Операторный метод расчета переходных процессов

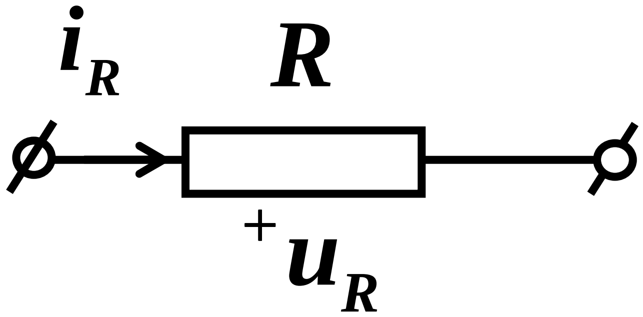
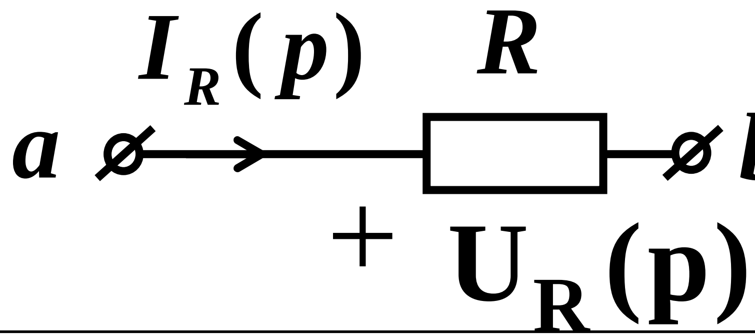
Порядок расчета переходных процессов операторным методом

1. Определяются независимые начальные условия

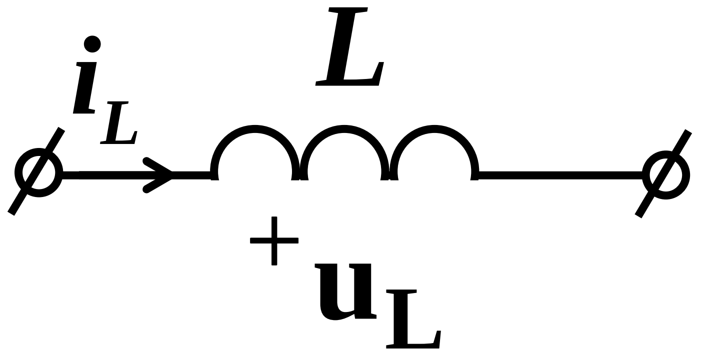
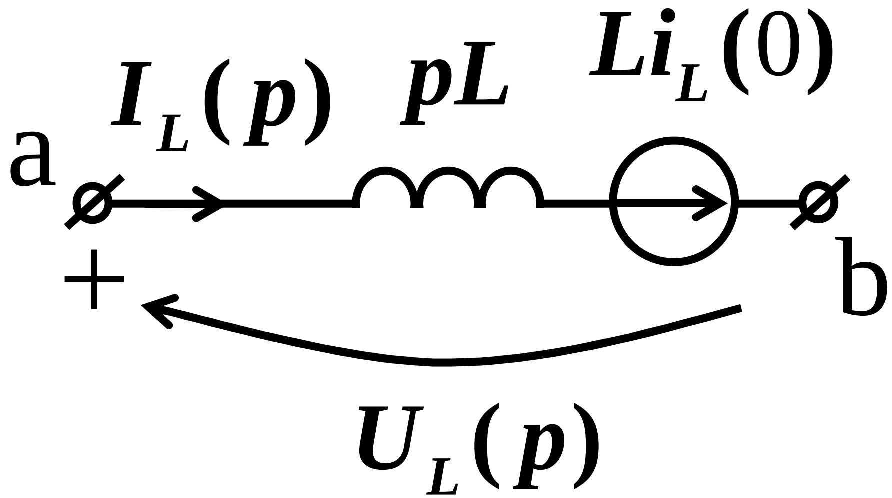
$$\mathbf{i_L(0\_) = i_L(0)} \qquad \mathbf{u_C(0\_) = u_C(0)}$$

2. Для схемы после коммутации изображается операторная схема, которая рассчитывается любым методом

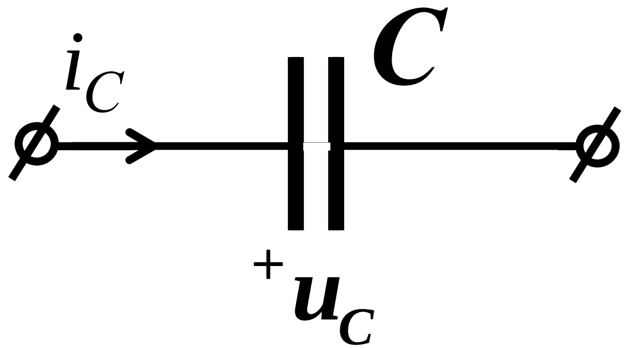
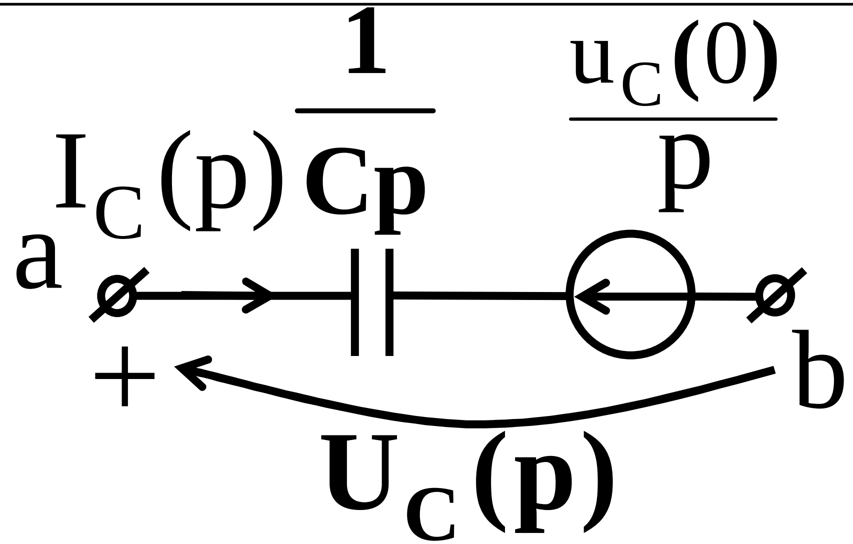
$f(t)$- -оригинал	$F(p)$- -изображение
b	b/p
$b\,e^{-\alpha t}$	$b/(p+\alpha)$
$b\cdot t\,e^{-\alpha t}$	$\dfrac{b}{(p+\alpha)^2}$
$\sin(\omega t)$	$\dfrac{\omega}{p^2-\omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$

Резистивный элемент	
Операторная схема	
Закон Ома	$\mathbf{U_R(p) = R \cdot I_R(p)}$

2.

Индуктивный элемент	
Операторная схема	
Закон Ома	$\mathbf{U_L(p) = Lp \cdot I_L(p) - L \cdot i_L(0_+)}$

3.

	
Операторная схема	
Закон Ома	$U_C(p) = \frac{1}{Cp} \cdot I_C(p) + \frac{u_C(0_+)}{p}$

$$F(p) = \frac{D(p)}{B(p)}$$

3. По теореме разложения определяются напряжения и токи переходного процесса в функции времени

Тогда

$$i(t)=\sum_{k=0}^{n}\frac{D(p_k)}{B^{'}(p_k)}e^{p_k t};$$

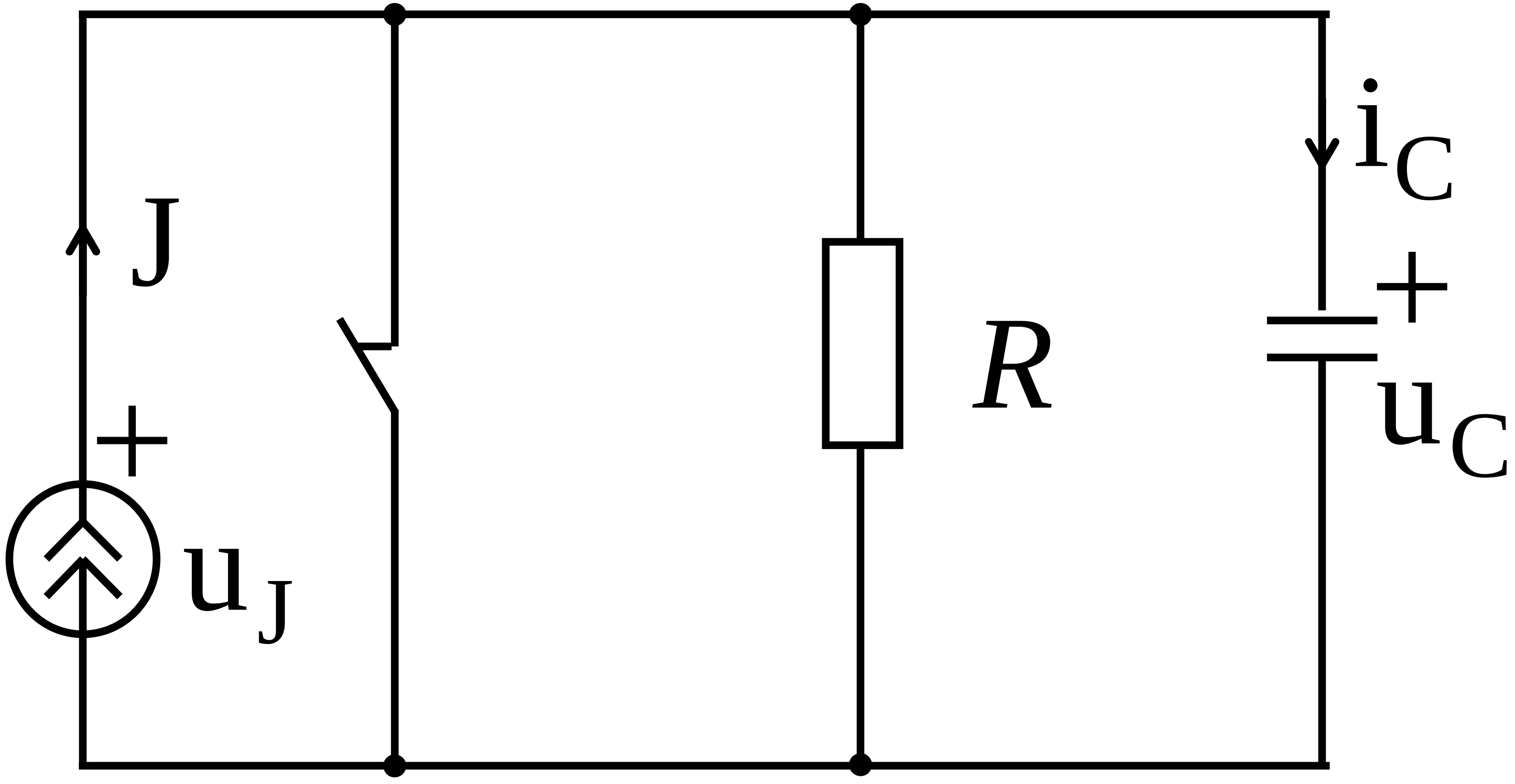
где p – корни характеристического уравнения определяются из уравнения:

$$B(p) = 0$$

При комплексно- сопряженных корнях

$$f(t) = 2\,\mathrm{Re}\left[\frac{D(p_1)}{B'(p_1)} \cdot e^{p_1 t}\right]$$

Пример 1:



Дано: $J(t) = 10e^{-50t}$ A

$R = 50$ Ом

$C = 200$ мкФ

Определить: $i_C(t) = ?$

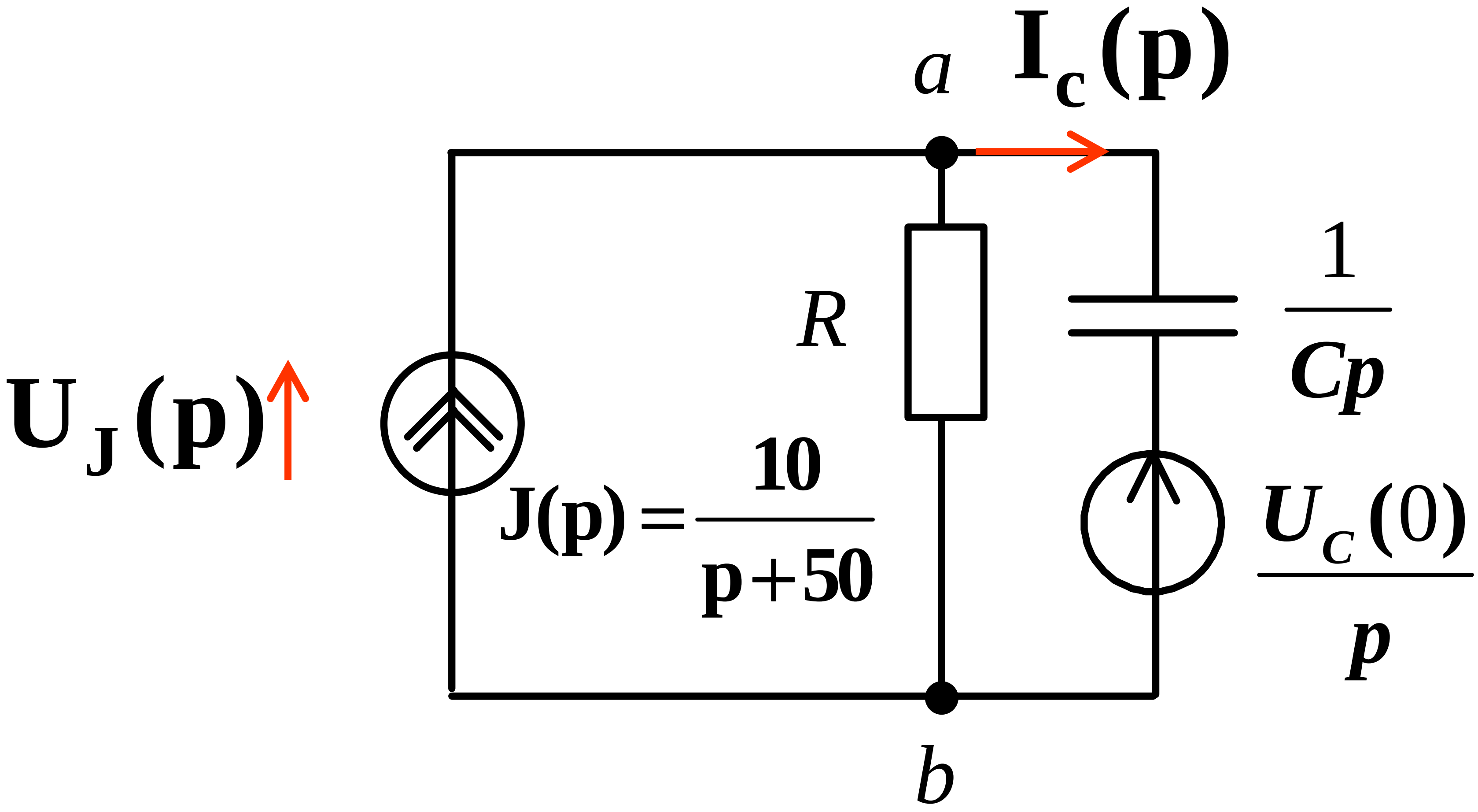
1. Определяем независимые начальные условия $\left(t = 0\_\right)$:

$$\mathbf{u_C(0\_) = 0}$$

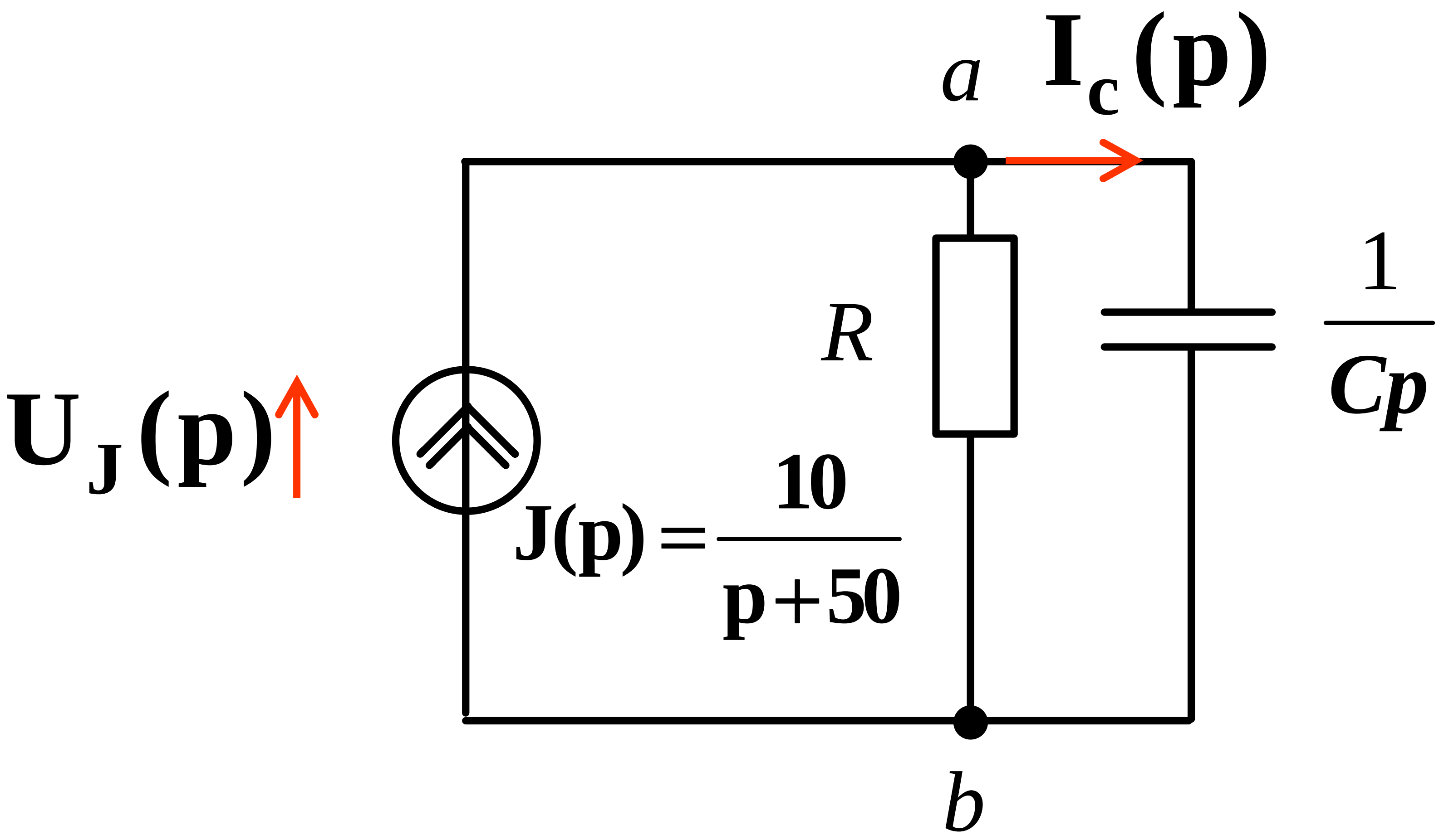
2. Операторная схема после коммутации

$$\mathbf{u_C(0_+) = u_C(0\_) = 0\ B}$$

Операторная схема



Операторная схема



$$I_C(p) = \frac{J(p)R}{R + \frac{1}{Cp}} =$$

$$= \frac{\left(\frac{10}{p+50}R\right)Cp}{RCp+1} =$$

$$= \frac{10CRp}{(p+50)(RCp+1)} = \frac{D(p)}{B(p)}$$

3. По теореме разложения определяем $i_C(t)$

$$D(p) = 10p;$$

$$B(p) = (p + 50)(RCp + 1) = 0 \Rightarrow$$

$$p_1 = -50;\ p_2 = -\frac{1}{RC}$$

$$B'(p) = \Big((p + 50)(RCp + 1)\Big)' =$$

$$= \left(p^2 RC + p + 50RCp + 50\right)' =$$

$$= 2pRC + 1 + 50RC$$

$$i_C(t)=\sum_{k=1}^{n=2}\frac{D(p_k)}{B'(p_k)}e^{p_k t}=$$

$$=\frac{10(-50)}{2pRC+1+50RC}e^{-50t}+$$

$$+\frac{10(-100)}{2\left(-\frac{1}{RC}\right)RC+1+50RC}e^{-\frac{1}{RC}t}=$$

$$= \frac{10(-50)}{2\left(-50\right)+150} e^{-50t} + \frac{10(-100)}{2\left(-100\right)+150} e^{-100t} =$$

$$= -10e^{-50t} + 20e^{-100t}$$

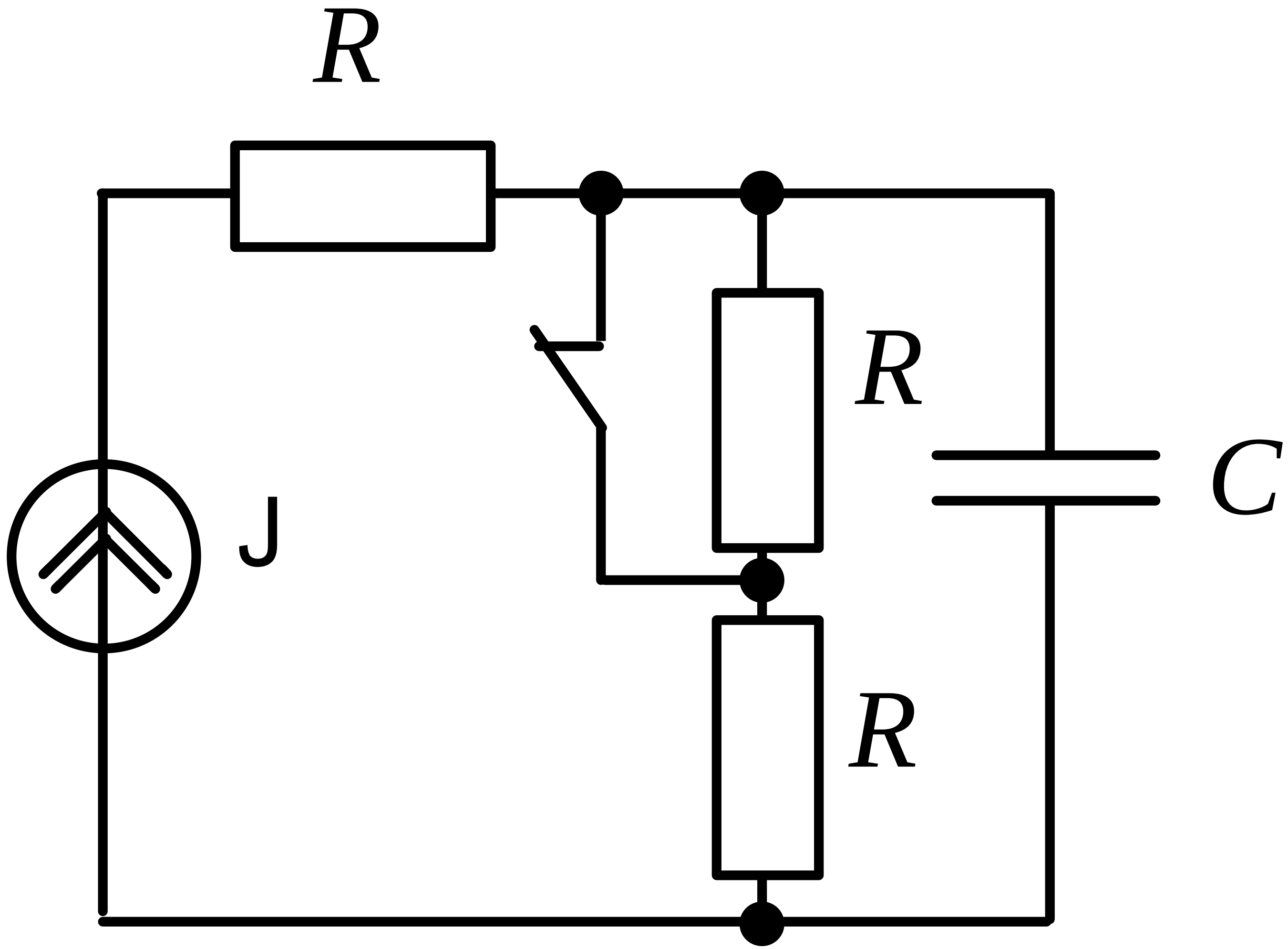
Документ Mathcad

$$R := 50 \qquad c := 2\cdot 10^{-4}$$

$$I(p) := \frac{\dfrac{10}{p+50}\cdot R}{\dfrac{1}{c\cdot p} + R} \text{ simplify } \rightarrow 10\cdot\frac{p}{(p+50)\cdot(100+p)}$$

$$I(t) := I(p) \text{ invlaplace}, p \rightarrow -10\cdot\exp(-50\cdot t) + 20\cdot\exp(-100\cdot t)$$

Пример 2:

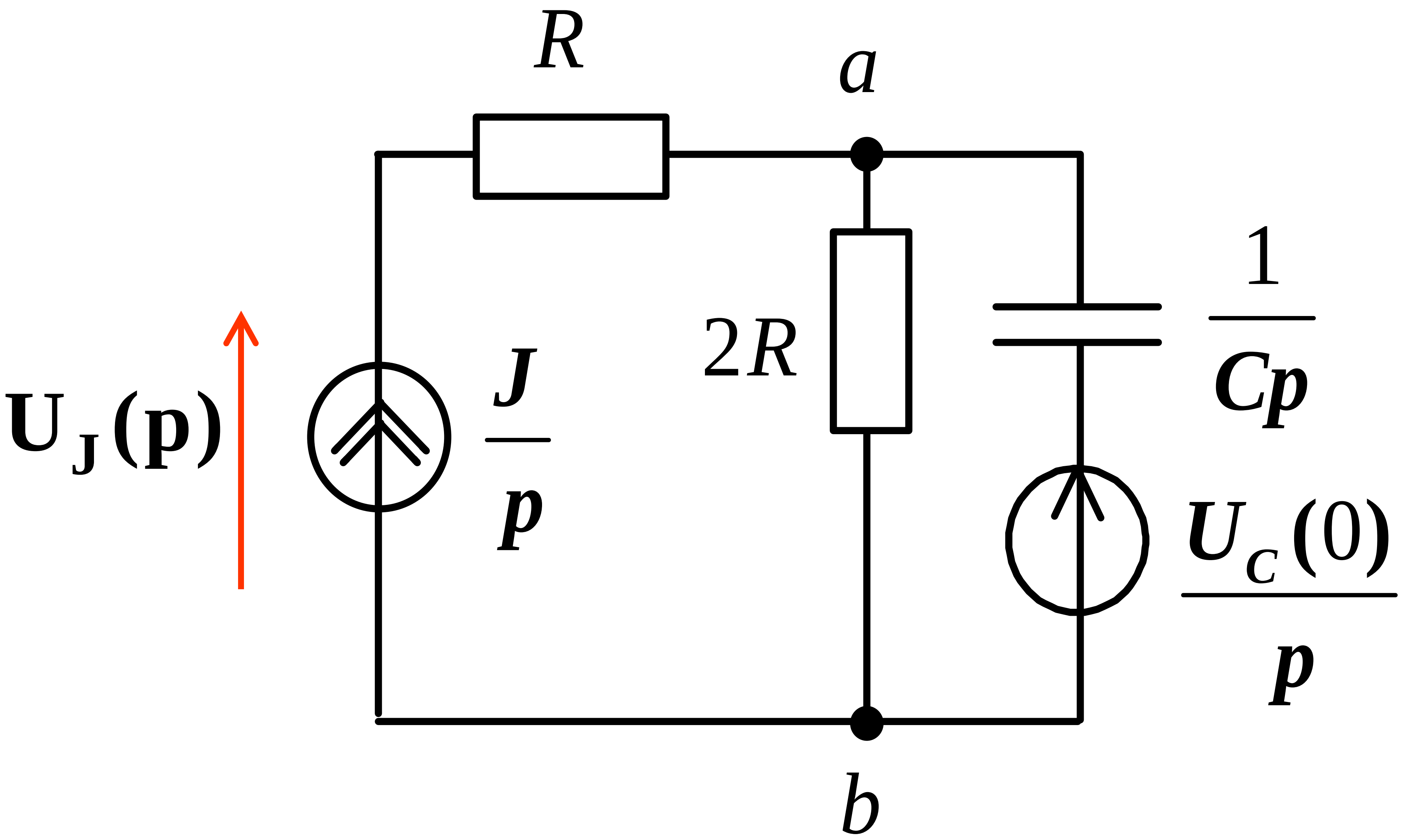


1. ННУ $\left(t = 0\_\right)$

:

$$u_C(0\_) = JR$$

1. Операторная схема



$$U_J(p) = \frac{J}{p}R + \varphi_a$$

$$\varphi_a(p)\left(\frac{1}{2R} + \frac{1}{\frac{1}{Cp}} + \frac{1}{R+\infty}\right) = \frac{J}{p} + \frac{U_C(0)}{p\frac{1}{Cp}}$$

$$\varphi_a(p) = \frac{\dfrac{J}{p} + U_C(0)C}{\dfrac{1}{2R} + Cp} =$$

$$= \frac{\left(J + U_C(0)cp\right)2R}{p\left(1 + Cp2R\right)} =$$

$$= \frac{J2R + U_C(0)cp2R}{p\left(1 + Cp2R\right)} = \frac{D(p)}{B(p)}$$

$$U_J(p) = \frac{J}{p}R + \varphi_a(p) - \varphi_b(p)$$

$$U_J(p) = \frac{JR}{p} + \frac{J2R + U_C(0)Cp2R}{p\left(1 + Cp2R\right)}$$

3. По теореме разложения определяем $\mathbf{u_J(t)}$

$$D(p) = J2R + U_C(0)Cp2R;$$

$$B(p) = p\left(1 + Cp2R\right) =$$

$$= p^2 2RC + p$$

$$B'(p) = \left(p^2 2RC + p\right)' =$$

$$= 4RCp + 1;$$

$$B(p) = p\left(1 + Cp2R\right) = 0 \Rightarrow$$

$$p_1 = 0; \;\; p_2 = -\frac{1}{2RC}$$

$$u_J(t) = \sum_{k=1}^{n=2} \frac{D(p_k)}{B^{'}(p_k)} e^{p_k t} + JR =$$

$$= \frac{D(0)}{B^{'}(0)} e^{0t} + \frac{D\left(-\frac{1}{2RC}\right)}{B^{'}\left(-\frac{1}{2RC}\right)} e^{-\frac{1}{2RC}t} + JR =$$

$$u_J(t) = JR + \frac{J2R}{1} +$$

$$+ \frac{J2R + JR2RC\left(-\frac{1}{2RC}\right)}{4RC\left(-\frac{1}{2RC}\right)+1} e^{-\frac{1}{2RC}t}$$

$$= 3JR + \frac{2JR + (-JR)}{-1} e^{-\frac{1}{2RC}t} =$$

$$u_J(t) = 3JR - JRe^{-\frac{1}{2RC}t}$$

Используя теорему разложения, определить оригинал

Пример 3

$$F(p) = U(p) = \frac{2 \cdot 10^4 p + 2 \cdot 10^6}{p(p^2 + 200p + 2 \cdot 10^4)} =$$

$$= \frac{D(p)}{B(p)}, \ (Bc)$$

$$B(p) = p(p^2 + 200p + 2 \cdot 10^4) = 0$$

$$p_1 = 0$$

$$p_{2,3} = -100 \pm j100 \left(1/c \right)$$

$$B(p) = p(p^2 + 200p + 2 \cdot 10^4)$$

$$B'(p) = (p^3 + 200p^2 + 2 \cdot 10^4 p)' =$$

$$= 3p^2 + 400p + 2 \cdot 10^4,$$

тогда

$$u(t) = \sum_{к=1}^{n=3} \frac{D(p_к)}{B'(p_к)} \cdot e^{p_к t}$$

Или $\mathbf{u(t)} =$

$$= \frac{2\cdot 10^4\cdot 0 + 2\cdot 10^6}{0^2 + 400\cdot 0 + 2\cdot 10^4} e^{0\cdot t} +$$

$$+2\,\mathrm{Re}\left[\frac{2\cdot 10^4\cdot p_2 + 2\cdot 10^6}{3{p_2}^2 + 400 p_2 + 2\cdot 10^4} e^{p_2 t}\right] =$$

Т.е.

$$u(t) = 100 + 2\,\mathrm{Re}\left[70{,}5e^{-j135^\circ}e^{(-100+j100)t}\right] =$$

$$= 100 + 2\,\mathrm{Re}\left[70{,}5e^{j(-135^\circ+100t)}e^{-100t}\right] =$$

$$= 100 + 141e^{-100t}\cos(100t - 135^\circ),\ \ B$$

Пример 4

$$I(p) = \frac{p^2 + p + 0,5}{p(p^2 + 2p + 1)} =$$

$$= \frac{D(p)}{B(p)}, \ (Ac)$$

$$B(p) = p(p^2 + 2p + 1) = 0$$

$$p_1 = 0$$

$$p_2 = p_3 = -1\left(1/c\right)$$

Используем метод неопределённых коэффициентов

$$\frac{a}{p}+\frac{b}{p+1}+\frac{c}{(p+1)^2}=$$

$$=\frac{(a+b)p^2+(2a+b+c)p+a}{p(p+1)^2}=$$

Сравнивая коэффициенты числителей, находим

$$\begin{cases} (a+b)=1 \\ (2a+b+c)=1 \\ a=0,5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=0,5 \\ b=0,5 \\ c=-0,5 \end{cases}$$

Оригиналы каждой из простых дробей определим по таблице

$$\mathbf{i(t) = 0,5 + 0,5e^{-t} - 0,5\,t\,e^{-t} \quad (A)}$$