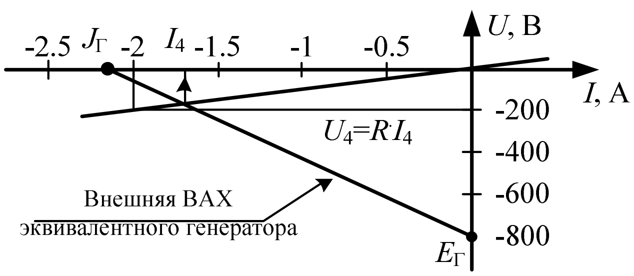


Рис. 4.15.

Точка пересечения внешней ВАХ эквивалентного генератора с ВАХ резистора $R=100$ Ом ($U_4 = R \cdot I_4 = 100 \cdot I_4$ В) дает решение: $I_4 \approx -1,7$ А.

Аналитический и графический расчет методом эквивалентного генератора позволяет найти ток I_4, который совпадает с результатами п.2. и п.4.

Для контура без источника тока, например, *bcdb* строим потенциальную диаграмму. При этом обозначаем промежуточную точку *k* и принимаем потенциал точки *b*, как и в методе узловых потенциалов, равным нулю, т.е. $\varphi_b = 0$.

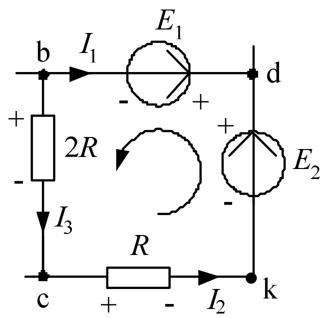


Рис. 4.16.

Тогда при принятом обходе выбранного контура против часовой стрелки, проводим расчет потенциалов точек:

$$\varphi_c = \varphi_b - 2R \cdot I_3 = 0 - 200 \cdot 0,429 = -85,8 \text{ В};$$
$$\varphi_k = \varphi_c - R \cdot I_2 = -85,8 - 100 \cdot 0,143 = -100,1 \text{ В};$$
$$\varphi_d = \varphi_k + E_2 = -100,1 + 200 = 99,9 \text{ В};$$
$$\varphi_b = \varphi_d - E_1 = 99,9 - 100 = -0,1 \approx 0,$$

т.е. расчеты проведены верно, т.к. получилось $\varphi_b \approx 0$ и потенциалы точек φ_c и φ_d совпали с ранее найденными значениями в методе узловых потенциалов.

Следует отметить, что при расчете потенциалов точек напряжения и ЭДС берутся со знаком “+” в том случае, когда при обходе контура перемещаемся от “-” к “+”.

Строим потенциальную диаграмму:

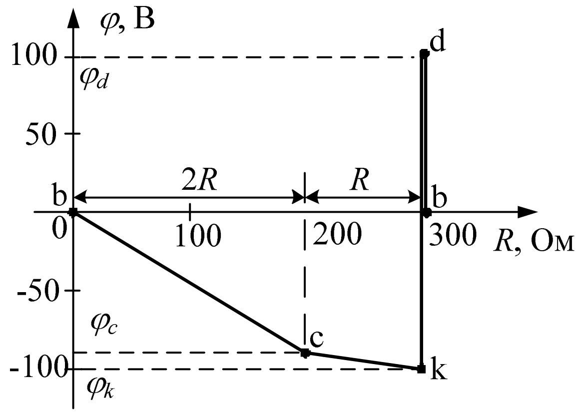


Рис. 4.17.

Определяем показание вольтметра двумя методами, который включен между узлами d и a.

Как разность потенциалов узлов схемы, которые найдены в методе узловых потенциалов:

$$U_V = \varphi_d - \varphi_a = 100 - \left(-171,447\right) = 271,447 \text{ В.}$$

По 2 закону Кирхгофа:

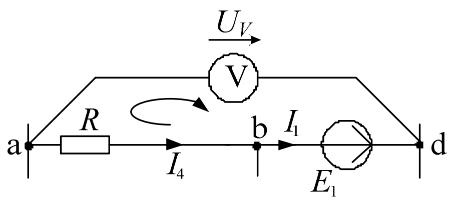


Рис. 4.18.

$U_V - E_1 = -R \cdot I_4$ или $U_V = E_1 - R \cdot I_4 = 100 - 100 \cdot (-1,714) = 271,4$ В.

Т.е. результаты расчета показания вольтметра двумя методами совпали между собой.

Необходимо сформулировать вывод по выполненным пунктам задания, в котором сравнить результаты вычислений и оценить трудоемкость методов расчета.

4.2. Документ MathCad

ORIGIN:= 1

Дано:

$E1 := 100$ $E2 := 200$ $E3 := 0$ $J := 2$

$R := 100$

1. Метод законов Кирхгофа

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -R & -2R & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2R & R & 3R & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -R & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} -J \\ 0 \\ 0 \\ E1 - E2 \\ 0 \\ -E1 \end{pmatrix}$$

1.1. Решение матричного уравнения: $X := A^{-1} \cdot B$

$$X = \begin{pmatrix} -2.143 \\ 0.143 \\ 0.429 \\ -1.714 \\ 0.286 \\ 271.429 \end{pmatrix}$$

$I1 := X_1$ $I2 := X_2$

$I3 := X_3$ $I4 := X_4$

$I5 := X_5$ $UJ := X_6$

1.2. Значения токов и напряжения на источнике тока:

$I1 = -2.143$

$I2 = 0.143$

$I3 = 0.429$

$I4 = -1.714$

$I5 = 0.286$

$UJ = 271.429$

2. Метод контур ных токов

2.1. Определение значений контурных токов и напряжения на   источнике тока:

$J33 := J$

$$A1 := \begin{pmatrix} 3R & -2R & 0 \\ -2R & 6R & 0 \\ 0 & R & 1 \end{pmatrix} \qquad B1 := \begin{pmatrix} E1 - E2 \\ J33 \cdot R \\ E1 + J33 \cdot R \end{pmatrix}$$

$$X1 := A1^{-1} \cdot B1$$

$$X1 = \begin{pmatrix} -0.143 \\ 0.286 \\ 271.429 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} J11 &:= X1_1 \\ J22 &:= X1_2 \\ UJk &:= X1_3 \end{aligned}$$

2.2. Значения контурных токов и напряжения на источнике тока:

$J11 = -0.143$

$J22 = 0.286$

$UJk = 271.429$

2.3. Определение токов в ветвях:

$I1k := J11 - J33$	$I1k = -2.143$
$I2k := -J11$	$I2k = 0.143$
$I3k := J22 - J11$	$I3k = 0.429$
$I4k := J22 - J33$	$I4k = -1.714$
$I5k := J22$	$I5k = 0.286$

3. Метод узловых потенциалов

3.1. Определение значений потенциалов узлов ***a*** *и* ***c*** *:*

$\varphi b := 0$

$\varphi d := E1 + \varphi b \qquad \varphi d = 100$

$$A2 := \begin{pmatrix} \frac{1}{R} + \frac{1}{3R} & -\frac{1}{3R} \\ -\frac{1}{3R} & \frac{1}{R} + \frac{1}{2R} + \frac{1}{3R} \end{pmatrix} \qquad B2 := \begin{pmatrix} -J \\ \frac{1}{R}\cdot E1 - \frac{1}{R}\cdot E2 \end{pmatrix}$$

$$X2 := A2^{-1}\cdot B2$$

$$X2 = \begin{pmatrix} -171.429 \\ -85.714 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} \varphi a &:= X2_1 \\ \varphi c &:= X2_2 \end{aligned}$$

3.2. Значения узловых потенциалов:

$$\varphi a = -171.429$$

$$\varphi c = -85.714$$

*3.3. Значения токов в ветвях
и напряжения на источнике тока:*

$$I2 := \frac{\varphi c - \varphi d + E2}{R} \qquad I2 = 0.143$$

$$I3 := \frac{\varphi b - \varphi c}{2R} \qquad I3 = 0.429$$

$$I4 := \frac{\varphi a - \varphi b}{R} \qquad I4 = -1.714$$

$$I5 := \frac{\varphi c - \varphi a}{3R} \qquad I5 = 0.286$$

$$I1 := -J - I2 \qquad I1 = -2.143$$

$$UJ := \varphi d - \varphi a \qquad UJ = 271.429$$

4. Баланс мощности

4.1. Вырабатываемая мощность

$$Pv := E1\cdot I1 + E2\cdot I2 + UJ\cdot J$$

$$Pv = 357.143$$

4.2. Потребляемая мощность

$$Pp := I2^2 \cdot R + I3^2 \cdot 2R + I4^2 \cdot R + I5^2 \cdot 3R$$

$$Pp = 357.143$$

4.3. Погрешность

$$\delta := \frac{|Pv - Pp|}{Pv} \cdot 100 \qquad \delta = 0$$

*5. Определение тока в ветви **ab** I4*

5.1. Метод наложения

5.1.1. Расчет подсхемы с ЭДС E1

$$I2' := \frac{E1}{R + \dfrac{2R \cdot (3R + R)}{2R + (3R + R)}} \qquad I2' = 0.429$$

$$I4' := I2' \cdot \frac{2R}{2R + (3R + R)} \qquad I4' = 0.143$$

5.1.2. Расчет подсхемы с ЭДС E2

$$I2'' := \frac{E2}{R + \dfrac{2R \cdot (3R + R)}{2R + (3R + R)}} \qquad I2'' = 0.857$$

$$I4'' := I2'' \cdot \frac{2R}{2R + (3R + R)} \qquad I4'' = 0.286$$

5.1.3. Расчет подсхемы с источником тока J

$$I4''' := J \cdot \frac{3R + \dfrac{2R \cdot R}{2R + R}}{R + \left(3R + \dfrac{2R \cdot R}{2R + R}\right)} \qquad I4''' = 1.571$$

5.1.4. Расчет результирующего тока I4

$$I4 := I4' - I4'' - I4''' \qquad I4 = -1.714$$

5.2. Метод преобразований (упрощаем исходную схему до одноконтурной)

$$I4 := \frac{2E1 - 2E2 - 11\cdot R\cdot J}{14\cdot R} \qquad I4 = -1.714$$

5.3. Метод эквивалентного генератора

5.3.1. По методу контурных токов определяем токи XX

$$I22 := J$$

$$I11 := \frac{E1 - E2 + 2R\cdot I22}{2R + R} \qquad I11 = 1$$

$$I3xx := I22 - I11 \qquad I3xx = 1$$

$$U4xx := -3R\cdot J - 2R\cdot I3xx \qquad Eg := U4xx \qquad Eg = -800$$

5.3.2. Определяем сопротивление эквивалентного генератора Rг

$$Rg := 3R + \frac{R\cdot 2R}{R + 2R} \qquad Rg = 366.667$$

5.3.3. Определяем ток эквивалентного генератора Ig

$$Ig := \frac{Eg}{Rg} \qquad Ig = -2.182$$

5.3.4. Определяем ток I4

$$I4 := \frac{Eg}{Rg + R} \qquad I4 = -1.714$$

или

$$I4 := \frac{Ig}{1 + \frac{R}{Rg}} \qquad I4 = -1.714$$

6. Находим ток I4 графически

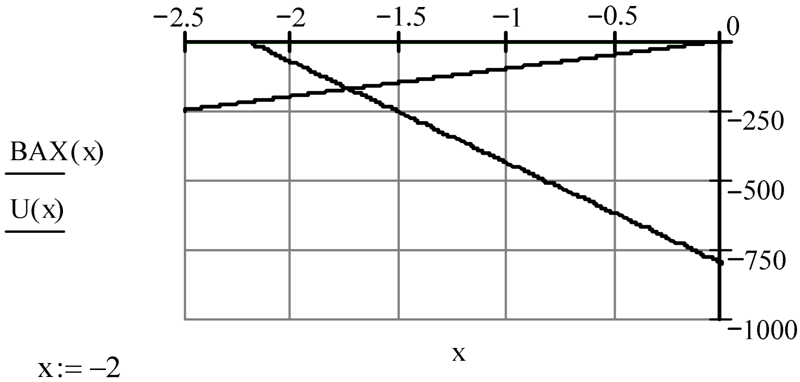
стоим внешнюю характеристику генератора

$$BAXg := \begin{pmatrix} Ig & 0 \\ 0 & Eg \end{pmatrix} \qquad BAX(x) := \mathrm{linterp}\left(BAXg^{\langle 1\rangle}, BAXg^{\langle 2\rangle}, x\right)$$

$$BAXg := \begin{pmatrix} Ig & 0 \\ 0 & Eg \end{pmatrix} \qquad BAX(x) := linterp\left(BAXg^{\langle 1\rangle}, BAXg^{\langle 2\rangle}, x\right)$$

стоим график ВАХ резистора

$U(x) := R \cdot x$



$x := -2$

Given

$BAX(x) - U(x) = 0$

$x1 := Find(x)$

т.е. $\quad I4 := x1 \qquad I4 = -1.714$

7. Построение потенциальной диаграммы

$\varphi b := 0 \qquad \varphi b = 0$

$\varphi c := \varphi b - 2R \cdot I3 \qquad \varphi c = -85.714$

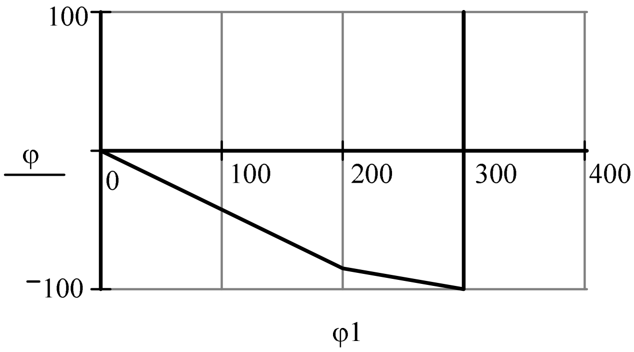
$\varphi k := \varphi c - R \cdot I2 \qquad \varphi k = -100$

$\varphi d := \varphi k + E2 \qquad \varphi d = 100$

$\varphi bb := \varphi d - E1 \qquad \varphi bb = 0$

потенциал φbb должен быть равен φb

$$\varphi := \begin{pmatrix} \varphi b \\ \varphi c \\ \varphi k \\ \varphi d \\ \varphi bb \end{pmatrix} \qquad \varphi 1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 2R \\ 3R \\ 3R \\ 3R \end{pmatrix}$$



Построенные график и диаграмму рекомендуется скопировать в графический редактор, например, Microsoft Visio и сделать соответствующие подписи.

8. Определяем показания вольтметра

$Uv := |UJ| \qquad Uv = 271.429$

или $Uv := |\varphi d - \varphi a| \qquad Uv = 271.429$

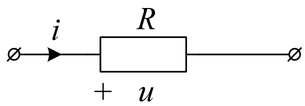
или $Uv := E1 - R \cdot I4 \qquad Uv = 271.429$

5. СИНУСОИДАЛЬНЫЙ ПЕРЕМЕННЫЙ ТОК

5.1. Действующие значения гармонических токов и напряжений

Действующие значения тока и напряжения характеризуют тепловое действие в линейном резистивном элементе с сопротивлением *R*. При токе и напряжении:

$$i = I_m \sin(\omega t + \alpha),\ u = U_m \sin(\omega t + \alpha)$$



По закону Джоуля-Ленца:

$$W = \int_0^T i^2 R\,dt = I^2 RT,\ \text{Дж}$$

$$T = {}^{2\pi}\!/_{\omega},\ \text{с}.$$

По закону Ома:

$$u = R \cdot i, \text{ В}.$$

Действующее значение тока

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2 dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}.$$

Действующее значение напряжения

$$U = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2 dt} = \frac{U_m}{\sqrt{2}}.$$

Действующее значение гармонического тока i численно равно такому постоянному току I, который за время T в том же сопротивлении R выделяет такое же количество тепла W. Действующие значения тока и напряжения не зависят от угловой частоты ω и начальной фазы α. В результате:

$$i = \sqrt{2}I\sin(\omega t + \alpha), \; u = \sqrt{2}U\sin(\omega t + \alpha).$$

5.2. Символический метод

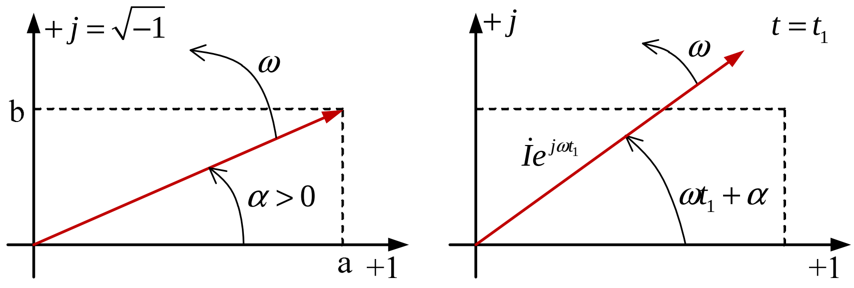
Символический метод применяется для расчета линейных цепей с гармоническими токами и напряжениями. Этот метод основан на изображении гармонических величин комплексными числами. При этом проекция вращающегося вектора на любой из диаметров окружности, описываемая его концом, является гармонической функцией времени. Следовательно, синусоидальная величина может быть изображена вращающимся вектором на комплексной плоскости (рис. 5.1 а, б), причем этот вектор записывается в показательной, тригонометрической и алгебраической формах.

$$i = I_m\sin(\omega t + \alpha) = \sqrt{2}I\sin(\omega t + \alpha) = \mathrm{Im}\left[\sqrt{2}Ie^{j(\omega t + \alpha)}\right] = \mathrm{Im}\left[\sqrt{2}\dot{I}e^{j\omega t}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{I} = Ie^{j\alpha} = I\cos\alpha + jI\sin\alpha = a + jb,$$

где $\mathrm{Im}[\sqrt{2}\dot{I}e^{j\omega t}]$ – мнимая составляющая вращающегося вектора,

$j = \sqrt{-1}$ – мнимая единица.



а *б*

Рис. 5.1.

$\dot{I}$ – комплекс действующего значения тока.

Символический метод позволяет перейти от расчета линейных цепей с переменными во времени напряжениями и токами к расчету комплексной схемы замещения с постоянными напряжениями и токами. Для комплексных схем замещения справедливы все метод расчета, используемые при постоянных напряжениях и токах, но в комплексной форме.

5.3.Действия с комплексными числами

Где:

$\dot{F}=F\cdot e^{j\alpha}=a+jb$ – комплексное число;

F – модуль;

α – аргумент (фаза);

a – вещественная составляющая;

b – мнимая составляющая.

1. *Переход от алгебраической формы записи к показательной форме*

$a+jb\Rightarrow Fe^{j\alpha}$, где $F=\sqrt{a^2+b^2}$, $\alpha=(180^\circ)+\mathrm{arctg}\dfrac{b}{a}$. При этом 180 градусов учитывается при a<0.

2. *Переход от показательной формы записи к алгебраической форме*

$Fe^{j\alpha}\Rightarrow a+jb$,гдеa=Fcosα, b=Fsinα.

3. *Сложение и вычитание*

$$F_1e^{j\alpha_1} \pm F_2e^{j\alpha_2} = (a_1 + jb_1) \pm (a_2 + jb_2) = (a_1 \pm a_2) + j(b_1 \pm b_2) = a + jb = Fe^{j\alpha}.$$

4. *Умножение*

$$(a_1 + jb_1)\cdot(a_2 + jb_2) = .F_1e^{j\alpha_1} \cdot F_2e^{j\alpha_2} = F_1F_2e^{j(\alpha_1+\alpha_2)} = Fe^{j\alpha}.$$

5. *Деление*

$$\frac{a_1 + jb_1}{a_2 + jb_2} = \frac{F_1e^{j\alpha_1}}{F_2e^{j\alpha_2}} = \frac{F_1}{F_2}e^{j(\alpha_1-\alpha_2)} = Fe^{j\alpha}.$$

6. *Возведение в степень*

$$(a_1 + jb_1)^m = \left(F_1e^{j\alpha_1}\right)^m = F_1^m e^{jm\alpha_1} = Fe^{j\alpha}.$$

7. *Некоторые соотношения*

$$j = \sqrt{-1};\ j^2 = 1;\ {}^1\!/_j = -j;\ j^3 = j.$$

$$j = e^{j90^\circ};\ -j = e^{-j90^\circ};\ 1 = e^{j0^\circ};\ -1 = e^{j180^\circ}.$$

5.4.Действия с синусоидальными величинами

Рассмотрим действия с синусоидальными величинами, имеющими одинаковую угловую частоту ω.

1. *Сложение*

$$f(t) = \sqrt{2}F\sin(\omega t + \alpha) = f_1(t) + f_2(t);$$
$$f_1(t) = \sqrt{2}F_1\sin(\omega t + \alpha_1) \to \dot{F}_1 = F_1e^{j\alpha_1};$$
$$f_2(t) = \sqrt{2}F_2\sin(\omega t + \alpha_2) \to \dot{F}_2 = F_2e^{j\alpha_2};$$

Для определения F и α используются:

а) комплексные числа

$$F_1e^{j\alpha_1} + F_2e^{j\alpha_2} = Fe^{j\alpha} \Rightarrow \text{ определяются } F \text{ и } \alpha;$$

б) вектора на комплексной плоскости (рис. 5.2)

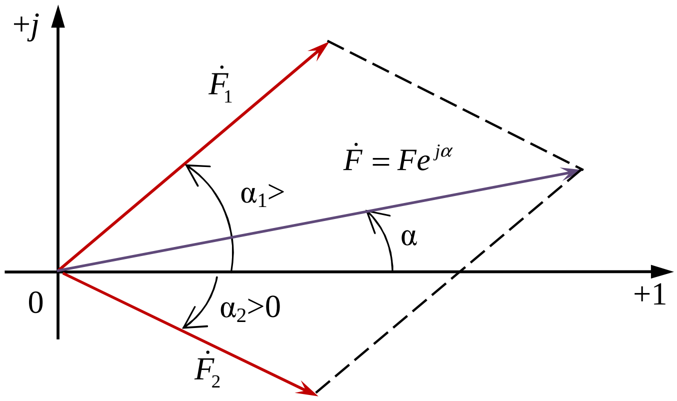


Рис. 5.2

2. *Вычитание*

$f(t) = \sqrt{2}F\sin(\omega t + \alpha) = f_1(t) - f_2(t);$
$f_1(t) \rightarrow \dot{F}_1 = F_1 e^{j\alpha_1};$
$f_2(t) \rightarrow \dot{F}_2 = F_2 e^{j\alpha_2};$

а) комплексные числа

$$F_1 e^{j\alpha_1} - F_2 e^{j\alpha_2} = Fe^{j\alpha} \Rightarrow \text{определяются } F \text{ и } \alpha;$$

б) вектора на комплексной плоскости (рис. 5.3)

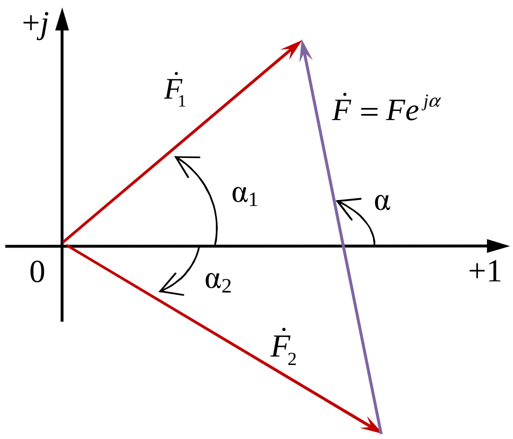


Рис. 5.3

3. Дифференцирование

$$f(t)=\sqrt{2}F\sin(\omega t+\alpha)\rightarrow \dot{F}=Fe^{j\alpha};$$

$$\frac{df(t)}{dt}=\sqrt{2}\omega F\sin\left(\omega t+\alpha+90^{\circ}\right)\rightarrow \omega Fe^{j\left(\alpha+90^{\circ}\right)}=j\omega\dot{F}.$$

В результате при $f(t)\rightarrow\dot{F}$ имеем $\dfrac{df(t)}{dt}\rightarrow j\omega\dot{F}$.

Таким образом, дифференцированию синусоидальной функции соответствует умножение изображающего ее комплекса на *j*ω.

3. Интегрирование

$$f(t)=\sqrt{2}F\sin(\omega t+\alpha)\rightarrow \dot{F}=Fe^{j\alpha};$$

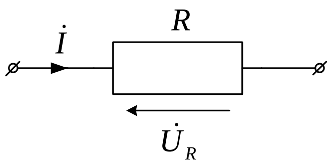
$$\int f(t)dt=\frac{\sqrt{2}F}{\omega}\sin\left(\omega t+\alpha-90^{\circ}\right)\rightarrow \frac{F}{\omega}e^{j\left(\alpha-90^{\circ}\right)}=\frac{\dot{F}}{j\omega}.$$

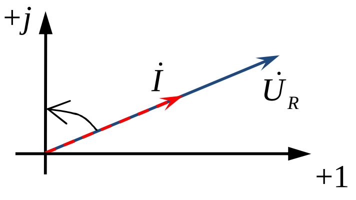
В результате $f(t)\rightarrow\dot{F}$ имеем $\int f(t)dt\rightarrow\dfrac{\dot{F}}{j\omega}$.

Таким образом, интегрированию синусоидальной функции соответствует деление изображающего ее комплекса на *j*ω.

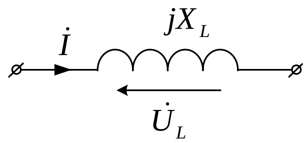
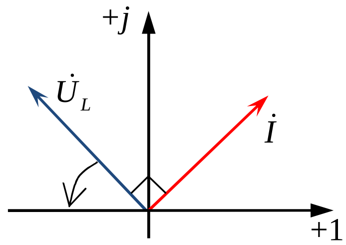
Закон Ома в комплексной форме

Закон Ома в комплексной форме основан на символическом методе и справедлив для линейных цепей с гармоническими напряжениями и токами. Этот закон следует из физической взаимосвязи между током и напряжением отдельных элементов цепи.

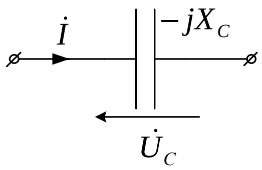
Резистивный элемент	
Комплекс напряжения	$\dot{U}_R=R\cdot\dot{I}$

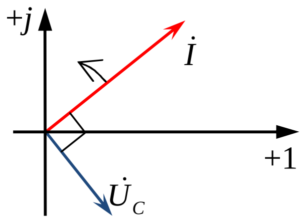
<table>
<tr><td>Вектора напряжения и тока</td><td>
</td></tr>
</table>

На комплексной плоскости вектор напряжения резистивного элемента совпадает по направлению с вектором своего тока.

<table>
<tr><td>Индуктивный элемент</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Комплекс напряжения</td><td>$\dot{U}_L = j\omega L \cdot \dot{I} = jX_L \dot{I}$</td></tr>
<tr><td>Вектора напряжения и тока</td><td>
</td></tr>
</table>

На комплексной плоскости вектор напряжения индуктивного элемента опережает по направлению вектор своего тока на 90 градусов.

<table>
<tr><td>Емкостный элемент</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Комплекс напряжения</td><td>$\dot{U}_C = -\frac{j}{\omega C}\dot{I} = -jX_C \dot{I}$</td></tr>
</table>

Вектора напряжения и тока	

На комплексной плоскости вектор напряжения емкостного элемента отстает по направлению от вектора своего тока на 90 градусов.

Где: $X_L = \omega L$ – индуктивное сопротивление (Ом);

$X_C = \dfrac{1}{\omega C}$ – емкостное сопротивление (Ом).

Например, комплексная схема замещения цепи (рис. 5.4):

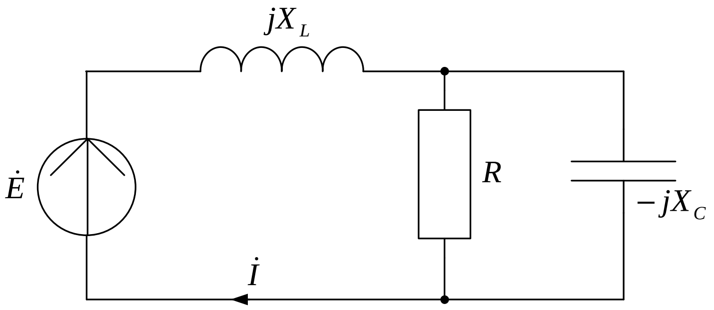


Рис. 5.4.

$$\underline{Z} = jX_L + \frac{R(-jX_C)}{R - jX_C};\ \dot{I} = \frac{\dot{E}}{\underline{Z}}.$$

Где:

$\underline{Z} = R_Э + jX_Э = Ze^{j\varphi}$ – эквивалентное комплексное сопротивление цепи (Ом);

$Z = \sqrt{R_Э^2 + X_Э^2}$ – модуль сопротивления (Ом);

$\varphi = arctg\dfrac{X_Э}{R_Э}$ – аргумент (фаза) сопротивления (Град).

Законы Кирхгофа в комплексной форме

Сложению и вычитанию гармонических токов и напряжений с одинаковой угловой частотой ω в законах Кирхгофа соответствует сложение и вычитание их комплексных величин.

Первый закон Кирхгофа в комплексной форме

Для любого узла комплексной схемы замещения цепи алгебраическая сумма комплексов значений токов равна нулю (5.1).

$$\sum \pm \dot{I}_k = 0 \cdot \tag{5.1}$$

Например:

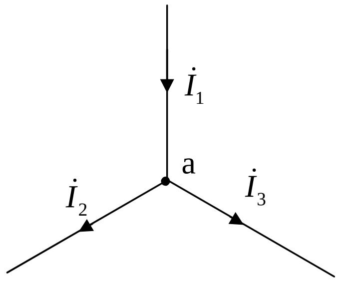


Рис. 5.5.

Узел а: $-\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = 0$.

Второй закон Кирхгофа в комплексной форме

Для любого контура комплексной схемы замещения цепи алгебраическая сумма комплексов напряжений на пассивных элементах равна алгебраической сумме комплексов ЭДС и напряжений на источниках тока (5.2).

$$\sum \pm \dot{U}_n = \sum \pm \dot{E}_k + \sum \pm \dot{U}_{J_q} + \sum \pm \dot{U}_p \cdot \tag{5.2}$$

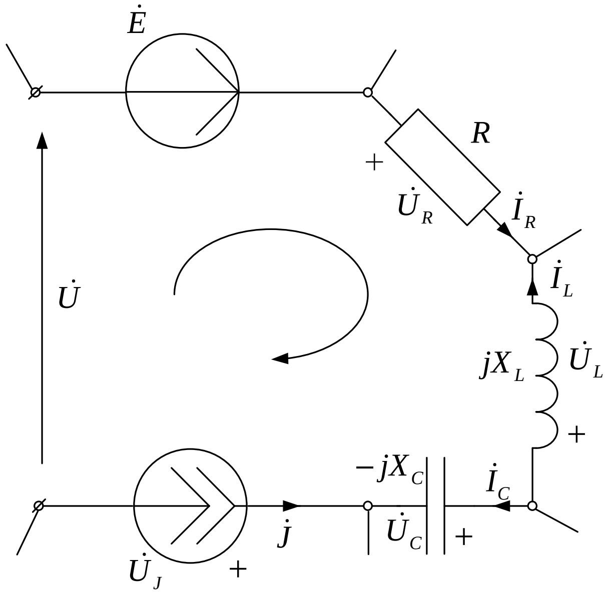


Рис. 5.6.

$\dot{U}_R - \dot{U}_L + \dot{U}_C = \dot{E} - \dot{U}_J + \dot{U}$ или $R\dot{I}_R - jX_L\dot{I}_L + (-jX_C)\dot{I}_C = \dot{E} - \dot{U}_J + \dot{U}$.

Мощность при гармонических напряжениях и токах

$$u(t) = \sqrt{2}U\sin(\omega t + \alpha),\ (\text{В});$$
$$i(t) = \sqrt{2}I\sin(\omega t + \beta),\ (\text{А}).$$

Мощность в функции времени:

$$P(t) = u(t)i(t) = P - S\cos(2\omega t + \alpha + \beta),\ (\text{Вт}). \qquad (5.3)$$

$P = UI\cos\varphi,\ (\text{Вт})$ – *средняя или активная мощность*;
$S = UI,\ (\text{ВА})$ – амплитуда гармонической составляющей мощности или *полная мощность*;
$\varphi = \alpha - \beta, (\text{град})$ – угол сдвига фаз между напряжением и током;
$\cos\varphi = \dfrac{P}{S} \le 1$, т.е $S \ge P$ – коэффициент мощности.

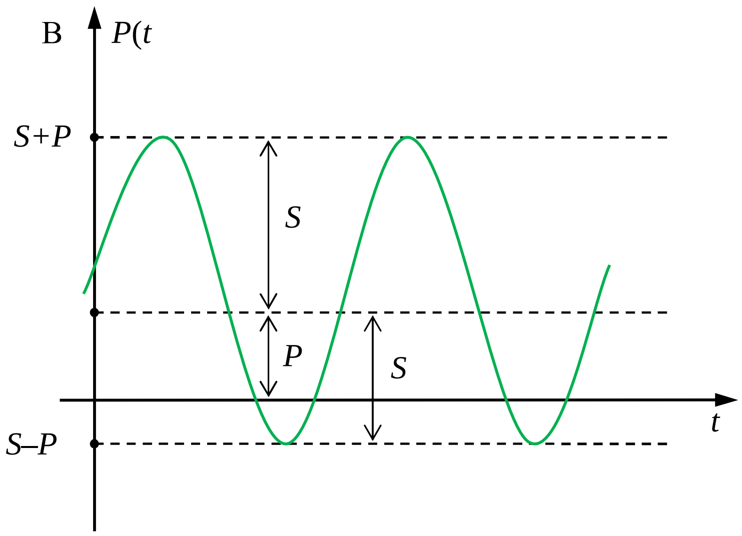


Рис. 5.7.

Когда $P(t)>0$ – энергия поступает в двухполюсник, $P(t)<0$ – энергия поступает из двухполюсника во внешнюю цепь.

Пусть задано:

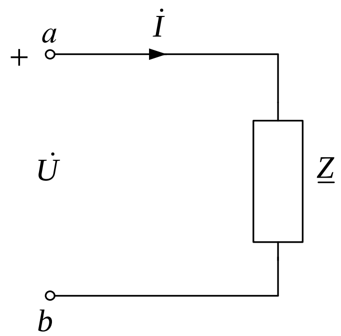


Рис. 5.8.

$$\dot{U} = Ue^{j\alpha},\ (\text{В});$$
$$\dot{I} = Ie^{j\beta},\ (\text{А});$$
$$\underline{Z} = Ze^{j\varphi} = R + jX,\ (\text{Ом}).$$

При $\dot{I}^* = Ie^{-j\beta}$ находим

$$\dot{S} = \dot{U}\dot{I}^* = P + jQ,\ (\text{ВА}) \tag{5.4}$$

– комплекс полной мощности, где $\dot{I}^*$ – сопряженное значение тока.

$$Q = UI\sin\varphi,\ (\text{ВАр}) \tag{5.5}$$

– реактивная мощность.

Т.к. $\dot{U} = \underline{Z}\dot{I}$, то

$$\dot{S} = \dot{U}\dot{I}^* = \left(\underline{Z}\dot{I}\right)\dot{I}^* = \underline{Z}I^2 = I^2R + jI^2X,\ (\text{ВА}).$$

Активная мощность:

$$P = UI\cos\varphi = I^2R,\ (\text{Вт}) \tag{5.6}$$

– мощность тепловой энергии.

Реактивная мощность:

$$Q = UI\sin\varphi = I^2X,\ (\text{ВАр}) \tag{5.7}$$

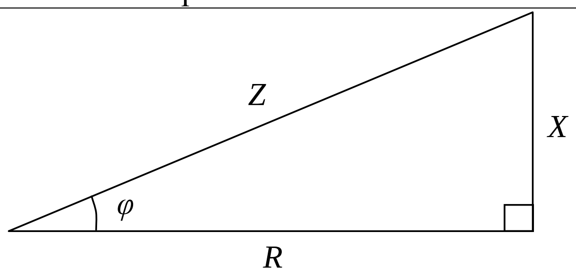
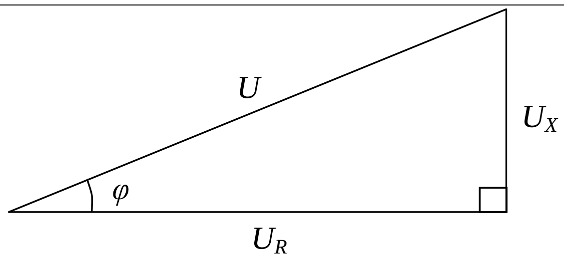
– пропорциональна максимальной энергии, запасаемой в электромагнитном поле.

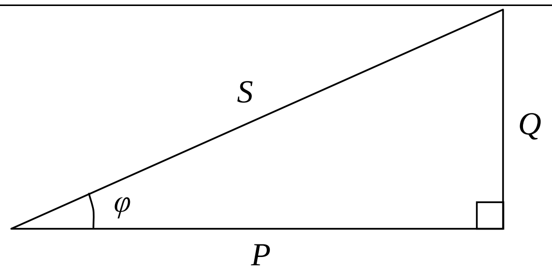
Полная мощность:

$$S = UI = \frac{P}{\cos\varphi},(\text{ВА}) \tag{5.8}$$

– максимально возможная активная мощность при $\cos\varphi = 1$.

Можно изобразить:

<table>
<tr><td>а) треугольник сопротивлений $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$,
$\cos\varphi = \dfrac{R}{Z}$.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>б) треугольник напряжений
$U = \sqrt{U_R^2 + U_X^2}$,
$\cos\varphi = \dfrac{U_R}{U}$,
$U_R = IR$, $U_X = IX$.</td><td>
</td></tr>
</table>

в) треугольник мощностей $S = \sqrt{P^2 + Q^2}$, $\cos\varphi = \dfrac{P}{S}$.	

Топографические и лучевые векторные диаграммы

Топографические и лучевые векторные диаграммы используются при анализе и расчете цепей с синусоидальными напряжениями и токами. Эти диаграммы строятся совмещенными на комплексной плоскости в масштабах напряжения и тока. *Лучевые векторные диаграммы* строятся для комплексов действующих значений и токов, когда их вектора выходят из начала координат каждый под своим углом. Эти диаграммы используются для графической проверки первого закона Кирхгофа. *Топографические векторные диаграммы* строятся для комплексов действующих значений напряжений, когда их вектора подстраиваются один к другому, образуя замкнутые контуры. Эти диаграммы используются для графической проверки второго закона Кирхгофа.

Пример 1 (рис. 5.9 и рис. 5.10):

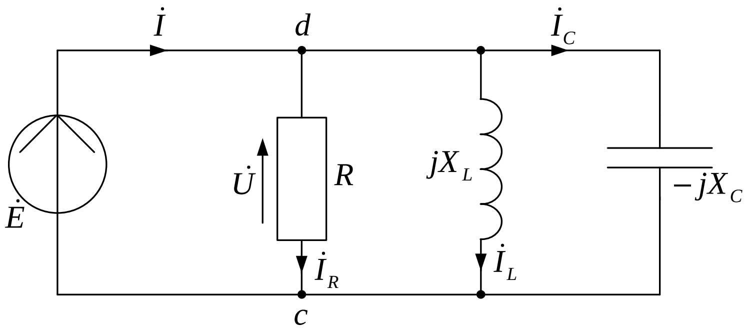


Рис. 5.9.

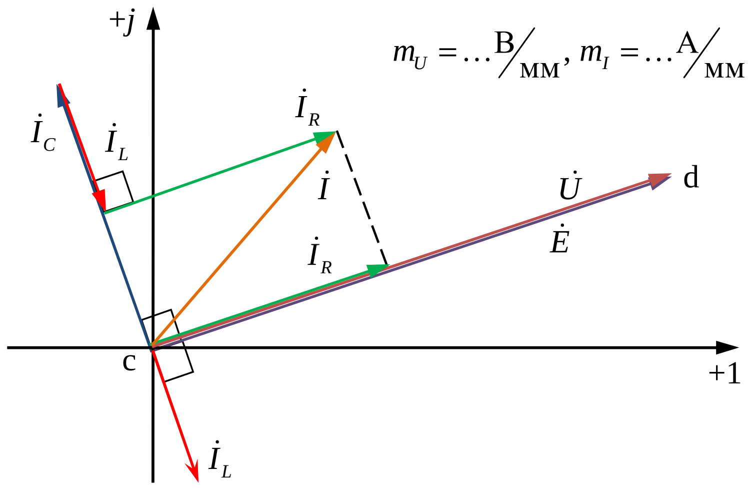


Рис. 5.10.

Пример 2 (рис. 5.11 и рис. 5.12):

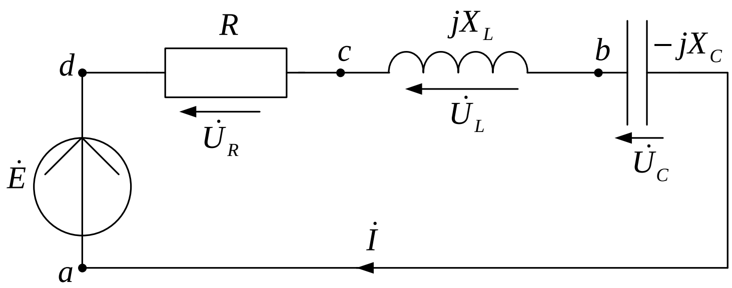


Рис. 5.11.

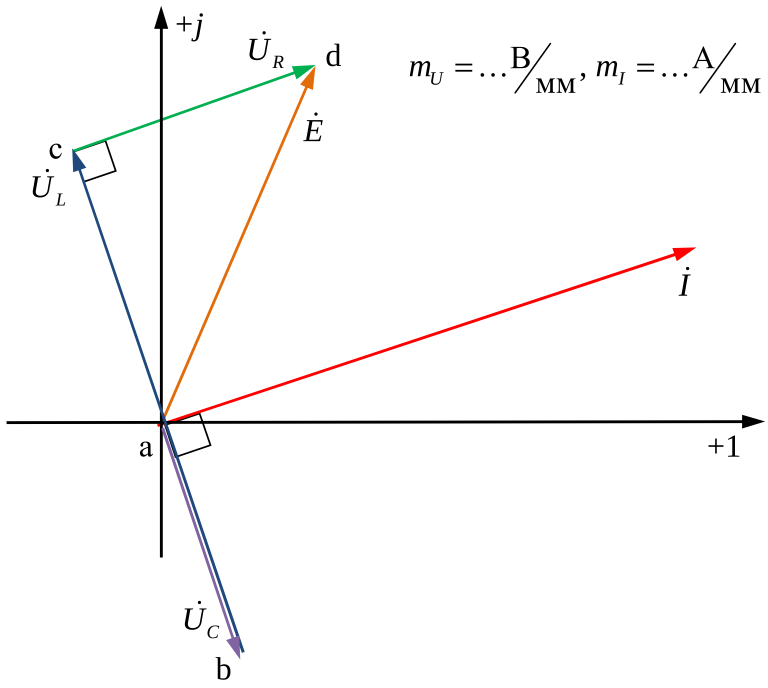


Рис. 5.12.

Пример 3 (рис.5.13 и рис. 5.14):

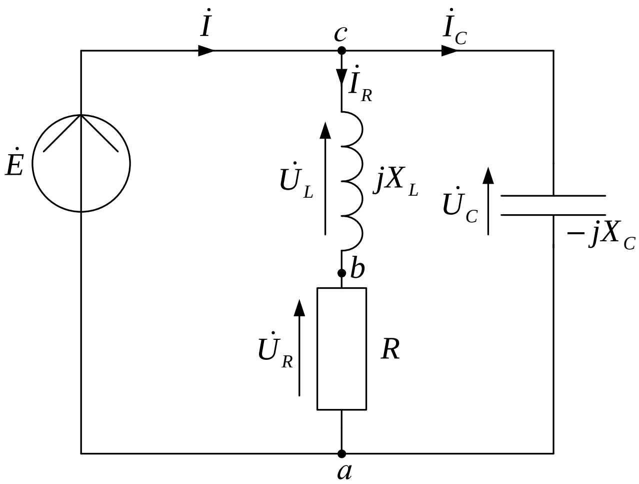


Рис. 5.13.

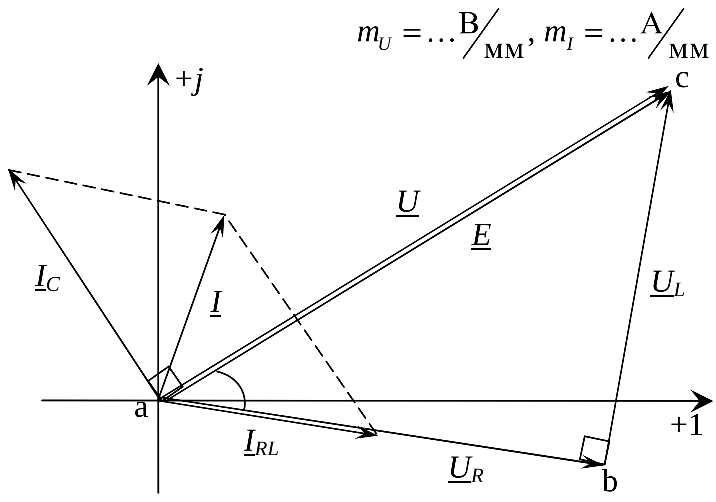


Рис. 5.14.

Линейные электрические цепи со взаимной индуктивностью

Электрические цепи со взаимной индуктивностью образуют трансформаторы, электрические машины и другие устройства с магнитными потоками, характеризуемые индуктивной связью. Две катушки с токами индуктивно связаны, если часть магнитного потока одной катушки сцепляется с витками другой катушки и наоборот. Параметрами индуктивной связи являются взаимная индуктивность M и коэффициент связи $K_{СВ}$, причем M пропорциональна взаимным магнитным потокам $\Phi_{12}=\Phi_{21}$.

Взаимная индуктивность

$$M = \frac{w_1\Phi_{12}}{i_2} = \frac{w_2\Phi_{21}}{i_1}, \text{Гн}. \quad (5.9)$$

Коэффициент связи

$$K_{св} = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} < 1. \quad (5.10)$$

Где w_1 и w_2 – число витков катушек, Φ_1 и Φ_2 – взаимные магнитные потоки, i_1 и i_2 – токи катушек, L_1 и L_2 – собственные индуктивности катушек.

Различают *согласное* и *встречное* включение двух индуктивно связанных катушек.

6. Согласное включение

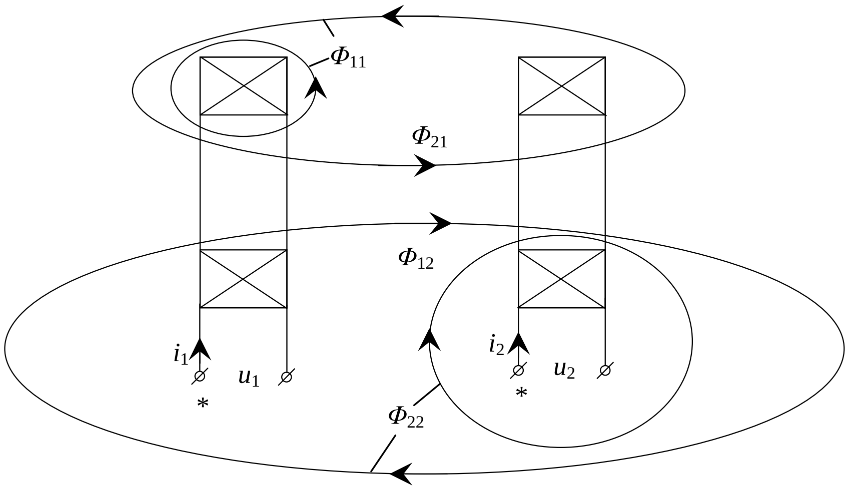


Рис. 5.15.

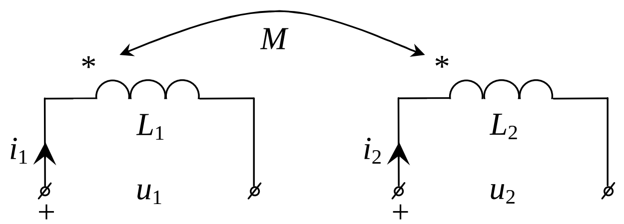


Рис. 5.16.

Включение двух катушек называется согласным, если их взаимные магнитные потоки Φ_{12} и Φ_{21} совпадают по направлению между собой (рис. 5.15). При этом токи катушек i_1 и i_2 ориентированы одинаковым образом относительно одноименных зажимов (*) (рис. 5.16).

Напряжения:

$$\begin{aligned} u_1 &= W_1 \frac{d(\Phi_{11}+\Phi_{12})}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt}, \\ u_2 &= W_2 \frac{d(\Phi_{22}+\Phi_{21})}{dt} = L_2 \frac{di_2}{dt} + M\frac{di_1}{dt}. \end{aligned} , \tag{5.11}$$

При гармонических токах и напряжениях:

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2 = \dot{U}_{L_1} + \dot{U}_{M_1}, \\ \dot{U}_2 &= j\omega L_2 \dot{I}_2 + j\omega M \dot{I}_1 = \dot{U}_{L_2} + \dot{U}_{M_2}. \end{aligned} \tag{5.12}$$

Где $\dot{U}_{L_1} = j\omega L_1 \dot{I}_1 = jX_{L_1}\dot{I}_1$, $\dot{U}_{L_2} = j\omega L_2 \dot{I}_2 = jX_{L_2}\dot{I}_2$ – составляющие, обусловленные собственными индуктивностями, $X_{L_1} = \omega L_1$, $X_{L_2} = \omega L_2$ - индуктивные сопротивления, $X_M = \omega M$ - сопротивление взаимной индукции.

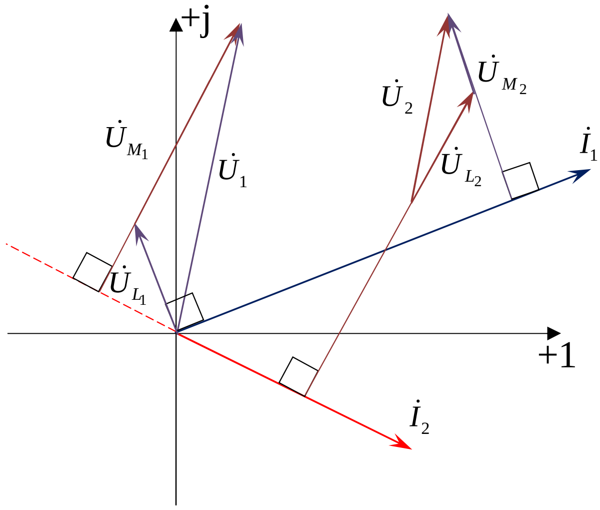


Рис. 5.17.

При согласном включении составляющие напряжений взаимной индукции $\dot{U}_{M_1}$ и $\dot{U}_{M_2}$ опережают токи их создающие $\dot{I}_2$ и $\dot{I}_1$ соответственно на 90°.

7. Встречное включение

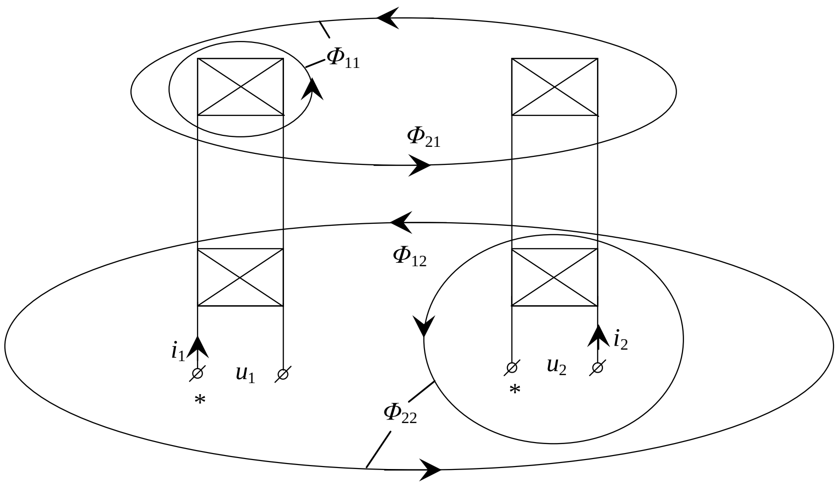


Рис. 5.18.

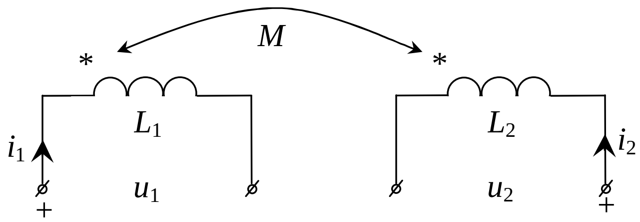


Рис. 5.19.

Включение двух катушек называется встречным, если их взаимные магнитные потоки Φ_{12} и Φ_{21} направлены навстречу друг другу. При этом токи катушек i_1 и i_2 ориентированы различным образом относительно одноименных зажимов (*).

Напряжения:

$$u_1 = W_1 \frac{d(\Phi_{11} - \Phi_{12})}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt} - M\frac{di_2}{dt},$$
$$u_2 = W_2 \frac{d(\Phi_{22} - \Phi_{21})}{dt} = L_2 \frac{di_2}{dt} - M\frac{di_1}{dt}. \quad (5.13)$$

При гармонических токах и напряжениях:

$$\dot{U}_1 = j\omega L_1 \dot{I}_1 - j\omega M \dot{I}_2 = \dot{U}_{L_1} + \dot{U}_{M_1},$$
$$\dot{U}_2 = j\omega L_2 \dot{I}_2 - j\omega M \dot{I}_1 = \dot{U}_{L_2} + \dot{U}_{M_2}. \quad (5.14)$$

Где $\dot{U}_{M_1} = -j\omega M\dot{I}_2 = -jX_M\dot{I}_2$, $\dot{U}_{M_2} = -j\omega M\dot{I}_1 = -jX_M\dot{I}_1$ – составляющие, обусловленные взаимной индуктивностью.

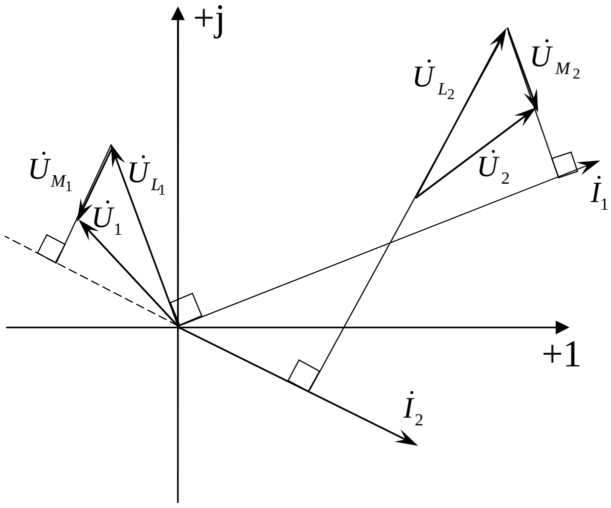


Рис. 5.20.

При встречном включении составляющие напряжений взаимной индукции $\dot U_{M_1}$ и $\dot U_{M_2}$ отстают от токов их создающих $\dot I_2$ и $\dot I_1$ соответственно на 90˚.

Последовательное соединение индуктивно связанных элементов

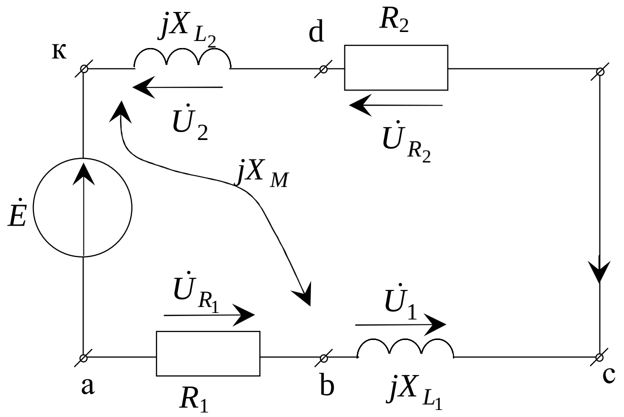


Рис. 5.21.

Для схемы, изображенной на рис. 5.21 запишем уравнения по первому закону Кирхгофа

$$\dot I_1 = \dot I_2 = \dot I$$

и по второму закону Кирхгофа

$$\dot E = \dot U_{R_1} + \dot U_1 + \dot U_{R_2} + \dot U_2$$

или

$$\dot{E} = R_1\dot{I} + (jX_{L_1}\dot{I} \pm jX_M\dot{I}) + R_2\dot{I} + (jX_{L_2}\dot{I} \pm jX_M\dot{I}).$$

В результате $\dot{I} = \dfrac{\dot{E}}{R_1 + R_2 + j(X_{L_1} + X_{L_2} \pm 2X_M)}$; $X_M = \omega M$, где знак «+» – согласное включение, знак «-» – встречное включение.

В результате больший ток $\dot{I}$ соответствует встречному включению.

8. Согласное включение (+)

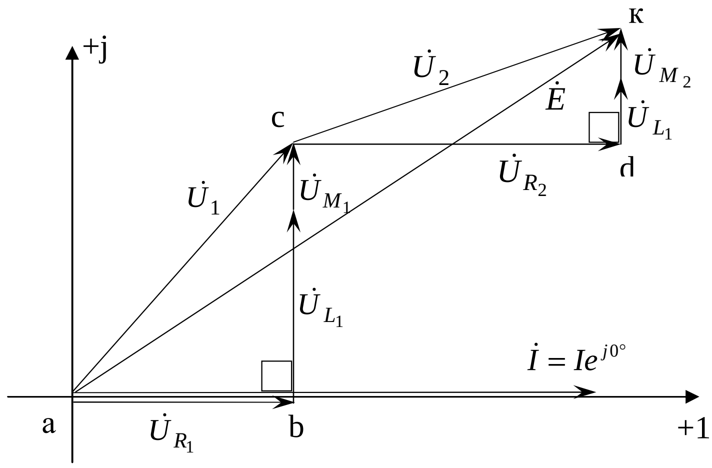


Рис. 5.22.

9. Встречное включение (-)

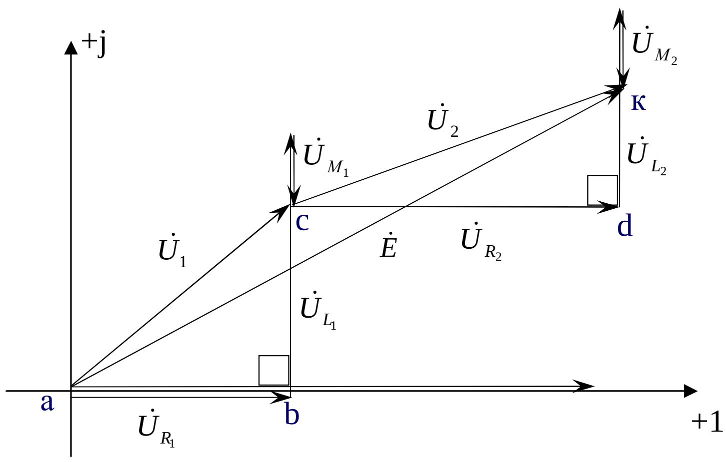


Рис. 5.23.

Параллельное соединение индуктивно связанных элементов

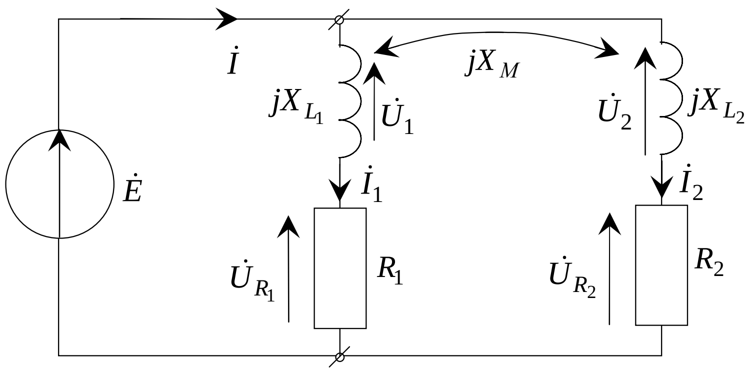


Рис. 5.24.

Для схемы, изображенной на рис. 5.24 запишем уравнения по первому закону Кирхгофа

и по второму закону Кирхгофа

$$\dot{E} = \dot{U}_{R_1} + \dot{U}_1 = R_1\dot{I}_1 + (jX_{L_1}\dot{I}_1 \pm jX_M\dot{I}_2),$$

$$\dot{E} = \dot{U}_{R_2} + \dot{U}_2 = R_2\dot{I}_2 + (jX_{L_2}\dot{I}_2 \pm jX_M\dot{I}_1).$$

В результате:

$$\dot{I}_1 = \left[\frac{\underline{Z}_2 - (\pm jX_M)}{\underline{Z}_1\underline{Z}_2 + X_M^2}\right] \cdot \dot{E}\,; \quad \dot{I}_2 = \left[\frac{\underline{Z}_1 - (\pm jX_M)}{\underline{Z}_1\underline{Z}_2 + X_M^2}\right] \cdot \dot{E}\,;$$

$$\dot{I} = \left[\frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 - 2(\pm jX_M)}{\underline{Z}_1\underline{Z}_2 + X_M^2}\right] \cdot \dot{E}\,.$$

Развязка индуктивной связи

Развязка индуктивной связи применяется для ее исключения с целью упрощения расчетов и может быть доказана при помощи законов Кирхгофа в комплексной форме.

Два индуктивно связанных элемента подходят одинаковым образом к общему узлу (d)

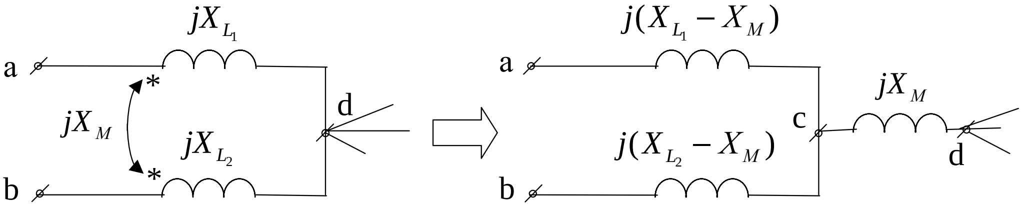


Рис. 5.25.

Два индуктивно связанных элемента подходят различным образом к общему узлу (d)

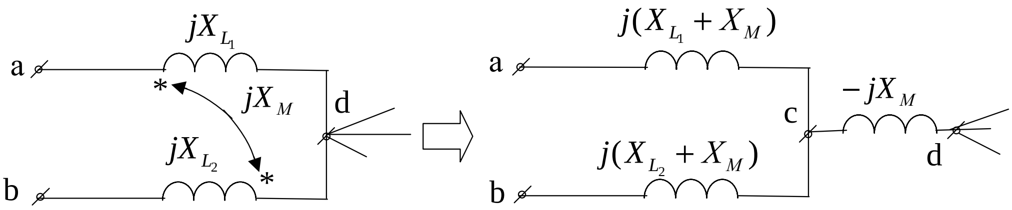


Рис. 5.26.

После развязки индуктивной связи для расчета цепи можно использовать любой известный метод в комплексной форме.

Пример:

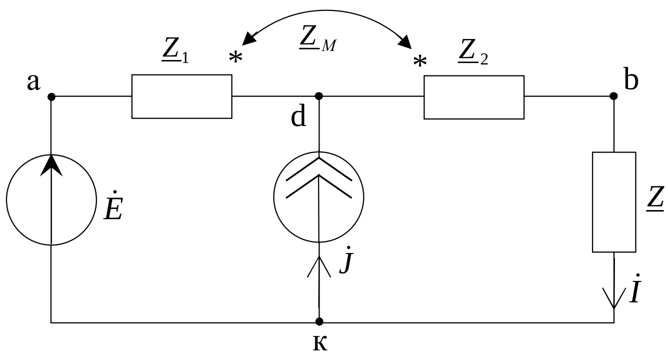


Рис. 5.27.

Дано:

$\dot{E} = Ee^{j\alpha}$, $\dot{J} = Je^{j\beta}$,

$\underline{Z}_1 = R_1 + jX_1$, $\underline{Z}_2 = R_2 + jX_2$, $\underline{Z} = R + jX$, $\underline{Z}_M = jX_M$.

Определить: $\dot{I} = ?$

После развязки:

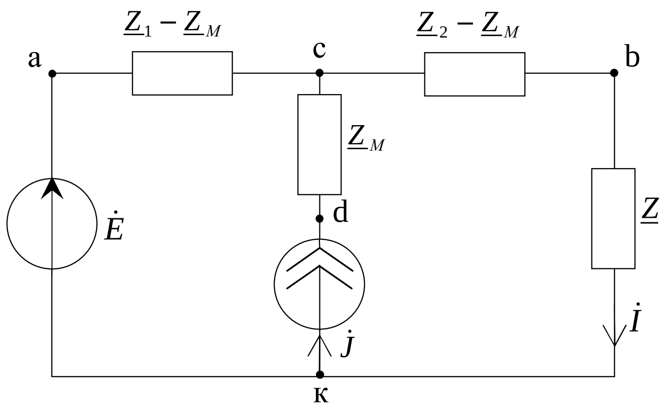


Рис. 5.28.

Используем метод эквивалентного генератора (рис. 5.29):

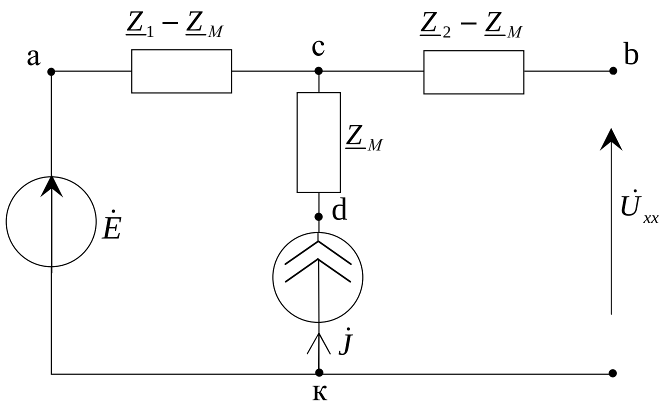


Рис.5.29.

Напряжение холостого хода:

$$\dot{E}_\Gamma = \dot{U}_{xx} = \dot{E} + \dot{J} \cdot (\underline{Z}_1 - \underline{Z}_M) = E_\Gamma e^{j\alpha_\Gamma} .$$

Сопротивление генератора:

$$\underline{Z}_\Gamma = (\underline{Z}_2 - \underline{Z}_M) + (\underline{Z}_1 - \underline{Z}_M) = R_\Gamma + jX_\Gamma = Z_\Gamma e^{j\alpha_\Gamma} .$$

Ток в нагрузке:

$$\dot{I} = \frac{\dot{E}_\Gamma}{\underline{Z}_\Gamma + \underline{Z}} = Ie^{j\lambda}, \; I = \frac{E_\Gamma}{\sqrt{(R_\Gamma + R)^2 + (X_\Gamma + X)^2}} .$$

Активная мощность, потребляемая нагрузкой (рис. 5.30):

$$P = I^2 R = \frac{E_Г^2 R}{\left(R_Г + R\right)^2 + \left(X_Г + X\right)^2} = f\left(R\right)$$

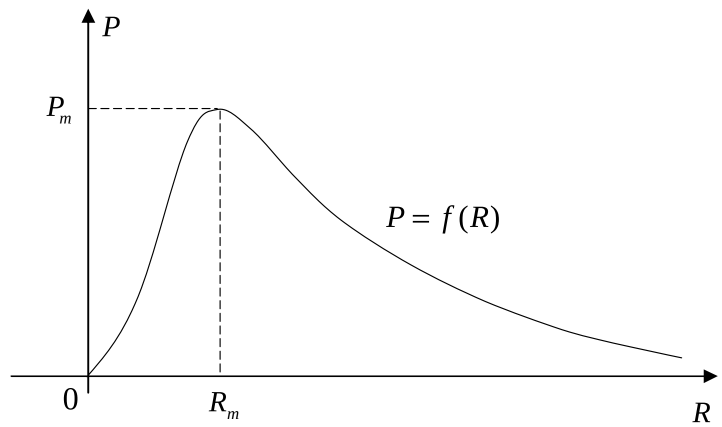


Рис. 5.30.

Сопротивление, при котором активная потребляемая мощность в нагрузке будет максимальной:

$$R_m = \sqrt{R_Г{}^2 + (X_Г + X)^2}\,,\ P_m = \frac{E_Г^2}{2\left(R_m + R_Г\right)^2}\,.$$

Пример:

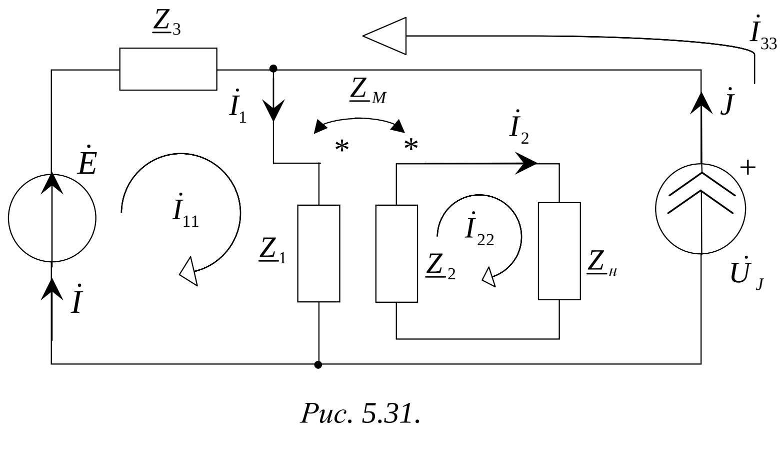


Рис. 5.31.

Дано:

$\dot{E},\ \dot{J},\ \underline{Z}_1,\ \underline{Z}_2,\ \underline{Z}_3,\ \underline{Z}_M,\ \underline{Z}_н.$

Определить: $\dot{I},\ \dot{I}_1,\ \dot{I}_2,\ \dot{U}_J = ?$

По методу контурных токов:

$$\begin{cases} \dot{I}_{33} = \dot{J}, \\ \dot{I}_{11}(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3) - \dot{I}_{22}\underline{Z}_M - \dot{I}_{33}\underline{Z}_3 = \dot{E}, \\ \dot{I}_{22}(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_H) - \dot{I}_{11}\underline{Z}_M - \dot{I}_{33}\cdot 0 = 0. \end{cases}$$

Далее находим:

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_{11};\ \dot{I}_2 = \dot{I}_{22};\ \dot{I} = \dot{I}_{11} - \dot{I}_{33};\ \dot{U}_J = \dot{E} - \dot{I}\,\underline{Z}_3\,.$$

ЗАДАНИЕ №2

Линейные электрические цепи с гармоническими напряжениями и токами

Для заданной схемы с источниками гармонических ЭДС и тока

$$e_1(t) = \sqrt{2}E_1\sin(\omega t + \alpha_1);\ \ e_2(t) = \sqrt{2}E_2\sin(\omega t + \alpha_2);$$

$$e_3(t) = 0;\ J(t) = \sqrt{2}J\sin(\omega t + \beta),$$

принимая $\omega = 314$ рад/с и ***M=L/2*** **,** выполнить следующее.

Записать систему независимых уравнений по законам Кирхгофа для мгновенных значений токов.

Рассчитать без учета ***M*** комплексные сопротивления ветвей, соединяющих узлы, помеченные на схеме буквами и изобразить комплексную схему замещения с этими сопротивлениями для расчета комплексов действующих значений токов ветвей (номера и направления токов сохранить согласно заданию №1, причем параллельное соединение ***R*** и ***C*** представить в виде одного комплексного сопротивления).

Не исключая индуктивной связи, определить комплексы действующих значений токов всех ветвей и напряжение на зажимах источника тока:

по законам Кирхгофа,

методом контурных токов.

Записать мгновенные значения тока в ветви ***ab*** и напряжения на зажимах источника тока.

Рассчитать балансы активной и реактивной мощностей.

Построить лучевую диаграмму токов и совмещенную с ней топографическую диаграмму напряжений.

Определить показание вольтметра.

Сделать развязку индуктивной связи и по методу эквивалентного генератора относительно сопротивления ***R*** ветви ***ab*** определить комплексное сопротивление активного двухполюсника (эквивалентного генератора) $\underline{Z}_{Г} = Z_{Г} \cdot e^{j\varphi_{Г}}$, ЭДС генератора $\dot{E}_{Г}$ и ток $\dot{I}_{ab}$ в ветви ***ab***, а затем при изменении сопротивления ***R*** ветви ***ab*** от 0 до $10 \cdot Z_{Г}$ рассчитать и построить зависимость для активной мощности $P_{ab} = f(R)$.

Проанализировать результаты вычислений и сформулировать выводы по заданию.

Примечание: Схемы и таблицы к заданию №2 приведены в задании №1.

Методические указания к работе № 2.

Для заданной схемы дано:

$e_1(t) = \sqrt{2} \cdot E_1 \cdot \sin(\omega t + \alpha_1)$, В;

$e_2(t) = \sqrt{2} \cdot E_2 \cdot \sin(\omega t + \alpha_2)$, В;

$e_3(t) = 0$, В;

$J(t) = \sqrt{2} \cdot J \cdot \sin(\omega t + \beta)$, А.

E_1	E_2	J	α_1	α_2	β
В	В	А	град	град	град
100	200	2	90	0	-60

R	L	C	ω	M
Ом	мГн	мкФ	рад/с	мГн
100	318,47	31,8	314	$L/2$

Схема:

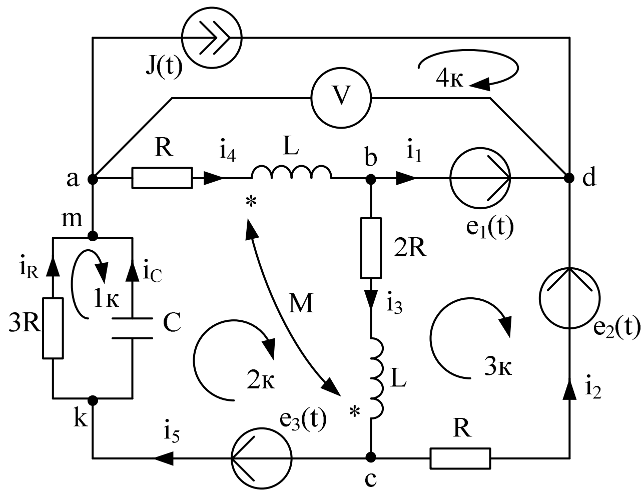


Рис. 6.1.

Записываем систему независимых уравнений по законам Кирхгофа для мгновенных значений токов (функций времени). Для этого указываем номера и направления токов в ветвях схемы аналогично заданию 1. Так как $e_3(t)=0$, то узлы a и m, k и c объединяем. В результате полученная схема будет иметь: $n_y = 4$ узла, $n_в = 7$ ветвей; $n_1 = n_y - 1 = 3$ уравнений по первому закону Кирхгофа, $n_2 = n_в - n_1 = 4$ уравнений по второму закону Кирхгофа.

Выбираем 3 узла (например, a, b, d) и 4 контура, для которых составляем уравнения по законам Кирхгофа, учитывая, что индуктивно связанные элементы включены встречно:

узел a: $J(t) + i_4 - i_R - i_C = 0$,

узел b: $i_1 + i_3 - i_4 = 0$,

узел d: $-i_1 - i_2 - J(t) = 0$,

1 контур: $3R \cdot i_R - \dfrac{1}{C}\int i_C \cdot dt = 0$,

2 контур: $\dfrac{1}{C}\int i_C dt + Ri_4 + \left(L\dfrac{di_4}{dt} - M\dfrac{di_3}{dt}\right) + \left(L\dfrac{di_3}{dt} - M\dfrac{di_4}{dt}\right) + 2Ri_3 = 0$,

3 контур: $-R \cdot i_2 - 2R \cdot i_3 - \left(L\dfrac{di_3}{dt} - M\dfrac{di_4}{dt}\right) = e_1(t) - e_2(t)$,

4 контур: $-R \cdot i_4 - \left(L\dfrac{di_4}{dt} - M\dfrac{di_3}{dt}\right) = u_J(t) - e_1(t)$.

Найти токи из этих дифференциальных уравнений весьма трудоемко. Поэтому используем символический метод, позволяющий дифференциальные уравнения с синусоидальными напряжениями и токами преобразовать к алгебраическим уравнениям с комплексными величинами, решить которые значительно проще.

Рассчитываем без учета взаимной индуктивности M комплексные сопротивления ветвей, соединяющих узлы a, b, c, d, причем,

$$X_L = \omega L = 314 \cdot 318.47 \cdot 10^{-3} = 100 \text{ Ом}; \; X_M = \frac{X_L}{2} = 50 \text{ Ом};$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{314 \cdot 31.8 \cdot 10^{-6}} = 100 \text{ Ом}.$$

$$\underline{Z}_1 = 0 \text{ Ом}; \; \underline{Z}_2 = R = 100 = 100 \cdot e^{j0^\circ} \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_3 = 2R + jX_L = 200 + j100 = \sqrt{200^2 + 100^2} e^{j \cdot arctg \frac{100}{200}} = 223.6 e^{j26.6^\circ} \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_4 = R + jX_L = 100 + j100 = 141.4 \cdot e^{j45^\circ} \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_5 = \frac{3R \cdot (-jX_C)}{3R - jX_C} = \frac{300 \cdot (-j100)}{300 - j100} = \frac{3 \cdot 10^4 e^{-j90^\circ}}{\sqrt{300^2 + 100^2} e^{jarctg \frac{-100}{300}}} =$$

$$= \frac{3 \cdot 10^4 e^{-j90^\circ}}{316.2 e^{-j18.4^\circ}} = 94.88 e^{-j71.6^\circ} = 30 - j90 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_M = jX_M = j\omega M = j\omega \frac{L}{2} = j50 = 50 \cdot e^{j90^\circ} \text{ Ом}.$$

Изображаем комплексную схему замещения с этими сопротивлениями и комплексами действующих значений:

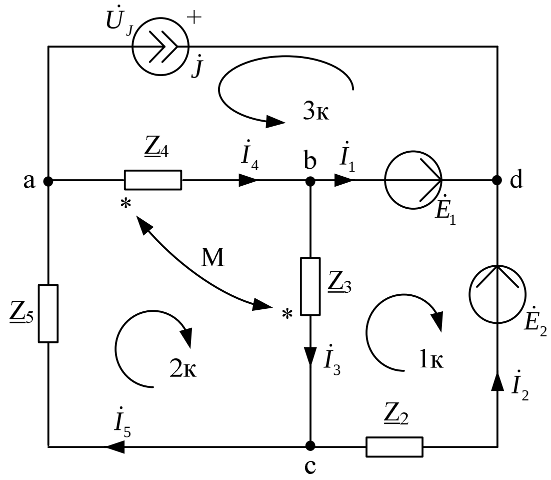


Рис. 6.2.

$\dot{E}_1 = E_1 \cdot e^{j\alpha_1} = 100 \cdot e^{j90^\circ} = j100$ В;

$\dot{E}_2 = E_2 \cdot e^{j\alpha_2} = 200 \cdot e^{j0^\circ} = 200$ В;

$\dot{J} = J \cdot e^{j\beta} = 2 \cdot e^{-j60^\circ} = 1 - j1.73$ А;

встречное включение.

Не исключая индуктивной связи, определяем комплексы действующих значений токов всех ветвей и напряжение на зажимах источника тока.

Используем законы Кирхгофа в комплексной форме ($n_y = 4$ – число узлов, $n_в = 6$ – число ветвей, $n_1 = n_y - 1 = 3$ – число уравнений по первому закону Кирхгофа, $n_2 = n_в - n_1 = 3$ – число уравнений по второму закону Кирхгофа):

узел a: $\dot{J} + \dot{I}_4 - \dot{I}_5 = 0$,

узел b: $\dot{I}_1 + \dot{I}_3 - \dot{I}_4 = 0$,

узел c: $\dot{I}_2 - \dot{I}_3 + \dot{I}_5 = 0$,

1 контур: $\underline{Z}_2 \cdot \dot{I}_2 + \left(\underline{Z}_3 \cdot \dot{I}_3 - \underline{Z}_M \cdot \dot{I}_4\right) = -\dot{E}_1 + \dot{E}_2$,

2 контур: $\left(\underline{Z}_3 \cdot \dot{I}_3 - \underline{Z}_M \cdot \dot{I}_4\right) + \left(\underline{Z}_4 \cdot \dot{I}_4 - \underline{Z}_M \cdot \dot{I}_3\right) + \underline{Z}_5 \cdot \dot{I}_5 = 0$,

3 контур: $\left(\underline{Z}_4 \cdot \dot{I}_4 - \underline{Z}_M \cdot \dot{I}_3\right) = -\dot{U}_J + \dot{E}_1$.

Полученные $n = n_1 + n_2 = n_в = 6$ уравнений записываем совместно в матричном виде т.е.

$$\begin{array}{r} a \\ b \\ c \\ 1k \\ 2k \\ 3k \end{array}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \underline{Z}_2 & \underline{Z}_3 & -\underline{Z}_M & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{Z}_3-\underline{Z}_M & \underline{Z}_4-\underline{Z}_M & \underline{Z}_5 & 0 \\ 0 & 0 & -\underline{Z}_M & \underline{Z}_4 & 0 & 1 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \dot{I}_3 \\ \dot{I}_4 \\ \dot{I}_5 \\ \dot{U}_J \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\dot{J} \\ 0 \\ 0 \\ -\dot{E}_1+\dot{E}_2 \\ 0 \\ \dot{E}_1 \end{bmatrix} \text{ или}$$

$A\times X = B$, которые решаем на ЭВМ при помощи программы MathCad. В результате:

$$A:=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 100 & 200+100i & -50i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 200+50i & 100+50i & 30-90i & 0 \\ 0 & 0 & -50i & 100+100i & 0 & 1 \end{bmatrix};\ B:=\begin{bmatrix} -1+1.73i \\ 0 \\ 0 \\ 200-100i \\ 0 \\ 100i \end{bmatrix}.$$

Далее вводим в программу уравнение $X := A^{-1}\cdot B$ и получаем решение в алгебраической форме:

$$X=\begin{bmatrix} -0.795+2.223i \\ -0.205-0.493i \\ 0.408-0.554i \\ -0.387+1.668i \\ 0.613-0.062i \\ 233.298-7.703i \end{bmatrix}.$$

Переводим найденные значения в показательную форму, причем для этого можно использовать MathCad:

$\dot{I}_1 = -0.795 + j2.223 = 2.361e^{j109.7^\circ}$ A;

$\dot{I}_2 = -0.205 - j0.493 = 0.534e^{-j112.5^\circ}$ A;

$\dot{I}_3 = 0.408 - j0.554 = 0.688e^{-j53.6^\circ}$ A;

$\dot{I}_4 = -0.387 + j1.668 = 1.713e^{j103^\circ}$ A;

$\dot{I}_5 = 0.613 - j0.062 = 0.616e^{-j5.7^\circ}$ А;

$\dot{U}_J = 233.298 - j7.703 = 233.425e^{-j1.9^\circ}$ В.

Используем метод контурных токов в комплексной форме ($n_y = 4$ – число узлов, $n_в = 6$ – число ветвей, $n_i = 5$ – число неизвестных токов, $n_{кт} = n_в - n_y + 1 = 3$ – число контурных токов, $n_{ку} = n_i - n_y + 1 = 2$ – число контурных уравнений):

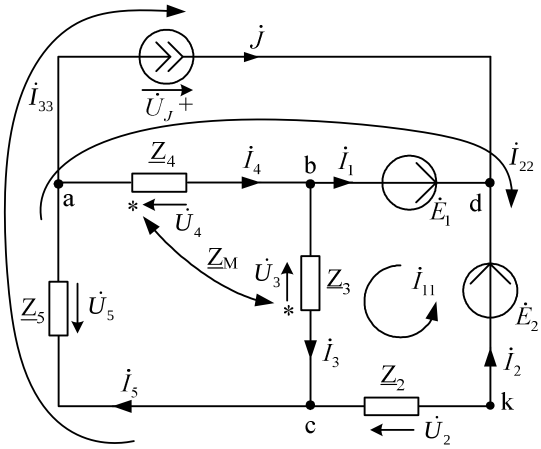


Рис. 6.3.

Контурные токи направляем так, чтобы через источник тока проходил один контурный ток и через каждое индуктивно связанное сопротивление проходил один свой контурный ток.

В результате получим следующие уравнения для контурных токов (встречное включение):

$$\begin{cases} \dot{I}_{33} = \dot{J} = 1 - j1.73; \\ \dot{I}_{11} \cdot (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3) - \dot{I}_{22} \cdot \underline{Z}_2 - \dot{I}_{33} \cdot \underline{Z}_2 - \dot{I}_{22} \cdot \underline{Z}_M = -\dot{E}_1 + \dot{E}_2; \\ \dot{I}_{22} \cdot (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_4 + \underline{Z}_5) - \dot{I}_{11} \cdot \underline{Z}_2 + \dot{I}_{33} \cdot (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_5) - \dot{I}_{11} \cdot \underline{Z}_M = \dot{E}_1 - \dot{E}_2. \end{cases}$$

Группируем слагаемые и записываем уравнения в матричном виде:

$$\left[\begin{array}{c:c} (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3) & -(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_M) \\ \hdashline -(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_M) & (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_4 + \underline{Z}_5) \end{array}\right] \times \left[\begin{array}{c} \dot{I}_{11} \\ \hdashline \dot{I}_{22} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} -\dot{E}_1 + \dot{E}_2 + \dot{J} \cdot \underline{Z}_2 \\ \hdashline \dot{E}_1 - \dot{E}_2 - \dot{J} \cdot (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_5) \end{array}\right].$$

Эти уравнения можно решить подстановкой, методом Крамера или на ЭВМ при помощи программы MathCad. Для этого в программу вводим матрицы с числовыми значениями комплексных коэффициентов в алгебраической форме:

$$A := \begin{bmatrix} (300+100i) & -(100+50i) \\ -(100+50i) & (230+10i) \end{bmatrix}, \; B := \begin{bmatrix} 300-273i \\ -174.3+414.9i \end{bmatrix}.$$

Далее вводим а программу уравнение $X := A^{-1} \cdot B$ и получаем решение в алгебраической форме:

$$X = \begin{bmatrix} 0.408-0.554i \\ -0.387+1.668i \end{bmatrix},$$

т.е. $\dot{I}_{11} = 0.408 - j0.554$ A; $\dot{I}_{22} = -0.387 + j1.668$ A.

В результате токи в ветвях схемы будут следующими:

$\dot{I}_1 = \dot{I}_{22} - \dot{I}_{11} = -0.795 + j2.223$ A;

$\dot{I}_2 = \dot{I}_{11} - \dot{I}_{22} - \dot{I}_{33} = -0.205 - j0.493$ A;

$\dot{I}_3 = \dot{I}_{11} = 0.408 - j0.554$ A;

$\dot{I}_4 = \dot{I}_{22} = -0.387 + j1.668$ A;

$\dot{I}_5 = \dot{I}_{22} + \dot{I}_{33} = 0.613 - j0.062$ A.

Напряжение на зажимах источника тока найдем по 2 закону Кирхгофа в комплексной форме (контур adba):

$\dot{U}_J - \dot{E}_1 = -(\underline{Z}_4 \cdot \dot{I}_4 - \underline{Z}_M \cdot \dot{I}_3)$, тогда

$\dot{U}_J = \dot{E}_1 - (\underline{Z}_4 \cdot \dot{I}_4 - \underline{Z}_M \cdot \dot{I}_3) = 233.298 - j \cdot 7.703$ В.

Таким образом, полученные результаты полностью совпали с результатами, найденными при помощи законов Кирхгофа.

Записываем мгновенные значения тока в ветви ab и напряжения на зажимах источника тока:

$i_{ab}(t) = i_4(t) = \sqrt{2} \cdot 1.713 \cdot \sin(314t + 103^\circ)$ А;

$u_J(t) = \sqrt{2} \cdot 233.425 \cdot \sin(314t - 1.9^\circ)$ В.

Рассчитываем балансы активной и реактивной мощностей.

Полная вырабатываемая мощность всех источников:

$$\underline{S}_в = \dot{E}_1 \dot{I}_1^* + \dot{E}_2 \dot{I}_2^* + \dot{U}_J \dot{J}^* = 100e^{j90^\circ} \cdot 2.361e^{-j109.7^\circ} + 200e^{j0^\circ} \cdot 0.534e^{j112.5^\circ} +$$

$+233.425e^{-j1.9^\circ} \cdot 2e^{j60^\circ} = 427.979 + j414.93$ ВА, где $\dot{J}^* = 2e^{j60^\circ}$ А; $\dot{I}_1^* = 2.361e^{-j109.7^\circ}$ А; $\dot{I}_2^* = 0.534e^{j112.5^\circ}$ А – сопряженные значения токов источников.

Активная потребляемая мощность:

$$P_n = I_1^2 \cdot \cancel{\mathrm{Re}(\underline{Z}_1)}^{0} + I_2^2 \cdot \mathrm{Re}(\underline{Z}_2) + I_3^2 \cdot \mathrm{Re}(\underline{Z}_3) + I_4^2 \cdot \mathrm{Re}(\underline{Z}_4) + I_5^2 \cdot \mathrm{Re}(\underline{Z}_5) =$$

$$= 0.534^2 \cdot 100 + 0.688^2 \cdot 200 + 1.713^2 \cdot 100 + 0.616^2 \cdot 30 = 427.979 \text{ Вт};$$

где $I_1, I_2, ..., I_5$ - действующие значения (модули) токов.

Реактивная потребляемая мощность:

$$Q_n = I_1^2 \cdot \cancel{\mathrm{Im}(\underline{Z}_1)}^{0} + I_2^2 \cdot \mathrm{Im}(\underline{Z}_2) + I_3^2 \cdot \mathrm{Im}(\underline{Z}_3) + I_4^2 \cdot \mathrm{Im}(\underline{Z}_4) + I_5^2 \cdot \mathrm{Im}(\underline{Z}_5) -$$

$$-2X_M I_3 I_4 \cos(\beta_3 - \beta_4) = 0 + 0.534^2 \cdot 0 + 0.688^2 \cdot 100 + 1.713^2 \cdot 100 +$$

$$+0.616^2 \cdot (-90) - 2 \cdot 50 \cdot 0.688 \cdot 1.713 \cdot \cos(-53.6^\circ - 103^\circ) = 414.93 \text{ вар};$$

где I_3, I_4 и β_3, β_4- действующие значения и фазы (углы) индуктивно связанных токов.

Погрешности расчетов.

По активной мощности:

$$\delta_P\% = \frac{|P_в - P_n|}{P_в} \cdot 100 = 0 \le 3\%.$$

По реактивной мощности:

$$\delta_Q\% = \frac{|Q_в - Q_n|}{Q_в} \cdot 100 = 0 \le 3\%.$$

Строим лучевую векторную диаграмму токов и совмещенную с ней топографическую векторную диаграмму напряжений. Для этого принимаем масштаб векторов тока $m_I = 0.05$ А/мм и на комплексной плоскости строим векторы токов, которые выходят из начала координат каждый под своим углом. Для упрощения построения векторов можно откладывать вещественную и мнимую составляющие по вещественной и мнимой осям соответственно в принятом масштабе m_I, например, $\dot{I}_1 = -0.795 + j2.223 = 2.361e^{j109.7^\circ}$ А.

После построения векторов токов проверяем первый закон Кирхгофа. Для этого достраиваем для узлов пунктирными линиями параллелограммы таким образом, чтобы ток равный сумме двух других токов являлся диагональю параллелограмма. Например, для узла а имеем $\dot{I}_5 = \dot{I}_4 + \dot{J}$, т.е. $\dot{I}_5$ является диагональю параллелограмма, образованного токами $\dot{I}_4$ и $\dot{J}$.

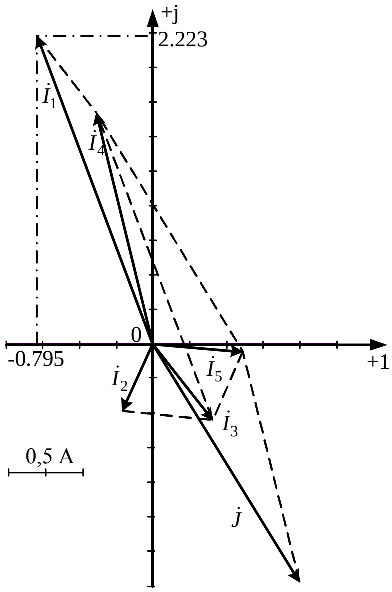


Рис. 6.4.

Для упрощения построения топографической диаграммы напряжений на комплексной схеме расставляем стрелки напряжений $\dot U_2, \dot U_3, \dot U_4, \dot U_5$ навстречу направлениям токов. Далее, используя закон Ома и учитывая наличие индуктивной связи, проводим расчет этих напряжений (встречное включение):

$\dot U_2 = \underline{Z}_2 \dot I_2 = -20.5 - j49.3 = 53.39 e^{-j112.6^\circ}$ В;

$\dot U_3 = \underline{Z}_3 \dot I_3 - \underline{Z}_M \dot I_4 = 220.4 - j50.65 = 226.14 e^{-j12.9^\circ}$ В;

$\dot U_4 = \underline{Z}_4 \dot I_4 - \underline{Z}_M \dot I_3 = -233.2 + j107.7 = 256.9 e^{-j155.21^\circ}$ В;

$\dot U_5 = \underline{Z}_5 \dot I_5 = 12.81 - j57.03 = 58.45 e^{-j77.3^\circ}$ В;

$\dot E_1 = j100 = 100 e^{j90^\circ}$ В;

$\dot E_2 = 100 = 200 e^{j0^\circ}$ В;

$\dot U_J = 233.3 - j7.7 = 233.4 e^{-j1.9^\circ}$ В.

Затем рассчитываем комплексные потенциалы узлов и точки k схемы, предварительно приняв, например, $\varphi_b = 0$:

$\dot\varphi_a = \dot\varphi_b + \dot U_4 = -233.2 + j107.7$ В;

$\dot\varphi_d = \dot\varphi_b + \dot E_1 = j100$ В;

$\dot\varphi_c = \dot\varphi_b - \dot U_3 = -220.4 + j50.65$ В;

$\dot{\varphi}_k = \dot{\varphi}_c - \dot{U}_2 = -199.9 + j99.95$ В.

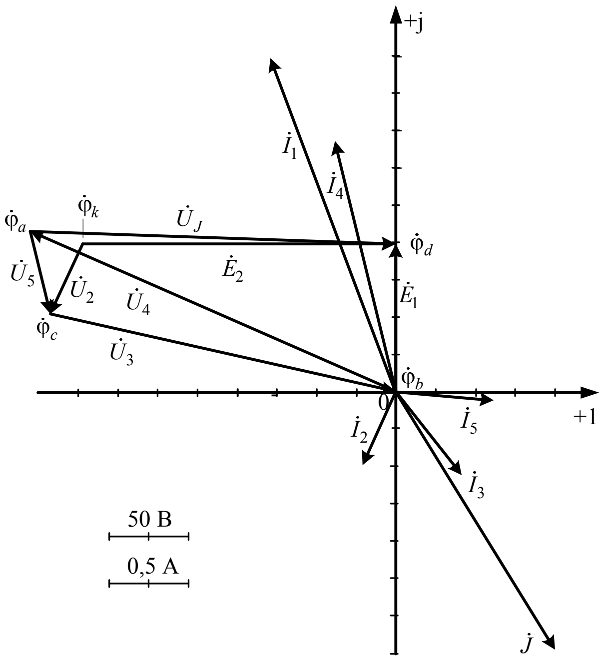


Рис. 6.5.

Принимаем масштаб векторов напряжений и потенциалов узлов, например, $m_U = 50$ В/см. На комплексной плоскости, где уже построены векторы токов, отмечаем точками потенциалы узлов и точки k, откладывая их вещественные и мнимые составляющие по вещественной и мнимой осям соответственно, в принятом масштабе m_U. Далее соединяем точки потенциалов векторами напряжений согласно их направлениям на комплексной схеме замещения.

Определяем показание вольтметра аналитически и графически, как действующее значение напряжения, между точками включения вольтметра, т.е. между узлами a и d.

Аналитически:

$U_V = \left|\dot{U}_J\right| = 233.425$ В или $U_V = \left|\dot{\varphi}_d - \dot{\varphi}_a\right| = \left|233.2 - j7.7\right| = 233.425$ В.

Графически (по векторной диаграмме):

$U_V = \left|\overrightarrow{ad}\right| \cdot m_V = 4.65 \cdot 50 = 232.5$ В.

Делаем развязку индуктивной связи и методом эквивалентного генератора находим ток ветви ab, т.е. $\dot{I}_{ab} = \dot{I}_4$. При развязке учитываем, что индуктивно связанные сопротивления $\underline{Z}_3$ и $\underline{Z}_4$ подходят к общему узлу b одинаковым образом.

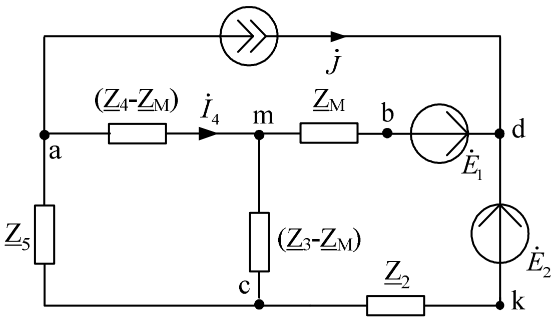


Рис. 6.6.

Далее относительно сопротивления R бывшей ветви ab (после развязки ветвь am) используем метод эквивалентного генератора.

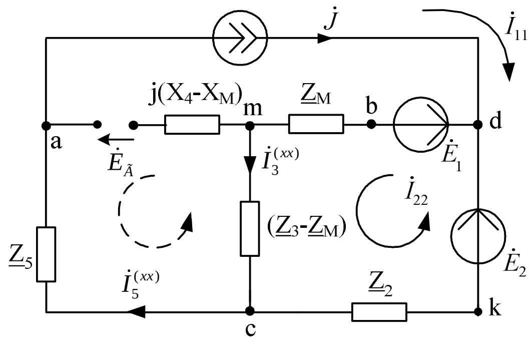


Рис. 6.7.

Для определения токов $\dot{I}_3^{(xx)}$ и $\dot{I}_5^{(xx)}$ во вспомогательной схеме применим метод контурных токов:

$$\begin{cases} \dot{I}_{11} = \dot{J} \\ \dot{I}_{22}\left(\underline{Z}_3 - \underline{Z}_M + \underline{Z}_M + \underline{Z}_2\right) - \dot{I}_{11} \cdot \underline{Z}_2 = \dot{E}_2 - \dot{E}_1 \end{cases},$$

тогда $\dot{I}_{22} = \dfrac{\dot{E}_2 - \dot{E}_1 + \dot{J} \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = 0.627 - j1.119$ А. В результате:

$\dot{I}_3^{(xx)} = \dot{I}_{22} = 0.627 - j1.119$ А; $\dot{I}_5^{(xx)} = \dot{I}_{11} = \dot{J} = 1 - j1.73$ А.

Затем по 2 закону Кирхгофа составляем уравнение и находим $\dot{E}_Г$:

$\dot{E}_Г = -\left(\underline{Z}_3 - \underline{Z}_M\right)\dot{I}_3^{(xx)} - \underline{Z}_5\dot{I}_5^{(xx)} = -55.65 + j334.35 = 338.95e^{j99.45^\circ}$ В,

т.е. $E_Г = 338.95$ В, $\alpha_Г = 99.45^\circ$.

Во вспомогательной схеме ветвь с источником тока разрываем, ЭДС $\dot{E}_1$ и $\dot{E}_2$ закорачиваем и относительно зажимов сопротивления Rветви ab находим $\underline{Z}_Г$:

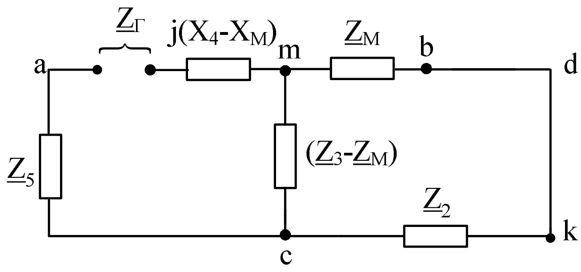


Рис. 6.8.

$$\underline{Z}_Г = \underline{Z}_5 + j\left(X_4 - X_M\right) + \frac{\left(\underline{Z}_3 - \underline{Z}_M\right)\left(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_M\right)}{\underline{Z}_3 - \underline{Z}_M + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_M} = 97.5 - j12.5 =$$

$= 98.3e^{-j7.3^\circ}$ Ом,

т.е. $R_Г = 97.5$ Ом; $X_Г = -12.5$ Ом; $\varphi_Г = -7.3^\circ$; $Z_Г = 98.3$ Ом.

Далее находим ток ветви ab:

$$\dot{I}_4 = \frac{\dot{E}_Г}{\underline{Z}_Г + R} = -0.387 + j1.668 = 1.713e^{j103^\circ} \text{ А},$$

который совпал со значениями, найденными при помощи законов Кирхгофа и метода контурных токов.

Затем изменяя величину сопротивления Rветви ab от 0 до $10Z_Г = 983$ Ом рассчитываем мощность P_{ab}, которая выделяется в виде тепла в этом сопротивлении:

$$P_{ab} = \frac{E_Г^2 \cdot R}{\left(R + R_Г\right)^2 + X_Г^2}.$$

Результаты расчетов этой мощности вносим в таблицу:

R, Ом	0	98.3	196.6	294.9	393.2	491.5	589.8	688.1	786.4	884.7	983

P_{ab}, Вт	0	293.4	260.7	219.8	187.5	162.7	143.4	128.1	115.6	105.3	96.7

Максимум мощности $P_{ab} = P_m = \dfrac{E_Г^2}{2\left(R_m + R_Г\right)} = 293.4$ Вт наблюдается при $R = R_m = \sqrt{R_Г^2 + X_Г^2} = Z_Г = 98.3$ Ом. Строим график зависимости $P_{ab} = f(R)$.

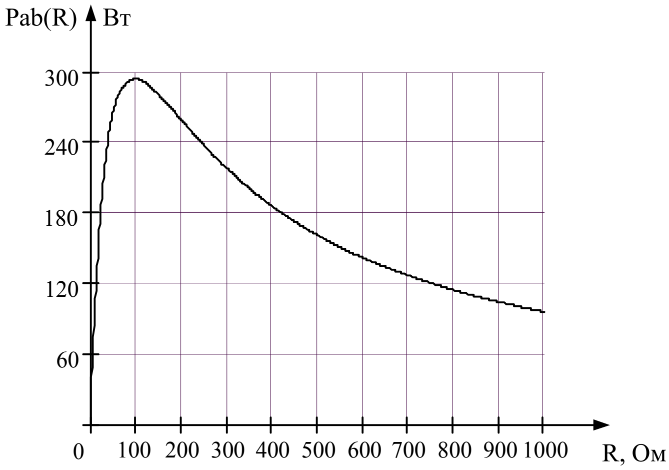


Рис. 6.9.

Необходимо сформулировать вывод по выполненным пунктам задания, в котором сравнить результаты вычислений, оценить трудоемкость методов расчета и проанализировать график мощности п.7.

Документ MathCad

Дано: $ORIGIN := 1$

$E1 := 100 \cdot e^{90 \cdot deg i}$ $J := 2 \cdot e^{-60 \cdot deg i}$ $L := 318.47 \cdot 10^{-3}$

$E2 := 200 \cdot e^{0 \cdot deg i}$ $\omega := 314$ $C := 31.8 \cdot 10^{-6}$

$E3 := 0$ $R := 100$ $M := \frac{L}{2}$

Расчет комплексных сопротивлений :

$ZL := i \cdot \omega \cdot L$ $ZC := -i \cdot \frac{1}{\omega \cdot C}$ $ZM := \frac{ZL}{2}$

$ZL = 100i$ $ZC = -100.148i$ $ZM = 50i$

$Z1 := 0$ $Z2 := R$ $Z3 := 2 \cdot R + ZL$ $Z4 := R + ZL$

$Z1 = 0$ $Z2 = 100$ $Z3 = 200 + 100i$ $Z4 = 100 + 100i$

$Z5 := \frac{3R \cdot ZC}{3R + ZC}$ $Z5 = 30.08 - 90.107i$

1. Метод законов Кирхгофа

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & Z2 & Z3 & -ZM & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z3 - ZM & Z4 - ZM & Z5 & 0 \\ 0 & 0 & -ZM & Z4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} -J \\ 0 \\ 0 \\ -E1 + E2 \\ 0 \\ E1 \end{pmatrix}$$

1.1. Решение матричного уравнения: $X := A^{-1} \cdot B$

$$X = \begin{pmatrix} -0.795 + 2.224i \\ -0.205 - 0.492i \\ 0.408 - 0.555i \\ -0.387 + 1.67i \\ 0.613 - 0.062i \\ 233.372 - 7.911i \end{pmatrix}$$

$I1 := X_1$ $I2 := X_2$

$I3 := X_3$ $I4 := X_4$

$I5 := X_5$ $UJ := X_6$

1.2. Значения токов и напряжения на источнике тока в алгебраической форме записи:

$$I1 = -0.795 + 2.224i$$

$$I2 = -0.205 - 0.492i$$

$$I3 = 0.408 - 0.555i$$

$$I4 = -0.387 + 1.67i$$

$$I5 = 0.613 - 0.062i$$

$$UJ = 233.372 - 7.911i$$

1.3. Определение модулей и фаз токов и напряжения:

$$|I1| = 2.362 \qquad \arg(I1) = 109.66\,deg$$

$$|I2| = 0.533 \qquad \arg(I2) = -112.644\,deg$$

$$|I3| = 0.688 \qquad \arg(I3) = -53.658\,deg$$

$$|I4| = 1.714 \qquad \arg(I4) = 103.039\,deg$$

$$|I5| = 0.616 \qquad \arg(I5) = -5.797\,deg$$

$$|UJ| = 233.506 \qquad \arg(UJ) = -1.942\,deg$$

2. Метод контурных токов

2.1. Определение значений контурных токов и напряжения на источнике тока:

$$J33 := J$$

$$A1 := \begin{bmatrix} Z2 + Z3 & -(Z2 + ZM) & 0 \\ -(Z2 + ZM) & Z2 + Z4 + Z5 & 0 \\ -Z2 & Z2 + Z5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B1 := \begin{bmatrix} -E1 + E2 + J33 \cdot Z2 \\ E1 - E2 - J33 \cdot (Z2 + Z5) \\ -E2 - J33 \cdot (Z2 + Z5) \end{bmatrix}$$

$$X1 := A1^{-1} \cdot B1$$

$$X1 = \begin{pmatrix} 0.408 - 0.555i \\ -0.387 + 1.67i \\ 233.372 - 7.911i \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} J11 := X1_1 \\ J22 := X1_2 \\ UJk := X1_3 \end{array}$$

2.2. Значения контурных токов и напряжения на источнике тока в алгебраической форме записи:

$$J11 = 0.408 - 0.555i$$

$$J22 = -0.387 + 1.67i$$

$$UJk = 233.372 - 7.911i$$

2.3. Определение токов в ветвях:

$I1k := J22 - J11 \qquad I1k = -0.795 + 2.224i$

$I2k := J11 - J22 - J33 \qquad I2k = -0.205 - 0.492i$

$I3k := J11 \qquad I3k = 0.408 - 0.555i$

$I4k := J22 \qquad I4k = -0.387 + 1.67i$

$I5k := J22 + J33 \qquad I5k = 0.613 - 0.062i$

2.3. Расчитываем напряжения на пассивных элементах с учетом наличия индуктивной связи:

$U2 := Z2 \cdot I2 \qquad U2 = -20.535 - 49.226i$
$U3 := Z3 \cdot I3 - ZM \cdot I4 \qquad U3 = 220.535 - 50.774i$
$U4 := Z4 \cdot I4 - ZM \cdot I3 \qquad U4 = -233.372 + 107.911i$
$U5 := Z5 \cdot I5 \qquad U5 = 12.837 - 57.137i$

или

$|U2| = 53.337 \qquad \arg(U2) = -112.644\,deg$

$|U3| = 226.304 \qquad \arg(U3) = -12.965\,deg$

$|U4| = 257.114 \qquad \arg(U4) = 155.184\,deg$

$|U5| = 58.561 \qquad \arg(U5) = -77.337\,deg$

3. Баланс мощности

3.1. полная мощность

$$S := E1 \cdot \overline{I1} + E2 \cdot \overline{I2} + UJ \cdot \overline{J} \qquad S = 428.436 + 415.287i$$

3.2. активная мощность

$$P := (|I1|)^2 \cdot Re(Z1) + (|I2|)^2 \cdot Re(Z2) + (|I3|)^2 \cdot Re(Z3) \; \ldots$$
$$+ (|I4|)^2 \cdot Re(Z4) + (|I5|)^2 \cdot Re(Z5)$$

$P = ▮$

3.3. реактивная мощность

3.2. активная мощность

$$P := \left(|I1|\right)^2 \cdot Re(Z1) + \left(|I2|\right)^2 \cdot Re(Z2) + \left(|I3|\right)^2 \cdot Re(Z3) \ldots$$
$$+ \left(|I4|\right)^2 \cdot Re(Z4) + \left(|I5|\right)^2 \cdot Re(Z5)$$

$$P = 428.436$$

3.3. реактивная мощность

$$Q1 := \left(|I1|\right)^2 \cdot Im(Z1) + \left(|I2|\right)^2 \cdot Im(Z2) + \left(|I3|\right)^2 \cdot Im(Z3) \ldots$$
$$+ \left(|I4|\right)^2 \cdot Im(Z4) + \left(|I5|\right)^2 \cdot Im(Z5)$$

$$Q2 := 2 \cdot |I3| \cdot |I4| \cdot \cos(arg(I3) - arg(I4)) \cdot Im(ZM)$$

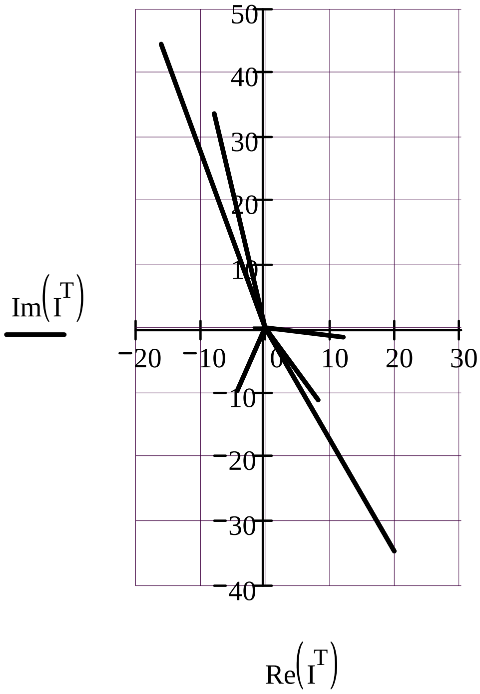
$$Q := Q1 - Q2 \qquad Q = 415.287$$

4. Лучевая диаграмма токов и топографическая диаграмма напряжений

4.1. лучевая диаграмма токов

$m := 20$ - *коэффициент для масштаба тока*

$$I := (0 \;\; J \;\; 0 \;\; I1 \;\; 0 \;\; I2 \;\; 0 \;\; I3 \;\; 0 \;\; I4 \;\; 0 \;\; I5) \cdot m$$



4.2. Топографическая диаграмма напряжений
(строится совмещенно с лучевой диаграммой токов)

$n := 0.2$ - *коэффициент для масштаба напряжения*

4.2.1. Контур bacb:

$\varphi b := 0$

$\varphi a := \varphi b + I4 \cdot Z4 - I3 \cdot ZM$

$\varphi c := \varphi a + I5 \cdot Z5$

$\varphi bb := \varphi c + I3 \cdot Z3 - I4 \cdot ZM$ потенциал φbb должен быть равен φb

$$\varphi 1 := \begin{pmatrix} \varphi b \\ \varphi a \\ \varphi c \\ \varphi bb \end{pmatrix} \cdot n \qquad \varphi 1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -46.674 + 21.582i \\ -44.107 + 10.155i \\ 0 - 0i \end{pmatrix}$$

4.2.2. Контур bdkcb:

$\varphi d := \varphi b + E1$

$\varphi k := \varphi d - E2$

$\varphi cc := \varphi k + I2 \cdot Z2$ потенциал φcc должен быть равен φc

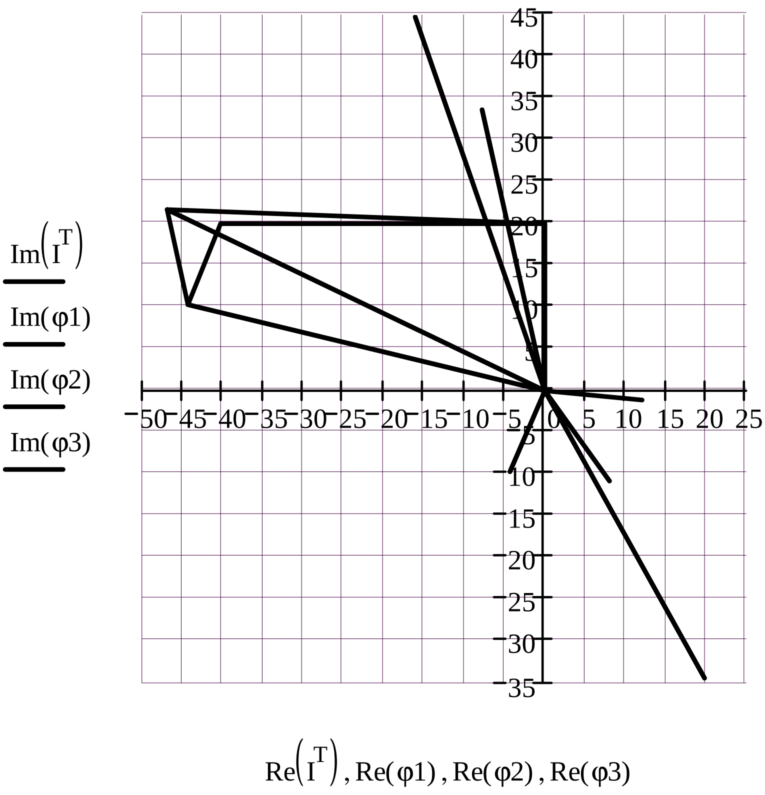
$\varphi bb := \varphi cc + I3 \cdot Z3 - I4 \cdot ZM$ потенциал φbb должен быть равен φb

$$\varphi 2 := \begin{pmatrix} \varphi b \\ \varphi d \\ \varphi k \\ \varphi cc \\ \varphi bb \end{pmatrix} \cdot n \qquad \varphi 2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 20i \\ -40 + 20i \\ -44.107 + 10.155i \\ -0 \end{pmatrix}$$

4.2.3. Контур *bdab:*

$\varphi aa := \varphi d - UJ$ потенциал φaa должен быть равен φa

$$\varphi 3 := \begin{pmatrix} \varphi b \\ \varphi d \\ \varphi aa \\ \varphi b \end{pmatrix} \cdot n \qquad \varphi 3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 20i \\ -46.674 + 21.582i \\ 0 \end{pmatrix}$$



Построенные диаграммы рекомендуется скопировать в графический редактор, например, *Microsoft Visio* и проставить индексы узлов и направления стрелок векторов токов и напряжений.

5. Определяем показания вольтметра

$Uv := |UJ| \qquad Uv = 233.506$

или $\quad Uv := |\varphi d - \varphi a| \qquad Uv = 233.506$

6. Определяем ток в ветви ab методом эквивалентного генератора

6.1. По методу контурных токов определяем токи ХХ

$J11 := J$ $\qquad J11 = 1 - 1.732i$

$$J22 := \frac{E2 - E1 + J \cdot Z2}{Z2 + Z3} \qquad J22 = 0.627 - 1.12i$$

$I3xx := J22 \qquad I5xx := J11$

6.2. ЭДС генератора

$Eg := -(Z3 - ZM) \cdot I3xx - Z5 \cdot I5xx \qquad Eg = -55.351 + 334.79i$

$|Eg| = 339.335 \qquad \arg(Eg) = 99.388deg$

6.3. Сопротивление генератора

$$Zg := Z5 + Im(Z4 - ZM) \cdot i + \frac{(Z3 - ZM) \cdot (Z2 + ZM)}{Z3 + Z2}$$

$Zg = 97.58 - 12.607i$

6.4. Определяем ток в ветви ab

$$I4 := \frac{Eg}{Zg + R} \qquad I4 = -0.387 + 1.67i$$

7. Расчитываем мощность Pab

$$i := 1..11 \qquad Rr_i := |Zg| \cdot (i - 1) \qquad Pab_i := \frac{(|Eg|)^2 \cdot Rr_i}{\left(Rr_i + Re(Zg)\right)^2 + Im(Zg)^2}$$

$T := stack\left(Rr^T, Pab^T\right)$

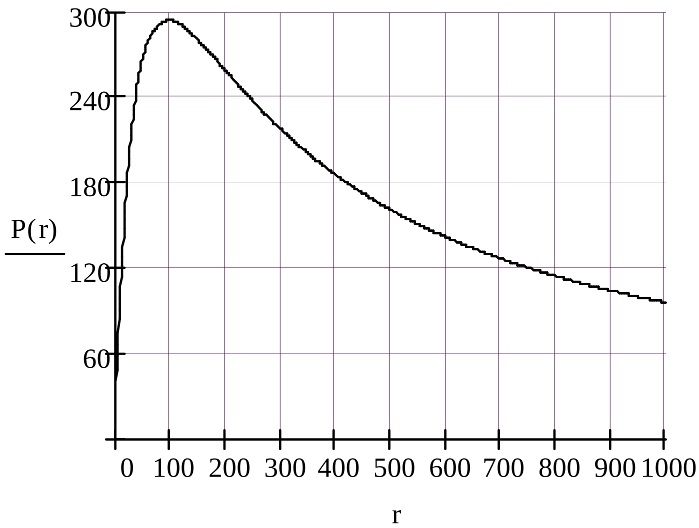
T =

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	0.0	98.4	196.8	295.2	393.6	492.0	590.3	688.7	787.1	885.5	983.9
2	0.0	293.8	261.0	220.1	187.7	162.9	143.6	128.2	115.8	105.5	96.9

7.1. Построение зависимости Pab(R)

$$i := 1..31 \quad Rr_i := \frac{R}{3}\cdot(i-1) \quad Pab_i := \frac{(|Eg|)^2\cdot Rr_i}{\left(Rr_i + \mathrm{Re}(Zg)\right)^2 + \mathrm{Im}(Zg)^2}$$

$$P(r) := \mathrm{interp}(\mathrm{cspline}(Rr, Pab), Rr, Pab, r)$$



РЕЗОНАНС В ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЯХ ПРИ ГАРМОНИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЯХ И ТОКАХ

Реактивные сопротивления и проводимости отдельных участков цепи могут быть как положительными, так и отрицательными величинами и, следовательно, могут взаимно компенсироваться. Поэтому возможны случаи, когда, несмотря на наличие в цепи индуктивных катушек и конденсаторов, входное реактивное сопротивление или входная реактивная проводимость всей цепи оказывается равной нулю. При этом ток и напряжение совпадают по фазе, и эквивалентное сопротивление всей цепи будет активным. Такое явление называют *резонансным*.

Резонанс – это такой режим пассивной цепи, содержащей емкости и индуктивности, при котором входные ток и напряжение совпадают по фазе.

При резонансе цепь потребляет только активную мощность и входное сопротивление этой цепи будет вещественной величиной.

Различают резонансы:

напряжений (или последовательный резонанс);

токов (или параллельный резонанс);

в сложной цепи.

Резонанс напряжений

Резонанс напряжений возможен в электрической цепи с последовательным соединением участков, содержащих емкости и индуктивности. Рассмотрим это явление на примере простейшей цепи, содержащей катушку индуктивности и идеальную ёмкость (рис 5.1).

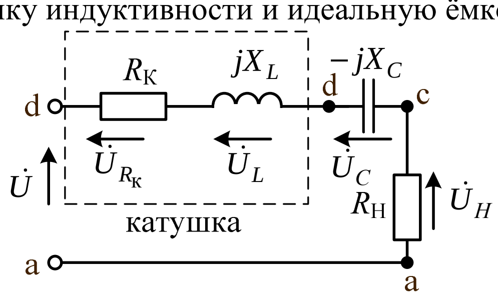


Рис. 7.1.

По закону Ома:

$$\dot I = \frac{\dot U}{\underline{Z}_{вх}} Ie^{j(\alpha-\varphi)}, (A)$$

где$\dot U = Ue^{j\alpha}$

Комплекс входного сопротивления:

$$\underline{Z}_{вх} = (R_к + R_н) + j(X_L - X_C) = R + jX = Z_{вх}e^{j\varphi}, \quad (Ом)$$

где $R = R_К + R_Н, \quad X = X_L - X_C,$

$$Z_{вх} = \sqrt{R^2 + X^2}; \quad \varphi = arctg\frac{X}{R}.$$

Из определения резонанса:

$$\varphi = 0. \qquad (7.1)$$

Тогда, для выполнения (7.1) необходимо равенство аргументов входного напряжения и тока, что возможно только, если мнимая часть входного комплексного сопротивления равна нулю. Отсюда, условие резонанса напряжений в сложной цепи:

$$X = Jm(Z) = 0. \qquad (7.2)$$

В результате при резонансе напряжений для исследуемой схемы (рис.7.1) $X = X_L - X_C = 0$; $X_L = X_C$; или $\omega L = \dfrac{1}{\omega C}$.

$\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ –резонансная угловая частота.

Активная и реактивная мощности:

$$P = \frac{U^2}{R};$$
$$Q = UI\sin\varphi = 0.$$

Тогда $\cos\varphi = 1$. Полная мощность $S = \sqrt{P^2 + Q^2} = P$, при этом $U_L = U_C = I \cdot X_L = I \cdot X_C = U \cdot q$, где q – добротность контура, которая показывает, во сколько напряжение на реактивных элементах превышает входное напряжение.

$q = \dfrac{U_C}{U} = \dfrac{U_L}{U} = \dfrac{X_L}{R} = \dfrac{X_C}{R} = \dfrac{\rho}{R} >> 1$, то $U_L = U_C >> U$,

$\rho = \dfrac{U_L}{I} = \dfrac{U_C}{I} = \omega_0 L = \dfrac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\dfrac{L}{C}}$, $(Ом)$ – характеристическое сопротивление контура

При резонансе напряжений входное сопротивление цепи будет минимальным, а ток будет максимальным.

Векторная диаграмма при резонансе напряжений

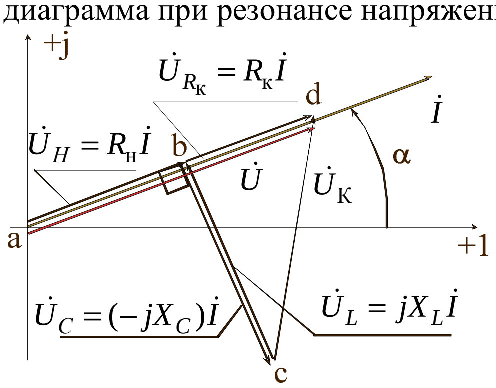


Рис. 7.2.

Частотные и резонансные характеристики

Предположим к что к контуру приложено синусоидальное напряжение $U(t)=U\sqrt{2}\sin\omega t$ амплитуда которого неизменна, а частота может изменяться в широких пределах от о до ∞, изменение частоты приводит к изменению параметров контура, изменяется его реактивное, а, следовательно, и его полное сопротивление, а также угол сдвига между входным током и входным напряжением φ(аргумент комплексного сопротивления цепи).

Зависимости параметров схемы от частоты называют *частотными характеристиками* цепи.

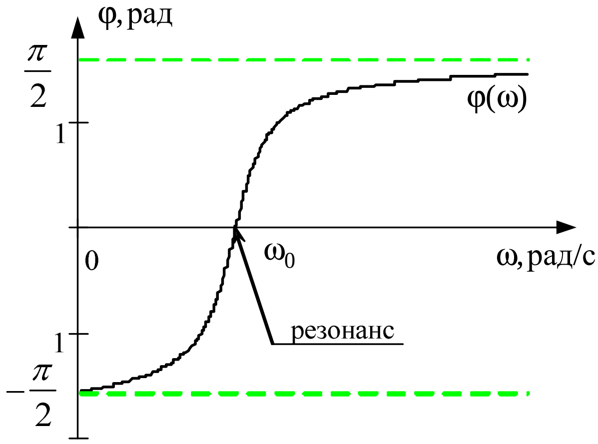


Рис. 7.3.

Отметим, что частоты, при которых наблюдаются фазовый и амплитудный резонансы, не совпадают с частотой собственных колебаний контура (они совпадают только в теоретическом случае, когда катушка индуктивности и конденсатор без потерь)

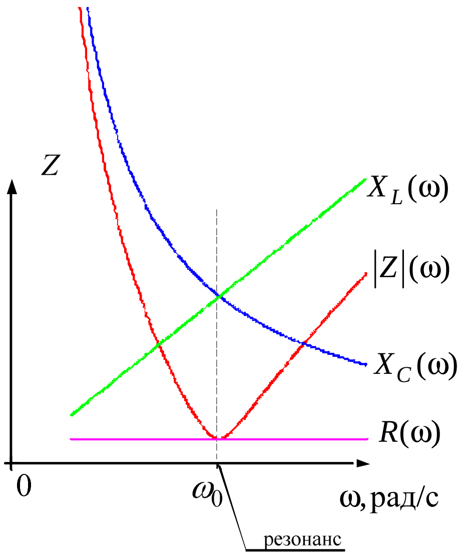


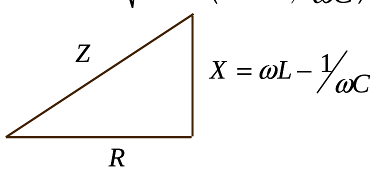
Рис. 7.4.

При изменении частоты ω меняется реактивное сопротивление цепи. При $\omega \to 0$ сопротивление $Z \to \infty$ и ток $\underline{I} \to 0$. При $\omega \to \infty$ сопротивление $Z \to \infty$ и ток $\underline{I} \to 0$. При изменении частоты ω от 0 до ω_0 $\varphi < 0$, т.е. полное сопротивление цепи имеет ёмкостный характер. При изменении частоты ω от ω_0 до ∞ $\varphi > 0$ и увеличивается до $\dfrac{\pi}{2}$, т.е. полное сопротивление цепи имеет индуктивный характер.

Резонансные кривые

Зависимости действующих и амплитудных значений тока напряжения от частоты называют *резонансными* кривыми. Запишем на основании законов Ома.

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}}; \quad I(\omega) = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - 1/\omega C\right)^2}}.$$



$$U_L(\omega) = I \cdot X_L = \frac{U\omega L}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}};$$

$$U_C(\omega) = I \cdot X_C = \frac{U}{\omega C\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}.$$

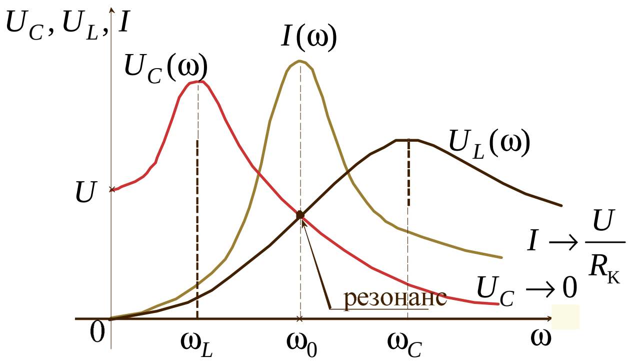


Рис. 7.5.

Максимумы напряжений U_L и U_C имеют место при частотах, отличных от резонансной, причём связь между частотами, при которых кривые имеют максимумы $\omega_L \omega_C = \omega_0{}^2$.

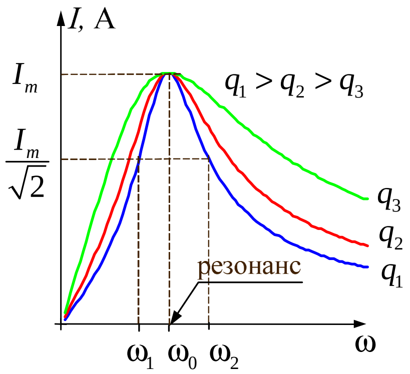


Рис. 7.6.

График зависимости тока от частоты показывает, что цепь обладает избирательными свойствами. Цепь обладает наименьшим сопротивлением при резонансной частоте. Входной ток и напряжение при резонансе резко изменяют свою величину, что приводит к частотным искажениям сигнала. Чтобы эти искажения не превышали допустимой нормы, вводят понятие *полосы пропускания*– ***П*** (т.е.

спектр сигнала не должен выходить за пределы полосы пропускания).

Полоса пропускания для большинства сигналов устанавливается на уровне, при котором ток – I (напряжение – U) уменьшается не более чем $\sqrt{2}$ раз от максимального значения.

По полосе пропускания определяется качество резонансной цепи (её добротность)

$$Q = \frac{\omega_0}{\Pi}, \text{ где } \Pi = \omega_2 - \omega_1 \text{ – полоса пропускания.}$$

Чем больше добротность контура, тем острее кривая тока, тем выше избирательные свойства контура. Избирательными свойствами широко пользуются в электросвязи и радиотехнике, при этом режим резонанса является нормальным режимом работы цепи. Наоборот, в устройствах, где резонансный режим не предусмотрен, появление резонанса нежелательно, т.к. возникающее значительные напряжения на катушке и конденсаторе могут оказаться опасными для изоляции.

Резонанс напряжений используется:

а) в радиотехнике для усиления сигналов определенной частоты;

б) в электроэнергетике для увеличения активной мощности нагрузки генератора (компенсация реактивной мощности).

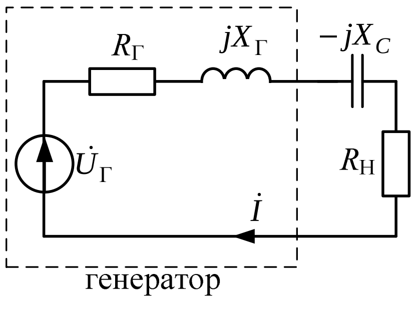


Рис. 7.7.

$$a)\quad X_C = 0 \quad (C = \infty)\ P_н^{'} = (I^{'})^2 R_н = \frac{E_г^2 R_н}{(R_г + R_н)^2 + X_г^2}, \quad (\text{Вт})$$

$$б)\quad X_C = X_Г \quad (\text{резонанс})$$

$$P_н^{''} = (I^{''})^2 R_н = \frac{E_г^2 R_н}{(R_г + R_н)^2} > P_н^{'}, \quad (\text{Вт})$$

Примечание: если $R_к$=0, то тогда $Z_{db}=jX_L-jX_C=0$ – это идеальный резонанс напряжений.

Резонанс токов

Резонанс токов – это резонанс при параллельно соединенных емкости и индуктивности

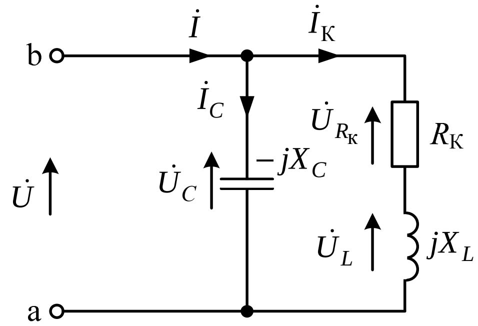


Рис. 7.8.

При резонансе токов входная проводимость цепи и входной ток минимальны

По закону Ома

$\dot{I} = \dot{U}\underline{Y}_{вх} = Ie^{j(\alpha-\varphi)}, \quad (A)$

где $\dot{U} = Ue^{j\alpha}$ – входное напряжение.

Комплекс входной проводимости:

$$\underline{Y}_{вх} = \frac{1}{(-jX_C)} + \frac{1}{(R_к + jX_L)} = \frac{j}{X_C} + \frac{R_к - jX_L}{(R_к + jX_L)(R_к - jX_L)} =$$

$$= g - jb = Y_{вх}e^{-j\varphi}, \quad \left(1/Ом\right),$$

где $g = \dfrac{R_к}{R_к^2 + X_L^2}, \quad \left(1/Ом\right)$ – активная проводимость цепи,

$b = b_к - b_C = \dfrac{X_L}{R_к^2 + X_L^2} - \dfrac{1}{X_C}, \quad \left(1/Ом\right)$ – реактивная проводимость цепи.

$Y_{вх} = \sqrt{g^2 + b^2}, \quad \left(1/Ом\right)$ – модуль входной проводимости цепи.

$\varphi = arctg\dfrac{b}{g}, \quad (\text{град})$ – угол сдвига фаз между током и напряжением.

Из определения резонанса $\varphi = 0$, тогда $\mathrm{Im}(Y) = b = b_к - b_C = 0$.

В результате при резонансе токов

$$b_к = b_C \text{ или } \frac{X_L}{R_к^2 + X_L^2} = \frac{1}{X_C},$$

$$\frac{\omega L}{R_к^2 + (\omega L)^2} = \omega C.$$

Резонанса токов можно добиться изменяя:

частоту,

либо ёмкость,

либо индуктивность,

либо активное сопротивление катушки.

Тогда

$b = 0$	$\underline{Y}_{вх} = g$	$\varphi = 0$
	$\dot{I} = \dot{U} g e^{j\alpha}$	
$P = U^2 g$	$\cos\varphi = 1$	$Q = 0$ $S = P$

При резонансе токов входная проводимость цепи и входной ток минимальны.

Векторная диаграмма при резонансе токов

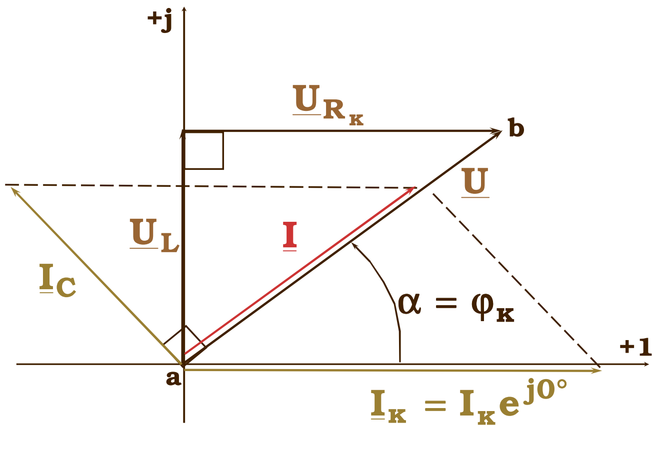


Рис. 7.8.

где – $Z_к = \sqrt{R_к^2 + X_L^2}$; $I_к = U/Z_к$; $I_C = U/X_C$;
$U_L = I_к X_L$; $U_{R_к} = R_к I_к$.

Резонансные характеристики

Запишем действующие значения токов ветвей
$\dot{I} = \dot{U}\underline{Y}$; $I(\omega) = U\sqrt{g^2 + (b_C - b_К)^2}$; $I_L(\omega) = U \cdot b_К = U\dfrac{\omega L}{R_к^2 + \omega L^2}$;
$I_C(\omega) = U \cdot b_C = U\omega C$, на основе этих соотношений построим резонансные характеристики.

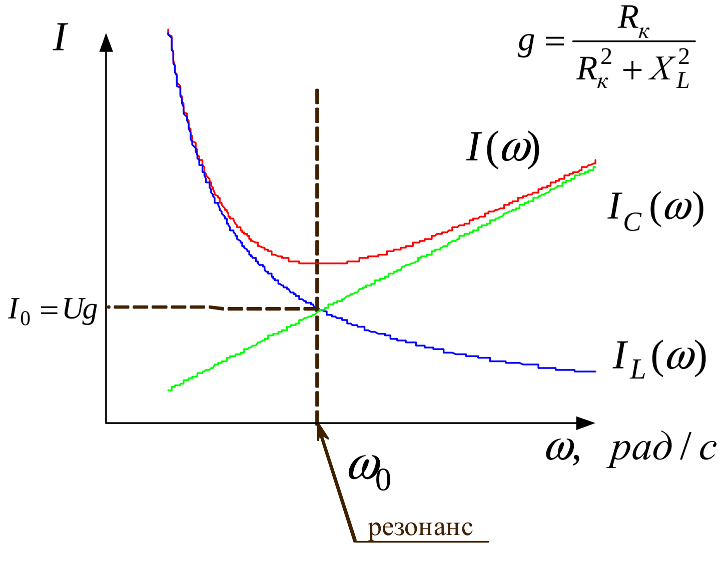


Рис. 7.9

I_0 – действующее значение входного тока при резонансе токов
Частотные характеристики повторяют резонансные, только в другом масштабе.

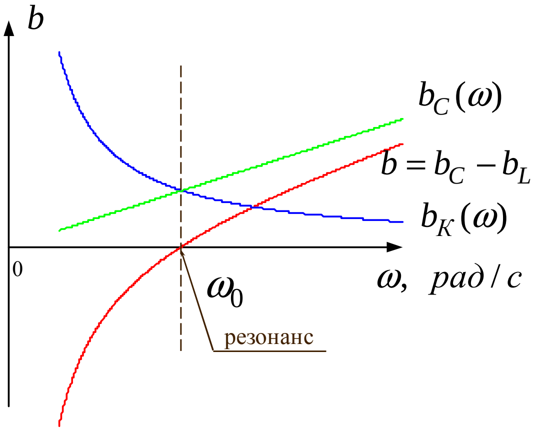


Рис. 7.10.

Примечание:

Если в ветви с ёмкостью присутствует последовательное сопротивление. Результирующая комплексная входная проводимость равна $Y = g + jb$,

где $g = \dfrac{R_1}{R_1^2 + X_L^2} - \dfrac{R_2}{R_2^2 + X_C^2}$; – вещественная часть,

$b = \dfrac{X_L}{R_1^2 + X_L^2} - \dfrac{X_C}{R_2^2 + X_C^2}$ – мнимая часть входной комплексной проводимости.

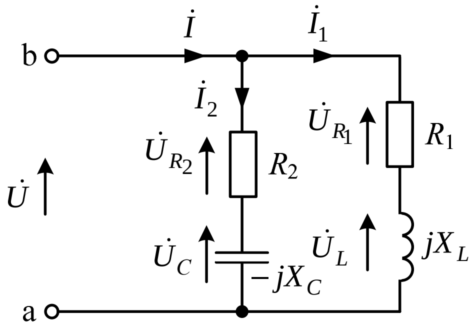


Рис. 7.11.

Приравнивая мнимую часть входной комплексной проводимости к нулю, получаем условие резонанса токов:

$$\frac{X_L}{R_1^2+X_L^2}=\frac{X_C}{R_2^2+X_C^2} \quad \text{или} \quad \frac{\omega L}{R_1^2+(\omega L)^2}=\frac{1/\omega C}{R_1^2+\left(1/\omega C\right)^2}.$$

Изменением одной из величин (ω, L, C, R_1, R_2) при остальных четырёх постоянных не всегда может быть достигнут резонанс. Резонанс отсутствует, если значение изменяемой величины при её определении из уравнения получается мнимым или комплексным. Для L и C могут получаться и по два различных действительных значения. В таких случаях можно достичь двух различных резонансных режимов.

Решая уравнение относительно ω, получим величину резонансной частоты:

$$\omega_p=\omega_0\frac{\sqrt{\rho^2-R_1^2}}{\sqrt{\rho^2-R_2^2}},\ \text{где} \quad \omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad \rho=\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Резонанс возможен, если сопротивления оба больше или оба меньше ρ. Если же это условие не выполняется, получается мнимая частота, т.е. не существует такой частоты при которой имел бы место резонанс.

При $\rho=R_1=R_2$, резонансная частота имеет любое значение, т.е. резонанс наблюдается при любой частоте.

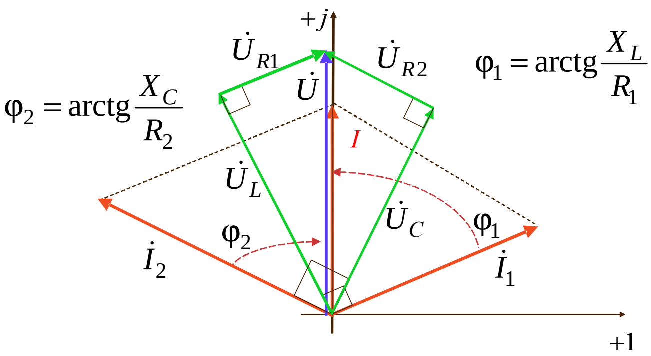


Рис. 7.12.

При параллельном соединении элементов качество резонансной цепи считается тем выше, чем больше отношение $\frac{|Y|}{g}$, которое и в этом случае называется добротностью. Добротность контура показывает во сколько раз ток на реактивных элементах превышает входной ток. При $R_1=R_2=0$

$$Q = \frac{I_C}{I} = \frac{I_L}{I} = \frac{\gamma}{g} >> 1$$

где $\gamma = \sqrt{\frac{C}{L}}$ - характеристическая (волновая) проводимость.

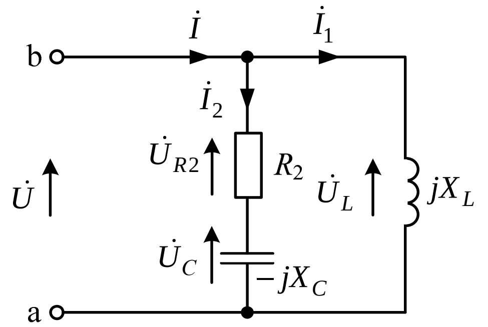


Рис. 7.13.

Векторная диаграмма

$$\phi_1 = -90$$

$$\phi_2 = arctg\frac{X_C}{R_2}$$

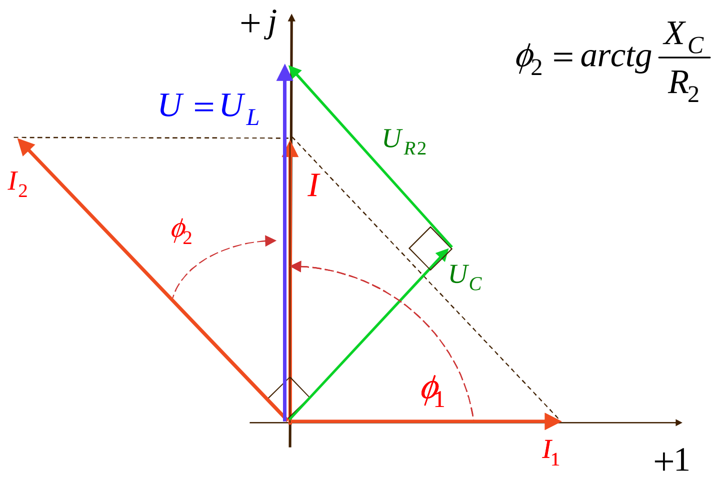


Рис. 7.14.

Резонанс в индуктивно связанных контурах

Определим резонансные частоты и частотные характеристики цепи, на рис 7.15.

Собственные частоты при которых наступит резонанс, в случае отсутствия взаимной индукции равны

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}; \quad \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}.$$

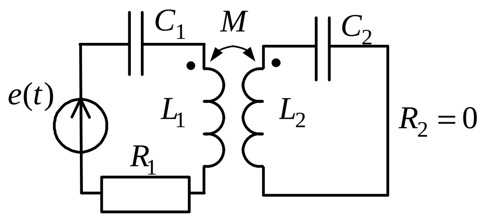


Рис. 7.15.

Схема после развязки индуктивной связи

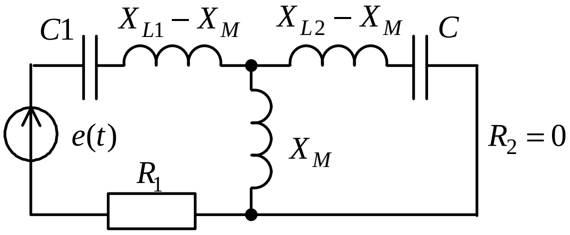


Рис. 7.16.

Условием резонанса напряжений будет равенство нулю эквивалентного реактивного сопротивления (мнимой части входного сопротивления)

$$Z = R_1 + j\left(\omega L_1 - \omega M\right) - j\frac{1}{\omega C_1} + \frac{j\omega M\left(j\left(\omega L_2 - \omega M\right) - j\dfrac{1}{\omega C_2}\right)}{j\omega M + j\left(\omega L_2 - \omega M\right) - j\dfrac{1}{\omega C_2}}$$

выделим мнимую часть и приравняем её к нулю, откуда получим уравнение

$$\left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}\right)\left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right) = \omega^2 M^2.$$

Решая это уравнение относительно ω, найдем частоты, отвечающие резонансу напряжений либо ω', либо ω''. При этих частотах сопротивление цепи оказывается минимальным, а ток достигает максимального значения $I_m = \dfrac{U}{R_1}$.

Если оба контура предварительно настроены на одну частоту $\omega_1 = \omega_2 = \omega_0$, то частоты ω', ω'' оказываются равными $\omega' = \dfrac{\omega_0}{\sqrt{1+k}}$ и $\omega'' = \dfrac{\omega_0}{\sqrt{1-k}}$, причём $\omega' < \omega_0 < \omega''$, где k – коэффициент связи. Штриховыми линиями показаны характеристики при $R_2 \neq 0$.

Таким образом, резонансная кривая, состоящая из двух связанных контуров имеет два максимума и один минимум.

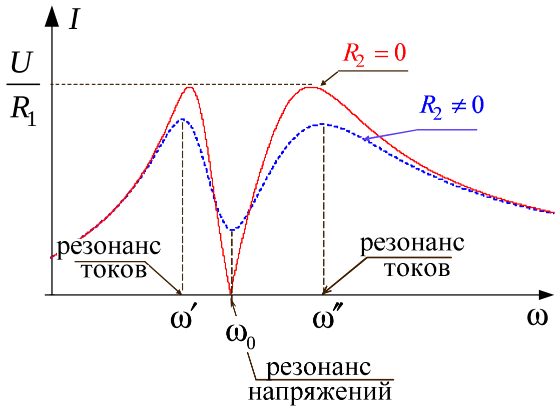


Рис. 7.17.

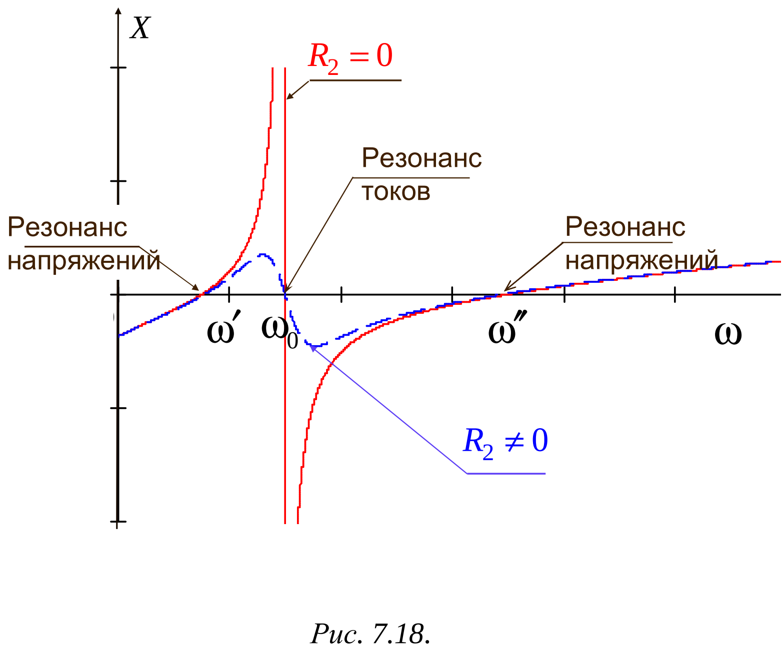


Рис. 7.18.

ТРЕХФАЗНЫЕ ЦЕПИ

Все звенья трехфазной цепи, начиная от генератора и кончая двигателем, были изобретены и разработаны известным русским инженером и ученым М. О. Доливо-Добровольским.

Трехфазные цепи образуются тремя электрически связанными фазами (цепями) А, В, С, находящимися под переменными напряжениями одинакового периода Т, которые сдвинуты по фазе относительно друг друга на определенный угол (120 градусов). К этим фазам подключаются статические и динамические нагрузки, соединенные как правило звездой или треугольником.

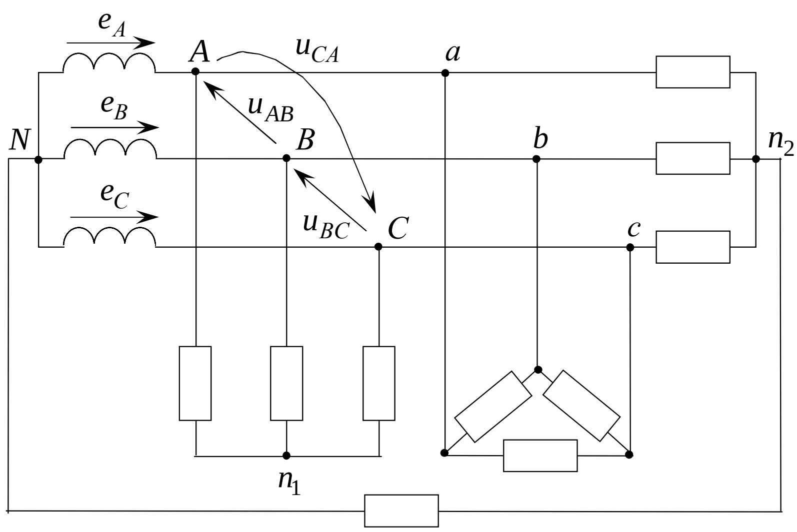


Рис. 8.1.

Статические нагрузки - это обмотки трансформаторов, лампы, нагреватели, конденсаторы и др.

Динамические нагрузки - это обмотки электрических двигателей.

Трехфазные цепи являются наиболее экономичными и совершенными по сравнению с другими многофазными цепями и используются для электроснабжения большинства мощных потребителей электрической энергии. Генерирование и распределение электрической энергии осуществляется посредством трехфазных цепей, которые запитываются от обмоток генераторов и трансформаторов, характеризуемых фазными ЭДС $e_A(t)$, $e_B(t)$, $e_C(t)$.

Соединения обмоток генераторов и трансформаторов

Существуют два основных способа соединения обмоток генераторов, трансформаторов и приемников в многофазных цепях: соединение звездой и соединение многоугольником. Например, соединение генератора и приемника звездой показано на рис. 8.2 , а соединение треугольником — на рис.8.3.

При соединении звездой (рис. 8.2) все «концы» фазных обмоток генератора и ветвей звезды приемника называют нейтральными (нулевыми) точками, а соединяющий их провод — нейтральным (нулевым) п р о в о д о м. Остальные провода, соединяющие обмотки генератора с приемником, называют линейными.

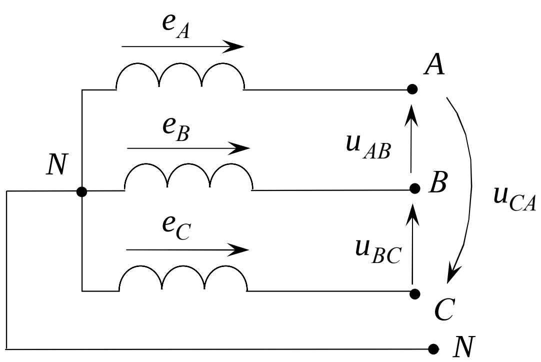


Рис. 8.2.

При соединении треугольником (рис. 8.3) или многоугольником фазные обмотки генератора соединяются последовательно таким образом, чтобы «начало» одной обмотки образовало с «концом» другой обмотки общую точку. Общие точки каждой пары фазных обмоток генератора и общие точки каждой пары ветвей приемника соединяются линейными проводами.

Схемы соединения обмоток источников питания и приемников не зависят друг от друга. В одной и той же цепи могут быть источники питания и приемники с разными схемами соединений. *Лучи звезды или ветви* многоугольника приемника называют *фазами* приемника, а сопротивления фаз приемника — фазными сопротивлениями.

ЭДС, наводимые в фазных обмотках генератора или трансформатора, напряжения на их выводах, напряжения на фазах приемниках и токи в них называют соответственно фазными ЭДС, напряжениями и токами ($E_ф$, $U_ф$, $I_ф$).

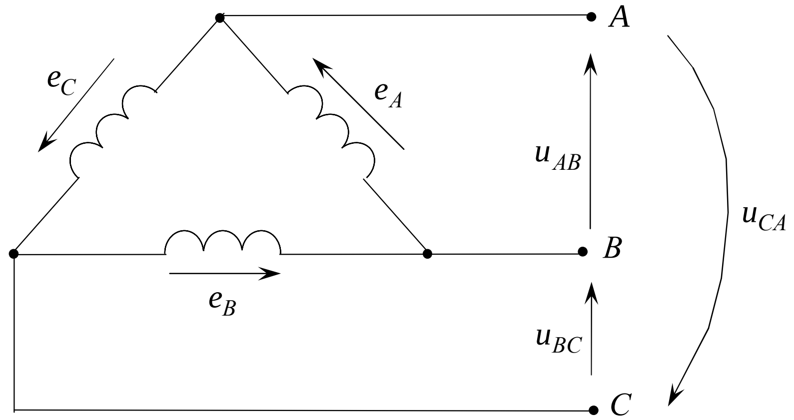


Рис. 8.3.

Напряжения между линейными проводами и токи в них называют линейными напряжениями и токами ($U_л$, $I_л$). При соединении фаз звездой линейные токи равны фазным $I_л = I_ф$. При соединении фаз многоугольником линейное напряжение между проводами, присоединенными к одной и той же фазе приемника или источника питания, равно соответствующему фазному напряжению $U_л = U_ф$.

Положительные направления токов во всех линейных проводах выберем одинаковыми от источника питания к приемнику, а в нейтральном проводе — от нейтральной точки приемника к нейтральной точке источника питания.

Симметричная система фазных ЭДС

В нормальном режиме фазные ЭДС генераторов и трансформаторов образуют симметричную систему, т.е. имеют одинаковую гармоническую форму, одинаковые частоту и амплитуду и сдвинуты по фазе относительно друг друга на 120°.

$$\begin{aligned} e_A &= \sqrt{2}E\sin(\omega t+\alpha), \\ e_B &= \sqrt{2}E\sin(\omega t+\alpha-120°), \\ e_C &= \sqrt{2}E\sin(\omega t+\alpha+120°). \end{aligned} \qquad (8.1)$$

Волновая диаграмма фазных ЭДС (8.1) при $\alpha = 0$:

Волновая диаграмма. При построении графика мгновенных значений (рис. 8.4) *у* ЭДС фазы А выбрана начальная фаза $\alpha = 0$.

ЭДС в фазах А, В и С сдвинуты относительно друг друга симметрично на 1/3 периода (8.1). Порядок, в котором ЭДС в фазных обмотках генератора проходят через одинаковые значения, например через положительные максимумы, называют *последовательностью фаз* или *порядком чередования фаз*. При указанном направлении вращения ротора получаем последовательность фаз *АВС А* и т. д. Если изменить направление вращения ротора на противоположное, то последовательность фаз получится *обратной*.

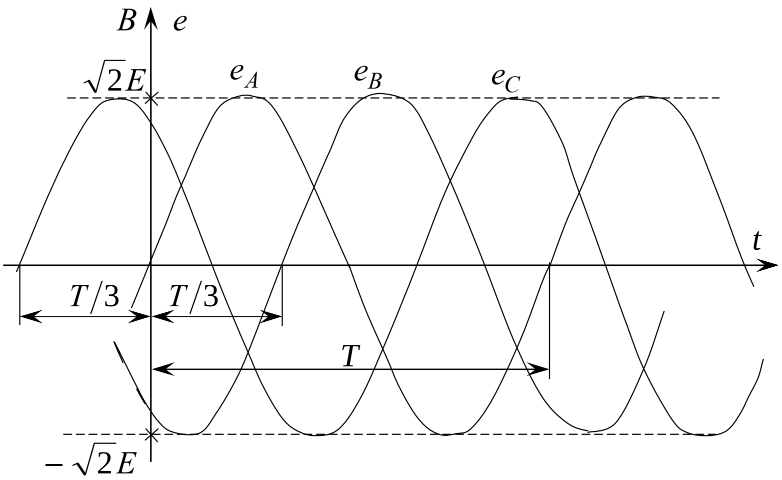


Рис. 8.4.

Комплексы действующих значений фазных ЭДС равны:

$$\dot{E}_A = E \cdot e^{j0^\circ},$$
$$\dot{E}_B = E \cdot e^{-j120^\circ}, \qquad (8.2)$$
$$\dot{E}_C = E \cdot e^{j120^\circ}.$$

Изобразим на комплексной плоскости вектора фазных ЭДС (рис. 8.5).

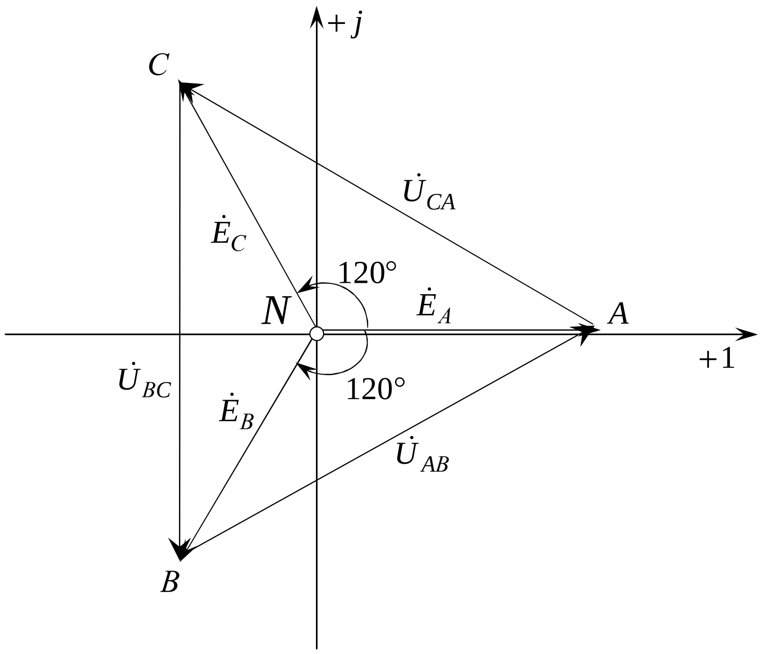


Рис. 8.5.

Фазовый оператор

Часто при анализе трехфазных цепей используется оператор a, который представляет собой фазовый множитель и при домножении обозначает поворот против часовой стрелки на 120°.

$$a = 1e^{j120°} = -0{,}5 + j0{,}866 \tag{8.3}$$

С учетом оператора a можно записать:

$$\dot{E}_A = E \cdot e^{j\alpha},\ \dot{E}_B = a^2\dot{E}_A,\ \dot{E}_C = a\dot{E}_A. \tag{8.4}$$

В результате

$$\dot{U}_{AB} = U_Л \cdot e^{j(\alpha+30°)},\ \dot{U}_{BC} = a^2\dot{U}_{AB},\ \dot{U}_{CA} = a\dot{U}_{AB}. \tag{8.5}$$

Свойства оператора a:

$$a^2 = 1e^{j240°} = 1e^{-j120°} = -0{,}5 - j0{,}866,$$

$$a^3 = 1e^{j360°} = 1.$$

Таким образом, $1 + a + a^2 = 0$. В результате:

$$\dot{E}_A + \dot{E}_B + \dot{E}_C = \dot{E}_A + a^2\dot{E}_A + a\dot{E}_A = \dot{E}_A(1 + a^2 + a) = 0. \tag{8.6}$$

Фазные напряжения(напряжения приёмника)

Фазные напряжения – это напряжения между фазами и нулевым проводом или нейтралью.

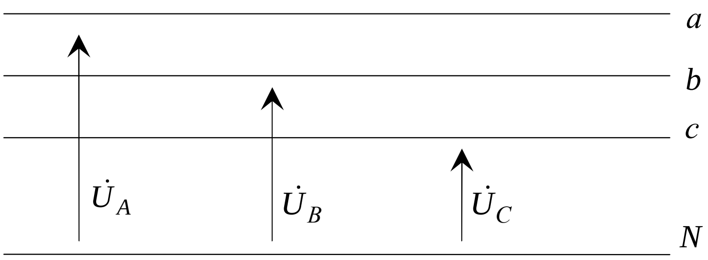


Рис. 8.6.

Где $\begin{cases} \dot U_A = U_\Phi \cdot e^{j\beta} \\ \dot U_B = a^2 \cdot \dot U_A \\ \dot U_C = a \cdot \dot U_A \end{cases}$.

Линейные напряжения

Линейные напряжения – это напряжения между фазами, причем эти напряжения могут быть найдены по известным фазным ЭДС.

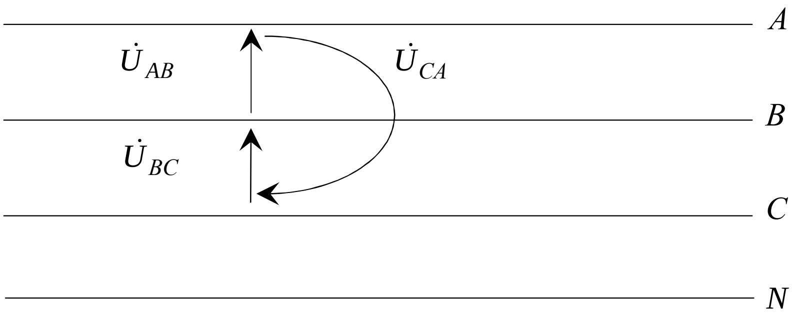


Рис. 8.7.

Из диаграммы (рис. 8.5) видно, что линейные напряжения равны:

$$\begin{aligned} u_{AB} &= e_A - e_B = \sqrt{2}\sqrt{3}E\sin(\omega t + \alpha + 30°), \\ u_{BC} &= e_B - e_C = \sqrt{2}\sqrt{3}E\sin(\omega t + \alpha - 90°), \\ u_{CA} &= e_C - e_A = \sqrt{2}\sqrt{3}E\sin(\omega t + \alpha + 150°), \end{aligned} \tag{8.7}$$

где $\dot U_{AB} = U_Л \cdot e^{j(\alpha+30°)}$, $\dot U_{BC} = U_Л \cdot e^{j(\alpha-90°)}$, $\dot U_{CA} = U_Л \cdot e^{j(\alpha+150°)}$ – комплексы действующих значений, $U_Л = \sqrt{3}E$ – действующее значение.

Так же линейные напряжения могут быть найдены по известным фазным напряжениям:

$$\begin{cases} \dot{U}_{AB} = \dot{U}_A - \dot{U}_B = U_Л \cdot e^{j\lambda} \\ \dot{U}_{BC} = \dot{U}_B - \dot{U}_C = a^2 \cdot \dot{U}_{AB} \\ \dot{U}_{CA} = \dot{U}_C - \dot{U}_A = a \cdot \dot{U}_{AB} \end{cases}, \text{ где } U_Л = \sqrt{3} U_Ф .$$

Симметричный режим трехфазной цепи

Симметричный режим характеризуется симметричной системой фазных ЭДС и напряжений, а также одинаковой нагрузкой фаз.

Трехфазная цепь с одинаковой нагрузкой фаз называется *симметричной*.

Симметричный режим является *нормальным* режимом трехфазных цепей и рассчитывается известными методами в комплексной форме.

Соединение звезда-звезда с нулевым проводом

при $\dot{E}_A = Ee^{j\alpha}$, $\underline{Z} = Z \cdot e^{j\varphi}$, $\underline{Z}_N = Z_N \cdot e^{j\varphi_N}$.

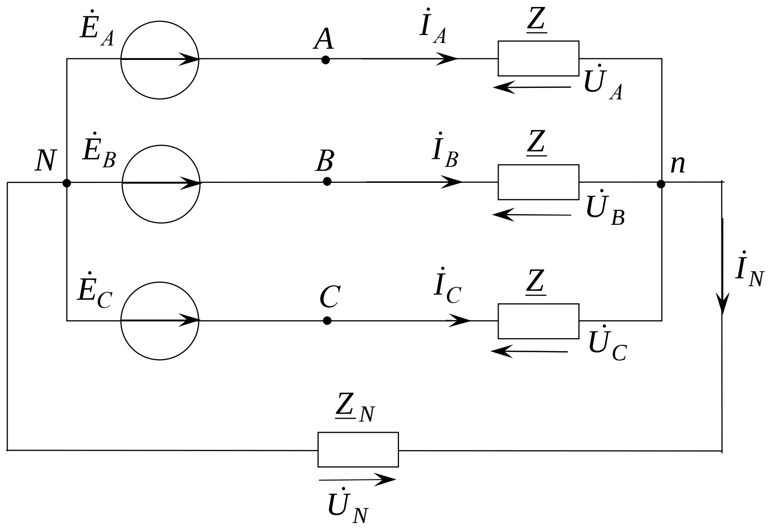


Рис. 8.8.

Где

$\dot{I}_A, \dot{I}_B, \dot{I}_C$ – линейные токи, равные фазным токам;

$\dot{U}_A, \dot{U}_B, \dot{U}_C$ – фазные напряжения;

$\dot{I}_N$ и $\dot{U}_N$ – ток и напряжение нулевого провода.

По 2-му закону Кирхгофа и закону Ома:

$$\dot{I}_A = (\dot{E}_A - \dot{U}_N) / \underline{Z} = \dot{U}_A / \underline{Z} ,$$

$$\dot{I}_B = (\dot{E}_B - \dot{U}_N)/\underline{Z} = \dot{U}_B / \underline{Z},$$

$$\dot{I}_C = (\dot{E}_C - \dot{U}_N)/\underline{Z} = \dot{U}_C / \underline{Z}.$$

Тогда по 1-му закону Кирхгофа:

$$\dot{I}_N = \frac{\dot{U}_N}{\underline{Z}_N} = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = \frac{\dot{E}_A + \dot{E}_B + \dot{E}_C}{\underline{Z}} - \frac{3 \cdot \dot{U}_N}{\underline{Z}}.$$

Но $\dot{E}_A + \dot{E}_B + \dot{E}_C = \left(1 + a^2 + a\right) \cdot \dot{E}_A = 0$, т.е. $\dot{U}_N \left(\frac{1}{\underline{Z}_N} + \frac{3}{\underline{Z}} \right) = 0$, значит,

$\dot{U}_N = 0$, $\dot{I}_N = \frac{\dot{U}_N}{\underline{Z}_N} = 0$, отсюда $\dot{I}_A = \frac{\dot{E}_A}{\underline{Z}} = I_Л e^{j(\alpha - \varphi)}$, $\dot{I}_B = a^2 \dot{I}_A$, $\dot{I}_C = a\dot{I}_A$.

Таким образом,

$$\dot{U}_A = \dot{U}_A,\ \dot{U}_B = a^2 \dot{U}_A,\ \dot{U}_C = a\dot{U}_A.$$

Комплекс полной вырабатываемой мощности

$$\dot{S}_B = \dot{E}_A \dot{I}_A^* + \dot{E}_B \dot{I}_B^* + \dot{E}_C \dot{I}_C^* = 3 \cdot E \cdot I_Л e^{j\varphi} = P_B + jQ_B, (BA); \quad (8.8)$$

а) активная мощность

$$P_B = P_П = 3 \cdot E \cdot I_Л \cos\varphi = \sqrt{3} \cdot U_Л \cdot I_Л \cos\varphi = 3 \cdot I_Л^2 \cdot [\mathrm{Re}(\underline{Z})], (Bm);$$

б) реактивная мощность

$$Q_B = Q_П = 3 \cdot E \cdot I_Л \sin\varphi = \sqrt{3} \cdot U_Л \cdot I_Л \sin\varphi = 3 \cdot I_Л^2 \cdot [\mathrm{Im}(\underline{Z})], (вар);$$

Векторная диаграмма $\varphi > 0$

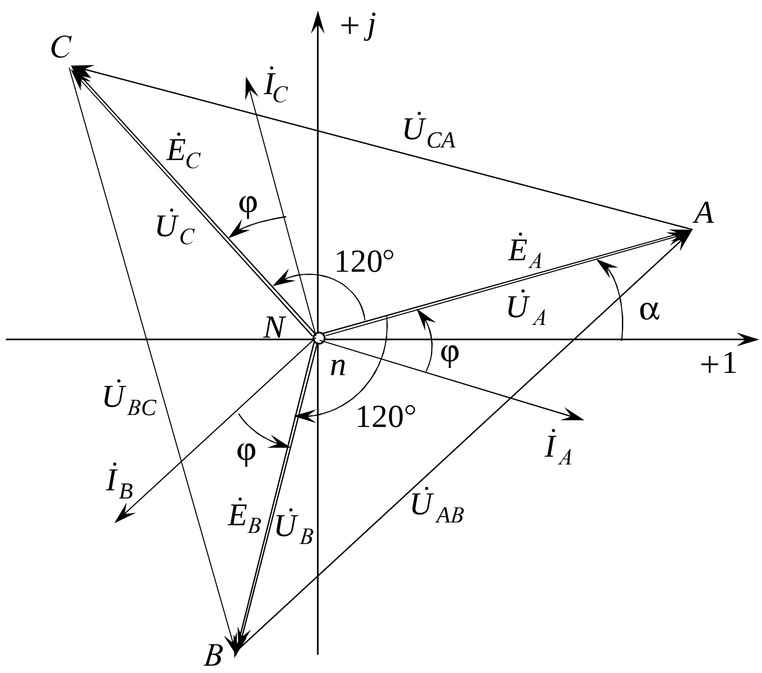


Рис. 8.9.

В симметричном режиме ток нулевого провода I_N и напряжение смещения нейтралей U_N равны нулю, поэтому цепь без нулевого провода рассчитывается аналогично, причем такой расчет можно вести на одну фазу (A).

Соединение нагрузки треугольником

при $\dot U_{AB} = U_{Л} e^{j\lambda}$, $\underline{Z} = Ze^{j\varphi}$.

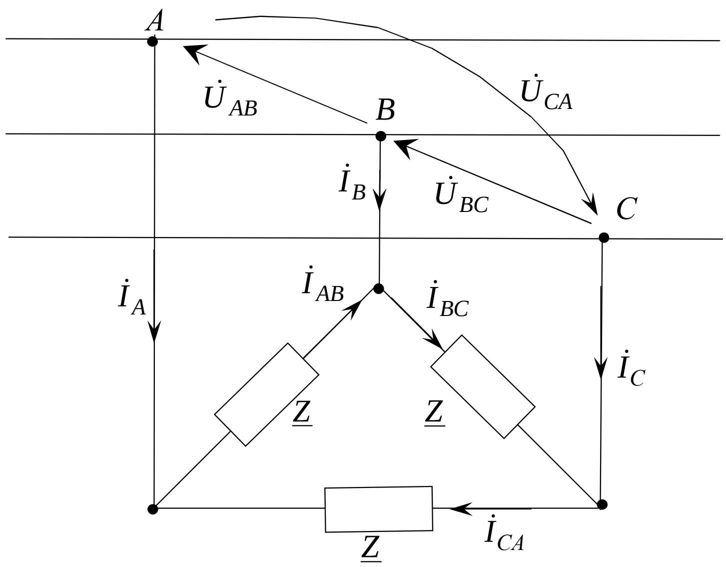


Рис. 8.10.

Где $\dot{I}_A, \dot{I}_B, \dot{I}_C$ – линейные токи;

$\dot{I}_{AB}, \dot{I}_{BC}, \dot{I}_{CA}$ – фазные токи;

$\dot{U}_{AB}, \dot{U}_{BC}, \dot{U}_{CA}$ – линейные напряжения, равные фазным напряжениям.

По закону Ома:

$$\dot{I}_{AB} = \dot{U}_{AB} / \underline{Z} = I_{\Phi} e^{j(\lambda-\varphi)},\ \dot{I}_{BC} = \dot{U}_{BC} / \underline{Z} = a^2 \dot{I}_{AB},\ \dot{I}_{CA} = \dot{U}_{CA} / \underline{Z} = a \cdot \dot{I}_{AB}.$$

По 1 закону Кирхгофа:

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{AB} - \dot{I}_{CA} = I_Л e^{j(\lambda-\varphi-30°)},\ \dot{I}_B = \dot{I}_{BC} - \dot{I}_{AB} = a^2 \dot{I}_A,$$

$$\dot{I}_C = \dot{I}_{CA} - \dot{I}_{BC} = a \cdot \dot{I}_A.$$

Где $I_{\Phi} = \dfrac{U_Л}{Z}$, $I_Л = \sqrt{3} I_{\Phi}$.

Комплекс полной вырабатываемой мощности определяется выражением (8.8).

а) Активная потребляемая мощность

$$P_П = 3 \cdot U_Л \cdot I_{\Phi} \cos\varphi = \sqrt{3} \cdot U_Л \cdot I_Л \cos\varphi = 3 \cdot I_{\Phi}^2 \cdot [\mathrm{Re}(\underline{Z})],\ (Вт).$$

б) Реактивная потребляемая мощность

$$Q_П = 3 \cdot U_Л \cdot I_{\Phi} \sin\varphi = \sqrt{3} \cdot U_Л \cdot I_Л \sin\varphi = 3 \cdot I_{\Phi}^2 \cdot [\mathrm{Im}(\underline{Z})],\ (вар).$$

Векторная диаграмма при $\lambda > 0$ и $\varphi > 0$

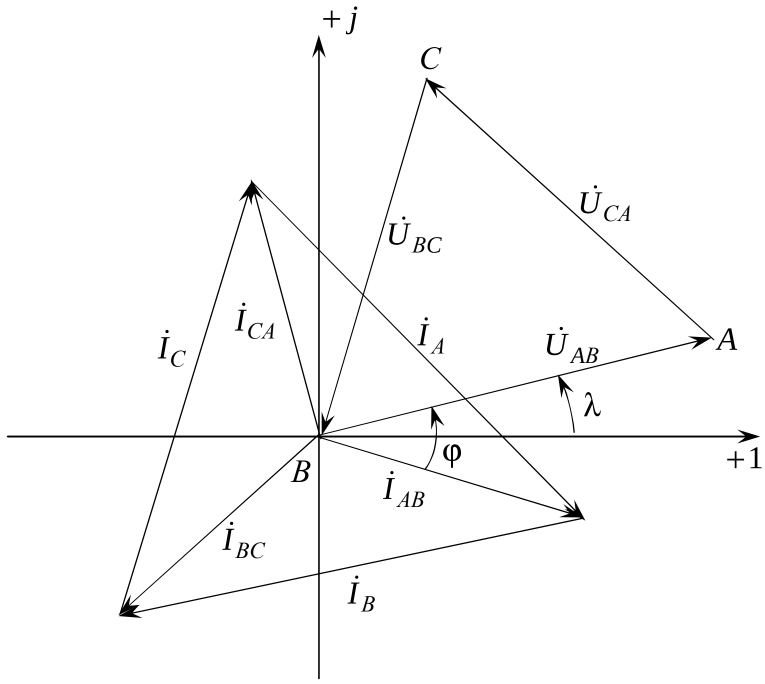


Рис. 8.11.

В симметричном режиме при соединении нагрузки треугольником расчет можно было бы вести на одну фазу (А).

Трехфазная цепь в симметричном режиме

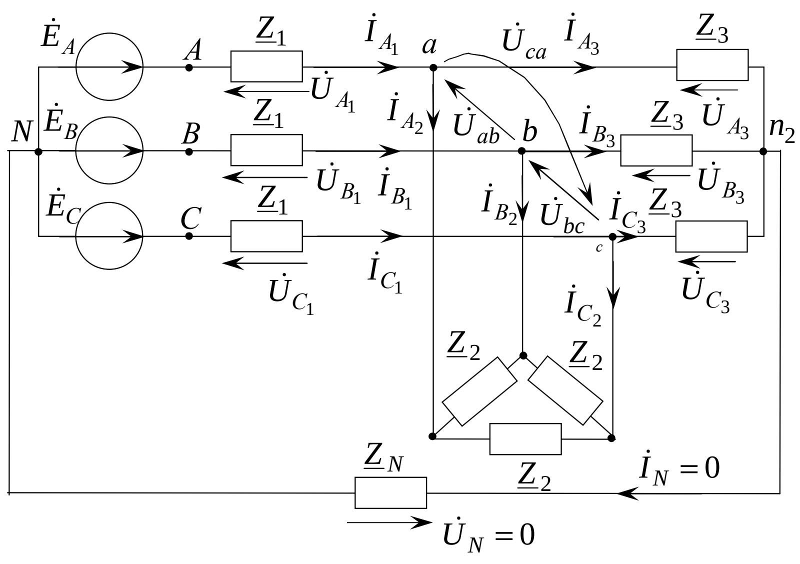


Рис. 8.12.

В симметричном режиме расчет сложной трехфазной цепи после преобразования треугольника в звезду ведется на одну фазу (А) любым известным методом в комплексной форме, затем при помощи фазового оператора *a* находятся токи и напряжения других фаз.

Расчет на одну фазу (А):

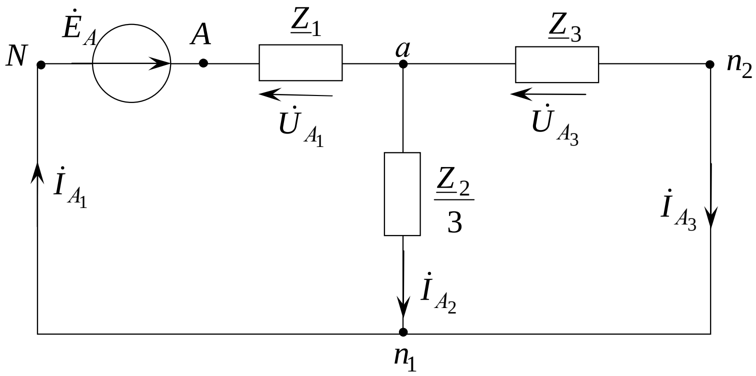


Рис. 8.13.

Векторная диаграмма

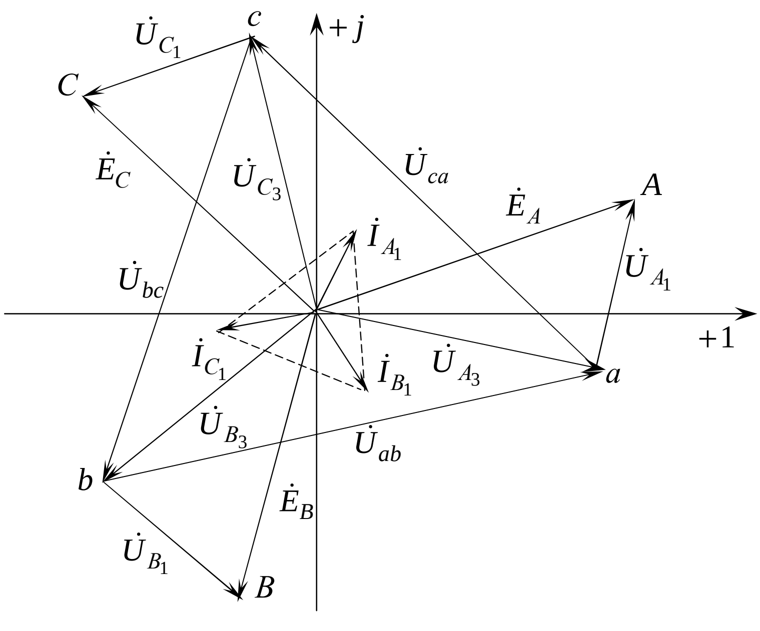


Рис. 8.14.

Сложную трехфазную цепь в симметричном режиме можно преобразовать до эквивалентной звезды:

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_3 \cdot \left(\underline{Z}_2 / 3 \right)}{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_2 / 3} \tag{8.9}$$

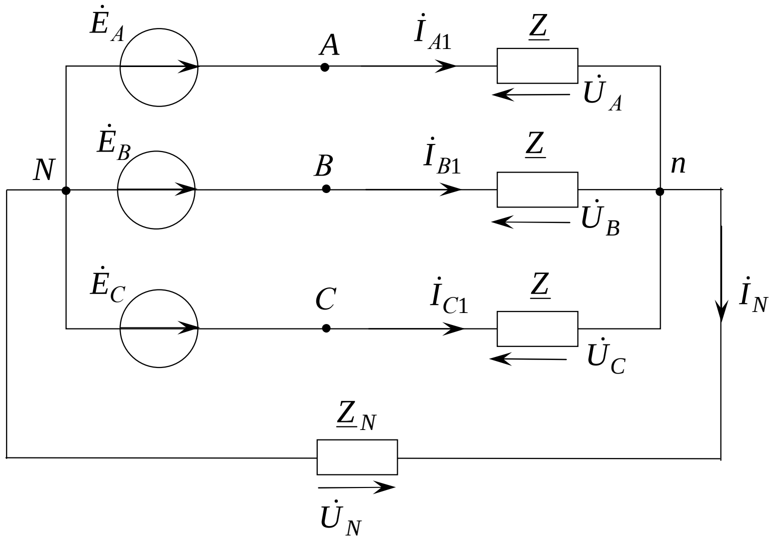


Рис. 8.15.

Несимметричный режим трехфазных цепей

Несимметричный режим обусловлен различной нагрузкой фаз или несимметричной системой напряжений трехфазного источника, причем в этом режиме напряжения и токи фаз не образуют симметричные системы при статической нагрузке фаз рассчитывается известными методами в комплексной форме, причем в этом режиме ток и напряжение в нулевом проводе могут быть не равны нулю.

Соединение несимметричной нагрузки $(\underline{Z}_A \neq \underline{Z}_B \neq \underline{Z}_C)$ *звездой при заданных фазных ЭДС*

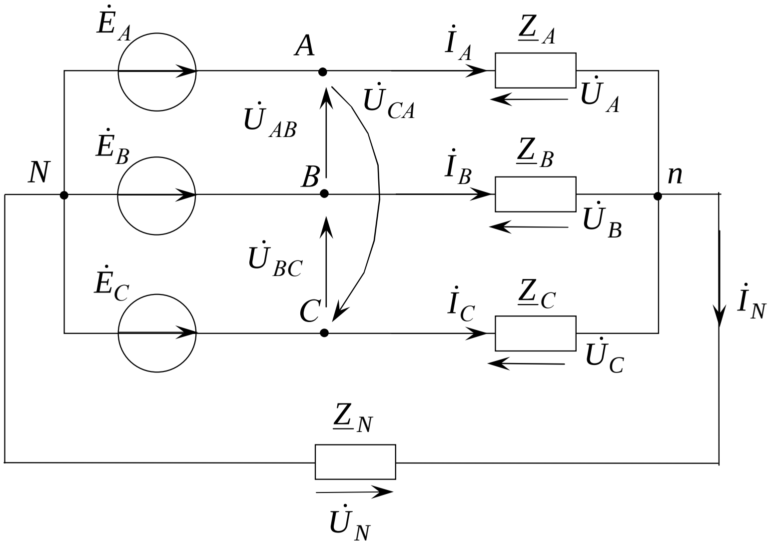


Рис. 8.16.

При известных:

$\dot{E}_A = Ee^{i\alpha}$, $\dot{E}_B = a^2\dot{E}_A$, $\dot{E}_C = a\dot{E}_A$;

$\underline{Z}_A, \underline{Z}_B, \underline{Z}_C, \underline{Z}_N$.

Определить:

$\dot{I}_A, \dot{I}_B, \dot{I}_C$;

$\dot{U}_A, \dot{U}_B, \dot{U}_C$;

$\dot{I}_N$ и $\dot{U}_N$.

Запишем уравнение по методу узловых потенциалов:

$\dot{\varphi}_N = 0$, $\dot{\varphi}_n\left(\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C + \underline{Y}_N\right) = \dot{E}_A\underline{Y}_A + \dot{E}_B\underline{Y}_B + \dot{E}_C\underline{Y}_C$,

где проводимости: $\underline{Y}_A = \dfrac{1}{\underline{Z}_A}$, $\underline{Y}_B = \dfrac{1}{\underline{Z}_B}$, $\underline{Y}_C = \dfrac{1}{\underline{Z}_C}$, $\underline{Y}_N = \dfrac{1}{\underline{Z}_N}$.

Напряжение смещения нейтралей определяется как:

$$\dot{U}_N = \dot{\varphi}_n - \dot{\varphi}_N = \frac{\dot{E}_A\underline{Y}_A + \dot{E}_B\underline{Y}_B + \dot{E}_C\underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C + \underline{Y}_N} = U_N e^{j\psi_N}$$

По 2 закону Кирхгофа найдем фазные напряжения:

$$\dot{U}_A = \dot{E}_A - \dot{U}_N,\ \dot{U}_B = \dot{E}_B - \dot{U}_N,\ \dot{U}_C = \dot{E}_C - \dot{U}_N.$$

По закону Ома определим линейные токи, равные фазным токам:

$$\dot{I}_A = \dot{U}_A \underline{Y}_A = \frac{\dot{U}_A}{\underline{Z}_A}, \;\; \dot{I}_B = \dot{U}_B \underline{Y}_A = \frac{\dot{U}_B}{\underline{Z}_B}, \;\; \dot{I}_C = \dot{U}_C \underline{Y}_C = \frac{\dot{U}_C}{\underline{Z}_C}.$$

По первому закону Кирхгофа определим ток в нулевом проводе:

$$\dot{I}_N = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C.$$

Векторная диаграмма

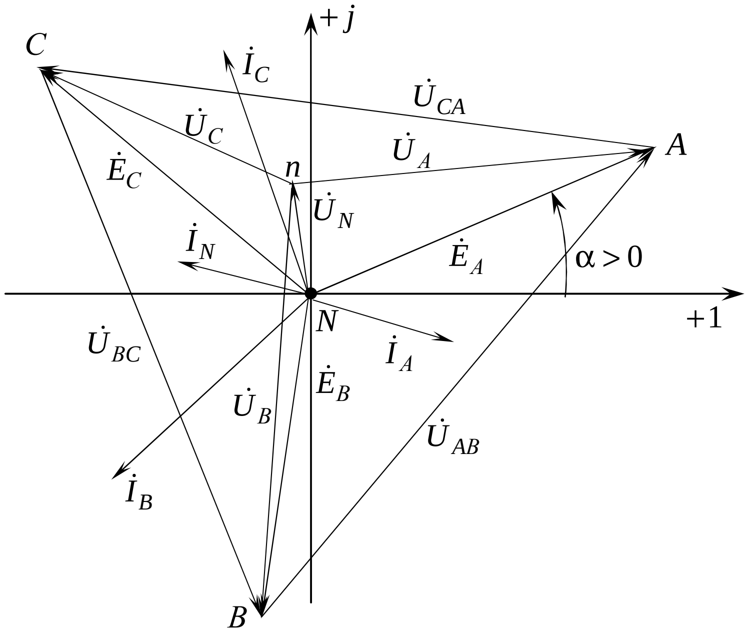


Рис. 8.17.

Если $\underline{Z}_N = 0$, то $\underline{Y}_N = \dfrac{1}{\underline{Z}_N} = \infty$, тогда $\dot{U}_N = 0$ и $\dot{U}_A = \dot{E}_A$, $\dot{U}_B = \dot{E}_B$, $\dot{U}_C = \dot{E}_C$.

Таким образом, нулевой провод выравнивает величины фазных напряжений нагрузки, что используется в бытовых электрических сетях.

Если $\underline{Z}_N = \infty$, то $\underline{Y}_N = 0$ и $\dot{I}_N = 0$.

При изменении модуля сопротивления одной из фаз, например: $\underline{Z}_A' \le \underline{Z}_A \le \underline{Z}_A''$.

Концы векторов $\dot{I}_N$ и $\dot{U}_N$ на комплексной плоскости опишут годограф – это прямая или дуга окружности (рис. 8.18).

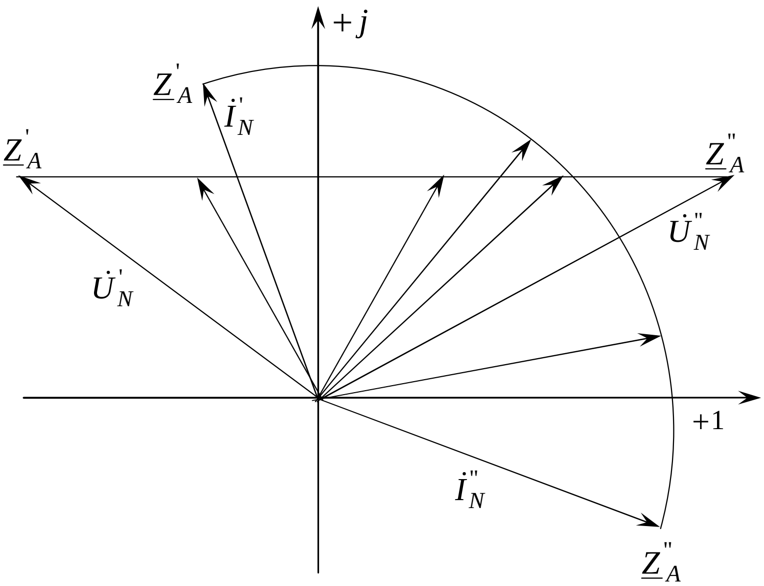


Рис. 8.18.

Соединение несимметричной нагрузки звездой без нулевого провода при $(\underline{Z}_A \neq \underline{Z}_B \neq \underline{Z}_C)$ *заданных линейных напряжениях*

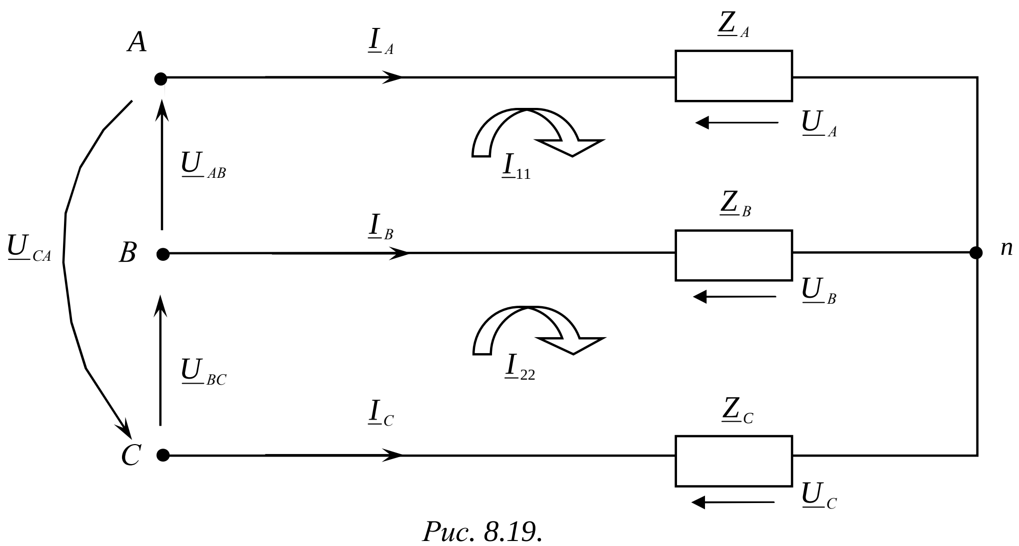


Рис. 8.19.

При известных:

$\dot{U}_{AB} = U_Л e^{j\lambda}$, $\dot{U}_{BC} = a^2\dot{U}_{AB}$, $\dot{U}_{CA} = a\dot{U}_{AB}$,

$\underline{Z}_A, \underline{Z}_B, \underline{Z}_C$.

Определить:

$\dot{I}_A, \dot{I}_B, \dot{I}_C$;

$\dot{U}_A, \dot{U}_B, \dot{U}_C$.

По методу контурных токов:

$$\begin{cases} \dot{I}_{11}\left(\underline{Z}_A + \underline{Z}_B\right) - \dot{I}_{22}\underline{Z}_B = \dot{U}_{AB} \\ -\dot{I}_{11}\underline{Z}_B + \dot{I}_{22}\left(\underline{Z}_B + \underline{Z}_C\right) = \dot{U}_{BC} \end{cases}$$

Тогда

$\dot{I}_A = \dot{I}_{11}$, $\dot{I}_B = \dot{I}_{22} - \dot{I}_{11}$, $\dot{I}_C = -\dot{I}_{22}$, $\dot{U}_A = \underline{Z}_A\dot{I}_A$, $\dot{U}_B = \underline{Z}_B\dot{I}_B$, $\dot{U}_C = \underline{Z}_C\dot{I}_C$.

Векторная диаграмма

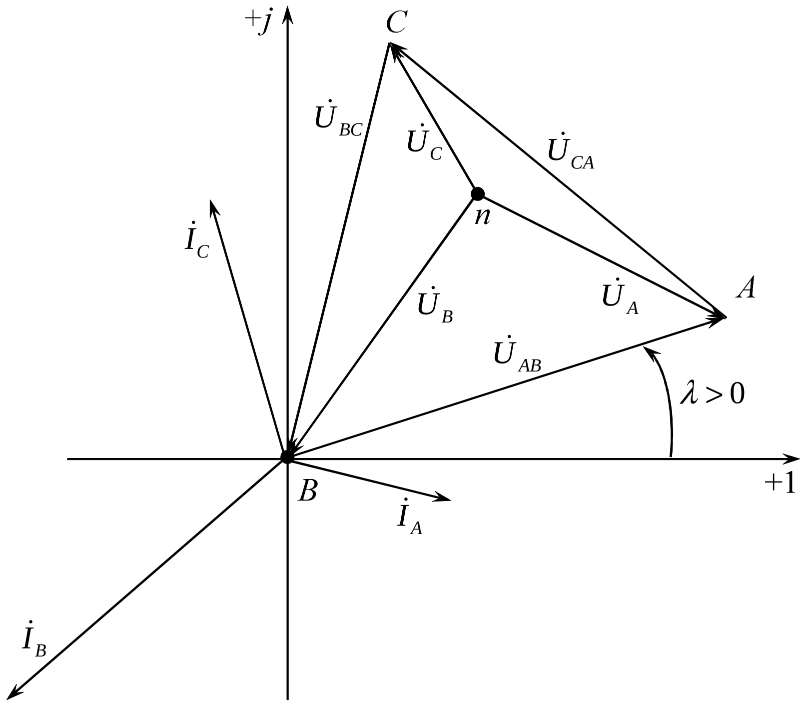


Рис. 8.20.

Примечание:

Если $\underline{Z}_A = -jX_C$, $\underline{Z}_B = \underline{Z}_C = R_Л$, то $U_B > U_C$ – емкостной фазоуказатель.

Соединение несимметричной нагрузки $(\underline{Z}_A \neq \underline{Z}_B \neq \underline{Z}_C)$ *треугольником*

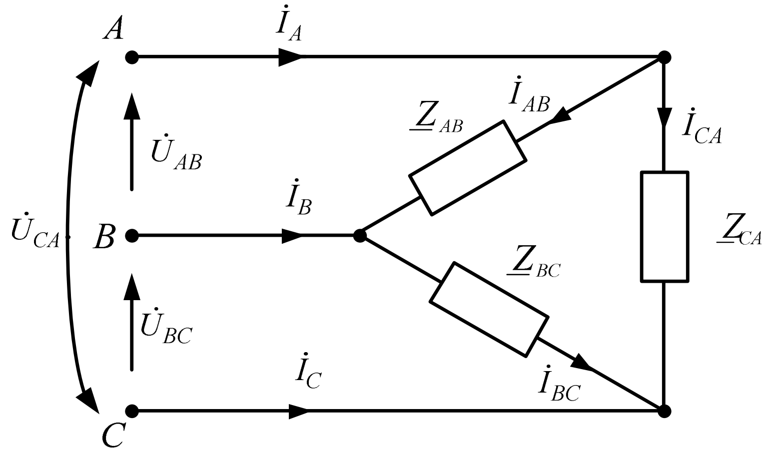


Рис. 8.21.

При известных:

$\dot U_{AB} = U_Л e^{j\lambda}$, $\dot U_{BC} = a^2 \dot U_{AB}$, $\dot U_{CA} = a\dot U_{AB}$,

$\underline{Z}_{AB}$, $\underline{Z}_{BC}$, $\underline{Z}_{CA}$.

Определить:

фазные токи $\dot I_{AB}, \dot I_{BC}, \dot I_{CA}$;

линейные токи $\dot I_A$, $\dot I_B$, $\dot I_C$.

По закону Ома определяем фазные токи:

$$\dot I_{AB} = \frac{\dot U_{AB}}{\underline{Z}_{AB}} \qquad \dot I_{BC} = \frac{\dot U_{BC}}{\underline{Z}_{BC}} \qquad \dot I_{CA} = \frac{\dot U_{CA}}{\underline{Z}_{CA}}$$

По первому закону Кирхгофа определяем линейные токи:

$$\dot I_A = \dot I_{AB} - \dot I_{CA},$$
$$\dot I_B = \dot I_{BC} - \dot I_{AB},$$
$$\dot I_C = \dot I_{CA} - \dot I_{BC}.$$

Векторная диаграмма

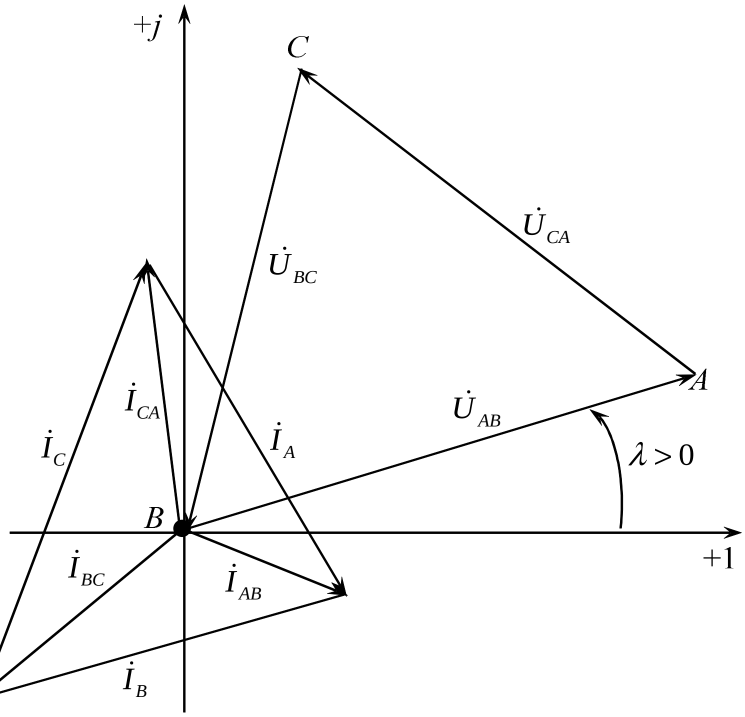


Рис. 8.22.

Несимметричный режим сложной трехфазной цепи

При известных:

$\dot E_A = Ee^{j\alpha}$, $\dot E_B = a^2 \dot E_A$, $\dot E_C = a\dot E_A$,

$\underline{Z}_1 = R_1 \pm jX_1$,

$\underline{Z}_2 = R_2 \pm jX_2$,

$\underline{Z}_3 = R_3 \pm jX_3$.

Определить:

линейные и фазные токи, линейные и фазные напряжения.

По методу узловых потенциалов:

$\dot\varphi_n = \dot\varphi_N = 0$; $\dot\varphi_b = \dot\varphi_c = \dot\varphi_{bc}$.

$$\begin{cases} \dot\varphi_a \left[\dfrac{1}{\underline{Z}_1} + \dfrac{2}{\underline{Z}_2} + \dfrac{1}{\underline{Z}_3} \right] - \dot\varphi_{bc} \left[\dfrac{2}{\underline{Z}_2} \right] = \dfrac{\dot E_A}{\underline{Z}_1} \\ -\dot\varphi_a \left[\dfrac{2}{\underline{Z}_2} \right] + \dot\varphi_{bc} \left[\dfrac{2}{\underline{Z}_1} + \dfrac{2}{\underline{Z}_2} + \dfrac{2}{\underline{Z}_3} \right] = \dfrac{\dot E_B}{\underline{Z}_1} + \dfrac{\dot E_C}{\underline{Z}_1} \end{cases}$$

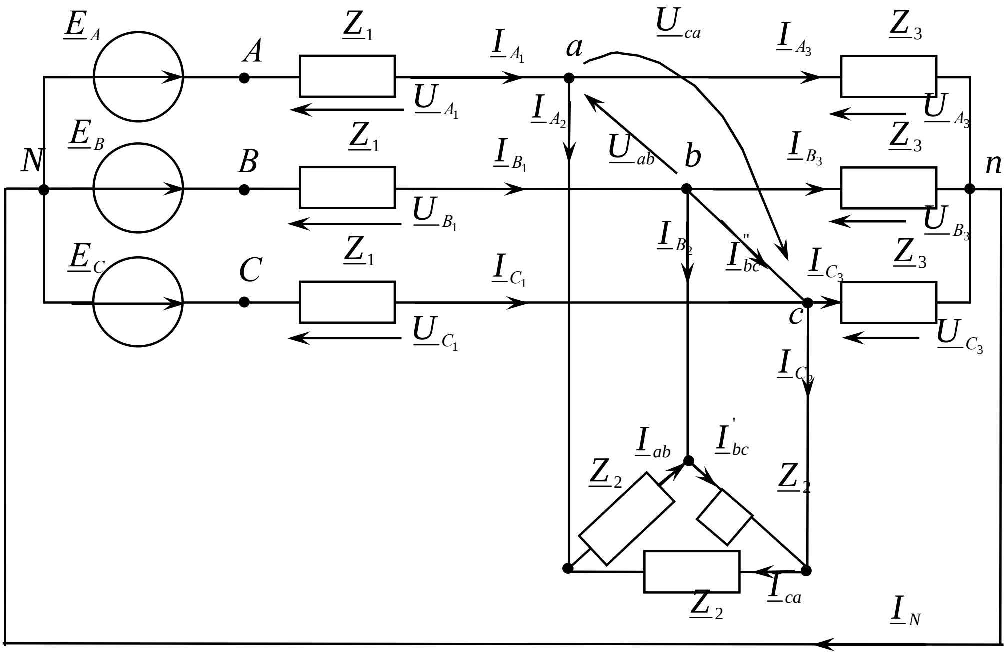


Рис. 8.23.

По обобщенному закону Ома

определяем линейные токи:

$$\dot{I}_{B1} = \left[\dot{\varphi}_N - \dot{\varphi}_b + \dot{E}_B\right] / \underline{Z}_1 \;, \dot{I}_{C1} = \left[\dot{\varphi}_N - \dot{\varphi}_c + \dot{E}_C\right] / \underline{Z}_1 \;,$$

$$\dot{I}_{A1} = \left[\dot{\varphi}_N - \dot{\varphi}_a + \dot{E}_A\right] / \underline{Z}_1 \;,$$

$$\dot{I}_{A3} = \left[\dot{\varphi}_a - \dot{\varphi}_n\right] / \underline{Z}_3 \;,\; \dot{I}_{B3} = \left[\dot{\varphi}_b - \dot{\varphi}_n\right] / \underline{Z}_3 \;,\; \dot{I}_{C3} = \left[\dot{\varphi}_c - \dot{\varphi}_n\right] / \underline{Z}_3 \;;$$

определяем фазные токи:

$$\dot{I}'_{bc} = \left[\dot{\varphi}_b - \dot{\varphi}_c\right] / \underline{Z}_2 \;,\; \dot{I}_{ca} = \left[\dot{\varphi}_c - \dot{\varphi}_a\right] / \underline{Z}_2 \;,\; \dot{I}_{ab} = \left[\dot{\varphi}_a - \dot{\varphi}_b\right] / \underline{Z}_2$$

По 1 закону Кирхгофа

определяем линейные токи:

$$\dot{I}_{A2} = \dot{I}_{ab} - \dot{I}_{ca} \,,\; \dot{I}_{B2} = \dot{I}'_{bc} - \dot{I}_{ab} \,,\; \dot{I}_{C2} = \dot{I}_{ca} - \dot{I}'_{bc} \,;$$

ток в нулевом проводе:

$\dot{I}_N = \dot{I}_{A3} + \dot{I}_{B3} + \dot{I}_{C3}$

ток короткого замыкания:

$\dot{I}_{bc}^{''} = \dot{I}_{B1} - \dot{I}_{B2} - \dot{I}_{B3}$

Проверка: $\dot{I}_N = \dot{I}_{A1} + \dot{I}_{B1} + \dot{I}_{C1}$.

По закону Ома определяем напряжения:

$\dot{U}_{A1} = \underline{Z}_1 \dot{I}_{A1}$; $\dot{U}_{B1} = \underline{Z}_1 \dot{I}_{B1}$; $\dot{U}_{C1} = \underline{Z}_1 \dot{I}_{C1}$;

$\dot{U}_{A3} = \underline{Z}_3 \dot{I}_{A3}$; $\dot{U}_{B3} = \underline{Z}_3 \dot{I}_{B3}$; $\dot{U}_{C3} = \underline{Z}_3 \dot{I}_{C3}$.

Причем

$\dot{U}_{ab} = \dot{\varphi}_a - \dot{\varphi}_b$; $\dot{U}_{bc} = \dot{\varphi}_b - \dot{\varphi}_c = 0$; $\dot{U}_{ca} = \dot{\varphi}_c - \dot{\varphi}_a$

Баланс мощностей

а) комплекс полной вырабатываемой мощности

$\dot{S}_B = \dot{E}_A \overset{*}{I}_{A1} + \dot{E}_B \overset{*}{I}_{B1} + \dot{E}_C \overset{*}{I}_{C1} = P_B + jQ_B,\ BA$

б) активная потребляемая мощность

$P_П = I_{A1}^2 R_1 + I_{B1}^2 R_1 + I_{C1}^2 R_1 + I_{ab}^2 R_2 + (I_{bc}^{'})^2 R_2 + I_{ca}^2 R_2 + I_{A3}^2 R_3 +$

$+ I_{B3}^2 R_3 + I_{C3}^2 R_3,\ Вт$

в) реактивная потребляемая мощность

$Q_П = \pm I_{A1}^2 X_1 \pm I_{B1}^2 X_1 \pm I_{C1}^2 X_1 \pm I_{ab}^2 X_2 \pm (I_{bc}^{'})^2 X_2 \pm I_{ca}^2 X_2 \pm$

$I_{A3}^2 X_3 \pm I_{B3}^2 X_3 \pm I_{C3}^2 X_3,\ вар$

Относительные погрешности

$$\delta_P \% = \frac{|P_в - P_п|}{P_в} \cdot 100 = 0 \le 3\% .$$

$$\delta_Q \% = \frac{|Q_в - Q_п|}{Q_в} \cdot 100 = 0 \le 3\% .$$

Векторная диаграмма

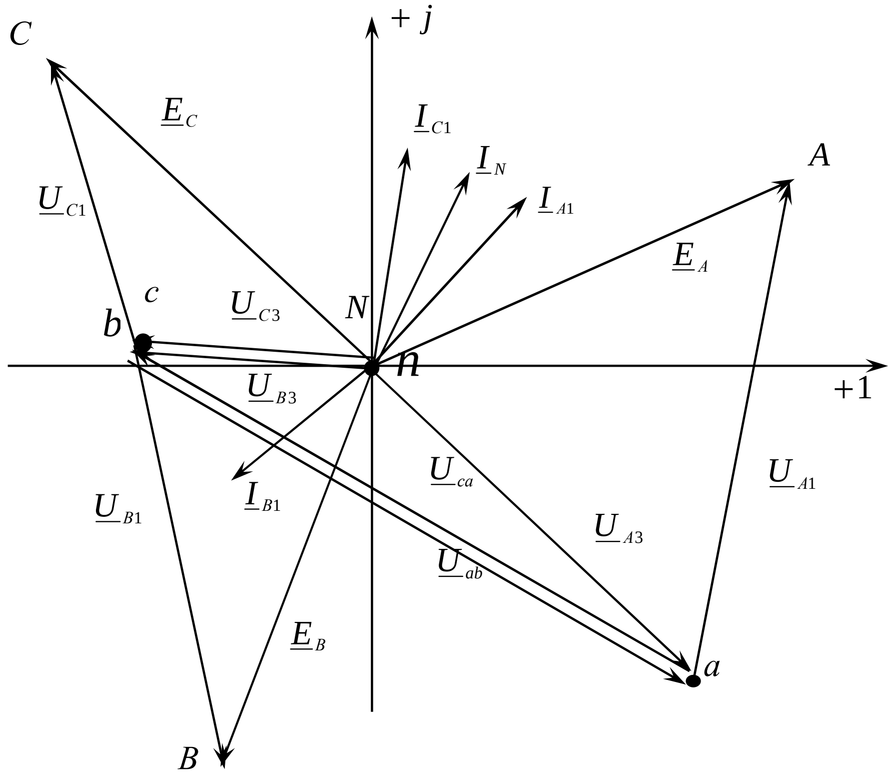


Рис. 8.24.

Измерение мощности. Вращающееся магнитное поле

Измерение мощности осуществляется ваттметрами, которые имеют две обмотки: токовую обмотку с малым сопротивлением и обмотку напряжения с большим сопротивлением.

При этом ваттметр имеет четыре клеммы:

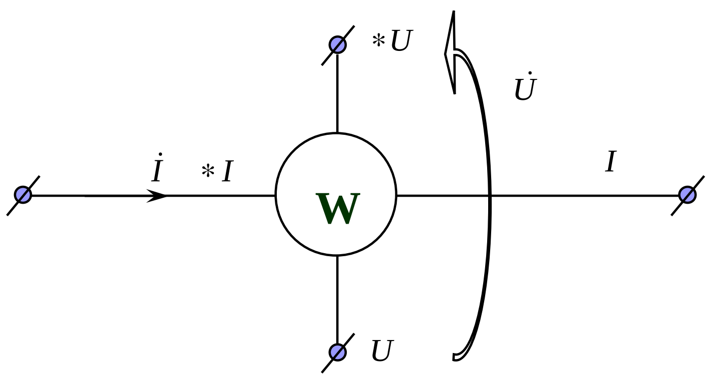


Рис. 8.25.

$$P_W = U \cdot I \cdot \cos\varphi,\ Вт$$

Где

$\dot{I} = I \cdot e^{j\beta},\ A;$

$\dot{U} = U \cdot e^{j\alpha},\ B;$

$\varphi = \alpha - \beta,\ град.$

Измерение суммарной активной мощности трехфазной цепи с нулевым проводом.

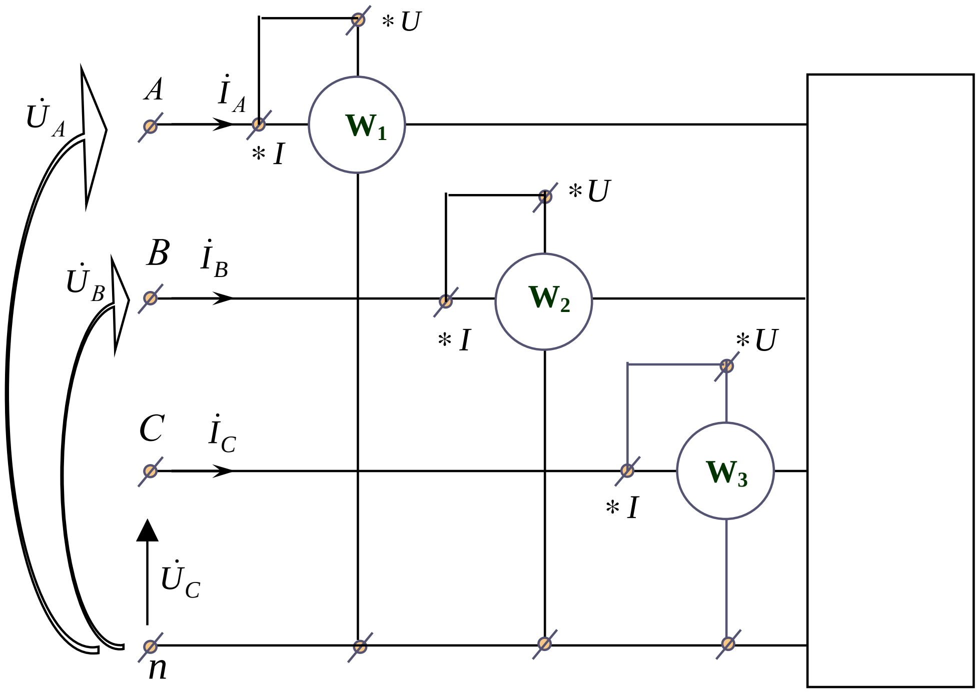


Рис. 8.26.

$$P = P_A + P_B + P_C = P_{W_1} + P_{W_2} + P_{W_3} =$$

$$U_A I_A \cos(\dot{U}_A \hat{\ } \dot{I}_A) + U_B I_B \cos(\dot{U}_B \hat{\ } \dot{I}_B) + U_C I_C \cos(\dot{U}_C \hat{\ } \dot{I}_C),\ \text{Вт.}$$

Измерение суммарной активной мощности трехфазной цепи без нулевого провода.

Измерение мощности осуществляется двумя ваттметрами, причем одна из трех возможных схем следующая.

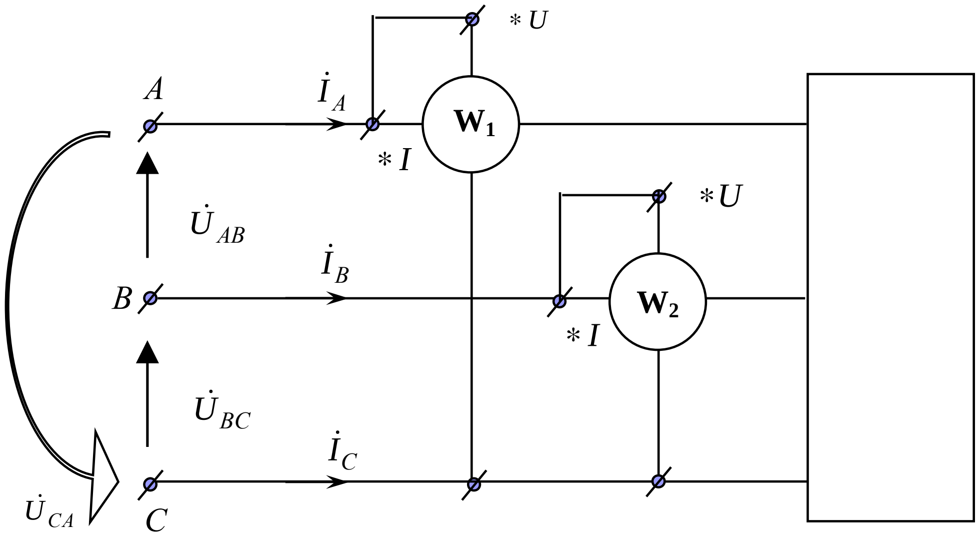


Рис. 8.27.

$$P = P_{W_1} + P_{W_2} = U_{CA} I_A \cos((-\dot U_{CA}) \hat{\ } \dot I_A) + U_{BC} I_B \cos(\dot U_{BC} \hat{\ } \dot I_B),\ Вт.$$

Измерение суммарной реактивной мощности трехфазной цепи без нулевого провода в симметричном режиме.

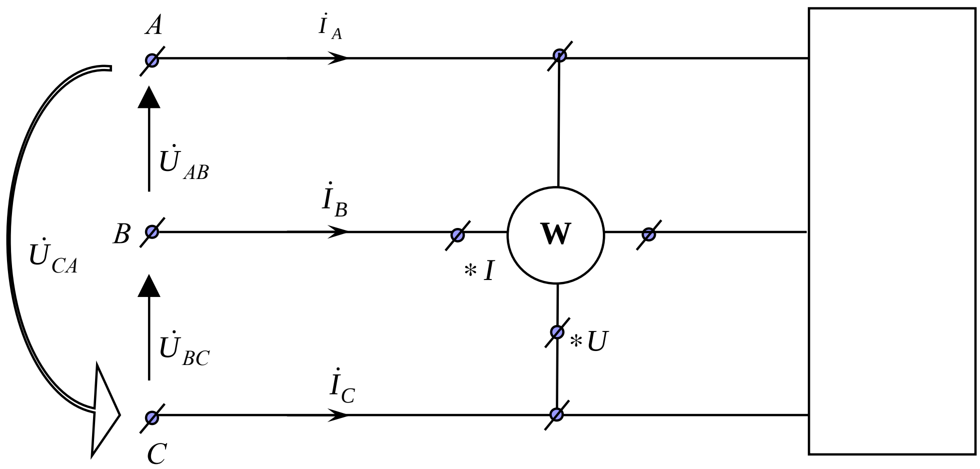


Рис. 8.28.

$$Q = \sqrt{3} U_Л I_Л \sin\varphi = \sqrt{3} \cdot P_W,\ вар$$

$$P_W = U_{CA} I_B \cos\left[\dot{U}_{CA} \hat{\ } \dot{I}_B\right] = U_Л I_Л \cos(90° - \varphi) = U_Л I_Л \sin\varphi$$

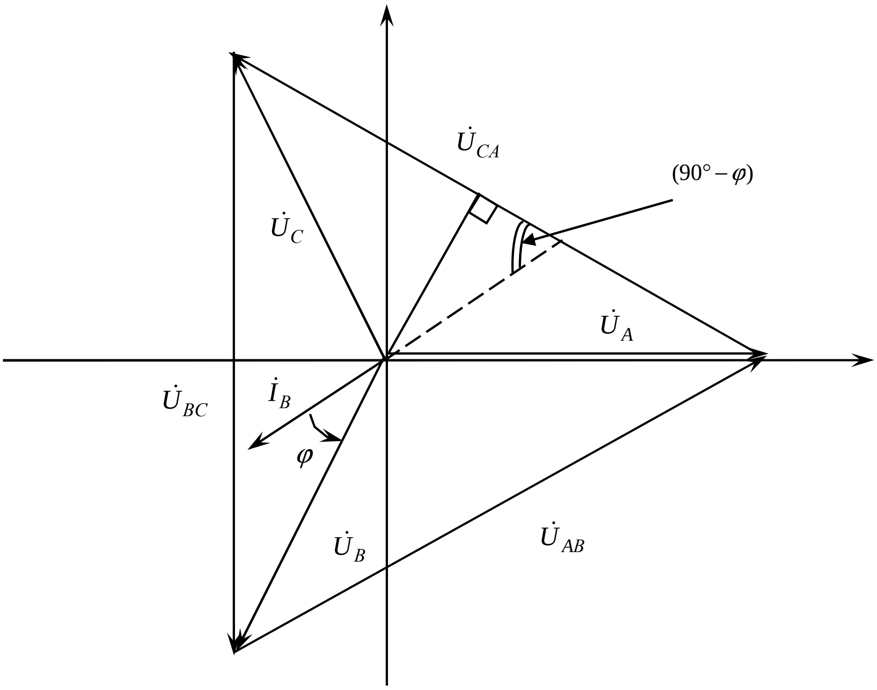


Рис. 8.29.

Круговое вращающееся магнитное поле.

Круговое вращающееся магнитное поле может быть создано при помощи трехфазного тока, что является одним из его важнейших технических достоинств. Присоединим к трехфазной цепи три одинаковые неподвижные катушки, оси которых сдвинуты в пространстве по отношению к друг другу на 120 градусов. При симметричной системе фазных токов i_A, i_B, i_C эти катушки будут создавать индукции магнитного поля B_A, B_B, B_C.

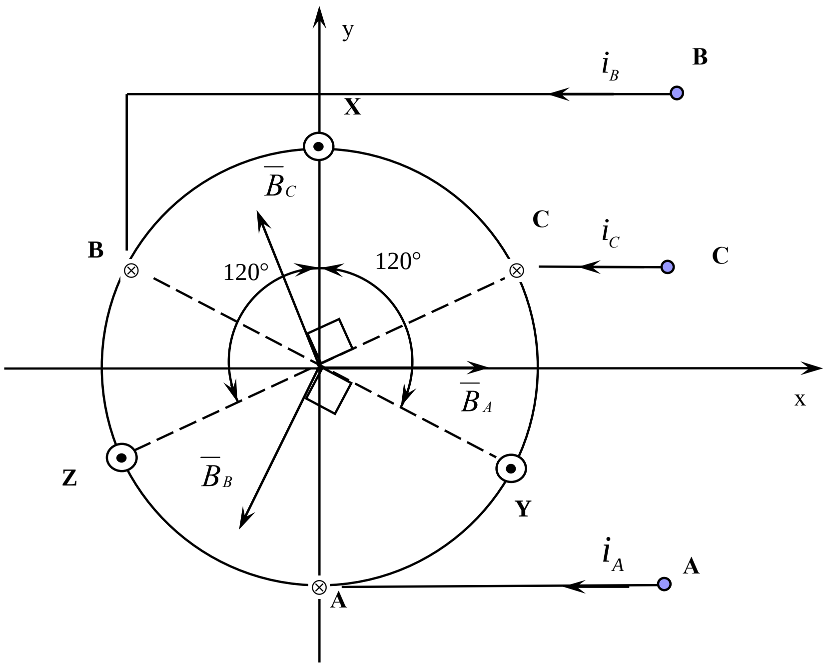


Рис. 8.30.

Фазные токи:

$$i_A = I_m \sin \omega t$$

$$i_B = I_m \sin(\omega t - 120°)$$

$$i_C = I_m \sin(\omega t + 120°)$$

Фазные индукции магнитного поля:

$$B_A = B_m \sin \omega t$$

$$B_B = B_m \sin(\omega t - 120°)$$

$$B_C = B_m \sin(\omega t + 120°)$$

Проекции суммарного вектора магнитной индукции.

1. Проекция на ось X:

$$B_X = B_{AX} + B_{BX} + B_{CX} = B_m \sin \omega t + B_m \cos 240° \sin(\omega t - 120°) +$$
$$+ B_m \cos 120° \sin(\omega t + 120°) = 1{,}5 B_m \sin \omega t, \ Тл.$$

2. Проекция на ось Y:

$B_Y = B_{AY} + B_{BY} + B_{CY} = 0 + B_m \sin 240° \sin(\omega t - 120°) +$
$+ B_m \sin 120° \sin(\omega t + 120°) = 1{,}5 B_m \cos \omega t,\ Тл$.

Величина суммарной индукции не зависит от времени:

$B = \sqrt{B_X^2 + B_Y^2} = 1{,}5\ B_m$

Но B_X и B_Y зависят от времени, поэтому $\overline{B}$ вращается.

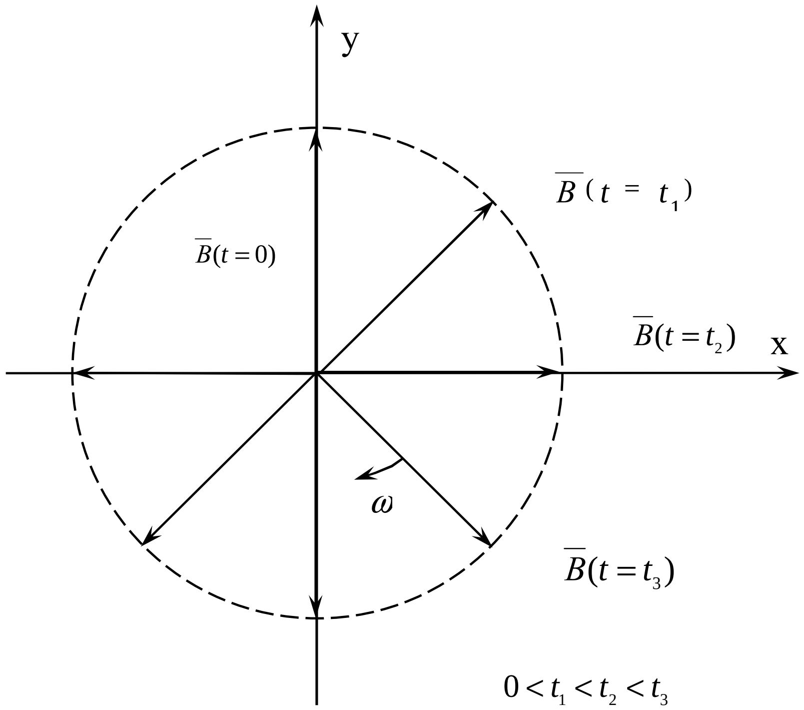


Рис. 8.31.

Если в это вращающееся магнитное поле поместить металлический цилиндр (ротор), то за счет взаимодействия наводимых в нем вихревых токов с магнитным полем цилиндр начнет вращаться – асинхронный двигатель.

Показание ваттметра:

$$P_W = U \cdot I \cdot \cos\varphi,\ Вт$$

где

$\dot{I} = I \cdot e^{j\beta},\ A$

$\dot{U} = U \cdot e^{j\alpha},\ B$

$\varphi = \alpha - \beta,\ град$

ЗАДАНИЕ №3

Линейные трехфазные цепи с гармоническими напряжениями и токами

Для заданной схемы с симметричной системой фазных ЭДС, когда $e_A(t) = \sqrt{2} \cdot E \cdot \sin(\omega t + \alpha), \omega = 314$ рад/с выполнить следующее.

В симметричном режиме до срабатывания ключа К:

Определить комплексы действующих значений напряжений и токов на всех элементах схемы.

Рассчитать балансы активной и реактивной мощностей.

Построить совмещенные векторные диаграммы токов (лучевую) и напряжений (топографическую) для всех напряжений и токов.

В несимметричном режиме после срабатывания ключа **К**:

В исходной схеме методом узловых потенциалов определить комплексы действующих значений всех напряжений и токов.

Составить балансы активной и реактивной мощностей.

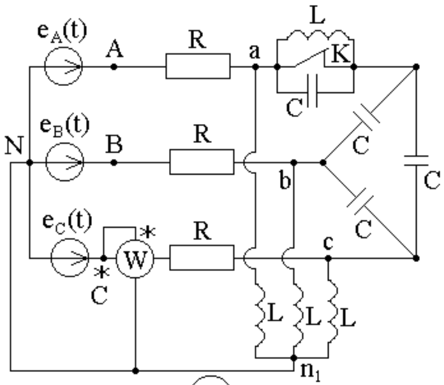
Построить совмещенные векторные диаграммы токов и напряжений.

Проанализировать результаты вычислений, сравнить симметричный и несимметричный режимы, сформулировать выводы по работе.

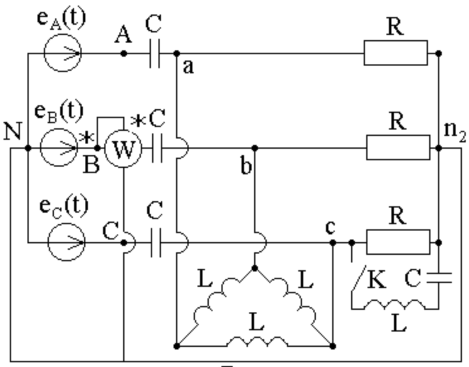
№	***E***	α
-	В	град
1	127	0
2	220	30
3	380	45
4	220	60
5	127	90
6	220	180
7	380	-30
8	220	-45
9	127	-60
0	380	-90

№	***R***	***L***	***C***
-	Ом	мГн	мкФ
1	100	318.47	31.8
2	90	286.62	35.3
3	80	254.78	39.8
4	70	222.93	45.4
5	60	191.08	53
6	50	159.24	63.6
7	40	127.39	79.6
8	30	95.54	106.1
9	20	63.69	159.2
0	10	31.85	318.4

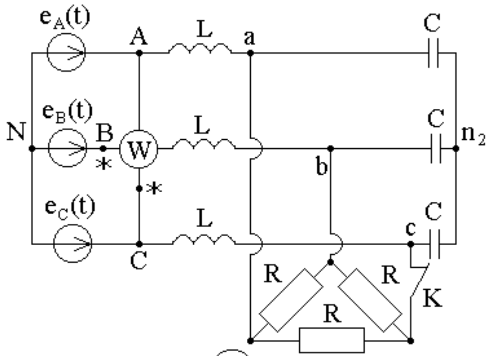
Схемы для задания 4



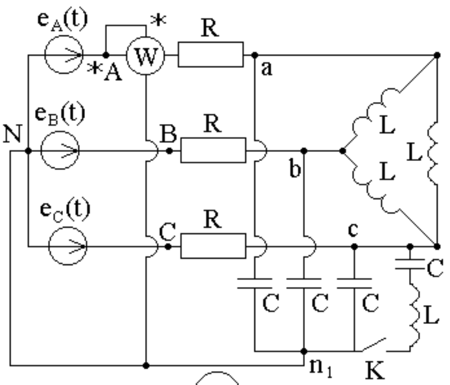
1



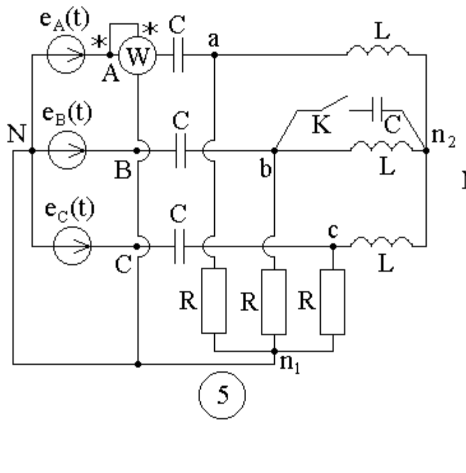
2



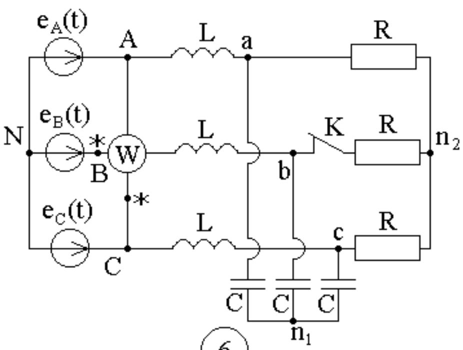
3



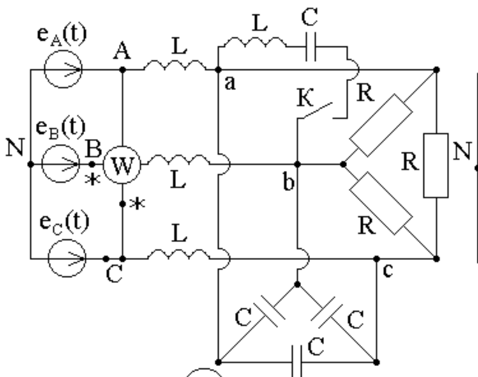
4



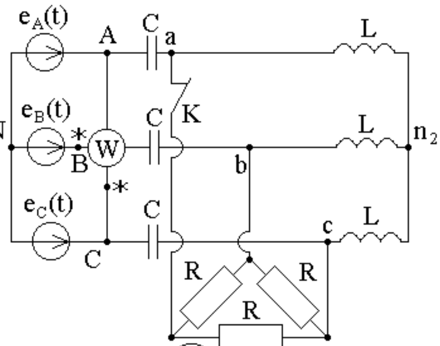
5



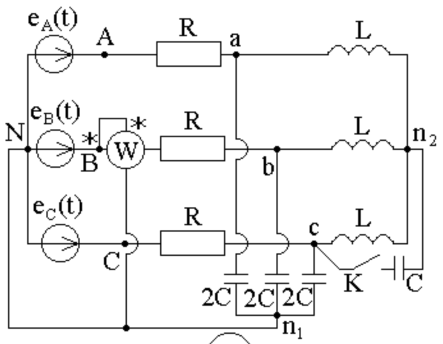
6



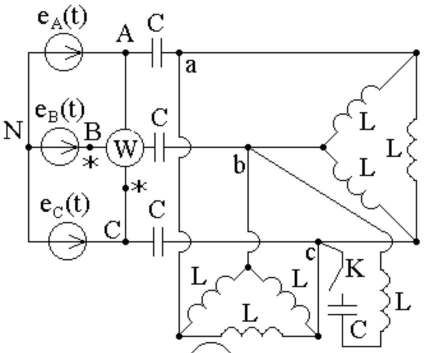
7



8



9



0

<u>Примечание:</u> объем задания определяет лектор;

1-ая цифра номера задания – номер строки в таблице 1;

2-ая цифра номера задания – номер строки в таблице 2;

3-ья цифра номера задания – номер схемы.

Методические указания к заданию № 3.

Для заданной схемы дано:

E	α
В	град
220	45

R	L	C
Ом	мГн	мкФ
300	127,39	31,8

Следовательно, $e_A(t) = \sqrt{2} \cdot 220 \sin(\omega t + 45)$

Схема электрической цепи.

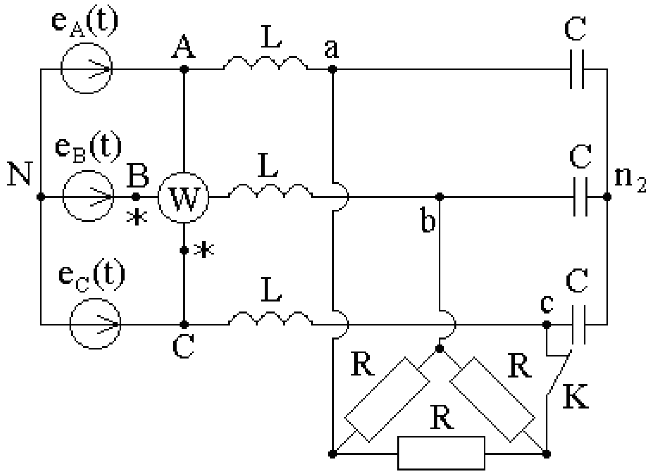


Рис. 9.1

1. Расчёт симметричного режима трёхфазной цепи

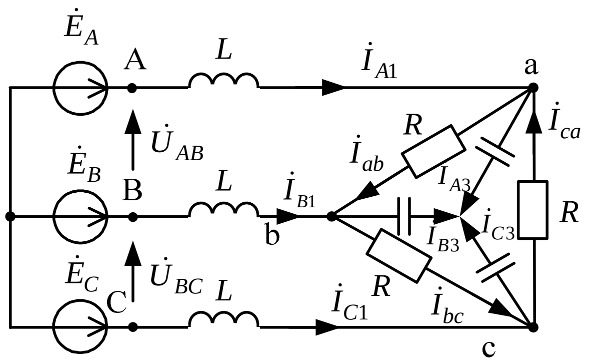


Рис. 9.2

Генератор симметричен, фазные ЭДС генератора:

$$\dot{E}_{\text{A}} = 220e^{j45}\ \text{В};\ \dot{E}_{\text{B}} = a^2 \cdot 220e^{j45} = 220e^{-j75}\ \text{В};$$

$$\dot{E}_{\text{C}} = a \cdot 220e^{j45} = 220e^{j65}\ \text{В}.$$

Определяем сопротивления реактивных элементов:

$$X_L = \omega L = 314 \cdot 127{,}39 \cdot 10^{-3} = 40\ \text{Ом};$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{314 \cdot 31.8 \cdot 10^{-6}} = 100\ \text{Ом}.$$

Обозначим сопротивления ветвей схемы:

$$\underline{Z}_1 = jX_L = j40\,\text{Ом};\ \underline{Z}_2 = -jX_C = -j100\ \text{Ом};\ \underline{Z}_3 = R = 300\,\text{Ом}.$$

Преобразуем треугольник сопротивлений $\underline{Z}_3$ в эквивалентную звезду с сопротивлениями $\frac{\underline{Z}_3}{3}$ (рис. 6.5.3). Поскольку в симметричной цепи потенциалы нулевых точек (N, n, n_1) одинаковы, соединение этих точек нулевым проводом не нарушит режима цепи. Выделяем вместе с нулевым проводом одну фазу, например, A и сводим расчёт трёхфазной цепи к расчёту однофазной (рис. 9.4). Токи и напряжения других фаз определяем с помощью фазового оператора.

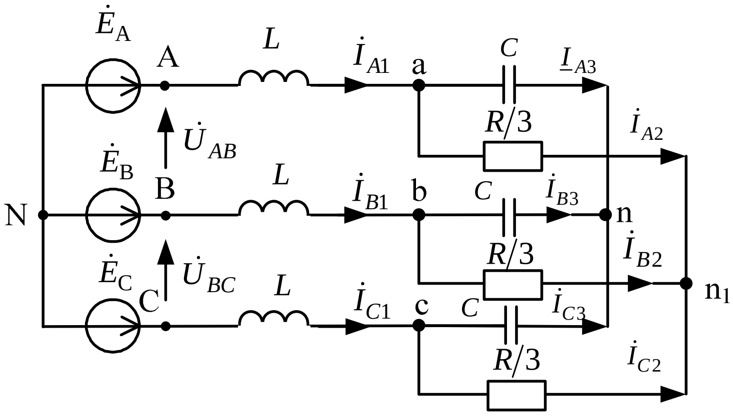


Рис. 9.3

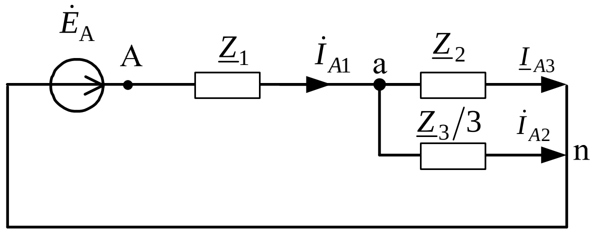


Рис. 9.4

Суммарное комплексное сопротивление фазы A:

$$\underline{Z}_A=\underline{Z}_1+\frac{\underline{Z}_2\dfrac{\underline{Z}_3}{3}}{\underline{Z}_2+\dfrac{\underline{Z}_3}{3}}=-j40+\frac{-j100\cdot 100}{-j100+100}=50-j10 \text{ Ом.}$$

Комплексные значения токов в ветвях фазы А по закону Ома:

$$\dot{I}_{A1}=\frac{\dot{E}_A}{\underline{Z}_A}=\frac{220e^{j45}}{50-j10}=2,391+j3,584=4,308e^{j56.293} \text{ А.}$$

$$\dot{I}_{A2}=\dot{I}_{A1}\frac{\dfrac{\underline{Z}_3}{3}}{\underline{Z}_2+\dfrac{\underline{Z}_3}{3}}=4,308e^{j56.293}\frac{100}{-j100+100}=2,989+j0,599$$

$$=3,044e^{j101,336}\text{А}$$

$$\dot{I}_{A3}=\dot{I}_{A1}-\dot{I}_{A2}=\left(2,391+j3,584\right)-(2,989+j0,599)$$

$$=2,989+j0,599=3,049e^{j11,336}\text{А.}$$

Определяем токи треугольника исходной схемы

$$\dot{I}_{ab}=\frac{\dot{I}_{A3}e^{j30}}{\sqrt{3}}=\frac{3,049e^{j11,336}e^{j30}}{\sqrt{3}}=1,758e^{j41.336} \text{ А;}$$

$$\dot{I}_{bc}=a^2\dot{I}_{ab}=1,758e^{-j78.664} \text{ А;}$$

$$\dot{I}_{ca}=a\dot{I}_{ab}=1,758e^{j161.336} \text{ А.}$$

Комплексные значения токов в ветвях фазы В:

$$\dot{I}_{B1}=a^2\dot{I}_{A1}\quad =e^{-j120}\cdot 4,308e^{j56.293}=4,308e^{-j63,707} \text{ А;}$$

$$\dot{I}_{B2}=a^2\dot{I}_{A2}=e^{-j120}3,044e^{j101,336}=3,049e^{-j18,664} \text{ А.}$$

Комплексные значения токов в ветвях фазы С:

$$\dot{I}_{C1}=a\dot{I}_{A1}=e^{j120}4,308e^{j56.293}=4,308e^{-j176,293} \text{ А;}$$

$$\dot{I}_{C2}=a\dot{I}_{A2}=e^{j120}3,044e^{j101,336}=3,049e^{-j138,664} \text{ А.}$$

Для проверки правильности расчётов балансы активной и реактивной мощностей. Очевидно, что мощности фаз одинаковы, а для вычисления потребляемой мощности всей цепи, нужно каждую из них утроить:

Полная вырабатываемая трёхфазным генератором мощность:

$$\underline{S}_{\text{в}}=3\cdot\dot{E}_A\overset{*}{I}_{A1}=3\cdot 220e^{j45^\circ}\cdot 4,308e^{-j56.293}=2788,506-j556,848 \text{ ВА,}$$

где; $\overset{*}{I}_{A1}=4,308e^{-j56.293}$ А; – сопряженное значение тока.

Активная потребляемая мощность:

$$P_{\text{п}}=3P_{\Phi}=3\cdot(\left|I_{A1}\right|^2\cdot\cancel{\mathrm{Re}(\underline{Z}_1)}^0+\left|I_{A2}\right|^2\cdot\cancel{\mathrm{Re}(\underline{Z}_2)}^0+\left|I_{ab}\right|^2\cdot\mathrm{Re}(\underline{Z}_3))$$

$$=\left(1,76\right)^2 300=$$

$= 2788.506$ Вт.

Реактивная потребляемая мощность:

$$Q_{п} = 3Q_{Ф} = \left|I_{A1}\right|^2 \cdot \mathrm{Im}(\underline{Z}_2) + \left|I_{A2}\right|^2 \cdot \mathrm{Im}(\underline{Z}_2) + \left|I_{ab}\right|^2 \cdot \cancel{\mathrm{Im}(\underline{Z}_{ab})}^{0} =$$

$$= 4,308^2 40 - 3,044^2 100 = -556.848 \text{ вар}.$$

Погрешности расчетов.

По активной мощности:

$$\delta_P\% = \frac{\left|P_{в} - P_{п}\right|}{P_{в}} \cdot 100 = 0 \le 3\% .$$

По реактивной мощности:

$$\delta_Q\% = \frac{\left|Q_{в} - Q_{п}\right|}{Q_{в}} \cdot 100 = 0 \le 3\%$$

2.Расчёт несимметричного режима трёхфазной цепи после срабатывания ключа К.

Схема:

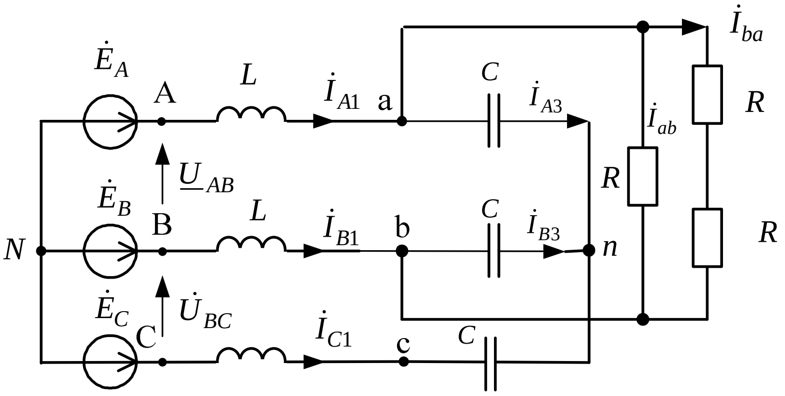


Рис. 9.6.

Воспользуемся методом узловых потенциалов. Примем потенциал узла N равным нулю, тогда:

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_a\left(\frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3} + \frac{1}{2\underline{Z}_3}\right) - \dot{\varphi}_b\left(\frac{1}{\underline{Z}_3} + \frac{1}{2\underline{Z}_3}\right) - \dot{\varphi}_n\left(\frac{1}{\underline{Z}_2}\right) = \frac{\dot{E}_A}{\underline{Z}_1}; \\ \dot{\varphi}_b\left(\frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3} + \frac{1}{2\underline{Z}_3}\right) - \dot{\varphi}_a\left(\frac{1}{\underline{Z}_3} + \frac{1}{2\underline{Z}_3}\right) - \dot{\varphi}_n\left(\frac{1}{\underline{Z}_2}\right) = \frac{\dot{E}_B}{\underline{Z}_1}; \\ \dot{\varphi}_n\left(\frac{1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} + \frac{2}{\underline{Z}_2}\right) - \dot{\varphi}_a\left(\frac{1}{\underline{Z}_2}\right) - \dot{\varphi}_b\left(\frac{1}{\underline{Z}_2}\right) = \frac{\dot{E}_C}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}. \end{cases}$$

Токи в ветвях схемы:

$$\dot I_{A1}=\frac{-\dot\varphi_a+\dot E_A}{\underline Z_1};\ \dot I_{B1}=\frac{-\dot\varphi_b+\dot E_B}{\underline Z_1};\ \dot I_{C1}=\frac{-\dot\varphi_n+\dot E_C}{\underline Z_1+\underline Z_2};$$

$$\dot I_{ab}=\frac{\dot\varphi_a-\dot\varphi_b}{\underline Z_3};\ \dot I_{ab}=\frac{\dot\varphi_b-\dot\varphi_a}{2\underline Z_3};\dot I_{A3}=\frac{\dot\varphi_a-\dot\varphi_n}{\underline Z_2};\ \dot I_{B3}=\frac{\dot\varphi_b-\dot\varphi_n}{\underline Z_2}.$$

Полная вырабатываемая трёхфазным генератором мощность:

$$\underline S_{\text{в}}=\dot E_A\dot I^*_{A1}+\dot E_B\dot I^*_{B1}+\dot E_B\dot I^*_{C1}=1394,253-j1485,451 \text{ ВА}.$$

Активная потребляемая мощность:

$$P_{\text{п}}=\left|I_{ab}\right|^2\cdot R+\left|I_{ba}\right|^2\cdot 2R=1394,253 \text{ Вт}.$$

Реактивная потребляемая мощность:

$$Q_{\text{п}}=j\left(\left|I_{A1}\right|^2\cdot X_L+\left|I_{B1}\right|^2\cdot X_L+\left|I_{C1}\right|^2\cdot X_L-\left|I_{A3}\right|^2\cdot X_C-\left|I_{B3}\right|^2\cdot X_C-\left|I_{c1}\right|^2\cdot X_C\right)=$$

$$=-j1485,451 \text{ Вар}$$

Векторная диаграмма:

Используя данные расчётов, строим векторную диаграмму токов и совмещённую диаграмму напряжений. Векторы токов исходят из одной точки нулевого потенциала (в данном случае это может быть любая нулевая точка: N, n, n_1). При построении лучевых диаграмм необходимо учитывать, чтобы выполнялся первый закон Кирхгофа для любого узла.

Построение топографической диаграммы начнём с построения напряжений фазных ЭДС генератора. Рассчитав предварительно напряжения на отдельных участках цепи. Векторы напряжений на сопротивлениях нагрузки направлены на диаграмме в сторону повышения потенциала (если смотреть по схеме, то против направления токов).

Векторную диаграмму так же можно построить использовав пакет Mathcad. Для этого необходимо определить потенциалы узлов схемы. Сформировать столбцовые матрицы так, чтобы потенциалы в них располагались в том порядке, как они расположены на схеме последовательно по обходу контура. В шаблоне для посотороения графиков по оси ординат отложить мнимые части сформированных матриц, а по оси абсцисс соответственно вещественные части. Для совмещения с лучевой диаграммой токов можно ввести коэффициент k, так чтобы вектора напряжений и токов были в равных масштабах.

Полученную диаграмму можно скопировать в любой графический редактор и обозначить напряжения и токи исследуемой схемы.

Документ Mathcad

Дано:

$a := e^{120i \cdot deg}$

$EA := 220 \cdot e^{45i \cdot deg}$ $\quad Eb := a^2 \cdot EA$ $\quad EC := a \cdot EA$

$C := 31.8 \cdot 10^{-6}$ $\quad L := 127.39 \cdot 10^{-3}$ $\quad \omega := 314$ $\quad r := 300$

1. Симметричны режим

1.1. Расчет комплексных сопротивлений :

$xc := \dfrac{1}{\omega \cdot C}$ $\quad xl := \omega \cdot L$

$z1 := i \cdot xl$ $\quad z2 := -i \cdot xc$ $\quad z3 := r$

Расчет фазы А :

$ZA := z1 + \dfrac{z2 \cdot \dfrac{z3}{3}}{z2 + \dfrac{z3}{3}}$ $\qquad ZA = 50.074 - 9.999i$

$IA1 := \dfrac{EA}{ZA}$ $\qquad IA1 = 2.391 + 3.584i$

$IA2 := IA1 \cdot \dfrac{\dfrac{z3}{3}}{z2 + \dfrac{z3}{3}}$ $\qquad IA2 = -0.598 + 2.985i$

$IA3 := IA1 - IA2$ $\qquad IA3 = 2.989 + 0.599i$

Расчет фазы В и С токи треугольника :

$IB1 := IA1 \cdot a^2$ $\quad IC1 := a \cdot IA1$

$IB2 := IA2 \cdot a^2$ $\quad IC2 := a \cdot IA2$

$Iab := \dfrac{IA3 \cdot e^{30i \cdot deg}}{\sqrt{3}}$ $\qquad Iab = 1.322 + 1.163i$

$Ibc := Iab \cdot a^2$ $\qquad Ibc = 0.346 - 1.726i$

$Ica := a \cdot Iab$ $\qquad Ica = -1.668 + 0.563i$

1.2. Баланс мощности

1.2.1. Полная мощность

$S := 3 \cdot EA \cdot \overline{IA1}$ $\qquad S = 2.789 \times 10^3 - 556.848i$

1.2.2. Активная мощность

$Pa := (|Iab|)^2 \cdot z3$

$P := Pa \cdot 3$ $\qquad P = 2.789 \times 10^3$

1.2.3. Реактивная мощность

$Qa := (|IA1|)^2 \cdot z1 + (|IA3|)^2 \cdot z2$

$Q := Qa \cdot 3$ $\qquad Q = -565.108i$

1.3. Векторная диаграмма

1.3.1. Для построения векторной диаграммы, определяем потенциалы узлов

$fN := 0$

$fA := EA$	$fa := fA - IA1 \cdot z1$	$fn := fa - IA2 \cdot z2$	$fn = -0i$
$fB := EB$	$fb := fB - IB1 \cdot z1$	$fn1 := fb - IB2 \cdot z2$	$fn1 = -0$
$fC := EC$	$fc := fC - IC1 \cdot z1$	$fn2 := fc - IC2 \cdot z2$	$fn2 = 0$

1.3.2. Формируем столбцовые матрицы потенциалов узлов в том порядке, как они изображены на схеме

$$F1 := \begin{pmatrix} fN \\ fA \\ fa \\ fb \\ fn \end{pmatrix} \qquad F1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 155.563 + 155.563i \\ 298.93 + 59.925i \\ -97.569 - 288.843i \\ -0i \end{pmatrix}$$

$$F2 := \begin{pmatrix} fN \\ fB \\ fb \\ fc \\ fn \end{pmatrix} \qquad F2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 56.94 - 212.504i \\ -97.569 - 288.843i \\ -201.361 + 228.919i \\ -0i \end{pmatrix}$$

$$F3 := \begin{pmatrix} fN \\ fC \\ fc \\ fa \\ fn \end{pmatrix} \qquad F3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -212.504 + 56.94i \\ -201.361 + 228.919i \\ 298.93 + 59.925i \\ -0i \end{pmatrix}$$

1.3.3. Формируем столбцовую матрицу токов для постороения лучевой диаграммы токов

$$F4 := \begin{pmatrix} IA1 \\ 0 \\ IB1 \\ 0 \\ IC1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad k := 50 \qquad F4 \cdot k = \begin{pmatrix} 119.547 + 179.206i \\ 0 \\ 95.424 - 193.134i \\ 0 \\ -214.971 + 13.928i \\ 0 \end{pmatrix}$$

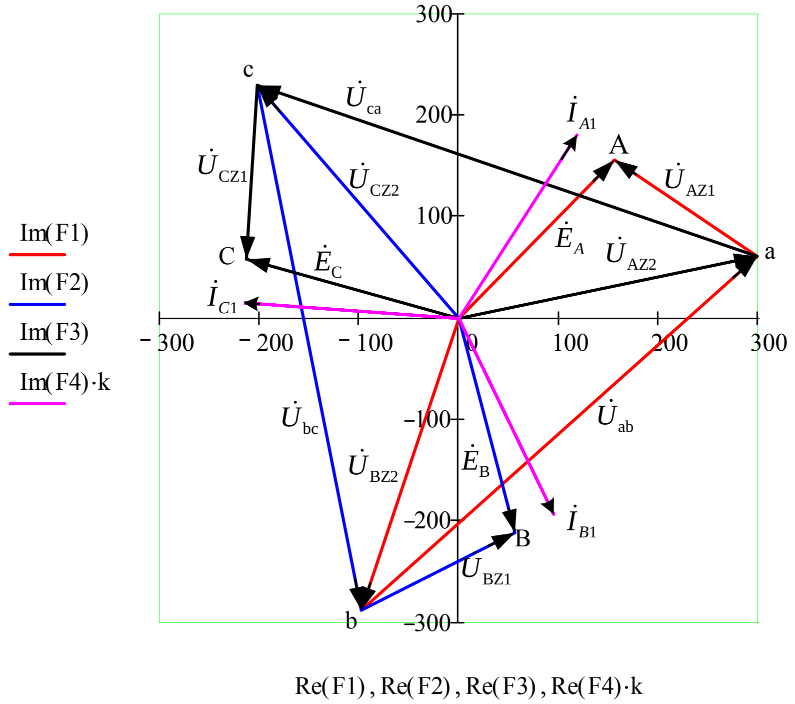


Рис. 9.5

2. Несимметричны режим

$$ORIGIN := 1$$

2.1. Методом узловых потенциалов определяем потенциалы узлов

$$a := \begin{bmatrix} \frac{1}{z1}+\frac{1}{z2}+\frac{1}{z3}+\frac{1}{2\cdot z3} & -\left(\frac{1}{z3}+\frac{1}{2\cdot z3}\right) & \frac{-1}{z2} \\ -\left(\frac{1}{z3}+\frac{1}{2\cdot z3}\right) & \frac{1}{z1}+\frac{1}{z2}+\frac{1}{z3}+\frac{1}{2\cdot z3} & \frac{-1}{z2} \\ \frac{-1}{z2} & \frac{-1}{z2} & \frac{2}{z2}+\frac{1}{z1+z2} \end{bmatrix}$$

$$b := \begin{pmatrix} \frac{EA}{z1} \\ \frac{EB}{z1} \\ \frac{EC}{z1+z2} \end{pmatrix} \qquad f := a^{-1}\cdot b$$

$$fa := f_1 \qquad fb := f_2 \qquad fn := f_3$$

Токи в ветвях схемы определяем по обобщённому закону Ома для участка цепи

$$IA1 := \frac{-fa + EA}{z1} \qquad IA3 := \frac{fa - fn}{z2} \qquad Iab := \frac{fb - fa}{r}$$

$$IB1 := \frac{-fb + EB}{z1} \qquad IB3 := \frac{fb - fn}{z2} \qquad Iba := \frac{fb - fa}{r \cdot 2}$$

$$IC1 := \frac{-fn + EC}{z1 + z2}$$

2.2. Баланс мощности

2.2.1. Полная мощность

$$S := EA \cdot \overline{IA1} + EB \cdot \overline{IB1} + EC \cdot \overline{IC1} \qquad S = 1394.253 - 1485.451i$$

2.2.2. Активная мощность

$$P1 := (|Iab|)^2 \cdot z3 + (|Iba|)^2 \cdot z3 \cdot 2 \qquad P1 = 1.394 \times 10^3$$

2.2.3. Реактивная мощность

$$Q := (|IA1|)^2 \cdot z1 + (|IB1|)^2 \cdot z1 + (|IC1|)^2 \cdot z1 + (|IA3|)^2 \cdot z2 \ldots$$
$$+ (|IB3|)^2 \cdot z2 + (|IC1|)^2 \cdot z2$$

$$Q = -1.485i \times 10^3$$

1.3. Векторная диаграмма

$fN := 0$

$fA := EA \qquad fa := fA - IA1 \cdot z1 \qquad fn := fa - IA3 \cdot z2 \qquad fn = -0 + 0i$

$fB := EB \qquad fb := fB - IB1 \cdot z1 \qquad fn1 := fb - IB3 \cdot z2 \qquad fn1 = -0$

$fC := EC$

$$F1 := \begin{pmatrix} fN \\ fA \\ fa \\ fb \\ fB \\ 0 \end{pmatrix} \qquad F1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 155.563 + 155.563i \\ 375.163 + 126.98i \\ -21.336 - 221.788i \\ 56.94 - 212.504i \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$F2 := \begin{pmatrix} fN \\ fB \\ fb \\ fn \\ fa \end{pmatrix} \qquad F2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 56.94 - 212.504i \\ -21.336 - 221.788i \\ -0 + 0i \\ 375.163 + 126.98i \end{pmatrix}$$

$$F3 := \begin{pmatrix} fN \\ fC \\ fc \\ fn \end{pmatrix} \qquad F3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -212.504 + 56.94i \\ -353.826 + 94.807i \\ -0 + 0i \end{pmatrix}$$

$$F4 := \begin{pmatrix} IA1 \\ 0 \\ IB1 \\ 0 \\ IC1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad F4 \cdot 10 = \begin{pmatrix} 7.146 + 54.899i \\ 0 \\ 2.321 - 19.569i \\ 0 \\ -9.467 - 35.33i \\ 0 \end{pmatrix}$$

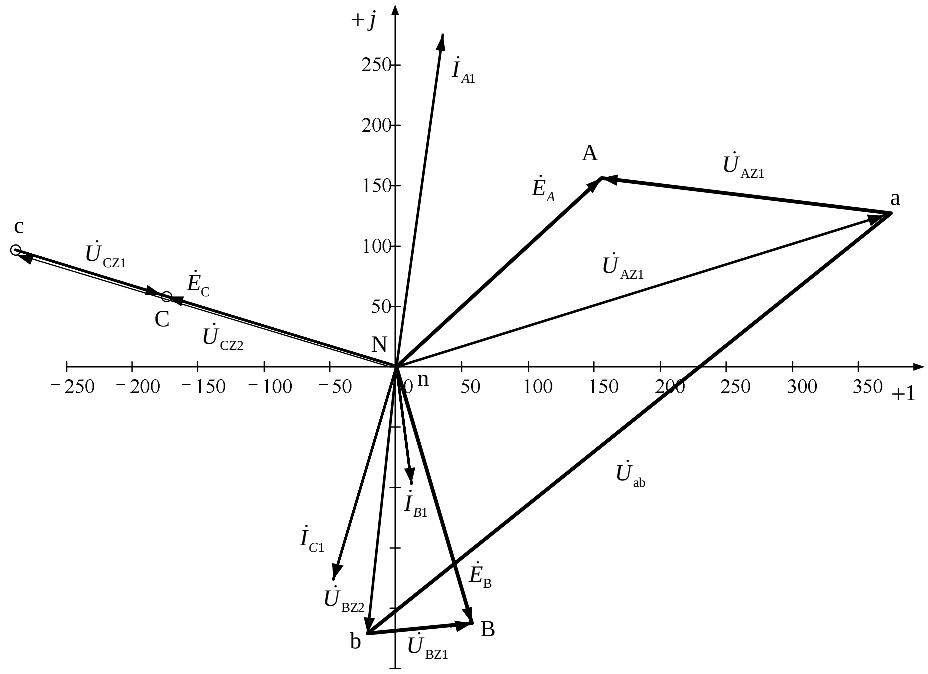


Рис. 9.7.

МЕТОД СИММЕТРИЧНЫХ СОСТАВЛЯЮЩИХ

Метод симметричных составляющих используется для расчета несимметричного (аварийного) режима динамических трехфазных цепей, содержащих двигатели и генераторы, линии и трансформаторы.

В динамических трехфазных цепях имеется индуктивная связь между фазами, которую удобно учесть, используя метод симметричных составляющих.

Этот метод основан на разложении трехфазной несимметричной системы *A*, *B*, *C* на симметричные составляющие прямой (A_1, B_1, C_1), обратной (A_2, B_2, C_2), и нулевой (A_0, B_0, C_0) последовательности:

$$\dot A = Ae^{j\alpha} = \dot A_1 + \dot A_2 + \dot A_0,\ \dot B = Be^{j\beta} = \dot B_1 + \dot B_2 + \dot B_0,\ \dot C = Ce^{j\gamma} = \dot C_1 + \dot C_2 + \dot C_0$$

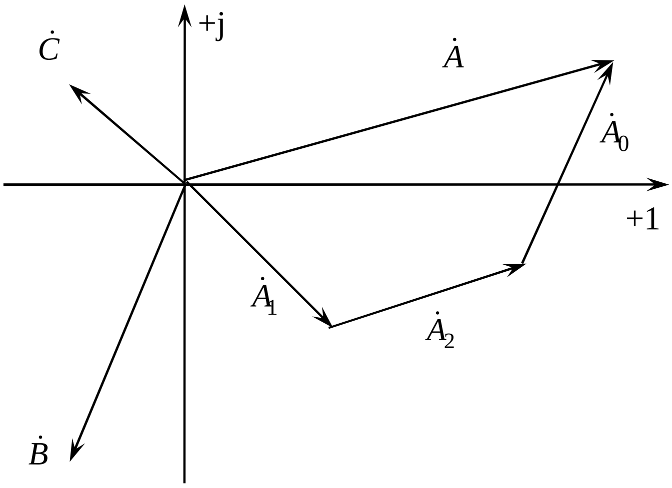


Рис. 10.1.

Составляющие прямой последовательности:

$$\begin{cases} \dot{A}_1 = A_1 e^{j\alpha_1} \\ \dot{B}_1 = a^2 \dot{A}_1 \quad \text{, где } a = e^{j120°},\ a^2 = e^{-j120°}. \\ \dot{C}_1 = a\dot{A}_1 \end{cases}$$

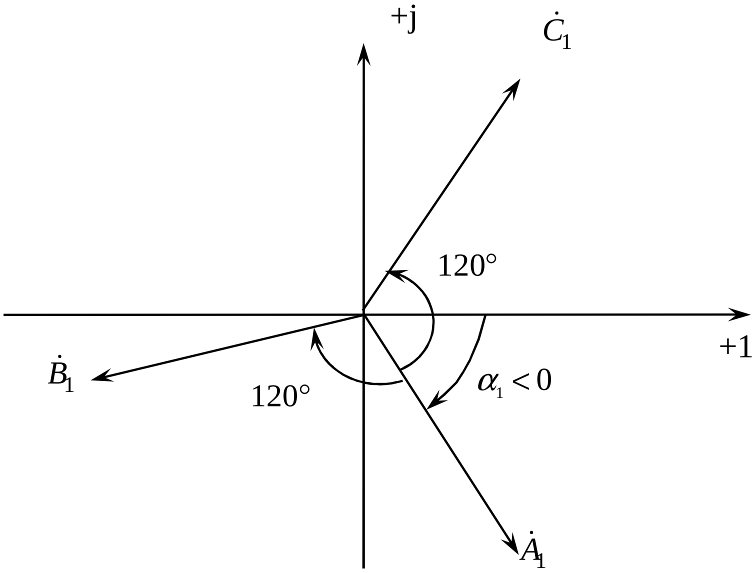


Рис. 10.2.

2. Составляющие обратной последовательности:

$$\begin{cases} \dot{A}_2 = A_2 e^{j\alpha_2} \\ \dot{B}_2 = a\dot{A}_2 \\ \dot{C}_2 = a^2 \dot{A}_2 \end{cases}$$

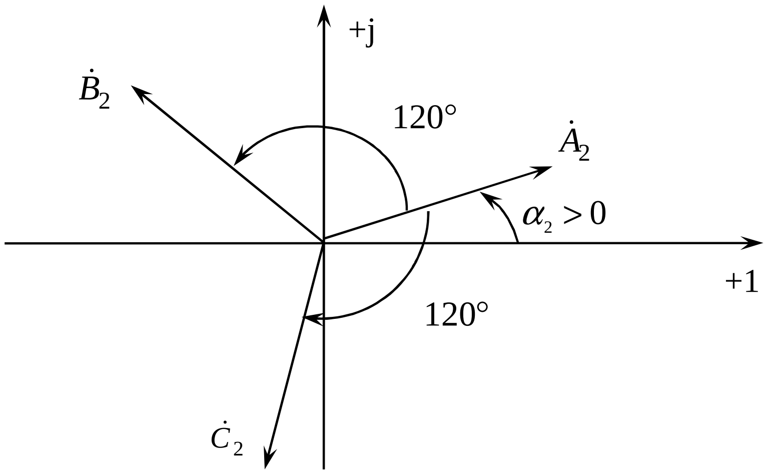


Рис. 10.3.

3. Составляющие нулевой последовательности:

$\dot{A}_0 = \dot{B}_0 = \dot{C}_0 = A_0 e^{j\alpha_0}$.

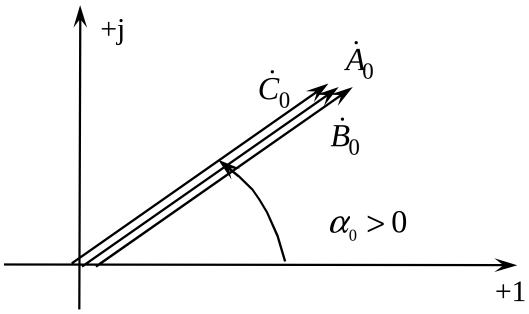


Рис. 10.4.

Расчет составляющих фазы А:

$\dot{A}_1 = (\dot{A} + a\dot{B} + a^2\dot{C}) / 3$,

$\dot{A}_2 = (\dot{A} + a^2\dot{B} + a\dot{C}) / 3$,

$\dot{A}_0 = (\dot{A} + \dot{B} + \dot{C}) / 3$.

Составляющие токов прямой последовательности создают магнитное поле, вращающееся по направлению вращения роторов двигателей и генераторов.

Составляющие токов обратной последовательности создают магнитное поле, вращающееся навстречу вращению роторов двигателей и генераторов.

Составляющие токов нулевой последовательности создают неподвижное пульсирующее магнитное поле.

Таким образом, условия протекания составляющих токов разные, следовательно, и сопротивления этим составляющим разные:

у двигателей и генераторов $\underline{Z}_1 \neq \underline{Z}_2 \neq \underline{Z}_0$;

у линий и трансформаторов $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 \neq \underline{Z}_0$.

При этом в симметричной трехфазной цепи имеет место независимость действия симметричных составляющих токов и напряжений.

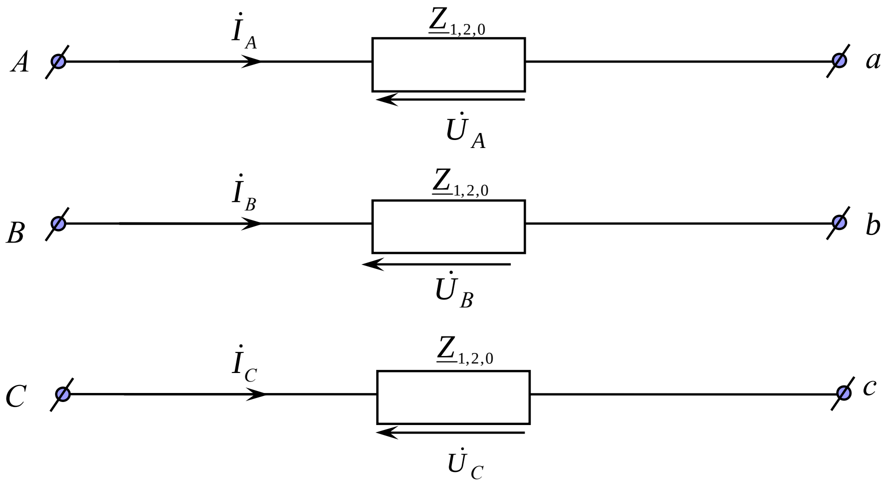


Рис. 10.5.

Фазные токи:

$\dot{I}_A = \dot{I}_{A1} + \dot{I}_{A2} + \dot{I}_{A0}$,

$\dot{I}_B = a^2\dot{I}_{A1} + a\dot{I}_{A2} + \dot{I}_{A0}$,

$\dot{I}_C = a\dot{I}_{A1} + a^2\dot{I}_{A2} + \dot{I}_{A0}$.

Составляющие фазных напряжений:

$\dot{U}_{A1} = \underline{Z}_1 \dot{I}_{A1}$,
$\dot{U}_{A2} = \underline{Z}_2 \dot{I}_{A2}$,
$\dot{U}_{A0} = \underline{Z}_0 \dot{I}_{A0}$.

Фазные напряжения:
$\dot{U}_A = \dot{U}_{A1} + \dot{U}_{A2} + \dot{U}_{A0}$,
$\dot{U}_B = a^2 \dot{U}_{A1} + a\dot{U}_{A2} + \dot{U}_{A0}$,
$\dot{U}_C = a\dot{U}_{A1} + a^2 \dot{U}_{A2} + \dot{U}_{A0}$.

Это означает, что расчет симметричной трехфазной цепи можно вести на одну фазу для каждой последовательности отдельно.

Особенности существования составляющих напряжений и токов нулевой последовательности:

1. Линейные напряжения

$$\dot{U}_{AB}, \dot{U}_{BC}, \dot{U}_{CA}$$

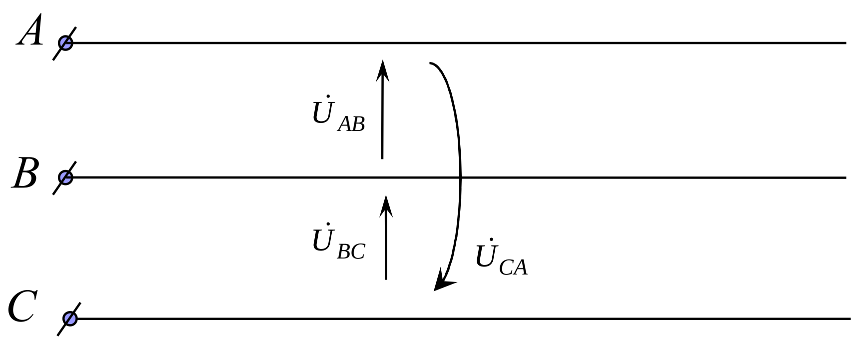


Рис. 10.6.

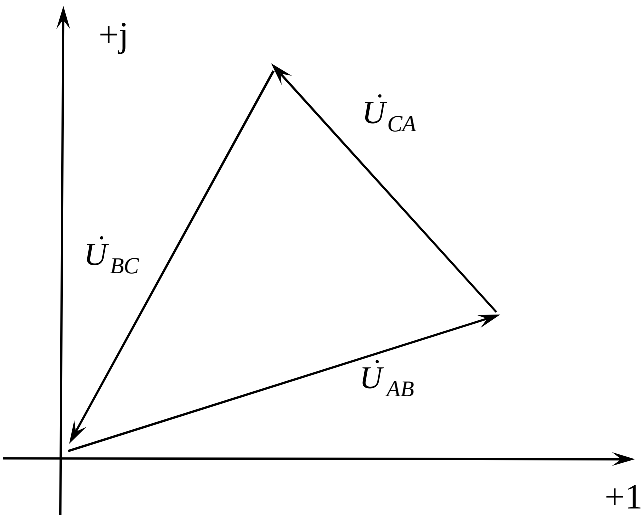


Рис. 10.7.

$$\dot{U}_{AB_0} = \dot{U}_{BC_0} = \dot{U}_{CA_0} = \frac{\dot{U}_{AB} + \dot{U}_{BC} + \dot{U}_{CA}}{3} = 0$$

Линейные напряжения не содержат составляющих нулевой последовательности.

Фазные токи треугольника

$\dot{I}_{AB}$, $\dot{I}_{BC}$, $\dot{I}_{CA}$

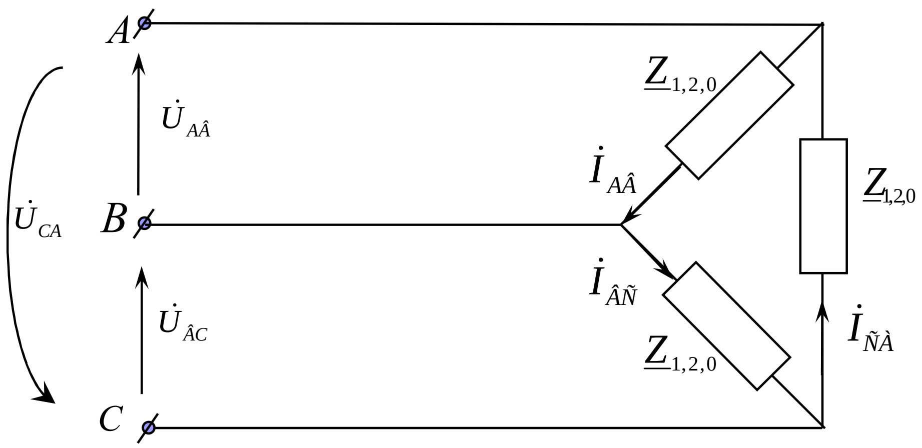


Рис. 10.8.

Так как

$\dot{U}_{AB_0} = \dot{U}_{BC_0} = \dot{U}_{CA_0} = 0,$

То $\dot{I}_{AB0} = \dfrac{\dot{U}_{AB0}}{\underline{Z}_0} = 0;\ \dot{I}_{BC0} = \dfrac{\dot{U}_{BC0}}{\underline{Z}_0} = 0;\ \dot{I}_{CA0} = \dfrac{\dot{U}_{CA0}}{\underline{Z}_0} = 0.$

Фазные токи нагрузки, соединенной в треугольник, не содержат составляющих нулевой последовательности.

3. Ток нулевого провода $\dot{I}_n$

Рис. 10.9.

Так как

$\dot{I}_{A_0} = \dot{I}_{B_0} = \dot{I}_{C_0} = \dfrac{\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C}{3}$, то $\dot{I}_n = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 3\dot{I}_{A_0}$.

Линейные токи звезды и пропорциональные им фазные напряжения содержат составляющие нулевой последовательности при наличии нулевого провода или связи с “землей”, причем в нулевом проводе протекают только составляющие токов нулевой последовательности.

Рассмотрим применение метода симметричных составляющих для расчета аварийного режима динамических трехфазных цепей, которые в нормальном режиме симметричны.

Расчет при обрыве одной фазы (продольная несимметрия)

Рассмотрим, например, обрыв фазы с на примере следующей схемы с одинаковой нагрузкой фаз и симметричной системой фазных ЭДС

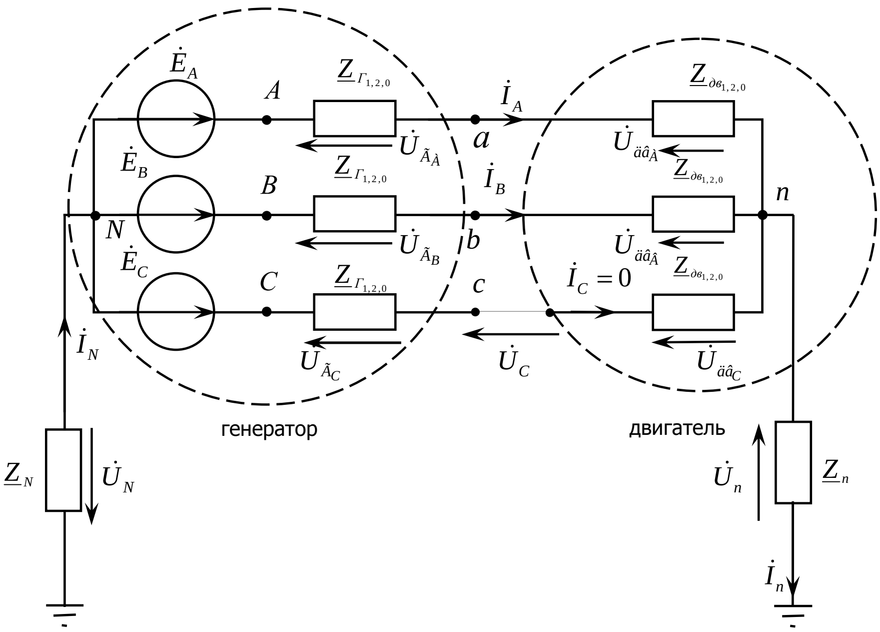


Рис. 10.10.

Дано:

$\dot{E}_C = a\dot{E}_A$; $\underline{Z}_N$; $\underline{Z}_n$;

$\underline{Z}_{\Gamma_{1,2,0}} = jX_{\Gamma_{1,2,0}}$;

$\underline{Z}_{\partial в_{1,2,0}} = R + jX_{\partial в_{1,2,0}}$.

В место повреждения введем фиктивные ЭДС $\dot{U}_A$, $\dot{U}_B$, $\dot{U}_C$

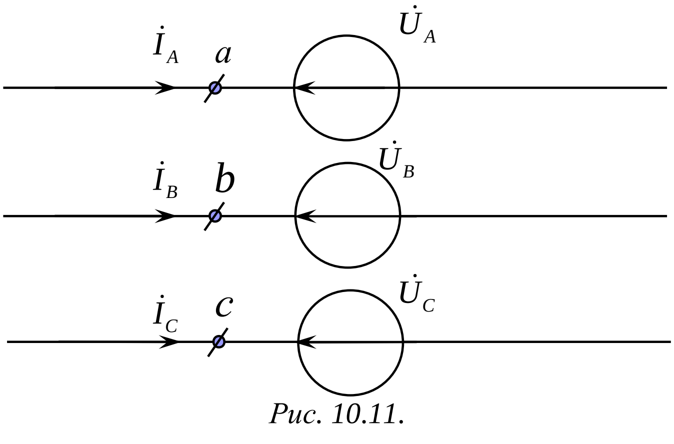


Рис. 10.11.

Условие:

$$\dot U_A = 0;\ \dot U_B = 0;\quad \dot I_C = 0\ .$$

Для особой фазы С:

$\dot U_C = \dot U_{C1} + \dot U_{C2} + \dot U_{C0}$

$$\dot U_{C_1} = a\cdot\frac{\cancelto{0}{\dot U_A} + a\cancelto{0}{\dot U_B} + a^2\dot U_C}{3} = \frac{\dot U_C}{3}$$

$$\dot U_{C_2} = a^2\cdot\frac{\cancelto{0}{\dot U_A} + a^2\cancelto{0}{\dot U_B} + a\dot U_C}{3} = \frac{\dot U_C}{3}$$

$$\dot U_{C_0} = \frac{\cancelto{0}{\dot U_A} + \cancelto{0}{\dot U_B} + \dot U_C}{3} = \frac{\dot U_C}{3}$$

Расчетные схемы для особой фазы С

а) схема прямой последовательности

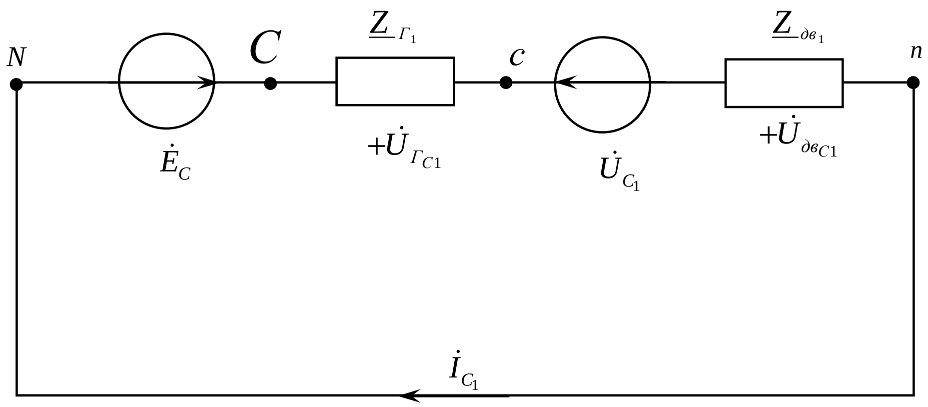


Рис. 10.12.

Где

$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_{Г_1} + \underline{Z}_{дв_1} = ...Ом$;

$\dot I_{C_1} = \dfrac{\dot E_C - \dot U_{C_1}}{\underline{Z}_1};\quad \dot U_{ГC1} = \underline{Z}_{Г_1}\dot I_{C_1};$

$\dot U_{двC1} = \underline{Z}_{дв_1}\dot I_{C_1}$.

б) схема обратной последовательности

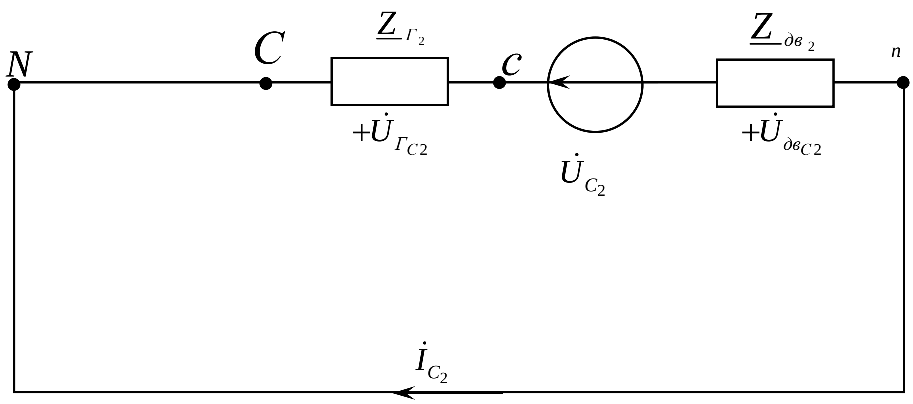


Рис.10.13.

Где

$\underline{Z}_2 = \underline{Z}_{\Gamma_2} + \underline{Z}_{\partial в_2} = ...Ом$;

$\dot{I}_{C_2} = -\dfrac{\dot{U}_{C_2}}{\underline{Z}_2}$; $\dot{U}_{\Gamma C2} = \underline{Z}_{\Gamma_2}\dot{I}_{C_2}$;

$\dot{U}_{\partial в_{C2}} = \underline{Z}_{\partial в_2}\dot{I}_{C_2}$.

в) схема нулевой последовательности

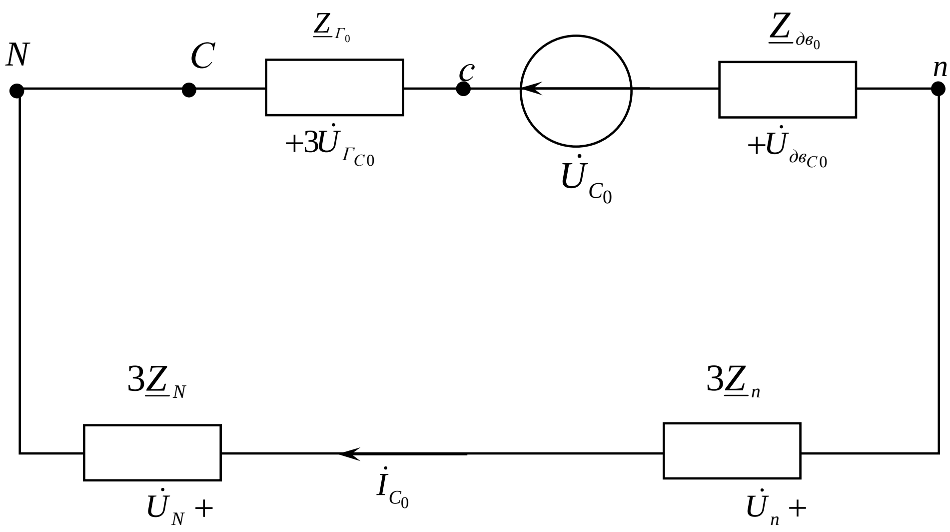


Рис. 10.14.

Где

$\underline{Z}_0 = \underline{Z}_{\Gamma_0} + \underline{Z}_{\partial в_0} + 3(\underline{Z}_N + \underline{Z}_n) = ...Ом$;

$$\dot{I}_{C_0} = -\frac{\dot{U}_{C_0}}{\underline{Z}_0}; \quad \dot{U}_{\Gamma_{C0}} = \underline{Z}_{\Gamma_0}\dot{I}_{C_0};$$

$$\dot{U}_{\partial в_{C0}} = \underline{Z}_{\partial в_0}\dot{I}_{C_0}; \; \dot{U}_N = 3\underline{Z}_N\dot{I}_{C_0};$$

$$\dot{U}_n = 3\underline{Z}_n\dot{I}_{C_0}.$$

Так как

$$\dot{I}_C = \dot{I}_{C_1} + \dot{I}_{C_2} + \dot{I}_{C_0} = \frac{\dot{E}_C - \dot{U}_{C1}}{\underline{Z}_1} - \frac{\dot{U}_{C_2}}{\underline{Z}_2} - \frac{\dot{U}_{C_0}}{\underline{Z}_0} = 0.$$

То при

$$\dot{U}_{C_1} = \dot{U}_{C_2} = \dot{U}_{C_0} = \frac{\dot{U}_C}{3}$$

определяем $\dot{U}_C$.

Напряжение в месте повреждения

$$\dot{U}_C = \frac{3\dot{E}_C\underline{Z}_2\underline{Z}_0}{\underline{Z}_1\underline{Z}_2 + \underline{Z}_1\underline{Z}_0 + \underline{Z}_2\underline{Z}_0} = U_C \cdot e^{j\alpha_C} = \ldots B.$$

Далее рассчитываем

$\dot{I}_{\Gamma_{C1,2,0}}, \; \dot{U}_{\Gamma_{C1,2,0}}, \; \dot{U}_{\partial в_{C1,2,0}}$.

Затем находим

$$\dot{I}_A = a^2\dot{I}_{C_1} + a\dot{I}_{C_2} + \dot{I}_{C_0};$$

$$\dot{I}_B = a\dot{I}_{C_1} + a^2\dot{I}_{C_2} + \dot{I}_{C_0};$$

$$\dot{I}_C = \dot{I}_{C_1} + \dot{I}_{C_2} + \dot{I}_{C_0} = 0.$$

Находим

$$\dot{U}_{\Gamma A} = a^2\dot{U}_{\Gamma C_1} + a\dot{U}_{\Gamma C_2} + \dot{U}_{\Gamma C_0};$$

$$\dot{U}_{\Gamma B} = a\dot{U}_{\Gamma C_1} + a^2\dot{U}_{\Gamma C_2} + \dot{U}_{\Gamma C_0};$$

$$\dot{U}_{\Gamma C} = \dot{U}_{\Gamma C_1} + \dot{U}_{\Gamma C_2} + \dot{U}_{\Gamma C_0}.$$

Находим

$$\dot{U}_{\partial в A} = a^2\dot{U}_{\partial в C_1} + a\dot{U}_{\partial в C_2} + \dot{U}_{\partial в C0};$$

$$\dot{U}_{\partial в B} = a\dot{U}_{\partial в C_1} + a^2\dot{U}_{\partial в C_2} + \dot{U}_{\partial в C0};$$

$$\dot{U}_{\partial в C} = \dot{U}_{\partial в C_1} + \dot{U}_{\partial в C_2} + \dot{U}_{\partial в C0}.$$

Проверка

$$\dot{I}_n = \dot{I}_N = 3 \cdot \dot{I}_{C_0};$$

$$\dot{I}_n = \dot{I}_N = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C;$$

$\dot{U}_n = \underline{Z}_n \dot{I}_n$; $\dot{U}_N = \underline{Z}_N \dot{I}_N$.

Причем $\dot{U}_{Г_C} \neq 0$ и $\dot{U}_{дв_C} \neq 0$ за счет индуктивной связи.

Векторная диаграмма

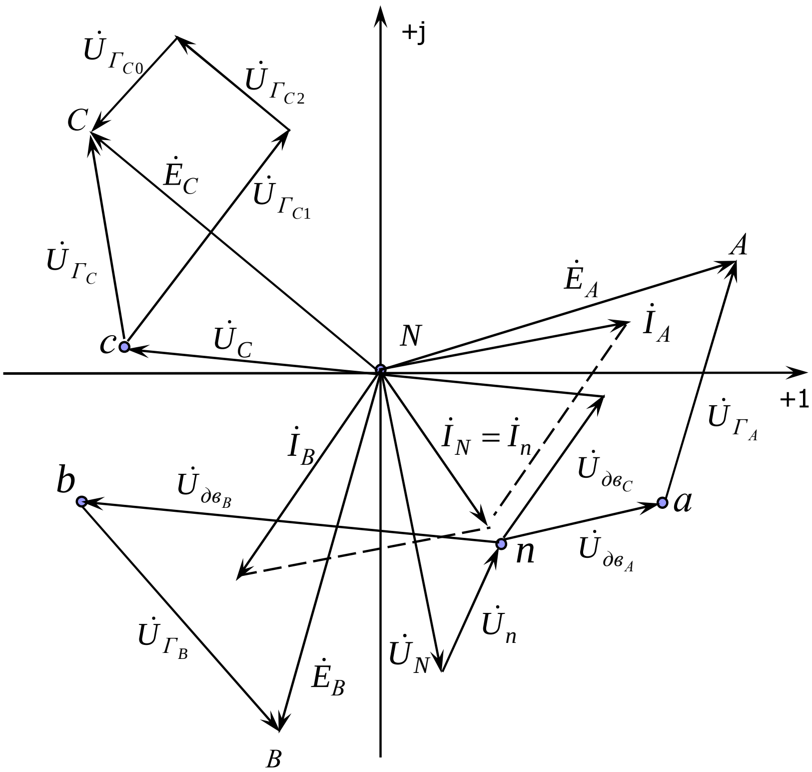


Рис. 10.15.

Баланс мощностей

а) вырабатываемая генератором полная мощность

$\dot{S}_В = \dot{E}_A \overset{*}{I}_A + \dot{E}_B \overset{*}{I}_B + \dot{E}_C \overset{*}{I}_C = P_В + jQ_В$, $ВА$;

б) потери полной мощности в обмотках генератора

$\dot{S}_Г = \dot{U}_{ГA} \overset{*}{I}_A + \dot{U}_{ГB} \overset{*}{I}_B + \dot{U}_{ГC} \overset{*}{I}_C = P_Г + jQ_Г$, $ВА$;

в) полная потребляемая мощность двигателя

$\dot{S}_{дв} = \dot{U}_{двA} \overset{*}{I}_A + \dot{U}_{двB} \overset{*}{I}_B + \dot{U}_{двC} \overset{*}{I}_C = P_{дв} + jQ_{дв}$, $ВА$;

г) полная потребляемая мощность в нулевом проводе

$\dot{S}_0 = \dot{U}_N \overset{*}{I}_N + \dot{U}_n \overset{*}{I}_n = P_0 + jQ_0$, $ВА$.

В результате

$P_П = P_Г + P_{дв} + P_0$, $Вт$; $Q_П = Q_Г + Q_{дв} + Q_0$, $вар$.

Погрешности

$$\delta_p\% = \frac{|P_B - P_\Pi|}{P_B}\cdot 100 \le 3\%,\ \delta_Q\% = \frac{|Q_B - Q_\Pi|}{|Q_B|}\cdot 100 \le 3\%.$$

Расчет при коротком замыкании одной фазы (поперечная несимметрия)

Рассмотрим, например, короткое замыкание фазы в на “землю” на примере следующей схемы с одинаковой нагрузкой фаз и симметричной системой фазных ЭДС

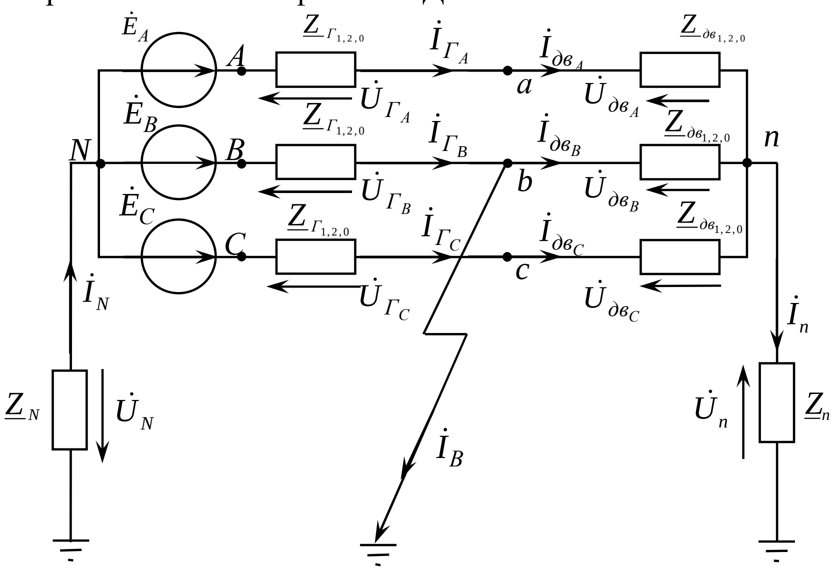


Рис. 10.16.

В место повреждения вводим фиктивные ЭДС $\dot U_A, \dot U_B, \dot U_C$.

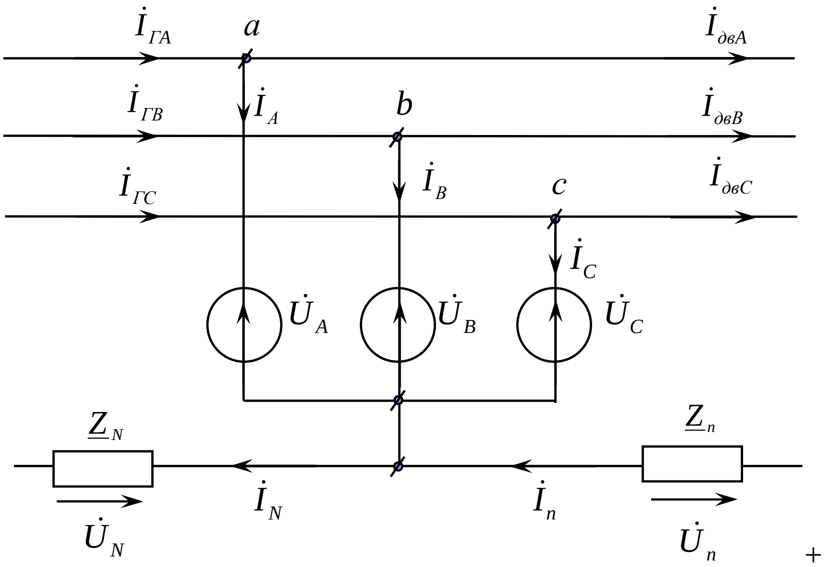


Рис. 10.17.

Условие: $\dot I_A = 0;\ \dot I_C = 0;\ \dot U_B = 0$

Для особой фазы B:

$\dot I_B = \dot I_{B1} + \dot I_{B2} + \dot I_{B0};$

$$\dot I_{B_1} = a^2 \cdot \frac{\cancelto{0}{\dot I_A} + a\dot I_B + a^2 \cancelto{0}{\dot I_C}}{3} = \frac{\dot I_B}{3};$$

$$\dot I_{B_2} = a \cdot \frac{\cancelto{0}{\dot I_A} + a^2 \dot I_B + a\cancelto{0}{\dot I_C}}{3} = \frac{\dot I_B}{3};$$

$$\dot I_{B_0} = \frac{\cancelto{0}{\dot I_A} + \dot I_B + \cancelto{0}{\dot I_C}}{3} = \frac{\dot I_B}{3}.$$

Расчетные схемы для особой фазы B

а) схема прямой последовательности

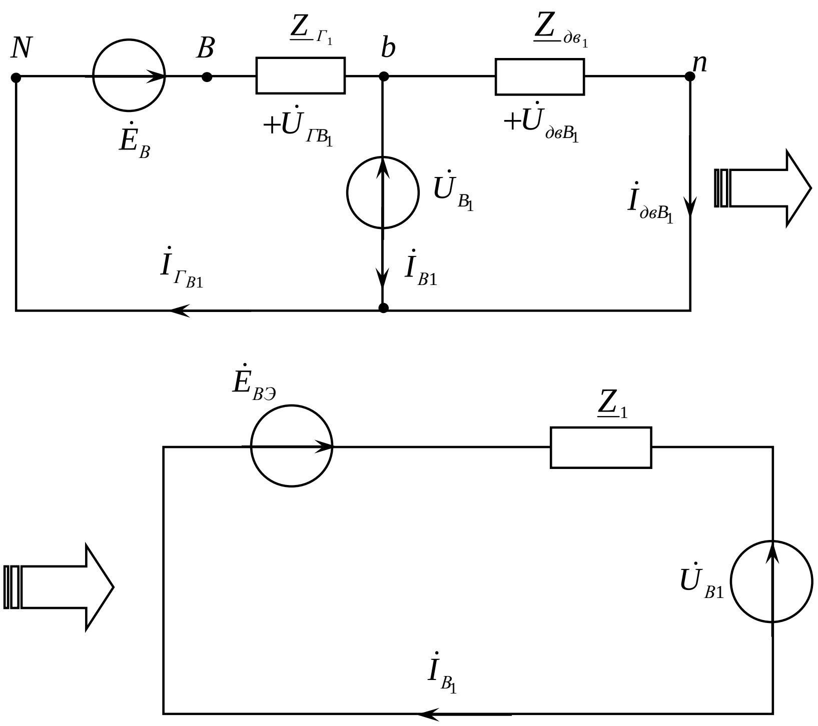


Рис. 10.18.

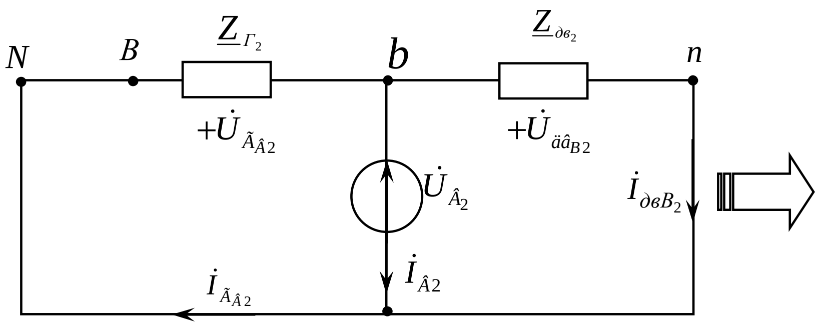
Где

$$\underline{Z}_1 = \frac{\underline{Z}_{Г_1} \cdot \underline{Z}_{дв_1}}{\underline{Z}_{Г_1} + \underline{Z}_{дв_1}} = \ldots Ом;\ \dot E_{B_Э} = \frac{\dot E_B}{\underline{Z}_{Г_1}} \underline{Z}_1 = \ldots B;$$

$$\dot U_{B_1} = \dot E_{B_Э} - \dot I_{B_1} \underline{Z}_1;\ \dot I_{дв_{B_1}} = \frac{\dot U_{двB_1}}{\underline{Z}_{дв1}};\ \dot U_{двB_1} = \dot U_{B_1};$$

$$\dot I_{Г_{B_1}} = \dot I_{B_1} + \dot I_{дв_{B_1}};\ \dot U_{ГB_1} = \underline{Z}_{Г_1} \dot I_{ГB_1}.$$

б) схема обратной последовательности



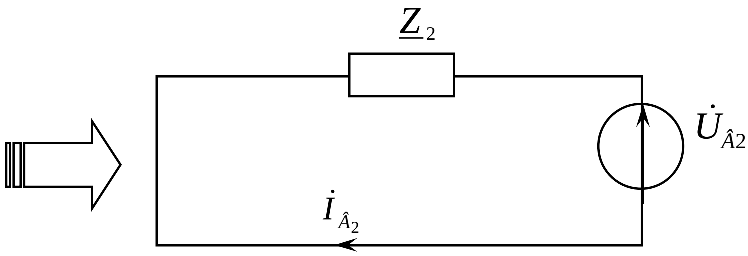


Рис. 10.19.

Где

$$\underline{Z}_2 = \frac{\underline{Z}_{Г_2} \cdot \underline{Z}_{дв_2}}{\underline{Z}_{Г_2} + \underline{Z}_{дв_2}} = \ldots Ом;\ \dot{U}_{B_2} = -\dot{I}_{B_2}\underline{Z}_2;\ \dot{U}_{двB_2} = \dot{U}_{B_2};$$

$$\dot{I}_{дв_{B_2}} = \frac{\dot{U}_{двB_2}}{\underline{Z}_{дв2}};\ \dot{I}_{Г_{B_2}} = \dot{I}_{B_2} + \dot{I}_{дв_{B_2}};\ \dot{U}_{ГB_2} = \underline{Z}_{Г_2}\dot{I}_{ГB_2}.$$

в) схема нулевой последовательности

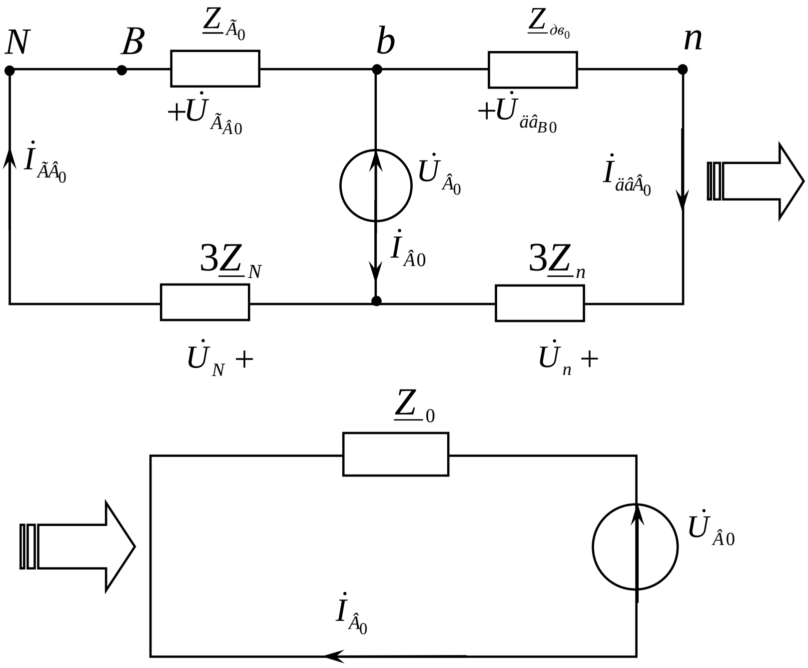


Рис. 10.20.

Где $\underline{Z}_0 = \dfrac{(\underline{Z}_{Г_0} + 3\underline{Z}_N)(\underline{Z}_{дв_0} + 3\underline{Z}_n)}{(\underline{Z}_{Г_0} + 3\underline{Z}_N) + (\underline{Z}_{дв_0} + 3\underline{Z}_n)} = \ldots Ом;$

$\dot{U}_{B_0} = -\underline{Z}_0\dot{I}_{B_0};\ \dot{U}_{двB_0} = \underline{Z}_{дв0}\dot{I}_{двB_0};$

$$\dot{I}_{\partial в_{B_0}} = \frac{\dot{U}_{B_0}}{\underline{Z}_{\partial в 0} + 3\underline{Z}_n}; \; \dot{I}_{Г_{B_0}} = \dot{I}_{B_0} + \dot{I}_{\partial в_{B_0}};$$

$$\dot{U}_{Г_{B0}} = \underline{Z}_{Г_0} \dot{I}_{Г_{B0}}; \; \dot{U}_n = 3\underline{Z}_n \dot{I}_{\partial в B_0}; \; \dot{U}_N = 3\underline{Z}_N \dot{I}_{Г B_0}.$$

Так как

$\dot{U}_B = \dot{U}_{B_1} + \dot{U}_{B_2} + \dot{U}_{B_0} = (\dot{E}_{B_Э} - \underline{Z}_1 \dot{I}_{B1}) + (-\underline{Z}_2 \dot{I}_{B2}) + (-\underline{Z}_0 \dot{I}_{B0}) = 0$ то при

$\dot{I}_{B1} = \dot{I}_{B2} = \dot{I}_{B0} = \dfrac{\dot{I}_B}{3}$ определяем $\dot{I}_B$.

Ток короткого замыкания в месте повреждения

$$\dot{I}_B = \frac{3\dot{E}_{B_Э}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_0} = I_B e^{j\beta_B} = \ldots A.$$

Далее рассчитываем

$\dot{I}_{\partial в_{B_{1,2,0}}}$, $\dot{I}_{Г_{B_{1,2,0}}}$, $\dot{U}_{\partial в_{B_{1,2,0}}}$, $\dot{U}_{Г_{B_{1,2,0}}}$.

Затем находим

$$\dot{I}_{Г_A} = a\dot{I}_{Г_{B1}} + a^2 \dot{I}_{Г_{B2}} + \dot{I}_{Г_{B0}};$$

$$\dot{I}_{Г_B} = \dot{I}_{Г_{B1}} + \dot{I}_{Г_{B2}} + \dot{I}_{Г_{B0}};$$

$$\dot{I}_{Г_C} = a^2 \dot{I}_{Г_{B1}} + a\dot{I}_{Г_{B2}} + \dot{I}_{Г_{B0}}.$$

Находим

$$\dot{I}_{\partial в_A} = a\dot{I}_{\partial в_{B1}} + a^2 \dot{I}_{\partial в_{B2}} + \dot{I}_{\partial в_{B0}};$$

$$\dot{I}_{\partial в_B} = \dot{I}_{\partial в_{B1}} + \dot{I}_{\partial в_{B2}} + \dot{I}_{\partial в_{B0}};$$

$$\dot{I}_{\partial в_C} = a^2 \dot{I}_{\partial в_{B1}} + a\dot{I}_{\partial в_{B2}} + \dot{I}_{\partial в_{B0}}.$$

Далее

$$\dot{U}_{Г_A} = a\dot{U}_{Г_{B1}} + a^2 \dot{U}_{Г_{B2}} + \dot{U}_{Г_{B0}};$$

$$\dot{U}_{Г_B} = \dot{U}_{Г_{B1}} + \dot{U}_{Г_{B2}} + \dot{U}_{Г_{B0}};$$

$$\dot{U}_{Г_C} = a^2 \dot{U}_{Г_{B1}} + a\dot{U}_{Г_{B2}} + \dot{U}_{Г_{B0}};$$

$$\dot{U}_{\partial в_A} = a\dot{U}_{\partial в_{B1}} + a^2 \dot{U}_{\partial в_{B2}} + \dot{U}_{\partial в_{B0}};$$

$$\dot{U}_{\partial в_B} = \dot{U}_{\partial в_{B1}} + \dot{U}_{\partial в_{B2}} + \dot{U}_{\partial в_{B0}};$$

$$\dot{U}_{\partial в_C} = a^2 \dot{U}_{\partial в_{B1}} + a\dot{U}_{\partial в_{B2}} + \dot{U}_{\partial в_{B0}}.$$

Для нулевой последовательности

$$\dot{I}_n = 3\dot{I}_{\partial в_{B0}}; \; \dot{I}_N = 3\dot{I}_{Г_{B0}};$$

$$\dot{U}_n = \underline{Z}_n \dot{I}_n, \; \dot{U}_N = \underline{Z}_N \dot{I}_N.$$

Баланс мощностей

$$\dot S_B = \dot E_A \overset{*}{\dot I}_{\Gamma_A} + \dot E_B \overset{*}{\dot I}_{\Gamma_B} + \dot E_C \overset{*}{\dot I}_{\Gamma_C} = P_B + jQ_B,\ BA;$$

$$\dot S_\Gamma = \dot U_{\Gamma A} \overset{*}{\dot I}_{\Gamma_A} + \dot U_{\Gamma B} \overset{*}{\dot I}_{\Gamma_B} + \dot U_{\Gamma C} \overset{*}{\dot I}_{\Gamma_C} = P_\Gamma + jQ_\Gamma,\ BA;$$

$$\dot S_{\partial в} = \dot U_{\partial вA} \overset{*}{\dot I}_{\partial в_A} + \dot U_{\partial вB} \overset{*}{\dot I}_{\partial в_B} + \dot U_{\partial вC} \overset{*}{\dot I}_{\partial в_C} = P_{\partial в} + jQ_{\partial в},\ BA;$$

$$\dot S_0 = \dot U_n \overset{*}{\dot I}_n + \dot U_N \overset{*}{\dot I}_N = P_0 + jQ_0,\ BA$$

$$P_\Pi = P_\Gamma + P_{\partial в} + P_0, \quad Bm;$$

$$Q_\Pi = Q_\Gamma + Q_{\partial в} + Q_0, \quad вар.$$

Погрешности

$$\delta_p\% = \frac{|P_B - P_\Pi|}{P_B}\cdot 100 \le 3\%, \quad \delta_Q\% = \frac{|Q_B - Q_\Pi|}{|Q_B|}\cdot 100 \le 3\%.$$

Векторная диаграмма

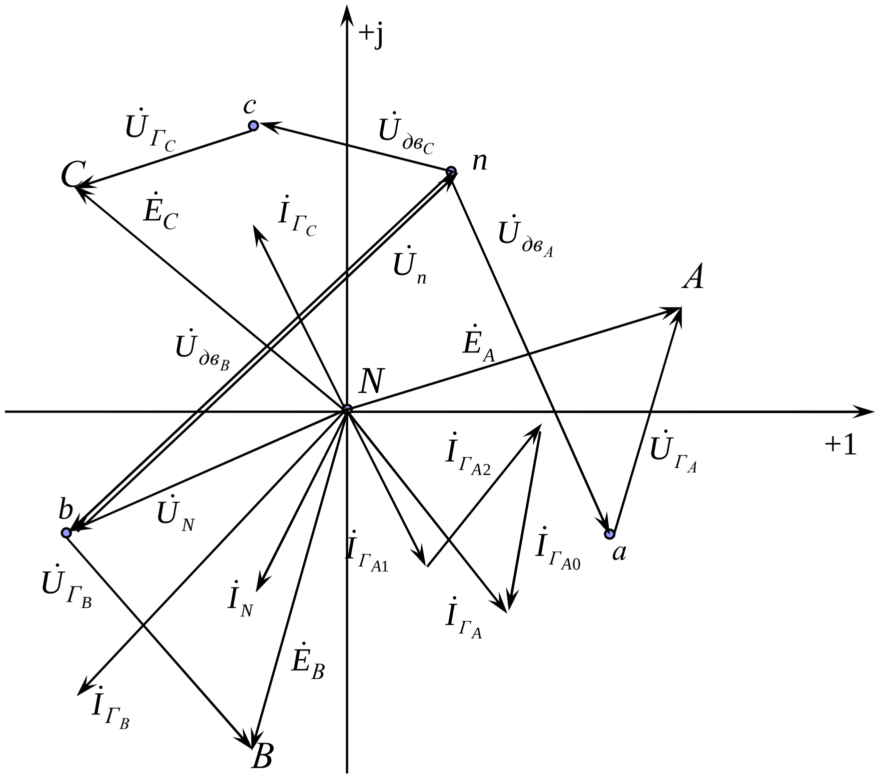


Рис. 10.21.

Расчет при коротком замыкании двух фаз (поперечная несимметрия)

Рассмотрим, например, короткое замыкание фаз b и c на нейтраль двигателя n на примере следующей схемы с одинаковой нагрузкой фаз и симметричной системой фазных ЭДС.

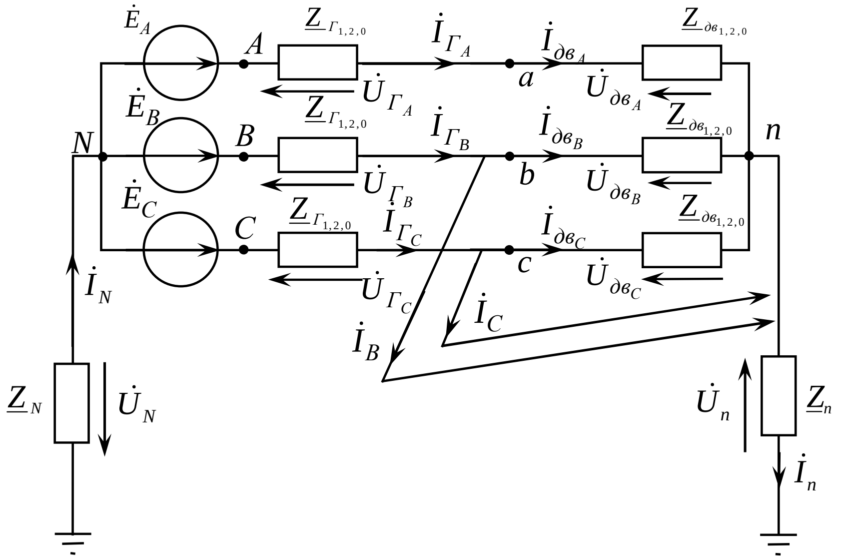


Рис. 10.22.

В место повреждения вводим фиктивные ЭДС $\dot{U}_A, \dot{U}_B, \dot{U}_C$.

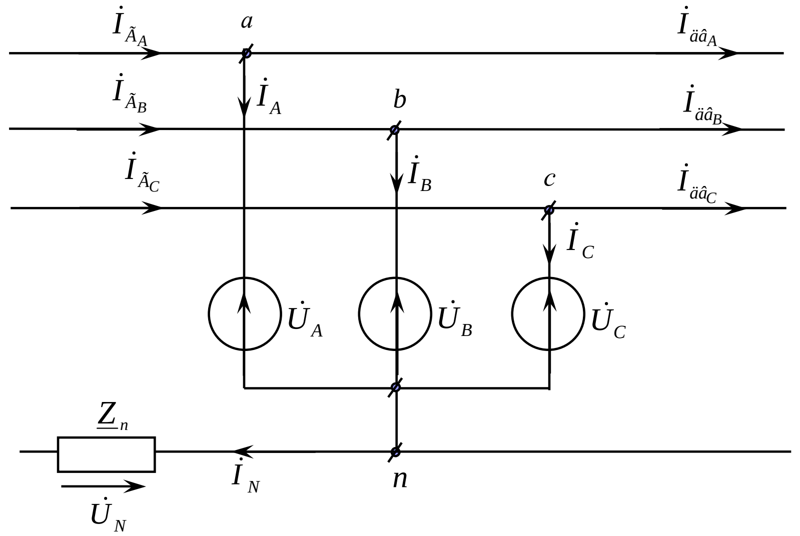


Рис. 10.23.

Условие: $\dot{I}_A = 0; \dot{U}_B = 0; \dot{U}_C = 0$

Для особой фазы А:

$$\dot{U}_A = \dot{U}_{A_1} + \dot{U}_{A_2} + \dot{U}_{A_0}$$

$$\dot{U}_{A_1} = \frac{\dot{U}_A + a\cancel{\dot{U}_B} + a^2\cancel{\dot{U}_C}}{3} = \frac{\dot{U}_A}{3};$$

$$\dot{U}_{A_2} = \frac{\dot{U}_A + a^2\cancel{\dot{U}_B} + a\cancel{\dot{U}_C}}{3} = \frac{\dot{U}_A}{3};$$

$$\dot{U}_{A_0} = \frac{\dot{U}_A + \cancel{\dot{U}_B} + \cancel{\dot{U}_C}}{3} = \frac{\dot{U}_A}{3}.$$

Расчетные схемы для особой фазы А

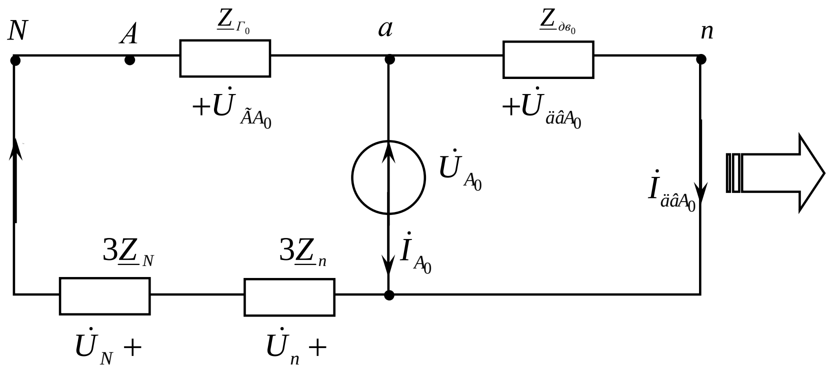
а) схема прямой последовательности аналогична однофазному к.з. при

$$\dot{I}_{A_1} = \frac{\dot{E}_{A_Э} - \dot{U}_{A_1}}{\underline{Z}_1};$$

б) схема обратной последовательности аналогична однофазному к.з. при

$$\dot{I}_{A_2} = -\frac{\dot{U}_{A_2}}{\underline{Z}_2};$$

в) схема нулевой последовательности



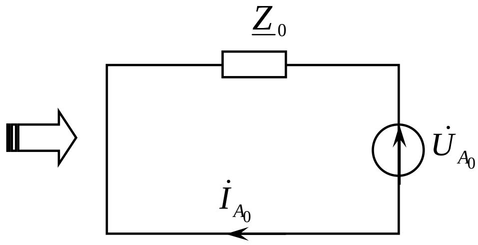


Рис. 10.24.

Где

$$\underline{Z}_0 = \frac{\underline{Z}_{дв_0}\left(\underline{Z}_{Г_0} + 3\underline{Z}_N + 3\underline{Z}_n\right)}{\underline{Z}_{дв_0} + \underline{Z}_{Г_0} + 3\underline{Z}_N + 3\underline{Z}_n} = \ldots \ Ом;$$

$$\dot{U}_{двA_1} = \dot{U}_{A_0};\ \dot{I}_{A_0} = -\frac{\dot{U}_{A_0}}{\underline{Z}_0};\ \dot{I}_{двA_0} = \frac{\dot{U}_{двA_0}}{\underline{Z}_{дв_0}};\ \dot{I}_{ГA_0} = \dot{I}_{A_0} + \dot{I}_{двA_0};$$

$$\dot{U}_{ГA_0} = \underline{Z}_{Г_0}\dot{I}_{ГA_0};\ \dot{U}_n = 3\underline{Z}_n\dot{I}_{ГA_0};\ \dot{U}_N = 3\underline{Z}_N\dot{I}_{ГA_0};\ \dot{I}_n = \dot{I}_N = 3\dot{I}_{ГA_0}.$$

Так как

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{A_1} + \dot{I}_{A_2} + \dot{I}_{A_0} = \frac{\dot{E}_{Aý} - \dot{U}_{A_1}}{\underline{Z}_1} + \left(-\frac{\dot{U}_{A_2}}{\underline{Z}_2}\right) + \left(-\frac{\dot{U}_{A_0}}{\underline{Z}_0}\right) = 0,$$

то при

$$\dot{U}_{A_1} = \dot{U}_{A_2} = \dot{U}_{A_0} = \frac{\dot{U}_A}{3}$$

определяем $\dot{U}_A$.

Фазное напряжение в месте повреждения

$$\dot{U}_A = \frac{3\dot{E}_{AЭ}\underline{Z}_2\underline{Z}_0}{\underline{Z}_1\underline{Z}_2 + \underline{Z}_1\underline{Z}_0 + \underline{Z}_2\underline{Z}_0} = U_A e^{j\alpha_A} = \ldots\ B.$$

Далее расчет ведем аналогично однофазному короткому замыканию

Векторная диаграмма

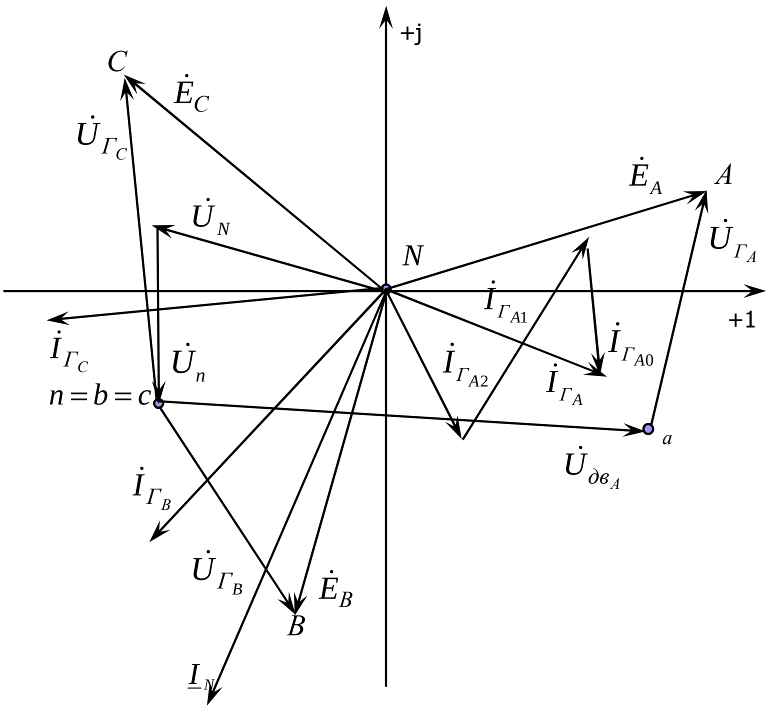


Рис. 10.25.

Расчет при коротком замыкании между фазами (поперечная несимметрия)

Рассмотрим, например, короткое замыкание между фазами b и c на примере следующей схемы с одинаковой нагрузкой фаз и симметричной системой фазных ЭДС

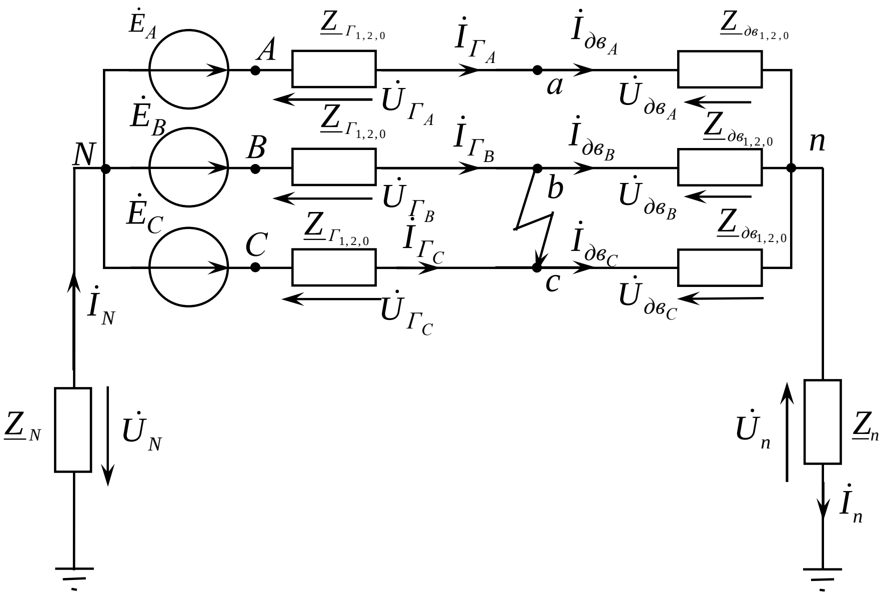


Рис. 10.26.

В место повреждения вводим фиктивные ЭДС $\dot U_A, \dot U_B, \dot U_C$.

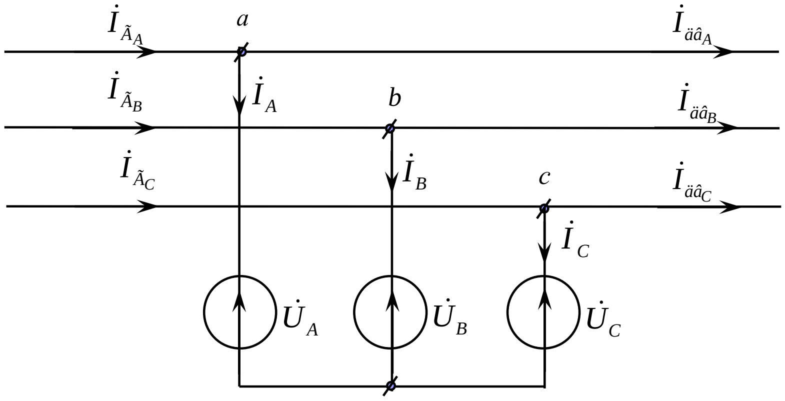


Рис.10.27.

Условие: $\dot I_A = 0; \dot I_B + \dot I_C = 0; \dot U_B - \dot U_C = 0$.

Для особой фазы А:

$\dot I_A = \dot I_{A_1} + \dot I_{A_2} + \dot I_{A_0} = 0$.

Но $\dot I_{A_0} = 0$ т.к. нет связи с «землей».

В результате $\dot I_{A_1} = -\dot I_{A_2}$ причем

$\dot U_A = \dot U_{A_1} + \dot U_{A_2} + \dot U_{A_0}$;

$\dot{U}_B = a^2\dot{U}_{A_1} + a\dot{U}_{A_2} + \dot{U}_{A_0}$;

$\dot{U}_C = a\dot{U}_{A_1} + a^2\dot{U}_{A_2} + \dot{U}_{A_0}$.

Тогда

$\dot{U}_B - \dot{U}_C = \left(a^2 - a\right)\dot{U}_{A_1} + \left(a - a^2\right)\dot{U}_{A_2} = 0$ или $\dot{U}_{A_1} = \dot{U}_{A_2}$.

Расчетные схемы для особой фазы А

а) схема прямой последовательности аналогична однофазному к.з. при

$$\dot{I}_{A_1} = \frac{\dot{E}_{A_Э} - \dot{U}_{A_1}}{\underline{Z}_1}$$

б) схема обратной последовательности аналогична однофазному к.з. при

$$\dot{I}_{A_2} = -\frac{\dot{U}_{A_2}}{\underline{Z}_2}$$

Так как

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{A_1} + \dot{I}_{A_2} = \frac{\dot{E}_{A_Э} - \dot{U}_{A_1}}{\underline{Z}_1} + \left(-\frac{\dot{U}_{A_2}}{\underline{Z}_2}\right) = 0,$$

то при $\dot{U}_{A_1} = \dot{U}_{A_2}$ определяем $\dot{U}_{A_1} = \dot{U}_{A_2} = \dfrac{\underline{Z}_2\dot{E}_{A_Э}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \ldots$ *В*

Далее без нулевой последовательности расчет ведем аналогично однофазному короткому замыканию.

Векторная диаграмма

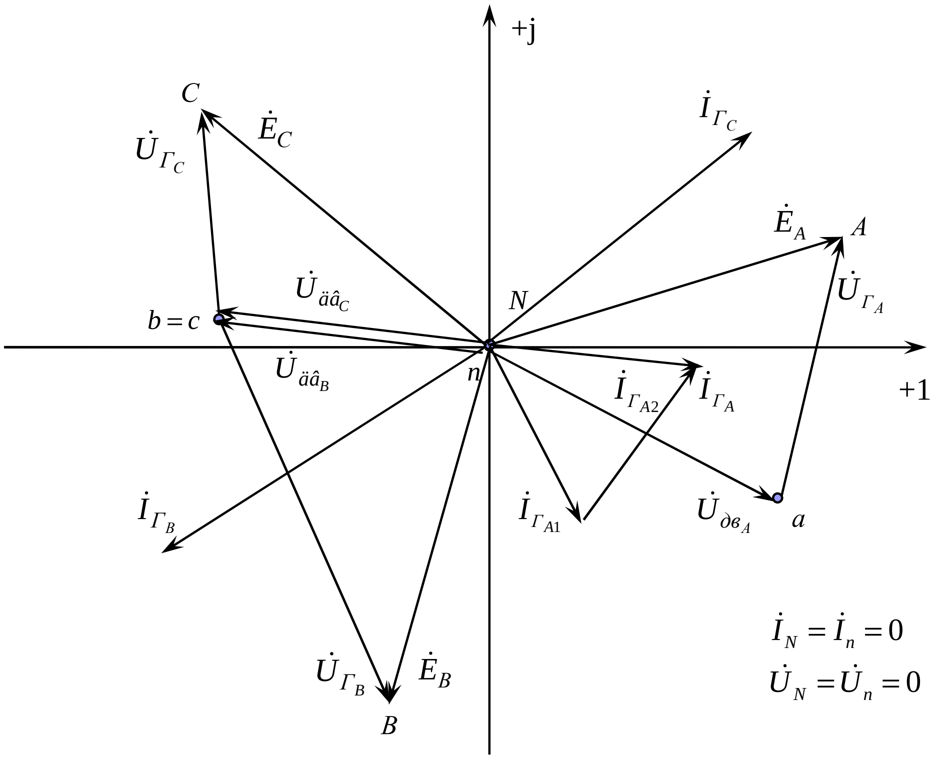


Рис. 10.28.

ЗАДАНИЕ №4

Динамическая трехфазная цепь с местной несимметрией

Для динамической трехфазной цепи с симметричной системой ЭДС $\dot{E}_A$, $\dot{E}_B$, $\dot{E}_C$ генератора и двигателем при заданной местной несимметрии для комплексов действующих значений напряжений и токов выполнить следующее.

Для особой фазы рассчитать симметричные составляющие напряжений и токов.

Определить напряжения и токи трехфазной цепи.

Рассчитать балансы активной и реактивной мощностей.

Построить совмещенные векторные диаграммы для всех напряжений трехфазной цепи и токов генератора (один из векторов напряжения или тока представить в виде суммы векторов прямой, обратной и нулевой последовательностей).

Проанализировать полученные результаты и сформулировать выводы по работе.

Таблица 11.1

№	$\dot{E}_A \perp$	$\underline{Z}_N \perp$	$\underline{Z}_n$
-	В	Ом	Ом
1	$380e^{j45^\circ}$	∞	$-j10$
2	$127e^{-j45^\circ}$	10	$-j10$
3	$220e^{j0^\circ}$	$-j20$	10
4	$380e^{-j90^\circ}$	$-j20$	∞
5	$220e^{-j60^\circ}$	$-j20$	$-j10$
6	$127e^{-j30^\circ}$	∞	$-j20$
7	$220e^{j90^\circ}$	20	$-j20$
8	$127e^{j60^\circ}$	$-j20$	20
9	$380e^{j30^\circ}$	$-j25$	∞
0	$220e^{j45^\circ}$	$-j20$	$-j20$

Таблица 11.2

№	$X_{Г_1} \perp$	$X_{Г_2} \perp$	$X_{Г_0} \perp$	$R \perp$	$X_{дв_1} \perp$	$X_{дв_2}$	$X_{дв_0}$
-	Ом	Ом	Ом	Ом	Ом	Ом	Ом
1	10	5	3	20	20	10	6
2	20	10	5	40	40	20	10
3	30	15	10	60	60	30	20
4	40	20	15	80	80	40	30
5	50	25	20	100	100	50	40
6	60	30	25	120	120	60	50
7	70	35	30	140	140	70	60
8	80	40	35	160	160	80	70
9	90	45	40	180	180	90	80
0	100	50	45	200	200	100	90

Таблица 11.3

№	Вид несимметрии
1	Обрыв фазы **a**
2	К.з. фазы **a** на «землю»
3	К.з. фаз **a** и **b** на «землю»
4	К.з. между фазами **a** и **c**
5	Обрыв фазы **b**
6	К.з. фазы **b** на **N**
7	К.з. фаз **b** и **c** на **N**
8	К.з. фазы **c** на **n**
9	К.з. фаз **a** и **c** на **n**
0	К.з. между фазами **a** и **b**

Примечание:

1-ая цифра номера задания – номер строки в таблице 1;

2-ая цифра номера задания – номер строки в таблице 2;

3-ья цифра номера задания – номер строки в таблице 3.

Схема задания 3

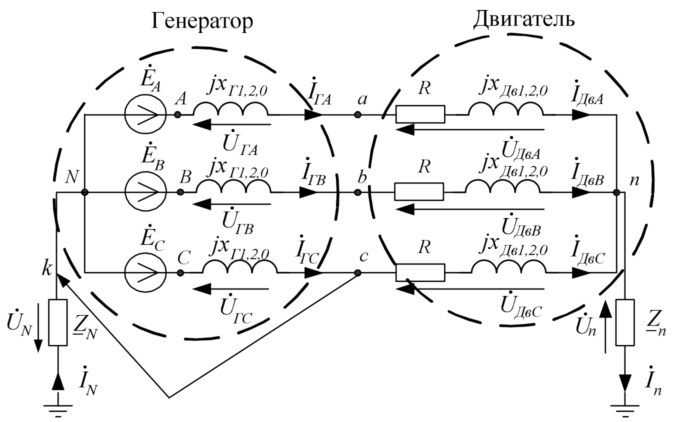


Рис. 11.1.

Методические указания к заданию № 4.

Для заданной схемы (рис. 11.1) дано:

$\dot{E}_A = 220\,e^{-j90^\circ}$ В;

$\dot{E}_B = a^2 E_A; \dot{E}_C = a\,E_A;$

$X_{Г1} = X_{Дв1} = 20$ Ом;

$X_{Г2} = X_{Дв2} = 10$ Ом;

$X_{Г0} = X_{Дв0} = 5$ Ом;

$R = 20$ Ом;

$Z_n = -j5$ Ом; $Z_N = \infty$.

Короткое замыкание фазы *C* на нейтраль *N* генератора.

Для особой фазы *C* рассчитываем симметричные составляющие напряжений и токов.

В место повреждения вводим фиктивные ЭДС $\dot{U}_A$, $\dot{U}_B$, $\dot{U}_C$ и записываем условие: $\dot{I}_A = 0; \dot{I}_B = 0; \dot{U}_C = 0$.

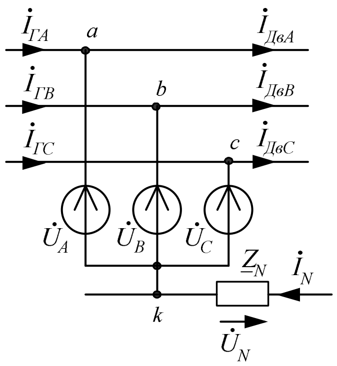


Рис. 11.2.

В результате:

$$\dot{I}_C = \dot{I}_{C1} + \dot{I}_{C2} + \dot{I}_{C0};$$

$$\dot{I}_{C1} = a\frac{\dot{I}_A + a\dot{I}_B + a^2\dot{I}_C}{3} = \frac{a^3}{3}\dot{I}_C = \frac{\dot{I}_C}{3};$$

$$\dot{I}_{C2} = a^2\frac{\dot{I}_A + a\dot{I}_B + a^2\dot{I}_C}{3} = \frac{a^3}{3}\dot{I}_C = \frac{\dot{I}_C}{3};$$

$$\dot{I}_{C0} = \frac{\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C}{3} = \frac{\dot{I}_C}{3},$$

где $a = e^{j120^\circ}; a^2 = e^{-j120^\circ}; a^3 = e^{j360^\circ} = 1.$

Расчётная схема прямой последовательности для особой фазы С:

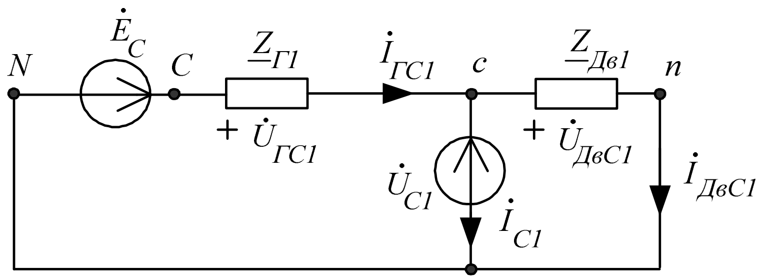


Рис. 11.3.

где $\underline{Z}_{Г1} = jX_{Г1} = j20$ Ом; $\underline{Z}_{Дв1} = R + jX_{Дв1} = 20 + j20$ Ом.

Складываем параллельные ветви с $\underline{Z}_{Г1}$ и $\underline{Z}_{Дв1}$, получаем эквивалентную схему:

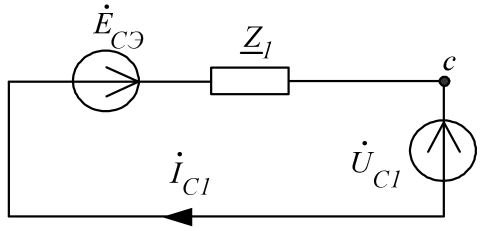


Рис. 11.4.

где $\underline{Z}_1 = \dfrac{\underline{Z}_{Г1} \cdot \underline{Z}_{Дв1}}{\underline{Z}_{Г1} + \underline{Z}_{Дв1}} = \dfrac{j20 \cdot (20 + j20)}{j20 + 20 + j20} = 4 + j12 = 12e^{j71.56^\circ}$ Ом

– эквивалентное сопротивление прямой последовательности;

$$\dot{E}_{CЭ} = \dot{E}_C \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_{Г1}} = 220e^{j30} \frac{12e^{j71.56^\circ}}{j20} = 136 + j27.885 = 139.15e^{j11.56^\circ} \text{ В}$$

– эквивалентная ЭДС фазы С.

В результате на основании законов Ома и Кирхгофа можно записать расчётные формулы:

$\dot{U}_{C1} = \dot{E}_{CЭ} - \underline{Z}_1 \dot{I}_{C1}$; $\dot{U}_{ДвC1} = \dot{U}_{C1}$; $\dot{I}_{ДвC1} = \dot{U}_{ДвC1} / \underline{Z}_{Дв1}$;

$\dot{I}_{ГC1} = \dot{I}_{C1} + \dot{I}_{ДвC1}$; $\dot{U}_{ГC1} = \underline{Z}_{Г1} \dot{I}_{ГC1}$.

Расчёт по этим формулам будет возможен после определения составляющей тока короткого замыкания прямой последовательности фазы С, т.е. $\dot{I}_{C1}$.

Расчётная схема обратной последовательности для особой фазы С:

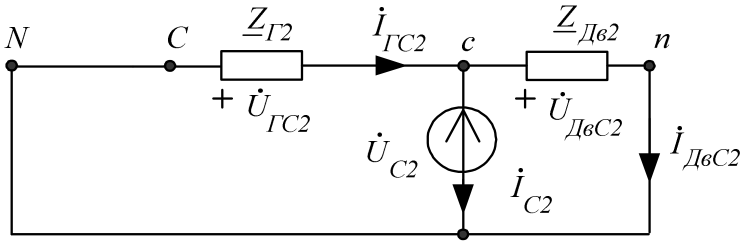


Рис. 11.5.

где

$\underline{Z}_{Г2} = jX_{Г2} = j10$ Ом;

$\underline{Z}_{Дв2} = R + jX_{Дв2} = 20 + j10$ Ом.

Складываем параллельные ветви с $\underline{Z}_{Г2}$ и $\underline{Z}_{Дв2}$, получаем эквивалентную схему:

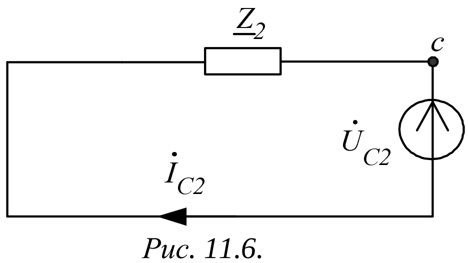


Рис. 11.6.

$$\underline{Z}_2 = \frac{\underline{Z}_{Г2} \cdot \underline{Z}_{Дв2}}{\underline{Z}_{Г2} + \underline{Z}_{Дв2}} = \frac{j10 \cdot (20 + j10)}{j10 + 20 + j10} = 2.5 + j7.5 = 7.906e^{j71.56^\circ}\,\text{Ом};$$

– эквивалентное сопротивление обратной последовательности.

В результате на основании законов Ома и Кирхгофа можно записать расчётные формулы:

$$\dot{U}_{C2} = -\underline{Z}_2\dot{I}_{C2};\ \dot{U}_{ДвC2} = \dot{U}_{C2};\ \dot{I}_{ДвC2} = \dot{U}_{ДвC2} / \underline{Z}_{Дв2};$$

$$\dot{I}_{ГC2} = \dot{I}_{C2} + \dot{I}_{ДвC2};\ \dot{U}_{ГC2} = \underline{Z}_{Г2}\dot{I}_{ГC2}.$$

Расчёт по этим формулам будет возможен после определения составляющей тока короткого замыкания обратной последовательности фазы *C*, т.е. $\dot{I}_{C2}$.

Расчётная схема нулевой последовательности для особой фазы *C*:

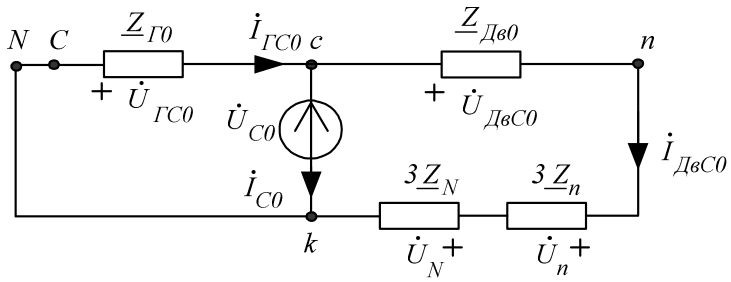


Рис. 11.7.

где

$$\underline{Z}_0 = \frac{\underline{Z}_{Г0} \cdot (\underline{Z}_{ДВ0} + 3\underline{Z}_N + 3\underline{Z}_n)}{\underline{Z}_{Г0} + \underline{Z}_{ДВ0} + 3\underline{Z}_N + 3\underline{Z}_n} = \frac{j5 \cdot (20 + j5 + \infty - j15)}{j5 + 20 + j5 + \infty - j15} = \underline{Z}_{Г0} = j5\ \text{Ом}$$

– эквивалентное сопротивление нулевой последовательности.

В результате на основании законов Ома и Кирхгофа можно записать расчётные формулы:

$$\dot{U}_{C0} = -\underline{Z}_0\dot{I}_{C0};\ \dot{I}_{ДвC0} = \frac{\dot{U}_{C0}}{\underline{Z}_{ДВ0} + 3\underline{Z}_N + 3\underline{Z}_n};\ \dot{U}_{ДвC0} = \dot{I}_{ДвC0} \cdot \underline{Z}_{Дв0} = 0;$$

$$\dot{U}_n = 3\underline{Z}_n \cdot \dot{I}_{ДвC0} = 0;\ \dot{U}_N = 3\underline{Z}_N \cdot \dot{I}_{ДвC0} = \dot{U}_{C0};\ \dot{I}_{ГC0} = \dot{I}_{C0} + \dot{I}_{ДвC0};$$

$$\dot{U}_{ГC0} = \underline{Z}_{Г0}\dot{I}_{ГC0} = -\dot{U}_{C0}.$$

Расчёт по этим формулам будет возможен после определения составляющей тока короткого замыкания обратной последовательности фазы *C*, т.е. $\dot{I}_{C0}$.

Рассчитываем симметричные составляющие напряжений и токов особой фазы *C*.

Так как $\dot{U}_C = \dot{U}_{C1} + \dot{U}_{C2} + \dot{U}_{C0} = (\dot{E}_{CЭ} - \underline{Z}_1\dot{I}_{C1}) + (-\underline{Z}_2\dot{I}_{C2}) + (-\underline{Z}_0\dot{I}_{C0}) = 0$

и $\dot{I}_C = \dot{I}_{C1} + \dot{I}_{C2} + \dot{I}_{C0} = \dfrac{\dot{I}_C}{3} + \dfrac{\dot{I}_C}{3} + \dfrac{\dot{I}_C}{3}$, то

$$\dot{I}_C = \frac{3\dot{E}_{CЭ}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_0} = 3\frac{139.15e^{j11.56^\circ}}{(4+j12)+(2.5+j7.5)+j5} =$$

$$= 7.328 - j14.749 = 16.47e^{-j63.58^\circ} \text{ А}.$$

В результате по вышеприведённым формулам находим симметричные составляющие прямой последовательности напряжений и токов фазы *C*:

$$\dot{I}_{C1} = \frac{\dot{I}_C}{3} = 2.443 - j4.916 \text{ А};$$

$$\dot{U}_{C1} = \dot{E}_{CЭ} - \underline{Z}_1\dot{I}_{C1} = 136.327 + j27.885 - (4+j12)(2.443 - j4.916) =$$

$$= 67563 + j18.233 \text{ В};$$

$$\dot{U}_{ДвC1} = \dot{U}_{C1} = 67563 + j18.233 \text{ В};$$

$$\dot{I}_{ДвC1} = \frac{\dot{U}_{ДвC1}}{\underline{Z}_{Дв1}} = 2.145 - j1.233 \text{ А};$$

$$\dot{I}_{ГC1} = \dot{I}_{C1} + \dot{I}_{ДвC1} = (2.443 - j4.916) + (2.145 - j1.233) = 4.588 - j6.149 \text{ А};$$

$$\dot{U}_{ГC1} = \underline{Z}_{Г1}\dot{I}_{ГC1} = j20\cdot(4.588 - j6.149) = 122.98 + j91.76 \text{ В}.$$

Далее находим симметричные составляющие обратной последовательности напряжений и токов фазы *C*:

$$\dot{I}_{C2} = \frac{\dot{I}_C}{3} = 2.443 - j4.916 \text{ А};$$

$$\dot{U}_{C2} = -\underline{Z}_2\dot{I}_{C2} = -(2.5 + j7.5)(2.443 - j4.916) = -42.968 - j6.032 \text{ В};$$

$$\dot{U}_{ДвC2} = \dot{U}_{C2} = -42.968 - j6.032 \text{ В};$$

$$\dot{I}_{ДвC2} = \frac{\dot{U}_{ДвC2}}{\underline{Z}_{Дв2}} = \frac{-42.968 - j6.032}{20 + j10} = -1.84 + j0.618 \text{ В};$$

$\dot{I}_{ГC2} = \dot{I}_{C2} + \dot{I}_{ДвC2} = 0.603 - j4.298$ А;

$\dot{U}_{ГC2} = \underline{Z}_{Г2}\dot{I}_{ГC2} = 42.98 + j6.03$ В,

причём $\dot{U}_{ГC2} = -\dot{U}_{C2}$ – верно.

Затем находим симметричные составляющие нулевой последовательности напряжений и токов фазы C:

$\dot{I}_{C0} = \dfrac{\dot{I}_C}{3} = 2.443 - j4.916$ А;

$\dot{U}_{C0} = -\underline{Z}_0\dot{I}_{C0} = -j5(2.443 - j4.916) = -24.58 - j12.25$ В;

$\dot{U}_n = 0; \dot{U}_N = \dot{U}_{C0} = -24.58 - j12.25$ В;

$\dot{I}_{ДвC0} = 0; \dot{U}_{ДвC0} = 0;$

$\dot{I}_{ГC0} = \dot{I}_{C0} = 2.443 - j4.916$ А;

$\dot{U}_{ГC0} = \underline{Z}_{Г0}\dot{I}_{ГC0} = 24.58 + j12.215$ В.

Определяем напряжения и токи трёхфазной цепи, используя найденные симметричные составляющие фазы C и фазовый оператор $a = e^{j120^\circ}$:

$\dot{I}_{ГA} = a^2\dot{I}_{C1} + a\dot{I}_{C2} + \dot{I}_{C0} = -1.755 - j3.144 = 3.6e^{-j119^\circ}$ А;

$\dot{I}_{ГB} = a\dot{I}_{C1} + a^2\dot{I}_{C2} + \dot{I}_{C0} = 1.45 + j3.759 = 4.03e^{j69^\circ}$ А;

$\dot{I}_{ГC} = \dot{I}_{C1} + \dot{I}_{C2} + \dot{I}_{C0} = 7.634 - j15.363 = 17.15e^{-j64^\circ}$ А;

$\dot{I}_{ДвA} = a^2\dot{I}_{ДвC1} + a\dot{I}_{ДвC2} + \dot{I}_{ДвC0} = -1.755 - j3.144 = 3.6e^{-j119^\circ}$ А;

$\dot{I}_{ДвB} = a\dot{I}_{ДвC1} + a^2\dot{I}_{ДвC2} + \dot{I}_{ДвC0} = 1.45 + j3.759 = 4.03e^{j69^\circ}$ А;

$\dot{I}_{ДвC} = \dot{I}_{ДвC1} + \dot{I}_{ДвC2} + \dot{I}_{ДвC0} = 0.305 + j0.615 = 0.686e^{-j64^\circ}$ А;

$\dot{U}_{ГA} = a^2\dot{U}_{ГC1} + a\dot{U}_{ГC2} + \dot{U}_{ГC0} = 15.848 - j105.956 = 107.135e^{-j81.5^\circ}$ В;

$\dot{U}_{ГB} = a\dot{U}_{ГC1} + a^2\dot{U}_{ГC2} + \dot{U}_{ГC0} = -132.64 + j32.6 = 136.588e^{-j166^\circ}$ В;

$\dot{U}_{ГC} = \dot{U}_{ГC1} + \dot{U}_{ГC2} + \dot{U}_{ГC0} = 190.54 + j110.005 = 220e^{j30^\circ}$ В;

$$\dot{U}_{ДвA} = a^2\dot{U}_{ДвC1} + a\dot{U}_{ДвC2} + \dot{U}_{ДвC0} = 8.724 - j101.828 = 102.2e^{-j85^\circ}\text{ В};$$

$$\dot{U}_{ДвB} = a\dot{U}_{ДвC1} + a^2\dot{U}_{ДвC2} + \dot{U}_{ДвC0} = -33.308 + j89.628 = 95.617e^{j110^\circ}\text{ В};$$

$$\dot{U}_{ДвC} = \dot{U}_{ДвC1} + \dot{U}_{ДвC2} + \dot{U}_{ДвC0} = 24.585 + j12.2 = 27.446e^{j26^\circ}\text{ В};$$

$\dot{I}_N = \dot{I}_n = 3\dot{I}_{ДвC0} = \dot{I}_{ДвA} + \dot{I}_{ДвB} + \dot{I}_{ДвC} = 0$ – верно, т.к. $Z_N = \infty$.

$\dot{U}_n = 0;\ \ \dot{U}_N = \dot{U}_{C0} = -24.58 - j12.215 = 27.448e^{-j153.6^\circ}$ В.

При замыкании фазы С на N и при $Z_N = \infty$ имеем:

$\dot{U}_{ГC} = \dot{E}_C;\ \dot{I}_{ГA} = \dot{I}_{ДвA};\ \dot{I}_{ГB} = \dot{I}_{ДвB};\ \dot{U}_N = -\dot{U}_{ДвC}$ – верно.

Рассчитываем балансы активной и реактивной мощностей.

Комплекс полной вырабатываемой мощности:

$$\dot{S}_B = \dot{E}_A\overset{*}{\dot{I}}_{ГA} + \dot{E}_B\overset{*}{\dot{I}}_{ГB} + \dot{E}_C\overset{*}{\dot{I}}_{ГC} =$$

$$= 220e^{-j90^\circ}\cdot(3.6e^{j119^\circ}) + 220e^{-j210^\circ}\cdot(4.03e^{-j69^\circ}) + 220e^{j30^\circ}\cdot(17.15e^{j64^\circ}) =$$

$$= 568.2 + j5023\text{ ВА};$$

где $P_B = 568.2$ Вт > 0 – активная вырабатываемая мощность;

$Q_B = 523$ вар – реактивная вырабатываемая мощность.

Потери полной мощности в обмотках генератора:

$$\dot{S}_Г = \dot{U}_{ГA}\overset{*}{\dot{I}}_{ГA} + \dot{U}_{ГB}\overset{*}{\dot{I}}_{ГB} + \dot{U}_{ГC}\overset{*}{\dot{I}}_{ГC} =$$

$$= 107.135e^{-j81.5^\circ}\cdot(3.6e^{j119^\circ}) + 136.588e^{-j166^\circ}\cdot(4.03e^{-j69^\circ}) +$$

$$+ 220e^{j30^\circ}\cdot(17.15e^{j64^\circ}) = -24.289 + j4545\text{ ВА};$$

$Q_Г = 4545$ вар; $P_Г = -24,289$ Вт ≈ 0, т.к. $R_Г = 0$ и $Q_Г \gg P_Г$.

Потребляемая двигателем полная мощность:

$$\dot{S}_{Дв} = \dot{U}_{ДвA}\overset{*}{\dot{I}}_{ДвA} + \dot{U}_{ДвB}\overset{*}{\dot{I}}_{ДвB} + \dot{U}_{ДвC}\overset{*}{\dot{I}}_{ДвC} =$$

$$= 102.2e^{-j85^\circ}\cdot(3.6e^{j119^\circ}) + 95.617e^{j110^\circ}\cdot(4.03e^{-j69^\circ}) +$$

$$+ 27.446e^{j26^\circ}\cdot(0.686e^{j64^\circ}) = 595.837 + j477.37\text{ ВА};$$

где $P_{Дв} = 595.837$ Вт; $Q_{Дв} = 477.37$ вар.

Потребляемая в нулевом проводе полная мощность.

$\dot{S}_0 = \dot{U}_n \overset{*}{\dot{I}}_n + \dot{U}_N \overset{*}{\dot{I}}_N = 0 \cdot 0 + 27.448 e^{-j153.6^\circ} \cdot 0 = 0$ ВА;
где $P_0 = 0$ Вт; $Q_0 = 0$ вар.

Потребляемая активная $P_П$ и реактивная $Q_П$ мощности:
$P_Ï = P_Ã + P_{Äâ} + P_0 = -24,289 + 595,837 + 0 = 571,548$ Âò;
$Q_Ï = Q_Ã + Q_{Äâ} + Q_0 = 4545 + 477,37 + 0 = 502,37$ ÂÀð.

Относительные погрешности:
$$\delta_P\% = \frac{|P_B - P_П|}{P_П} \cdot 100\% = \frac{|568.2 - 571.548|}{568.2} \cdot 100\% = 0.6 < 3\%;$$
$$\delta_Q\% = \frac{|Q_B - Q_П|}{Q_П} \cdot 100\% = \frac{|5023 - 5022.37|}{5023} \cdot 100\% = 0.01 < 3\% -$$ верно.

Для построения векторной диаграммы напряжений рассчитываем комплексные потенциалы узлов схемы. Для этого примем
$\dot{\varphi}_N = 0$; тогда
$\dot{\varphi}_A = \dot{\varphi}_N + \dot{E}_A = -j220$ В;
$\dot{\varphi}_B = \dot{\varphi}_N + \dot{E}_B = -190.5 + j110$ В;
$\dot{\varphi}_C = \dot{\varphi}_N + \dot{E}_C = 190.5 + j110$ В;
$\dot{\varphi}_a = \dot{\varphi}_A - \dot{U}_{ГА} = -15.85 - j114$ В;
$\dot{\varphi}_b = \dot{\varphi}_B - \dot{U}_{ГВ} = -57.88 - j77.4$ В;
$\dot{\varphi}_c = \dot{\varphi}_C - \dot{U}_{ГС} = -0.02 \approx 0$ В;
$\dot{\varphi}_n = \dot{\varphi}_a - \dot{U}_{ДвА} = -24.57 + j12.22$ В;
$\dot{\varphi}_n = \dot{\varphi}_b - \dot{U}_{ДвВ} = -24.57 + j12.22$ В;
$\dot{\varphi}_n = \dot{\varphi}_c - \dot{U}_{ДвС} = -24.57 + j12.22$ В;
$\dot{\varphi}_k = \dot{\varphi}_n - \dot{U}_n = -24.57 + j12.22$ В;
$\dot{\varphi}_k = \dot{\varphi}_N - \dot{U}_N = 0.008 - j0.018 \approx 0$ В – верно.

Выбираем для вещественной и мнимой осей масштаб напряжений $m_U = 2$ В/мм и рассчитанные потенциалы узлов с учётом этого масштаба наносим на комплексную плоскость. Направляем между полученными точками векторы ЭДС и напряжений. Выбираем масштаб тока $m_I = 0.2$ А/мм и строим лучевую векторную диаграмму для токов генератора $\dot{I}_{ГA}, \dot{I}_{ГB}, \dot{I}_{ГC}$. Один из векторов токов или напряжений, например $\dot{I}_{ГC}$, представим в виде суммы векторов прямой, обратной и нулевой последовательностей. Векторная диаграмма представлена на рис. 3.8.

Проанализировать полученные результаты и сформулировать выводы по работе, указав при этом какие составляющие токов и напряжений получились наибольшими (по модулю) и наименьшими (по модулю), какие результирующие токи и напряжения получились равными (по модулю) и почему.

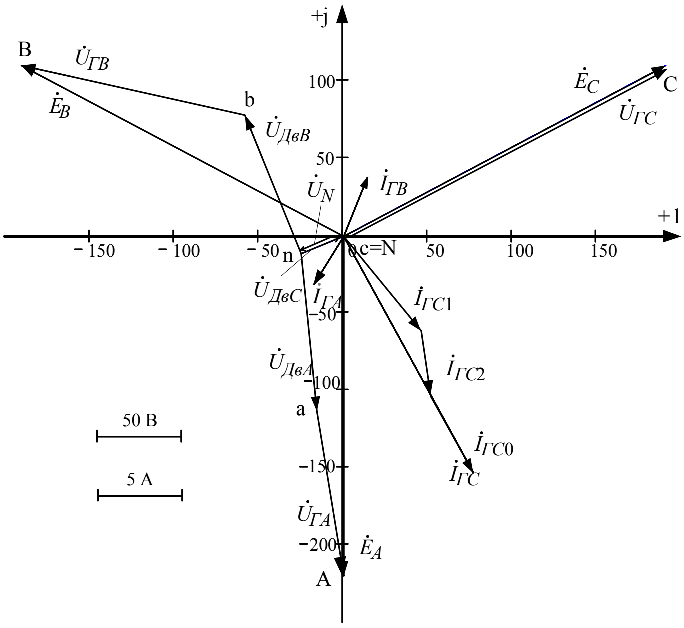


Рис. 11.8.

Документ MathCad

Короткое замыкание фазы C в нейтраль генератора

Дано:

$a := e^{120i \cdot deg}$ $\quad R := 20$

$Ea := 220e^{-90i \cdot deg}$ $\quad Zг1 := 20i$ $\quad Zдв1 := R + 20i$ $\quad zn := -5i$

$Eb := a^2 \cdot Ea$ $\quad Zг2 := 10i$ $\quad Zдв2 := R + 10i$ $\quad zN := \infty$

$Ec := a \cdot Ea$ $\quad Zг0 := 5i$ $\quad Zдв0 := R + 5i$

1.1. Эквивалентная ЭДС и эквивалентное сопротивление прямой последовательности

$$z1 := \frac{Zг1 \cdot Zдв1}{Zг1 + Zдв1} \qquad E := Ec \cdot \frac{z1}{Zг1} \qquad E = 136.315 + 27.895i$$

$$z1 = 4 + 12i$$

1.2. Эквивалентное сопротивление обратной последовательности

$$z2 := \frac{Zг2 \cdot Zдв2}{Zг2 + Zдв2} \qquad z2 = 2.5 + 7.5i$$

1.3. Эквивалентное сопротивление нулевой последовательности

$$z0 := \frac{[Zг0 \cdot [Zг0 + (3 \cdot zn + 3 \cdot zN)]]}{Zг0 + (Zдв0 + 3 \cdot zn + 3 \cdot zN)} \qquad z0 = 5i$$

2. Определим составляющие токов прямой, обратной и нулевой последовательности в ветвях с фиктивными ЭДС соответствующих схем замещения.

Условия для места несимметрии

$Uc := 0 \quad Ia := 0 \quad Ib := 0$

$Ic1 \cdot z1 + Uc1 = E$ $\qquad Uc1 + Uc2 + Uc0 = 0$

$Ic2 \cdot z2 + Uc2 = 0$ $\qquad Ia = a^2 \cdot Ic1 + a \cdot Ic2 + Ic0$

$Ic0 \cdot z0 + Uc0 = 0$ $\qquad Ib = a \cdot Ic1 + a^2 \cdot Ic2 + Ic0$

$$x := \begin{pmatrix} z1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & z2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & z0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ a & a^2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a^2 & a & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} E \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v := x^{-1} \cdot b$$

$$v = \begin{pmatrix} 2.443 - 4.916i \\ 2.443 - 4.916i \\ 2.443 - 4.916i \\ 67.555 + 18.245i \\ -42.975 - 6.031i \\ -24.579 - 12.214i \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} Ic1 := v_0 & Uc1 := v_3 \\ Ic2 := v_1 & Uc2 := v_4 \\ Ic0 := v_2 & Uc0 := v_5 \end{matrix}$$

3. Определим составляющие токов прямой, обратной и нулевой последовательности в остальных ветвях соответствующих схем замещения.

3.1. Прямая последовательность

$I\text{дв}1 := \dfrac{Uc1}{Z\text{дв}1} \qquad I\text{г}1 := I\text{дв}1 + Ic1 \qquad I\text{г}1 = 4.588 - 6.149i$

3.2. Обратная последовательность

$I\text{дв}2 := \dfrac{Uc2}{Z\text{дв}2} \qquad I\text{г}2 := I\text{дв}2 + Ic2 \qquad I\text{г}2 = 0.603 - 4.298i$

3.3. Нулевая последовательность

$I\text{дв}0 := 0$

$I\text{г}0 := I\text{дв}0 + Ic0 \qquad I\text{г}0 = 2.443 - 4.916i$

4. Определим составляющие напряжений прямой, обратной и нулевой последовательности в остальных ветвях соответствующих схем замещения.

$U\text{дв}1 := I\text{дв}1 \cdot Z\text{дв}1 \qquad U\text{дв}1 = 67.555 + 18.245i$

$U\text{дв}2 := I\text{дв}2 \cdot Z\text{дв}2 \qquad U\text{дв}2 = -42.975 - 6.031i$

$U\text{дв}0 := I\text{дв}0 \cdot Z\text{дв}0 \qquad U\text{дв}0 = 0$

$U_{г1} := I_{г1} \cdot Z_{г1}$ $\quad$ $U_{г1} = 122.971 + 91.755i$

$U_{г2} := I_{г2} \cdot Z_{г2}$ $\quad$ $U_{г2} = 42.975 + 6.031i$

$U_{г0} := I_{г0} \cdot Z_{г0}$ $\quad$ $U_{г0} = 24.579 + 12.214i$

4. Действительные токи в фазах линии передачи и нагрузке

$I_{гC} := I_{г1} + I_{г2} + I_{г0}$ $\quad$ $I_{гC} = 7.634 - 15.362i$

$I_{гA} := I_{г1} \cdot a^2 + I_{г2} \cdot a + I_{г0}$ $\quad$ $I_{гA} = -1.756 - 3.144i$

$I_{гB} := I_{г1} \cdot a + I_{г2} \cdot a^2 + I_{г0}$ $\quad$ $I_{гB} = 1.45 + 3.758i$

$I_{двC} := I_{дв1} + I_{дв2} + I_{дв0}$ $\quad$ $I_{двC} = 0.305 - 0.614i$

$I_{двA} := I_{дв1} \cdot a^2 + I_{дв2} \cdot a + I_{дв0}$ $\quad$ $I_{двA} = -1.756 - 3.144i$

$I_{двB} := I_{дв1} \cdot a + I_{дв2} \cdot a^2 + I_{дв0}$ $\quad$ $I_{двB} = 1.45 + 3.758i$

5. Действительные напряжения в фазах линии передачи и нагрузке

$U_{гC} := U_{г1} + U_{г2} + U_{г0}$ $\quad$ $U_{гC} = 190.526 + 110i$

$U_{гA} := U_{г1} \cdot a^2 + U_{г2} \cdot a + U_{г0}$ $\quad$ $U_{гA} = 15.845 - 105.957i$

$U_{гB} := U_{г1} \cdot a + U_{г2} \cdot a^2 + U_{г0}$ $\quad$ $U_{гB} = -132.633 + 32.599i$

$U_{двC} := U_{дв1} + U_{дв2} + U_{дв0}$ $\quad$ $U_{двC} = 24.579 + 12.214i$

$U_{двA} := U_{дв1} \cdot a^2 + U_{дв2} \cdot a + U_{дв0}$ $\quad$ $U_{двA} = 8.734 - 101.829i$

$U_{двB} := U_{дв1} \cdot a + U_{дв2} \cdot a^2 + U_{дв0}$ $\quad$ $U_{двB} = -33.313 + 89.615i$

6. Определим ток в нейтрали

$In := I_{двA} + I_{двB} + I_{двC}$ $\quad$ $In = 0$ $\quad$ $IN := In$ $\quad$ $IN = 0$

$UN := Uc0$ $\quad$ $UN = -24.579 - 12.214i$ $\quad$ $Un := 0$

7. Составим баланс мощностей

7.1. Вырабатываемая генератором мощность

$Sв := Ea \cdot \overline{IгA} + Eb \cdot \overline{IгB} + Ec \cdot \overline{IгC}$ $\qquad$ $Sв = 593.23 + 5028.327i$

7.1.1. Потери полной мощности в обмотках генератора

$\Delta Sг := UгA \cdot \overline{IгA} + UгB \cdot \overline{IгB} + UгC \cdot \overline{IгC}$ $\qquad$ $\Delta Sг = 4.548i \times 10^{3}$

7.1.2. Потребляемая двигателем полная мощность

$\Delta Sдв := UдвA \cdot \overline{IдвA} + UдвB \cdot \overline{IдвB} + UдвC \cdot \overline{IдвC}$ $\qquad$ $\Delta Sдв = 593.23 + 480.233i$

7.1.3. Потери полной мощности в нейтрали генератора и двигателя

$\Delta So := Un \cdot \overline{In} + UN \cdot \overline{IN}$ $\qquad$ $\Delta So = 0$

7.2. Потребляемая активная мощность

$\Delta P := Re(\Delta Sг) + Re(\Delta Sдв) + Re(\Delta So)$ $\qquad$ $\Delta P = 593.23$

7.3. Потребляемая реактивная мощность

$\Delta Q := Im(\Delta Sг) + Im(\Delta Sдв) + Im(\Delta So)$ $\qquad$ $\Delta Q = 5.028 \times 10^{3}$

Относительные погрешности

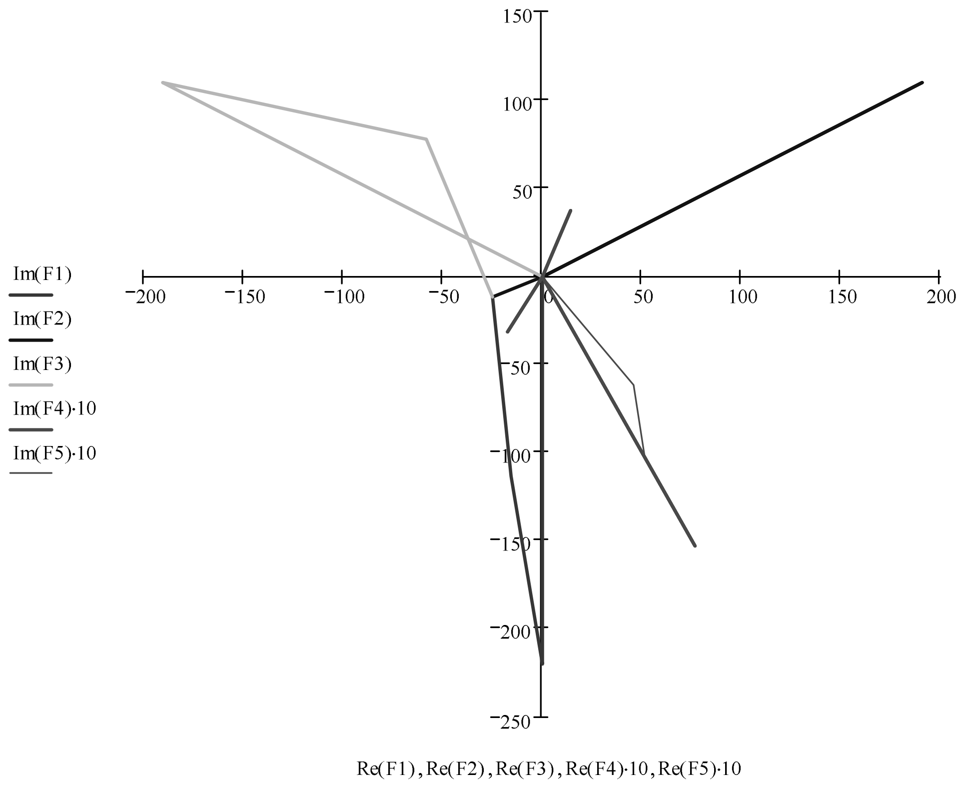
$$\delta P := \frac{|Re(Sв) - \Delta P|}{Re(Sв)} \cdot 100 \qquad \delta P = 0$$

$$\delta Q := \frac{|Im(Sв) - \Delta Q|}{Im(Sв)} \cdot 100 \qquad \delta Q = 0$$

8. Векторная диаграмма напряжений и токов.

$fA := Ea$	$fa := fA - UгA$	$fn := fa - UдвA$	$fn = -24.579 - 12.214i$
$fC := Ec$	$fc := fC - UгC$	$fn2 := fc - UдвC$	$fn2 = -24.579 - 12.214i$
$fB := Eb$	$fb := fB - UгB$	$fb1 := fb - Uc$	$fn3 := fb1 - UдвB$
			$fn3 = -24.579 - 12.214i$

$$F1 := \begin{pmatrix} 0 \\ fA \\ fa \\ fn \end{pmatrix} \quad F2 := \begin{pmatrix} 0 \\ fC \\ fc \\ fn2 \end{pmatrix} \quad F3 := \begin{pmatrix} 0 \\ fB \\ fb \\ fb1 \\ fn3 \end{pmatrix} \quad F4 := \begin{pmatrix} 0 \\ IгA \\ 0 \\ IгB \\ 0 \\ IгC \\ 0 \end{pmatrix} \quad F5 := \begin{pmatrix} 0 \\ Iг1 \\ Iг1 + Iг2 \\ Iг1 + Iг2 + Iг0 \\ IгC \\ 0 \end{pmatrix}$$



Построенный график рекомендуется скопировать в графический редактор, например, в *Microsoft Visio* и проставить индексы узлов и направления стрелок векторов токов и напряжений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Бессонов, Лев Алексеевич. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи: учебник / Л. А. Бессонов. — 10-е изд. — М. : Гардарики, 1999. — 638 с.

Теоретические основы электротехники : учебник для вузов в 3 т. / К. С. Демирчян, Л. Р. Нейман, Н. В. Коровкин, В. Л. Чечурин. — 4-е изд., доп. для самостоятельного изучения курса. — СПб. : Питер, 2003.

Основы теории цепей : учебное пособие / Г.В.Зевеке, П.А.Ионкин, А.В.Нетушил, С.В.Страхов. — 5-е изд., перераб. — М. : Энергоатомиздат, 1989. — 528 с.

Гурский, Дмитрий Анатольевич. Mathcad для студентов и школьников / Д. А. Гурский, Е. Турбина. — СПб. : Питер, 2005. — 400 с.

Кирьянов, Дмитрий Викторович. Mathcad 11 / Д. Кирьянов. — СПб. : БХВ-Петербург, 2003. — 560 с.

Учебное издание

НОСОВ Геннадий Васильевич
КУЛЕШОВА Елена Олеговна
КОЛЧАНОВА Вероника Андреевна

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

УСТАНОВИВШИЙСЯ РЕЖИМ В ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЯХ

Учебное пособие

Научный редактор *кандидат технических наук*,
доцент Г.В. Носов
Редактор *Е.О. Кулешова*
Компьютерная верстка *И.О. Фамилия*
Дизайн обложки *И.О. Фамилия*

Подписано к печати 05.11.2010. Формат 60x84/16. Бумага «Снегурочка».
Печать XEROX. Усл.печ.л. 9,01. Уч.-изд.л. 8,16.
Заказ . Тираж 50 экз.

Национальный исследовательский Томский
политехнический университет
Система менеджмента и качества
Томского политехнического университета
сертифицирована
NATIONALQUALITYASSURANCE по стандарту ISO
9001:2008