11 лекция

- Операторный метод расчета переходных процессов

Операторный метод (преобразование Лапласа) расчета переходных процессов используется для того, чтобы обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами (в пространстве оригиналов) преобразовать в алгебраические (в пространстве изображений). Очевидно, что алгебраические уравнения решаются проще. После решения алгебраического уравнения над полученной функцией (изображением) производится обратное преобразование Лапласа, получается оригинал. Полученный оригинал – это функция, которая и будет решением дифференциального уравнения.

Основы операторного метода расчета переходных процессов

$$F(p) = \int_{0}^{\infty} f(t)e^{-pt}dt$$

- прямое преобразование Лапласа

$p = \delta_0 + j\omega_0,\ \ {}^{1}\!/_{c}$ - оператор

Интеграл имеет конечное значение, если функция f(t) удовлетворяет условиям Дирихле, а так же

при $\mathbf{t > 0}$

удовлетворяется условие

$$|\mathbf{f(t)}| < |\mathbf{M}|\mathbf{e}^{|\sigma|\mathbf{t}},$$

Где

$\mathbf{f(t)}$ – оригинал

$\mathbf{F(p)}$ – операторное
изображение f(t)

причем $\mathbf{F(p)} \risingdotseq \mathbf{f(t)}$

ТАБЛИЦА ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ЛАПЛАССА

$f(t)$ - -оригинал	$F(p)$ - -изображение
b	b/p
$b\,e^{-\alpha t}$	$b/(p+\alpha)$
$b\cdot t\,e^{-\alpha t}$	$\dfrac{b}{(p+\alpha)^2}$
$\sin(\omega t)$	$\omega/(p^2-\omega^2)$
$\cos(\omega t)$	$p/(p^2+\omega^2)$
$df(t)/dt$	$-f(0)+pF(p)$
$\int_0^t f(t)dt$	$\dfrac{F(p)}{p}$

Итак, мы будем сопоставлять каждой функции его изображение. Например

$$i(t) \to I(p), \quad u(t) \to U(p)$$

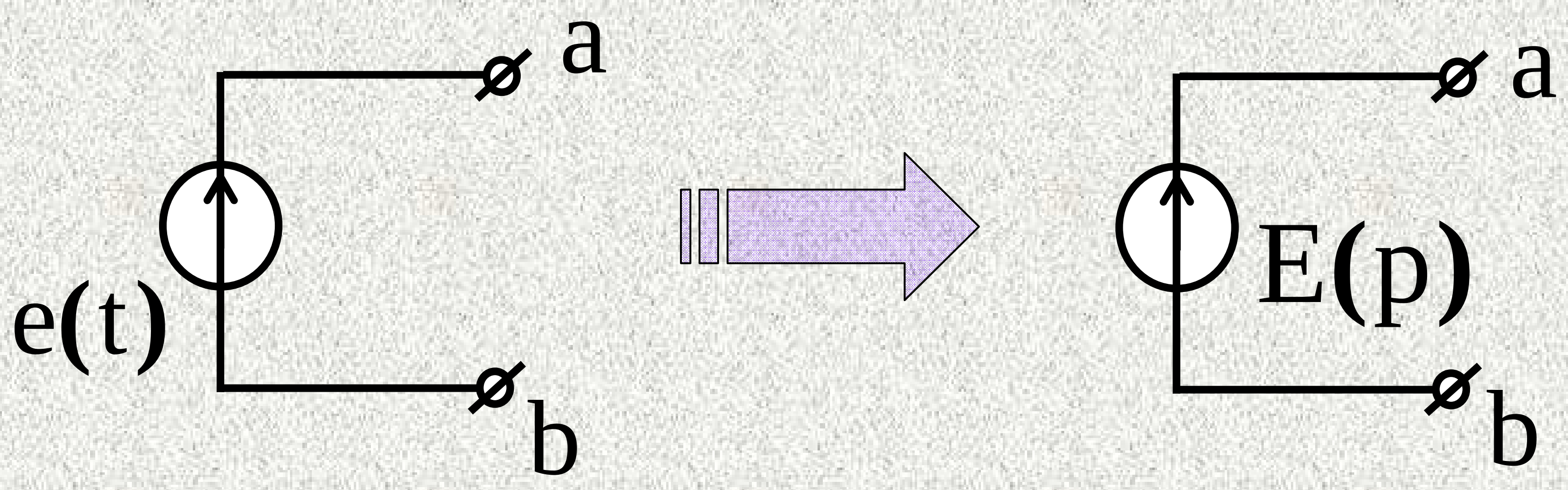
С учётом полученной таблицы можно сопоставить каждому элементу его изображение:

Операторная схема замещения составляется для цепи после коммутации на основании операторных схем отдельных элементов

Схемы отдельных элементов следуют из законов Ома и Кирхгофа в операторной форме

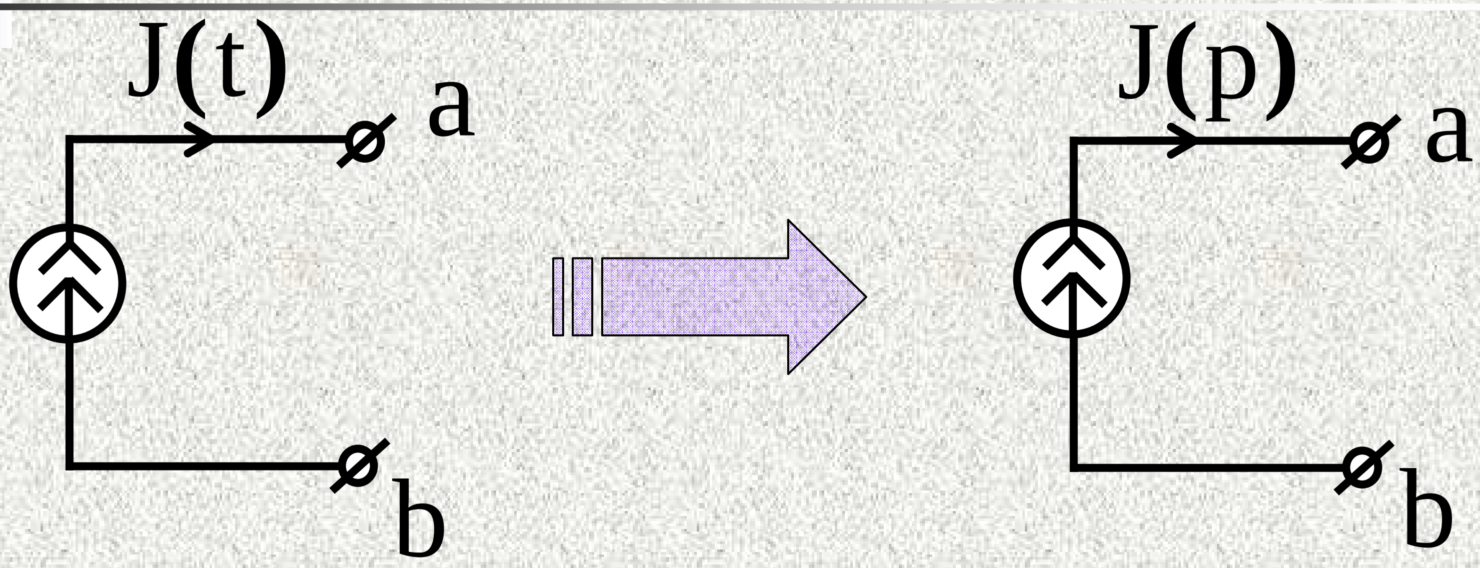
Источники

1. Источник ЭДС



$$e(t) \doteq E(p)$$

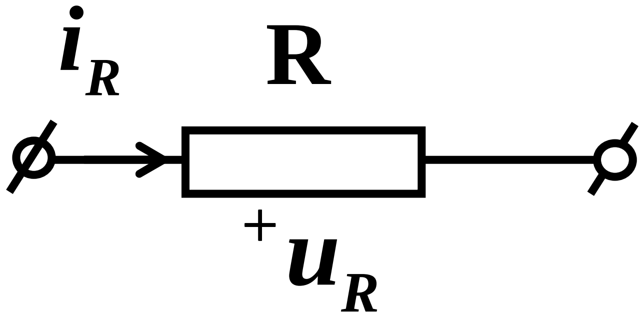
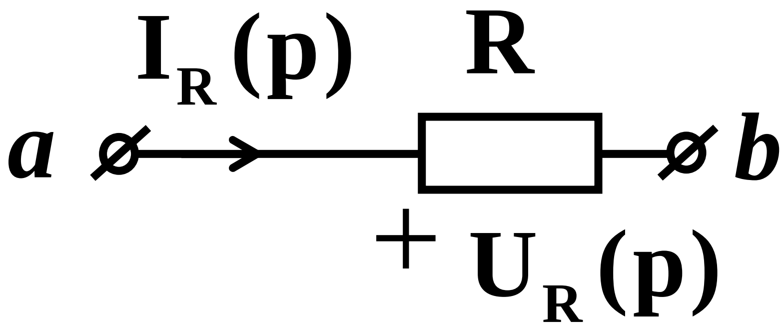
2. Источник тока:



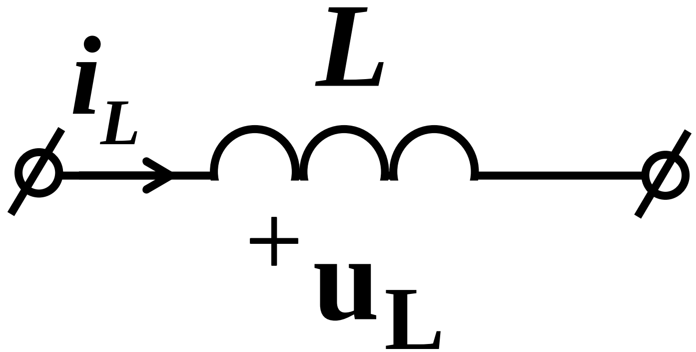
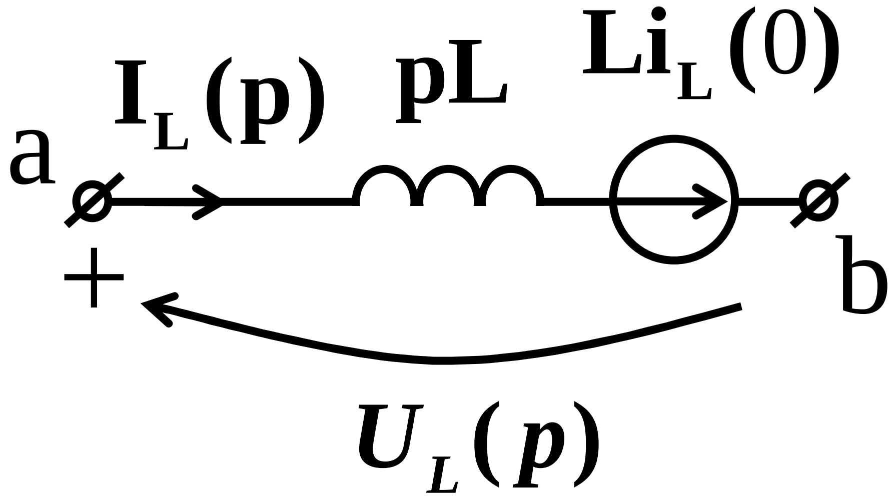
$$J(t) \doteqdot J(p)$$

Пассивные элементы

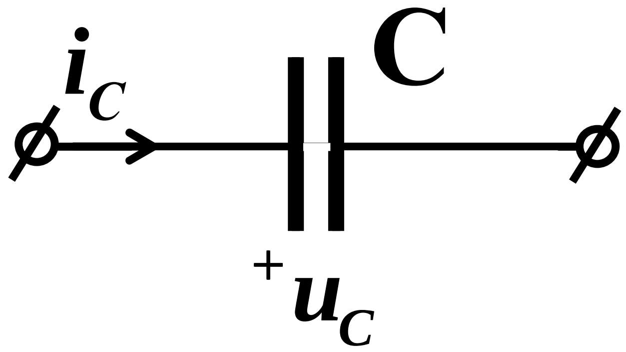
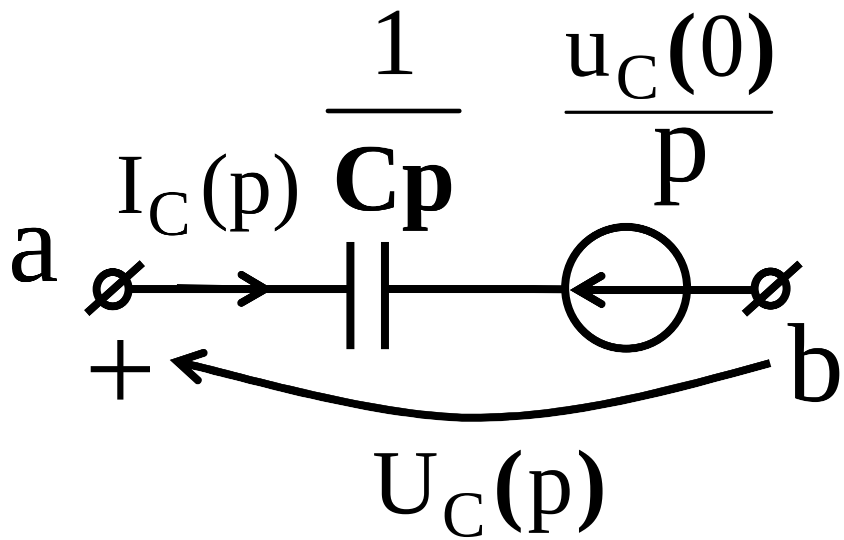
1. Резистивный элемент

Элемент	
Операторная схема	
Закон Ома	$U_R(p) = R \cdot I_R(p)$

2. Индуктивный элемент

Элемент	
Операторная схема	
Закон Ома	$U_L(p) = Lp \cdot I_L(p) - L \cdot i_L(0_+)$

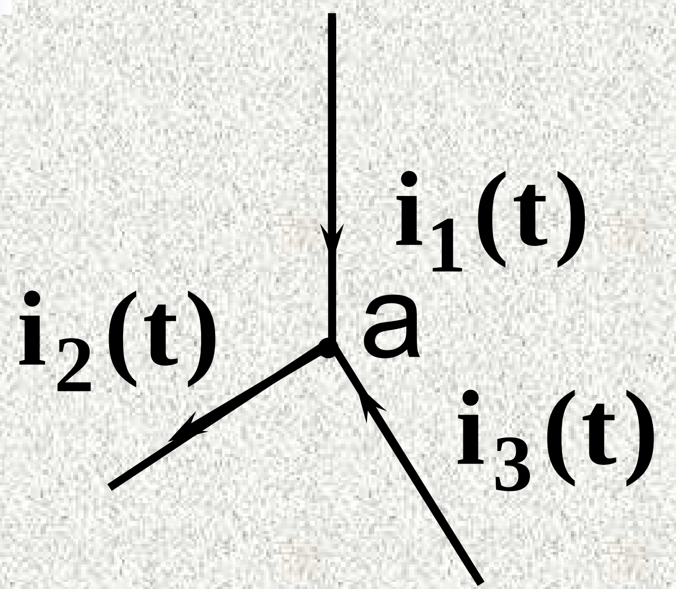
3. Емкостный элемент

Элемент	
Операторная схема	
Закон Ома	$U_C(p) = \frac{1}{Cp} \cdot I_C(p) + \frac{u_C(0_+)}{p}$

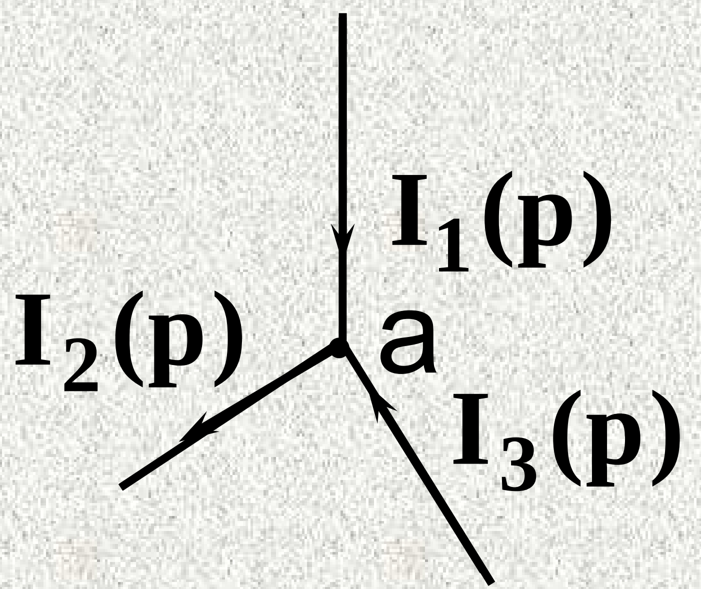
Законы Ома и Кирхгофа в операторной форме аналогичны этим законам на постоянном токе

А. Первый закон Кирхгофа в операторной форме

Например:



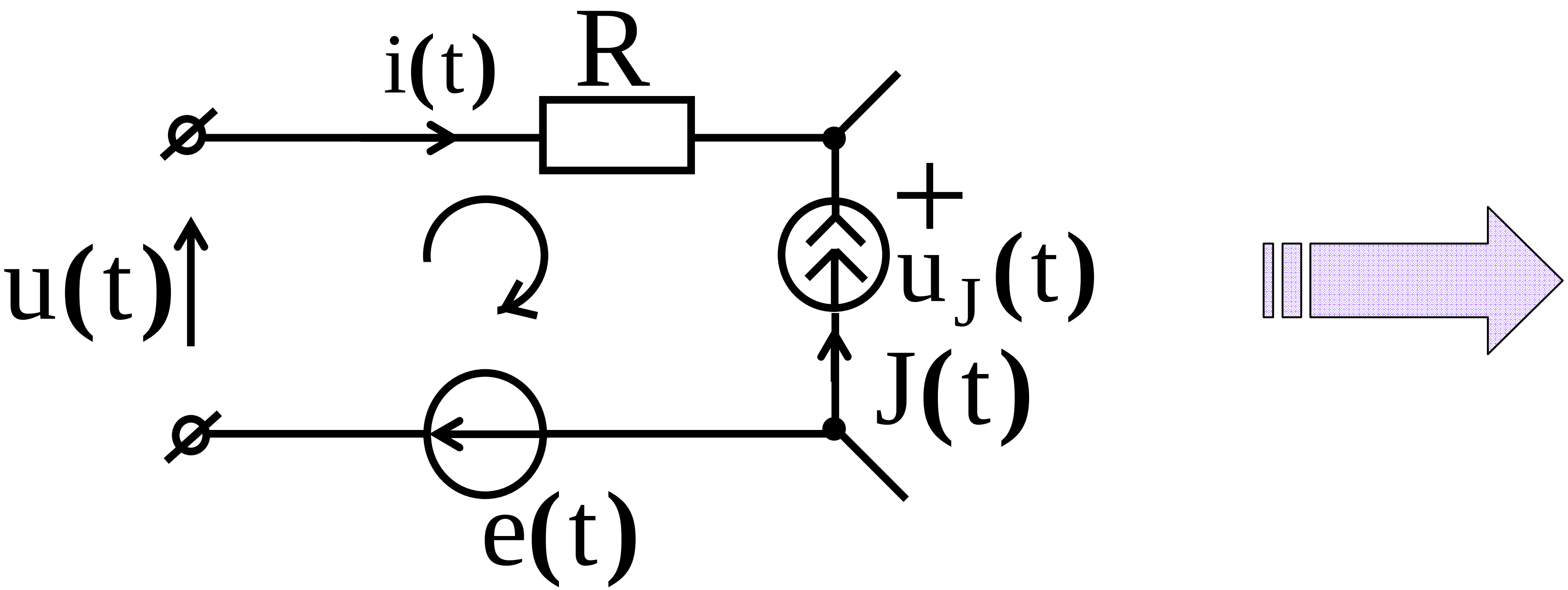
$$-i_1(t)+i_2(t)-i_3(t)=0$$



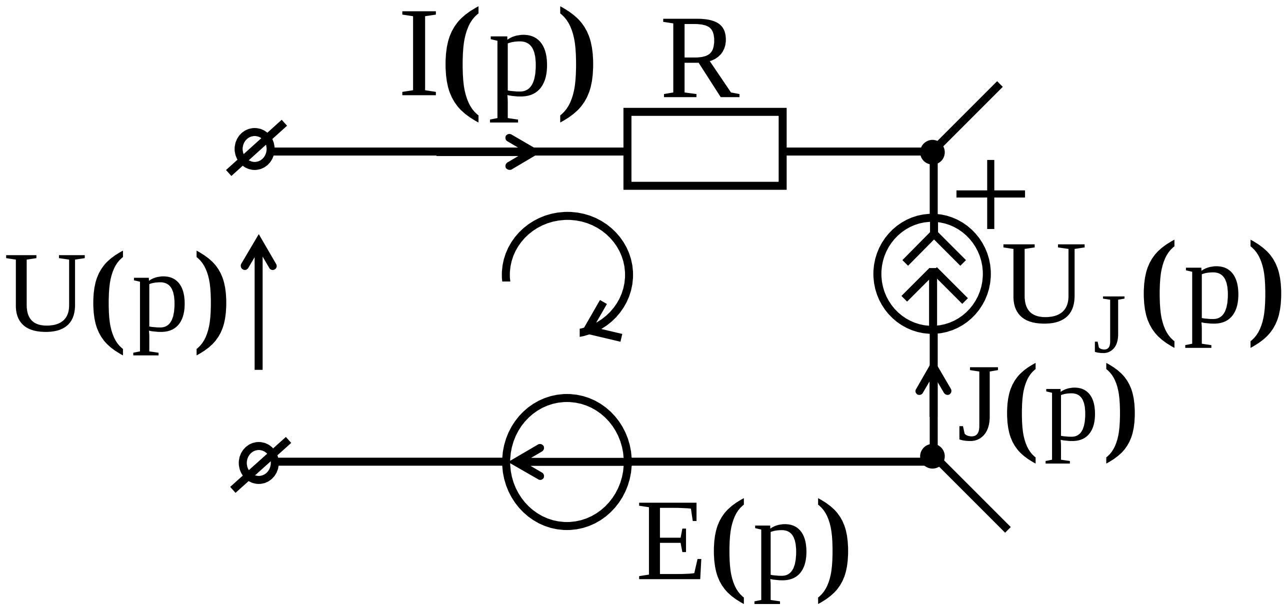
$$-I_1(p)+I_2(p)-I_3(p)=0$$

В. Второй закон Кирхгофа в операторной форме

Например:



$$R\,i(t) = u(t) + e(t) - u_J(t)$$



$$R\,I(p) = U(p) + E(p) - U_J(p)$$

Поэтому к операторным схемам замещения применимы те же методы расчета, но в операторной форме

- Метод законов Кирхгофа
- Метод контурных токов
- Метод узловых потенциалов

- Метод наложения
- Метод эквивалентного генератора
- Метод преобразований

Для определения оригинала **f(t)** используется обратное преобразование Лапласа

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\delta - j\infty}^{\delta + j\infty} F(p) \cdot e^{pt} dp$$

- обратное преобразование Лапласа

- На основании обратного преобразования Лапласа получена теорема разложения

Если

$$F(p) = \frac{D(p)}{B(p)} = \frac{d_0 + d_1 p + d_2 p^2 + \ldots + d_m p^m}{b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \ldots + b_n p^n}$$

причем

- **$m<n$**
- при **$B(p)=0$** корни различны
- корни **$D(p)=0$** и **$B(p)=0$** различны

Тогда

$$f(t) = \sum_{к=1}^{n} \frac{D(p_к)}{B'(p_к)} \cdot e^{p_к t}$$

Где

- $p_к$ корни $B(p)=0$
- $$B'(p_к) = \left.\frac{dB(p)}{dp}\right|_{p=p_к}$$

При комплексно-сопряженных корнях

$$f(t) = 2\,\mathrm{Re}\left[\frac{D(p_1)}{B'(p_1)} \cdot e^{p_1 t}\right]$$

Порядок расчета переходных процессов операторным методом

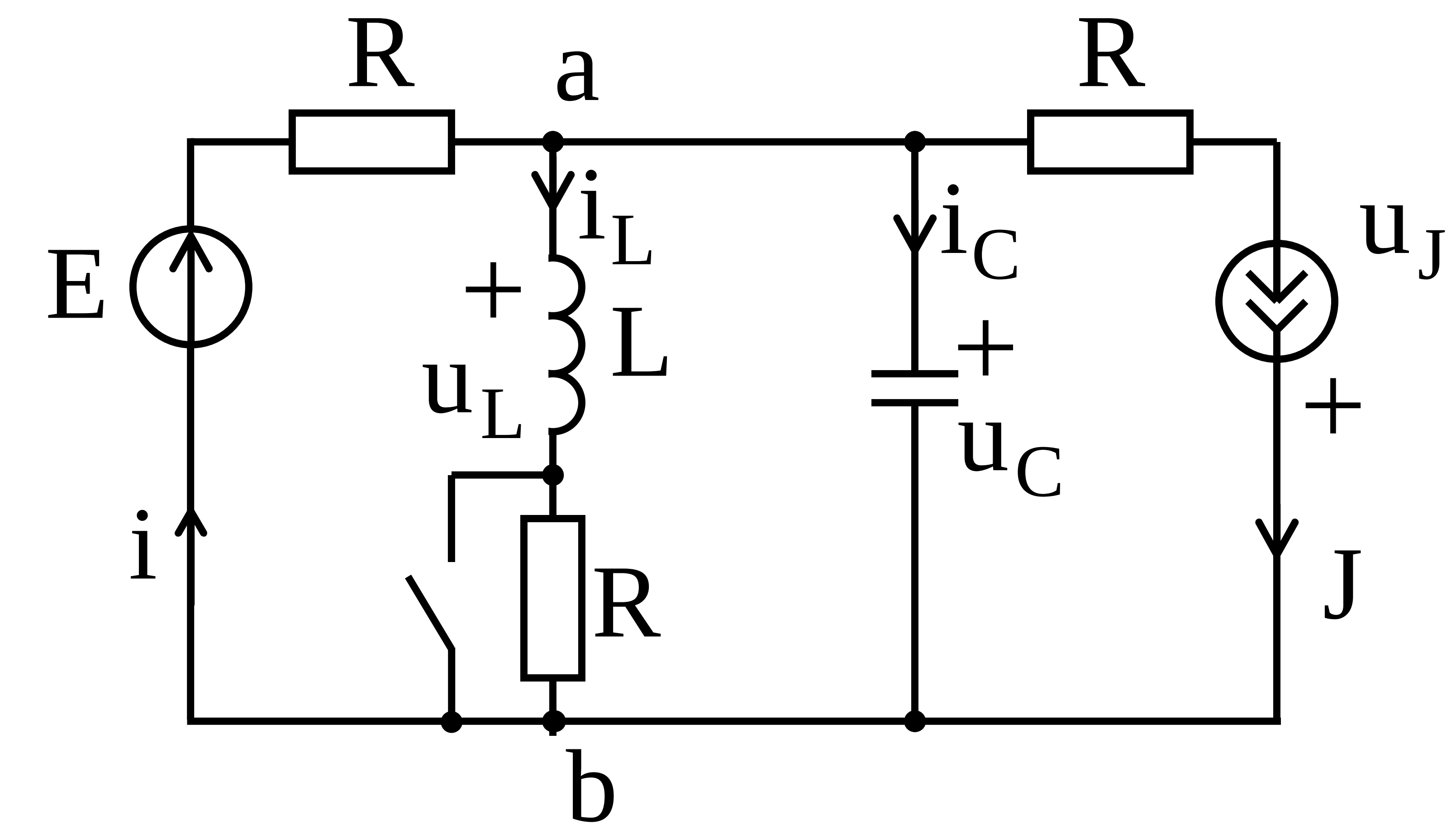
1. Определяются независимые начальные условия

$$\mathbf{i_L(0_-) = i_L(0)} \qquad \mathbf{u_C(0_-) = u_C(0)}$$

2. Для схемы после коммутации изображается операторная схема, которая рассчитывается любым методом в операторной форме

3. По теореме разложения определяются напряжения и токи переходного процесса в функции времени

Пример:



Дано:

$E = 100$ В $J = 2$ А

$R = 100$ Ом $L = 1$ Гн

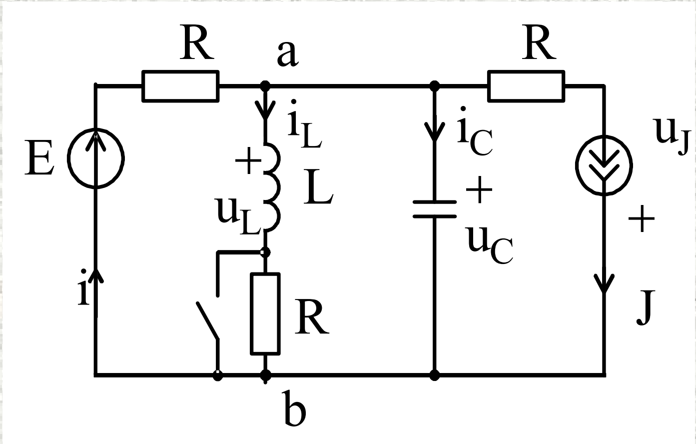
$C = 50$ мкФ

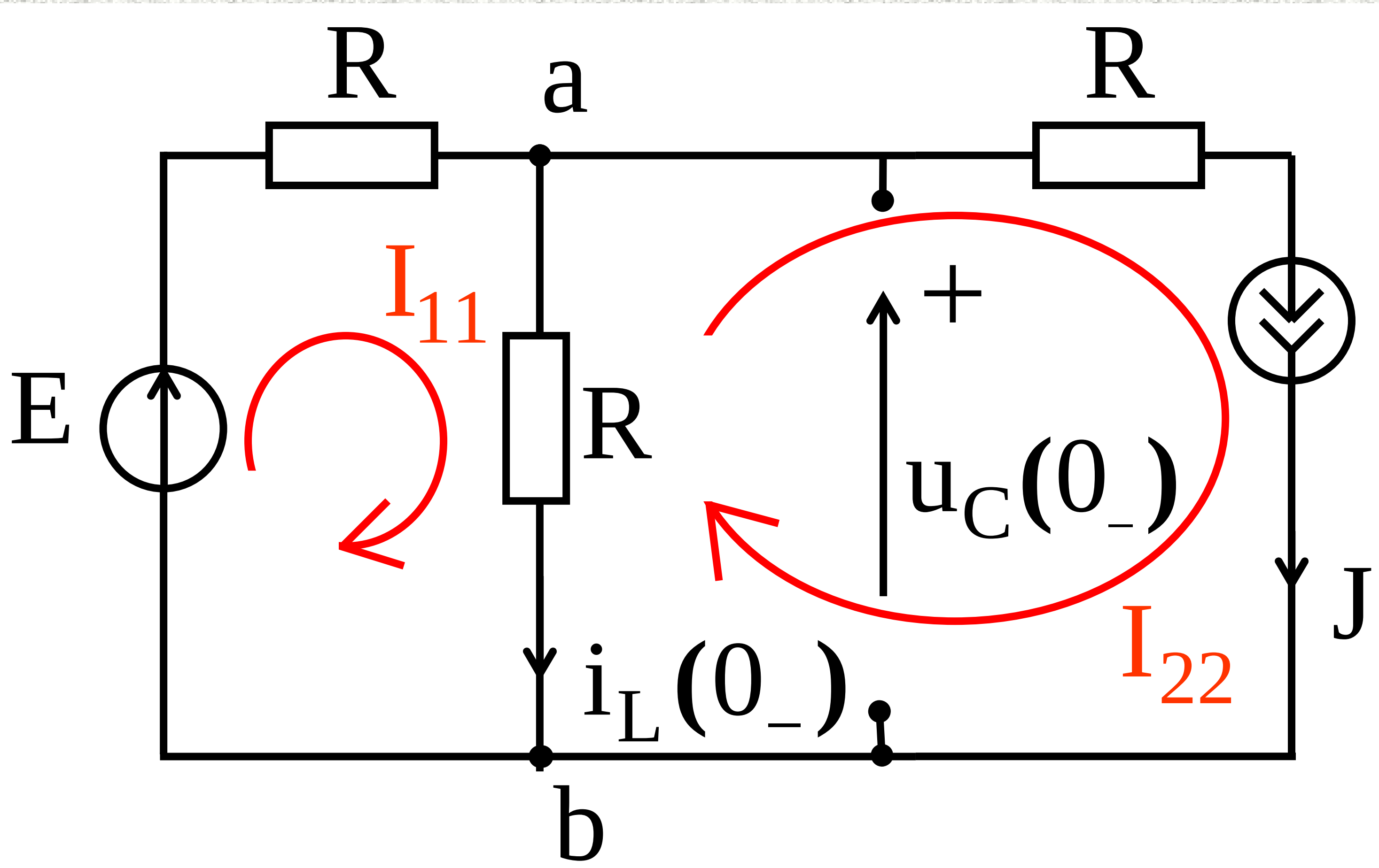
Определить: $i(t) = ?$

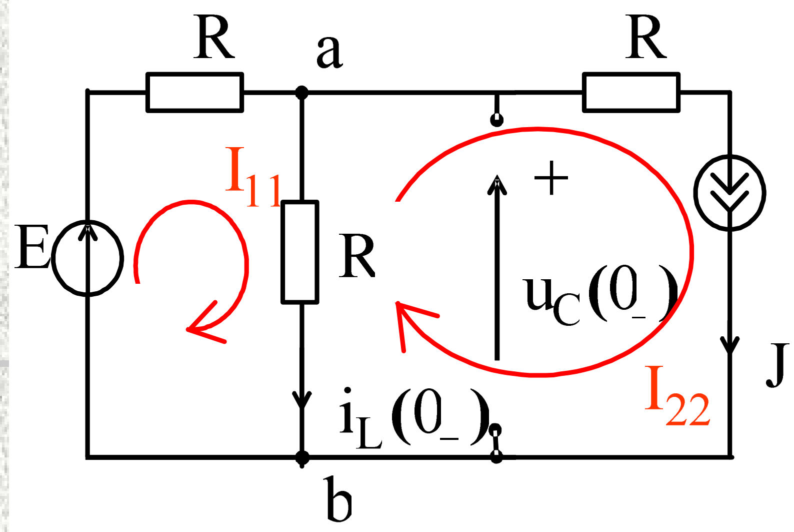
$u_J(t) = ?$

1. Определяем независимые начальные условия $(t = 0\_)$:

$$i_L(0\_) = ? \qquad u_C(0\_) = ?$$

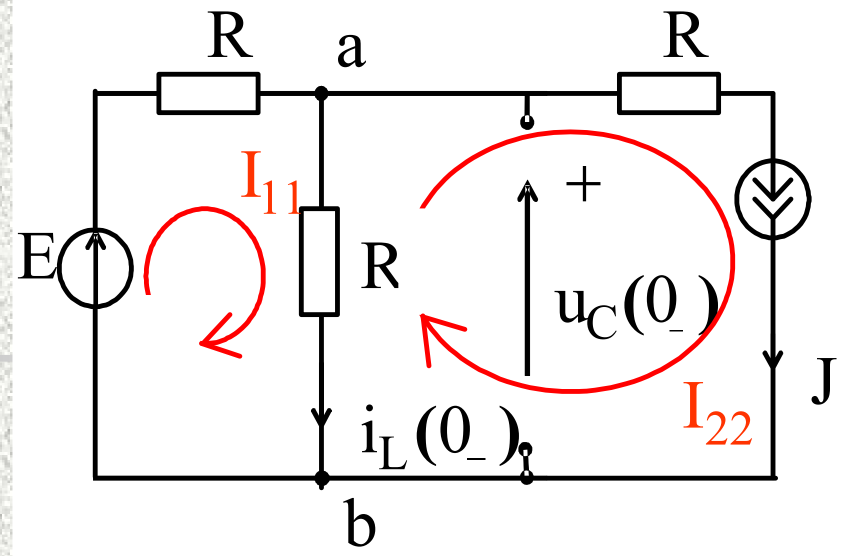

R
a
R
E
i_L
+
L
u_L
i_C
+
u_C
u_J
+
i
R
J
b


R
a
R
I_{11}
+
E
R
$u_C(0_-)$
J
$i_L(0_-)$
I_{22}
b



$$i_L(0\_) = I_{11} - I_{22} = -0{,}5 \text{ A}$$

$$u_C(0\_) = i_L(0\_)R = -50 \text{ B}$$



$$I_{22} = J = 2\ \text{A}$$

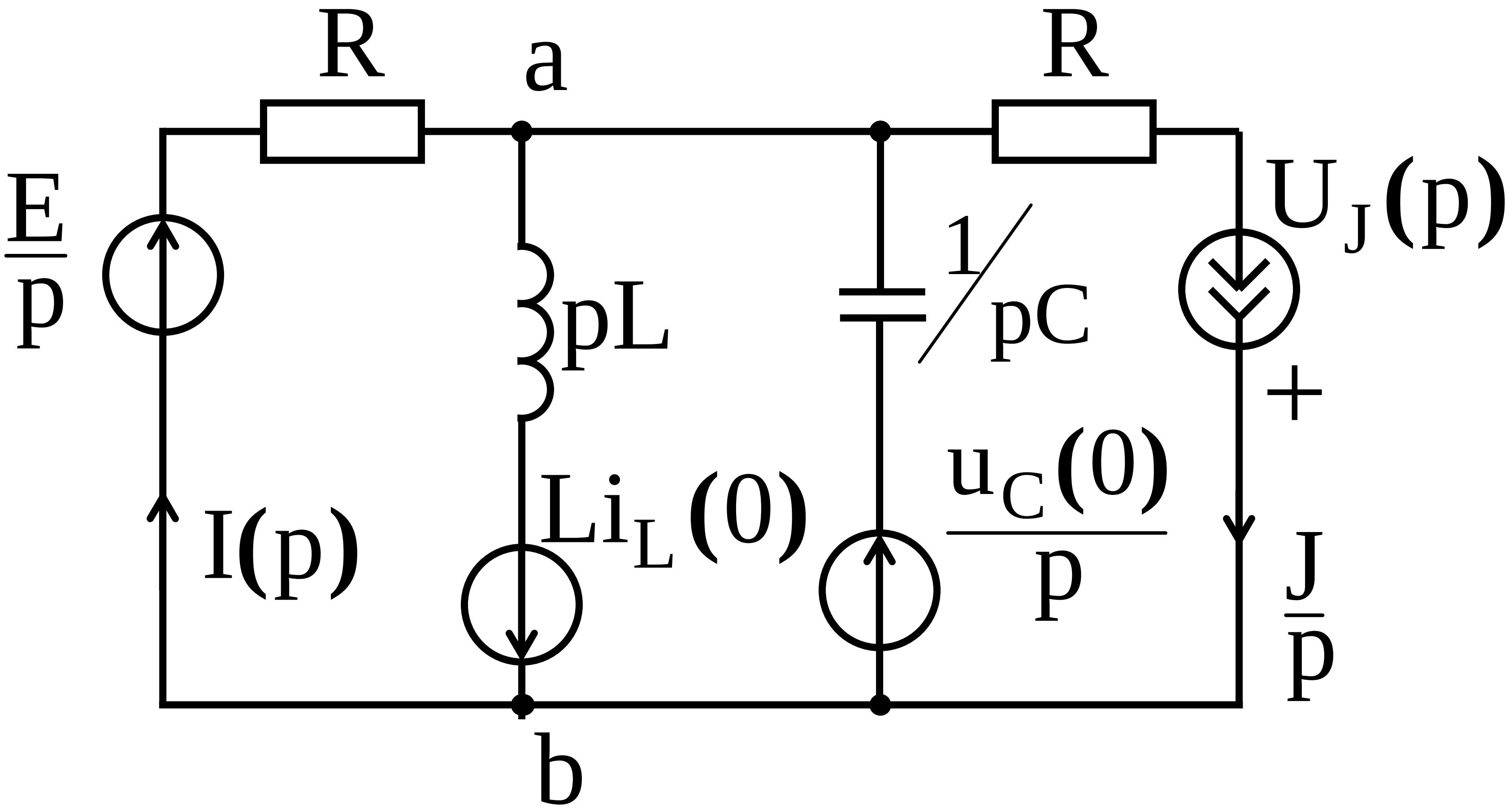
$$I_{11} \cdot 2R - I_{22}R = E$$

$$I_{11} = \frac{E + JR}{2R} = 1{,}5\ \text{A}$$

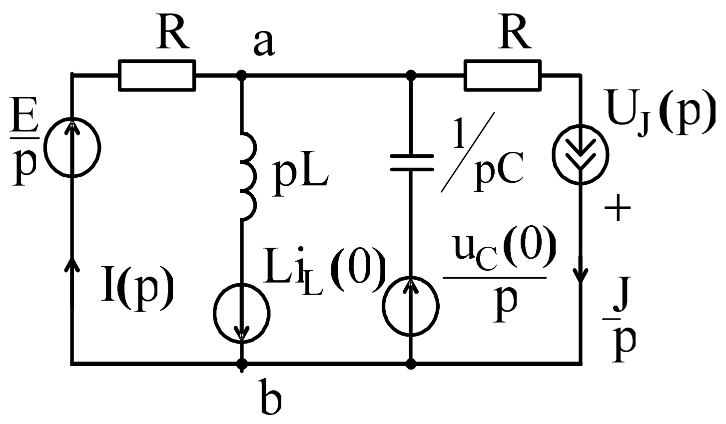
2. Операторная схема после коммутации

$$i_L(0) = i_L(0_-) = -0{,}5 \text{ A}$$

$$u_C(0) = u_C(0_-) = -50 \text{ B}$$


R
a
R
E/p
pL
1/pC
U_J(p)
+
I(p)
Li_L(0)
u_C(0)/p
J/p
b

$$\varphi_b(p) = 0$$

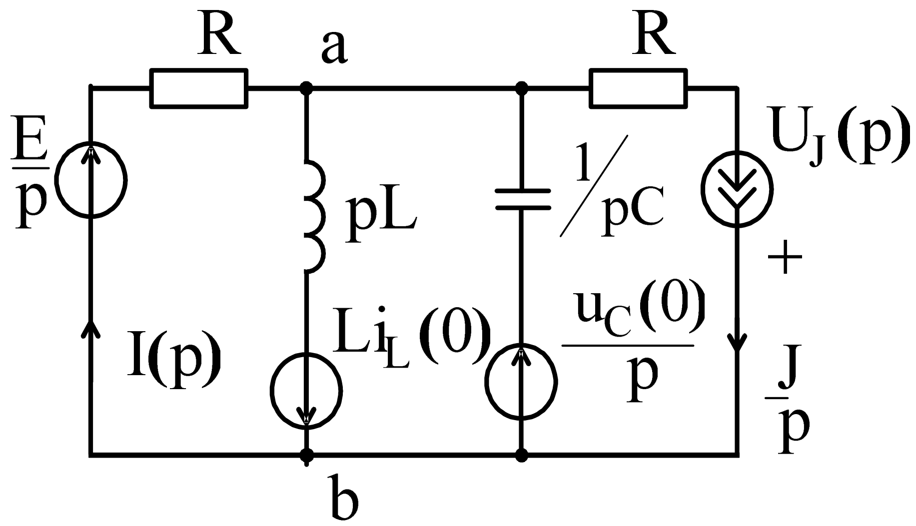


$$\varphi_a(p)\left[\frac{1}{R}+\frac{1}{pL}+\frac{1}{1/pC}\right]=$$

$$=\frac{E}{pR}-\frac{Li_L(0)}{pL}+\frac{u_C(0)}{p\left(1/pC\right)}-\frac{J}{p}$$

$$\Longrightarrow \varphi_a(p) =$$

$$= \frac{EL - RLi_L(0) - RLJ + RLCu_C(0)p}{RLCp^2 + Lp + R}$$



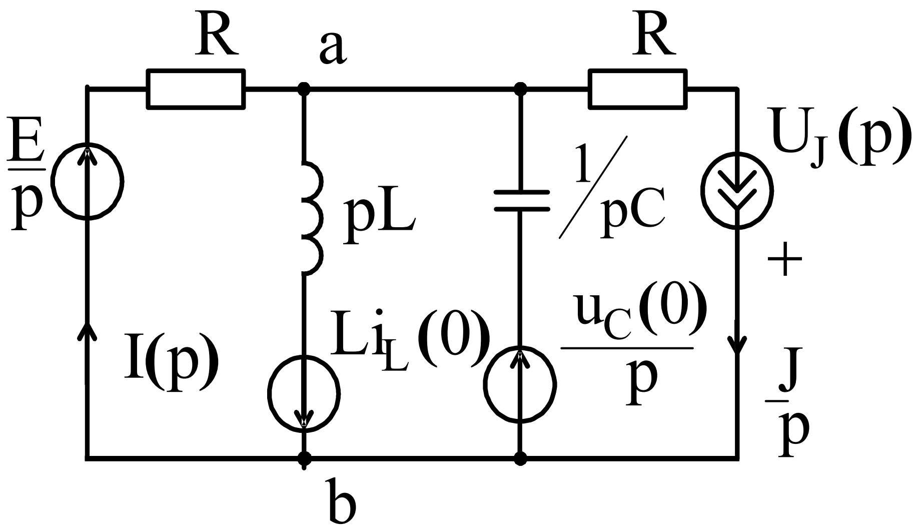
$$I(p)=\frac{\varphi_b(p)-\varphi_a(p)+E/p}{R}=$$

$$=\frac{E}{Rp}-\frac{\varphi_a(p)}{R}$$

$$\Longrightarrow \quad I(p) = \frac{E}{Rp} -$$

$$- \frac{{}^{EL}\!/_{R} - Li_L(0) - JL + LCu_C(0)p}{RLCp^2 + Lp + R}$$

По 2 закону Кирхгофа



$$\varphi_a(p) - \varphi_b(p) + U_J(p) = R \cdot \frac{J}{p}$$

$$\Rightarrow \quad U_J(p) = \frac{RJ}{p} - \varphi_a(p)$$

Или

$$\mathbf{I(p)=\frac{1}{p}+\frac{0{,}5+25\cdot 10^{-4}p}{0{,}005p^{2}+p+100}=}$$

$$=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{p}}+\frac{D_{\mathbf{1}}(\mathbf{p})}{B_{1}(\mathbf{p})}$$

$$\mathrm{U_J(p)} = \frac{200}{\mathrm{p}} + \frac{50 + 0,25\mathrm{p}}{0,005\mathrm{p}^2 + \mathrm{p} + 100} =$$

$$= \frac{200}{\mathrm{p}} + \frac{D_2(\mathrm{p})}{B_2(\mathrm{p})}$$

3. По теореме разложения определяем

$$i(t) \quad \text{и} \quad u_J(t)$$

$$\mathbf{i(t) = 1 + \sum_{k=1}^{n=2} \frac{D_1(p_k)}{B_1'(p_k)} e^{p_k t} =}$$

$$\mathbf{= 1 + 0,707e^{-100t} \cdot \cos(100t - 45^\circ),\ A}$$

$$u_J(t) = 200 + \sum_{k=1}^{n=2} \frac{D_2(p_k)}{B_2^{'}(p_k)} e^{p_k t} =$$

$$= 200 + 70{,}7e^{-100t} \cdot \mathbf{cos(}100t - 45^\circ\mathbf{),}\ \text{B}$$

Достоинства операторного метода

1. Не нужно определять ЗНУ, принужденные составляющие, корни характеристического уравнения и постоянные интегрирования

2. Можно использовать известные методы расчета операторных схем замещения

3. Применение ЭВМ для теоремы разложения позволит рассчитывать переходные процессы в цепях высокого порядка ($n \geq 2$)

Документ Mathcad

$J := 2 \qquad L := 1 \quad R := 100 \quad c := 50 \cdot 10^{-6} \qquad E := 100$

4.2. **Операторный метод, постоянный источник, цепь второго порядка**

4.2.1. Определяем независимые начальные условия

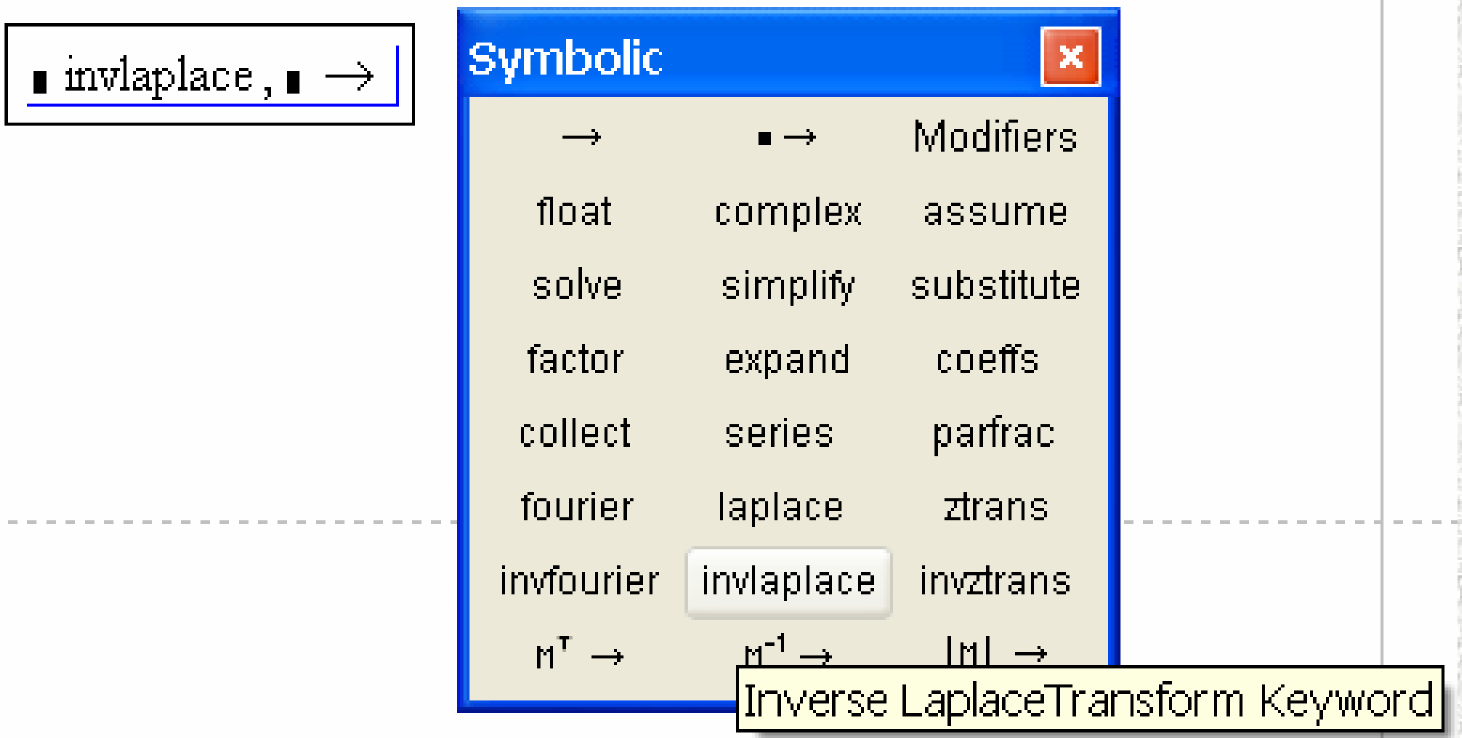
$$iLo := \frac{E + J \cdot R}{2 \cdot R} - J \qquad iLo = -0.5$$

$$Uco := iLo \cdot R \qquad Uco = -50$$

4.2.2. Определяем изображение искомой функции

$$UJ(p) := \frac{J}{p}\cdot R - \frac{\dfrac{E}{p\cdot R} + \dfrac{Uco}{p\cdot\dfrac{1}{c\cdot p}} - \dfrac{J}{p} - \dfrac{L\cdot iLo}{L\cdot p}}{\left(\dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{L\cdot p} + \dfrac{1}{\dfrac{1}{c\cdot p}}\right)}$$

$$UJ(p)\ \text{simplify} \rightarrow 250\cdot\frac{200\cdot p + 16000 + p^{2}}{p\cdot\left(200\cdot p + 20000 + p^{2}\right)}$$



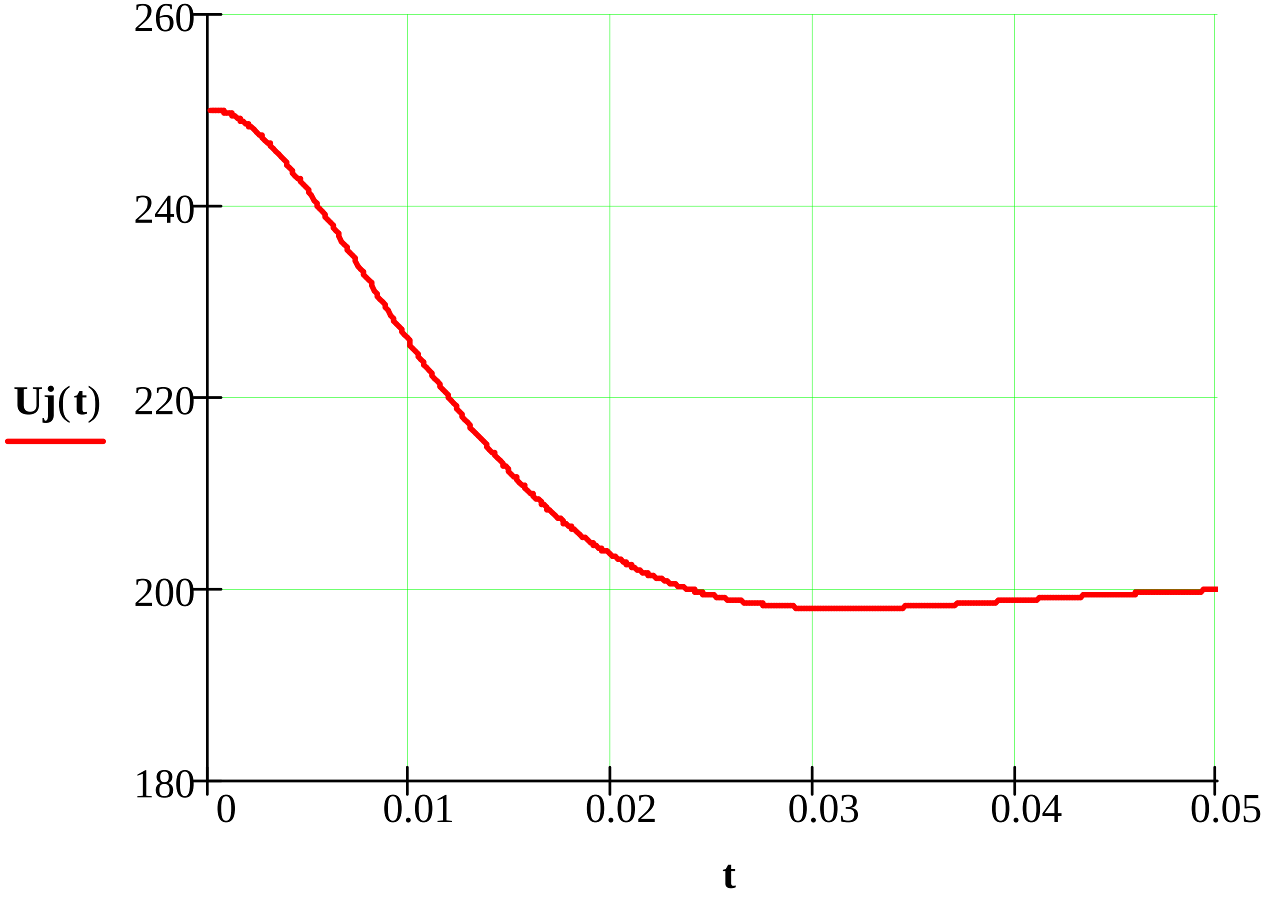
1.2.3. Определяем оригинал искомой функции

$$Uj(t) := UJ(p)\ \mathrm{invlaplace}, p\ \rightarrow 200 + 50\cdot\exp(-100\cdot t)\cdot\cos(100\cdot t) + 50\cdot\exp(-100\cdot t)\cdot\sin(100\cdot t)$$

$$Uj(t) \rightarrow 200 + 50\cdot\exp(-100\cdot t)\cdot\cos(100\cdot t) + 50\cdot\exp(-100\cdot t)\cdot\sin(100\cdot t)$$

$$Uj(0) = 250$$

$$t := 0, 0.01\cdot\frac{1}{100} .. 5\cdot\frac{1}{100}$$



Используя теорему разложения, определить оригинал

Пример 2

$$F(p) = U(p) = \frac{2 \cdot 10^4 p + 2 \cdot 10^6}{p(p^2 + 200p + 2 \cdot 10^4)} =$$

$$= \frac{D(p)}{B(p)}, \ (Bc)$$

$$B(p) = p(p^2 + 200p + 2 \cdot 10^4) = 0$$

$$p_1 = 0$$

$$p_{2,3} = -100 \pm j100 \left({}^{1}\!\!/\!_{c} \right)$$

$$B(p) = p(p^2 + 200p + 2 \cdot 10^4)$$

$$B'(p) = (p^3 + 200p^2 + 2 \cdot 10^4 p)' =$$

$$= 3p^2 + 400p + 2 \cdot 10^4,$$

тогда

$$u(t) = \sum_{к=1}^{n=3} \frac{D(p_к)}{B'(p_к)} \cdot e^{p_к t}$$

Или

$$u(t) =$$

$$= \frac{2\cdot 10^4 \cdot 0 + 2\cdot 10^6}{0^2 + 400\cdot 0 + 2\cdot 10^4} e^{0\cdot t} +$$

$$+2\,\mathrm{Re}\left[\frac{2\cdot 10^4 \cdot p_2 + 2\cdot 10^6}{3{p_2}^2 + 400p_2 + 2\cdot 10^4} e^{p_2 t}\right] =$$

T.e.

$$u(t) = 100 + 2\,\mathrm{Re}\left[70,5 e^{-j135^\circ} e^{(-100+j100)t} \right] =$$

$$= 100 + 2\,\mathrm{Re}\left[70,5 e^{j(-135^\circ+100t)} e^{-100t} \right] =$$

$$= 100 + 141 e^{-100t} \cos(100t - 135^\circ), \;\; B$$

Пример 3

$$\mathbf{I(p)} = \frac{\mathbf{p^2 + p + 0,5}}{\mathbf{p(p^2 + 2p + 1)}} =$$

$$= \frac{\mathbf{D(p)}}{\mathbf{B(p)}}, \ \mathbf{(Ac)}$$

$$B(p) = p(p^2 + 2p + 1) = 0$$

$$p_1 = 0$$

$$p_2 = p_3 = -1\left(1/c\right)$$

Используем метод неопределённых коэффициентов

$$\frac{a}{p}+\frac{b}{p+1}+\frac{c}{(p+1)^2}=$$

$$=\frac{(a+b)p^2+(2a+b+c)p+a}{p(p+1)^2}=$$

Сравнивая коэффициенты числителей, находим

$$\begin{cases} (a+b)=1 \\ (2a+b+c)=1 \\ a=0,5 \end{cases} \qquad \begin{cases} a=0,5 \\ b=0,5 \\ c=-0,5 \end{cases}$$

Оригиналы каждой из простых дробей определим по таблице

$$i(t) = 0,5 + 0,5e^{-t} - 0,5\,t\,e^{-t} \quad (A)$$

Если

$$f(t) = F_m = const,$$

то

$$F(p) = \int_0^\infty F_m e^{-pt} dt = \frac{F_m}{(-p)} e^{-pt} \Bigg|_0^\infty = \frac{F_m}{p}$$

Аналогично:

$$f(t) = F_m e^{\delta t} \;\dot{=}\; \frac{F_m}{p - \delta}$$

$$f(t) = F_m t \;\dot{=}\; \frac{F_m}{p^2}$$

$$f(t) = F_m \sin(\omega t + \alpha) \risingdotseq$$

$$\risingdotseq F_m \frac{p \sin\alpha + \omega \cos\alpha}{p^2 + \omega^2}$$

и т.д.

$$f'(t) \doteq \int_0^\infty \frac{df(t)}{dt} e^{-pt} dt =$$

$$= \int_0^\infty e^{-pt} df(t) = f(t) e^{-pt} \Big|_0^\infty +$$

$$+ p \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt = -f(0) + pF(p)$$

$$f''(t) \doteq p^2F(p) - pf(0_+) - f'(0_+)$$

$$f'''(t) \doteq p^3F(p) - p^2f(0_+) - pf'(0_+) -$$

$$- f''(0_+)$$

и т.д.

$$\int_0^\infty \left(\int_0^t f(t')dt' \right) e^{-pt} dt =$$

$$-\frac{1}{p}\int_0^\infty \left(\int_0^t f(t')dt' \right) d\left(e^{-pt}\right) = \frac{e^{-pt}\int_0^t f(t')dt'}{p}\Big|_0^\infty$$

$$+\frac{\int_0^t f(t)e^{-pt}dt}{p} = \frac{F(p)}{p}$$

Т.о мы убедились, что линейные дифференциальные уравнения могут быть заменены алгебраическими уравнениями