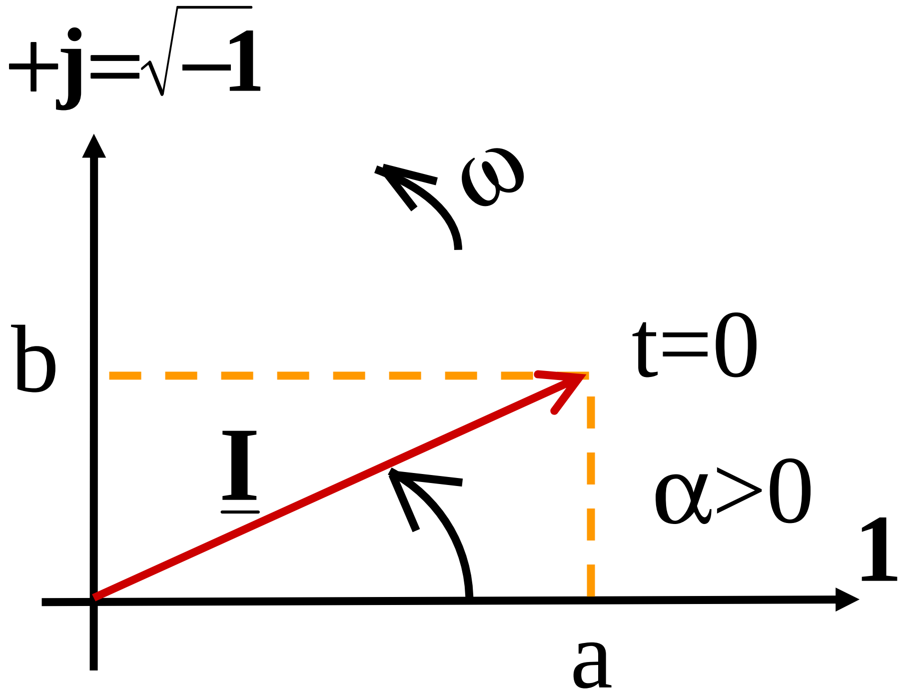
1 лекция

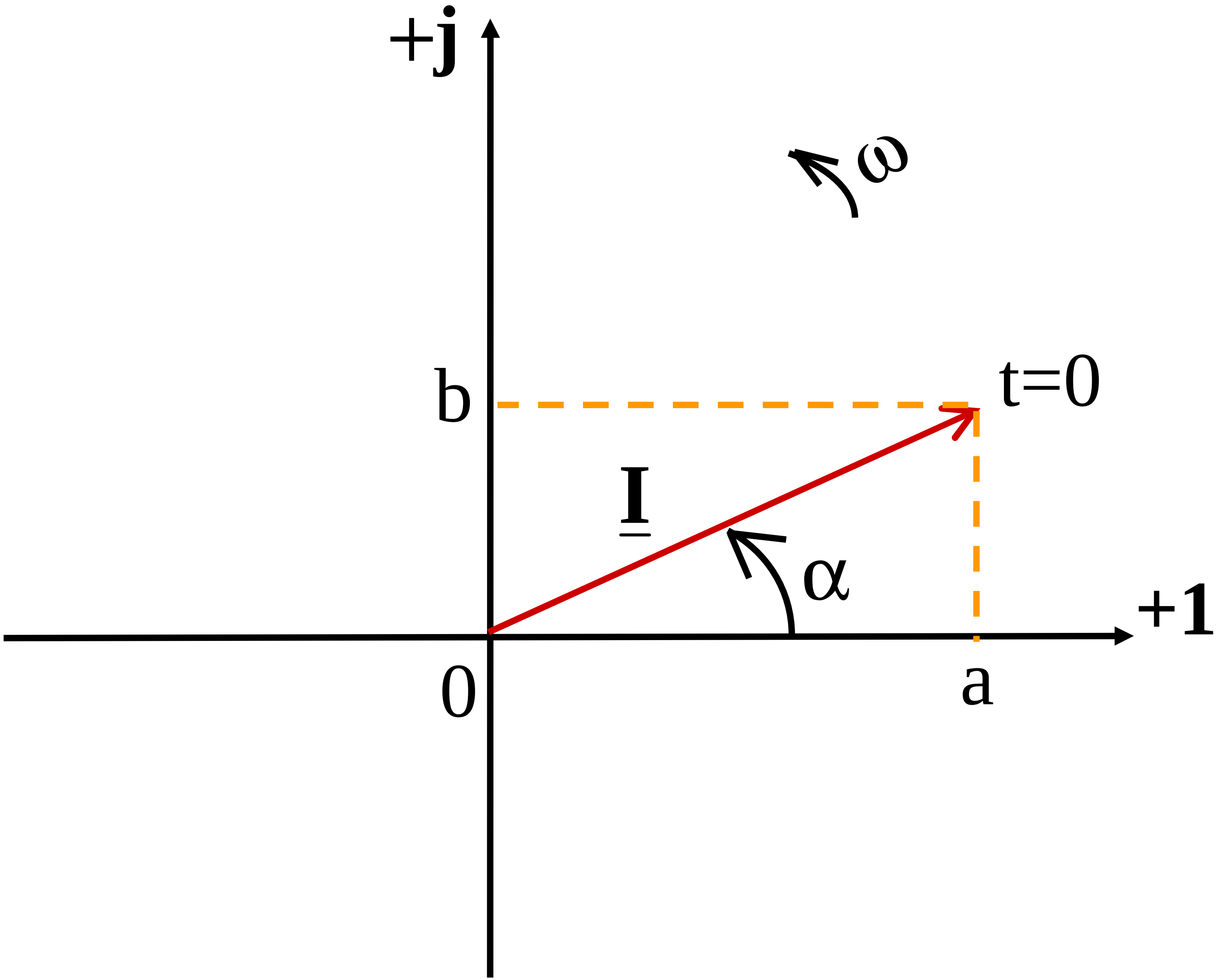
Колчанова Вероника Андреевна,
к.т.н., доцент каф. ТОЭ

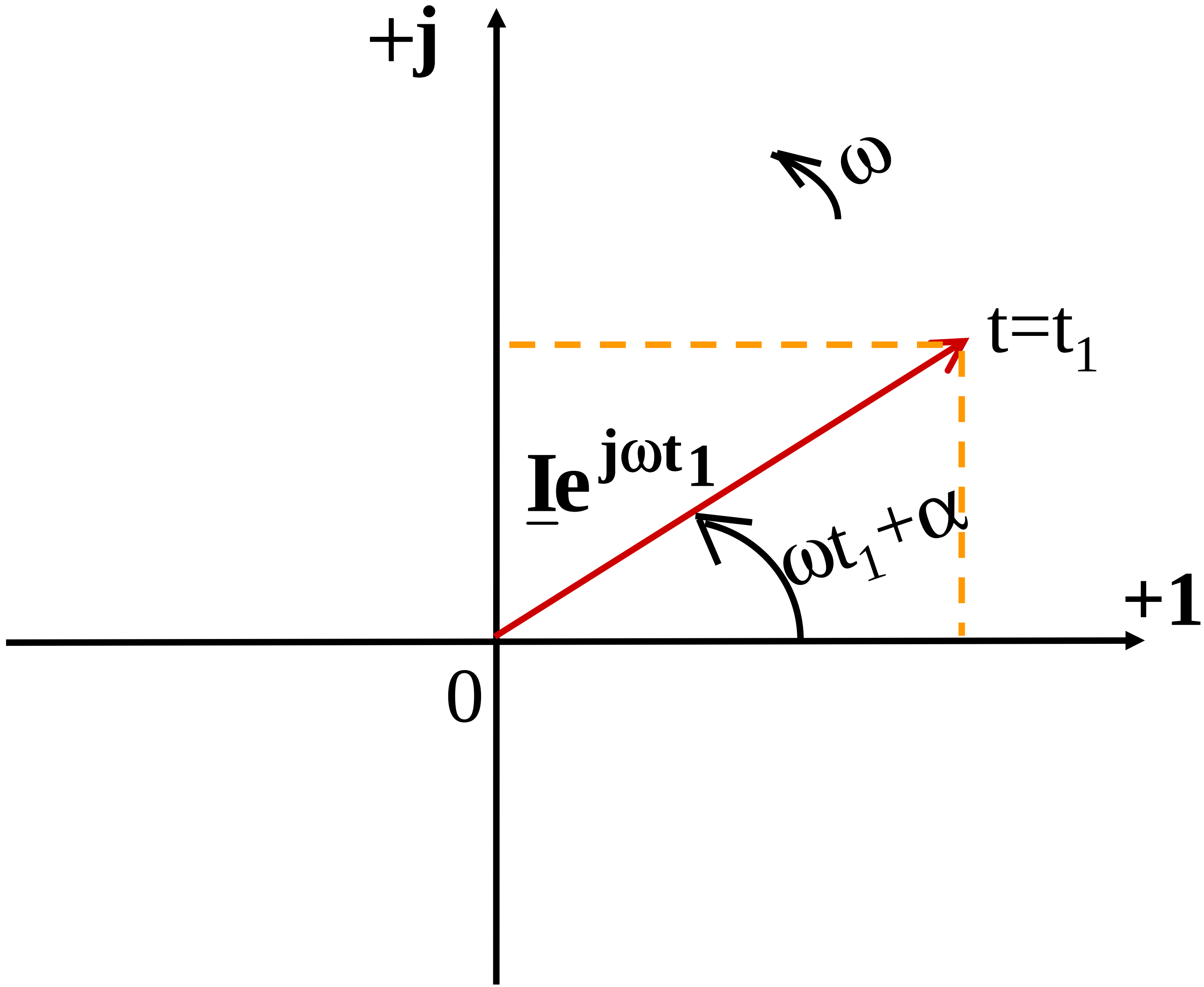
Символический метод

- Символический метод применяется для расчета линейных цепей с гармоническими токами и напряжениями. Этот метод основан на изображении гармонических величин комплексными числами.
- При этом проекция вращающегося вектора на любой из диаметров окружности, описываемая его концом, является гармонической функцией времени. Следовательно, синусоидальная величина может быть изображена вращающимся вектором на комплексной плоскости, причем этот вектор записывается в показательной, тригонометрической и алгебраической формах.

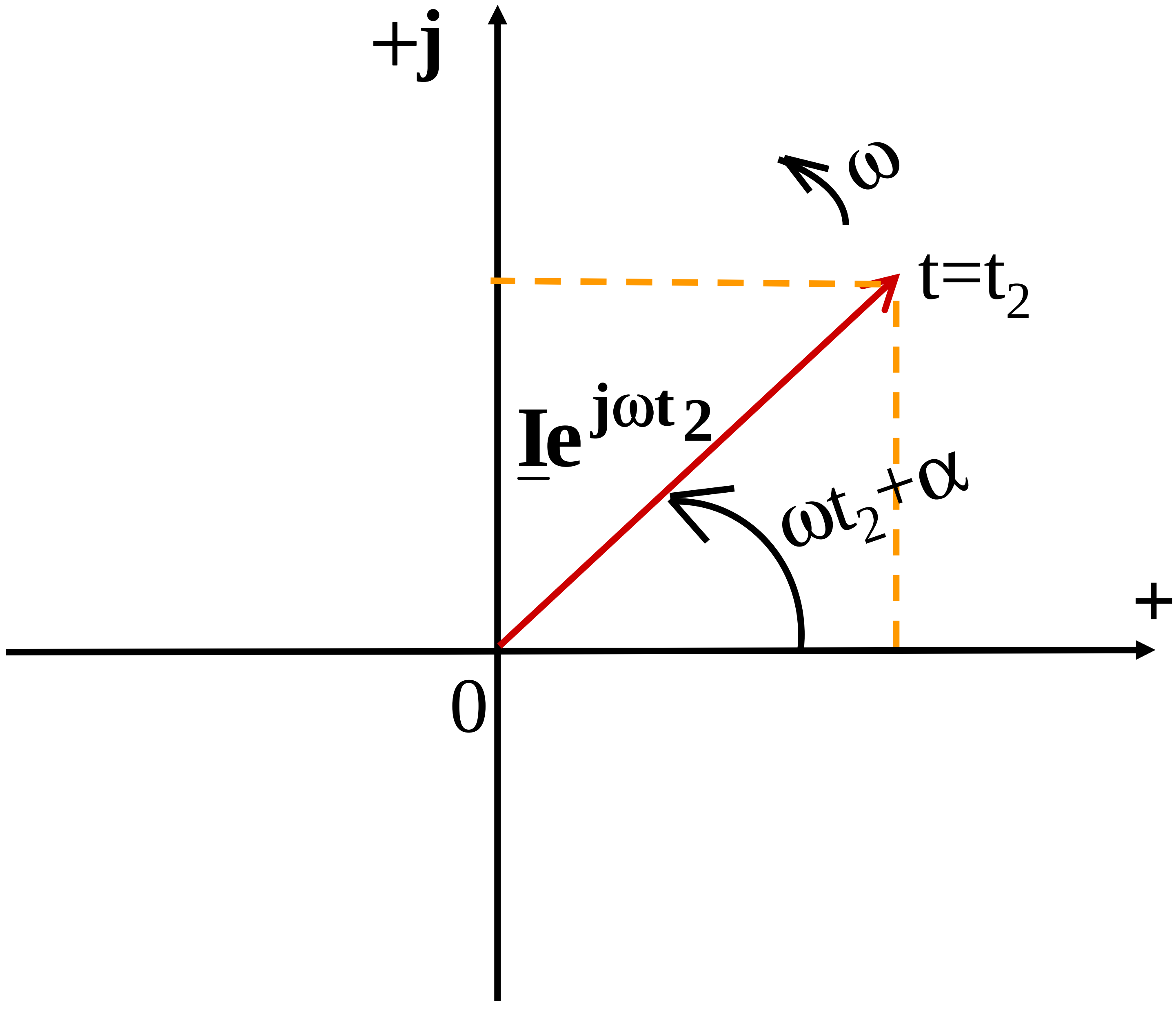


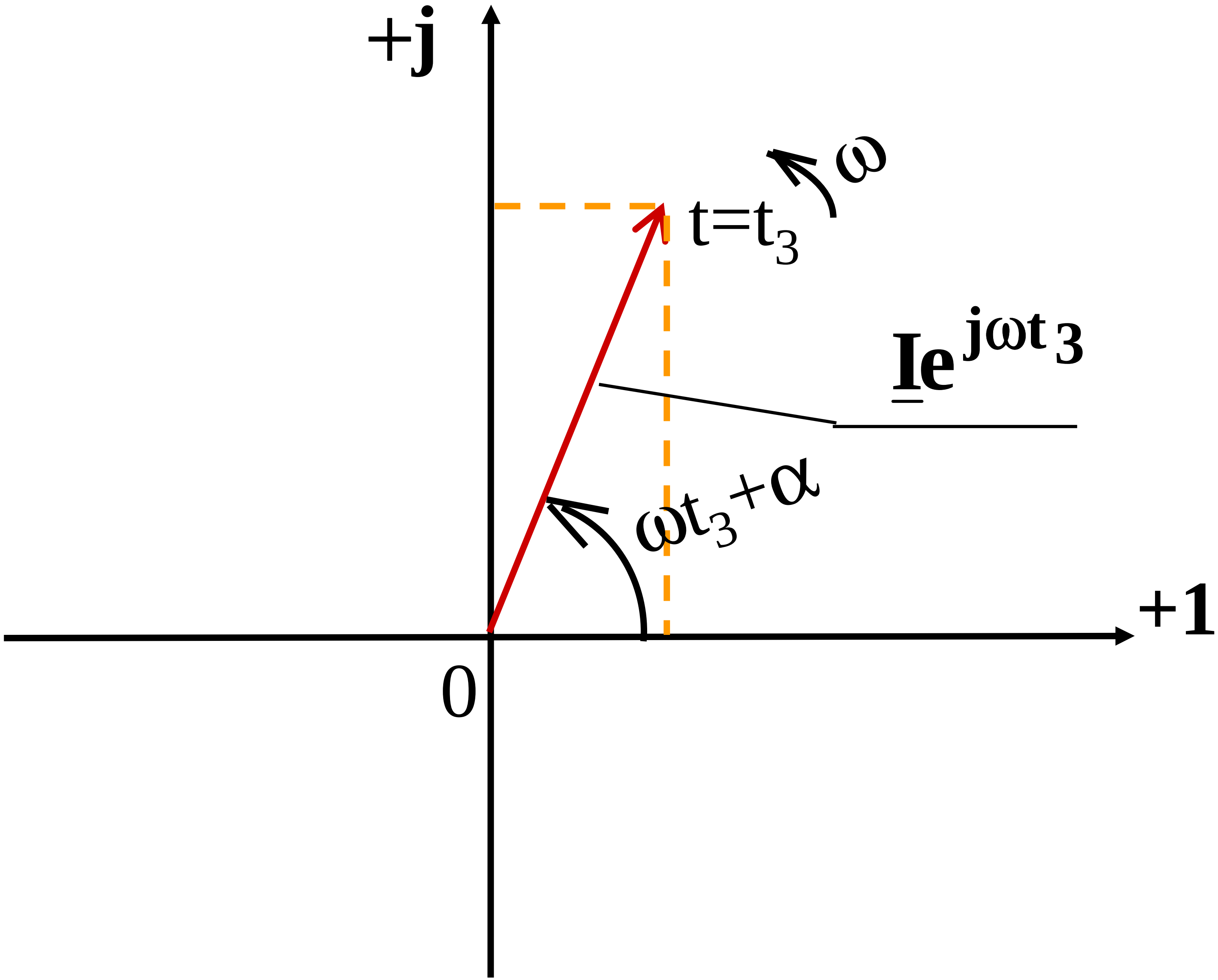
$\underline{\mathbf{I}}$ – комплекс действующего значения тока

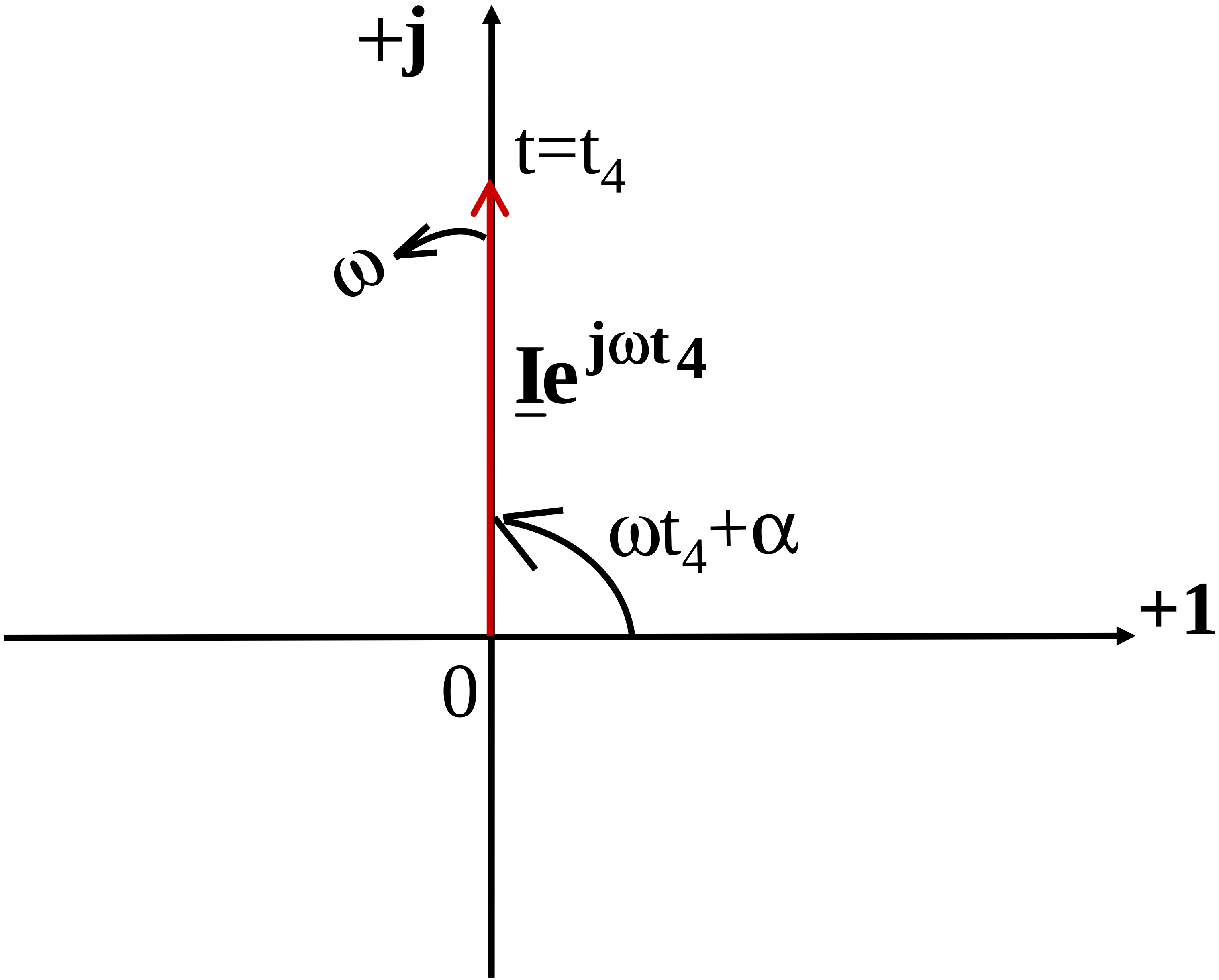

+j
ω
b
t=0
I
α
+1
0
a

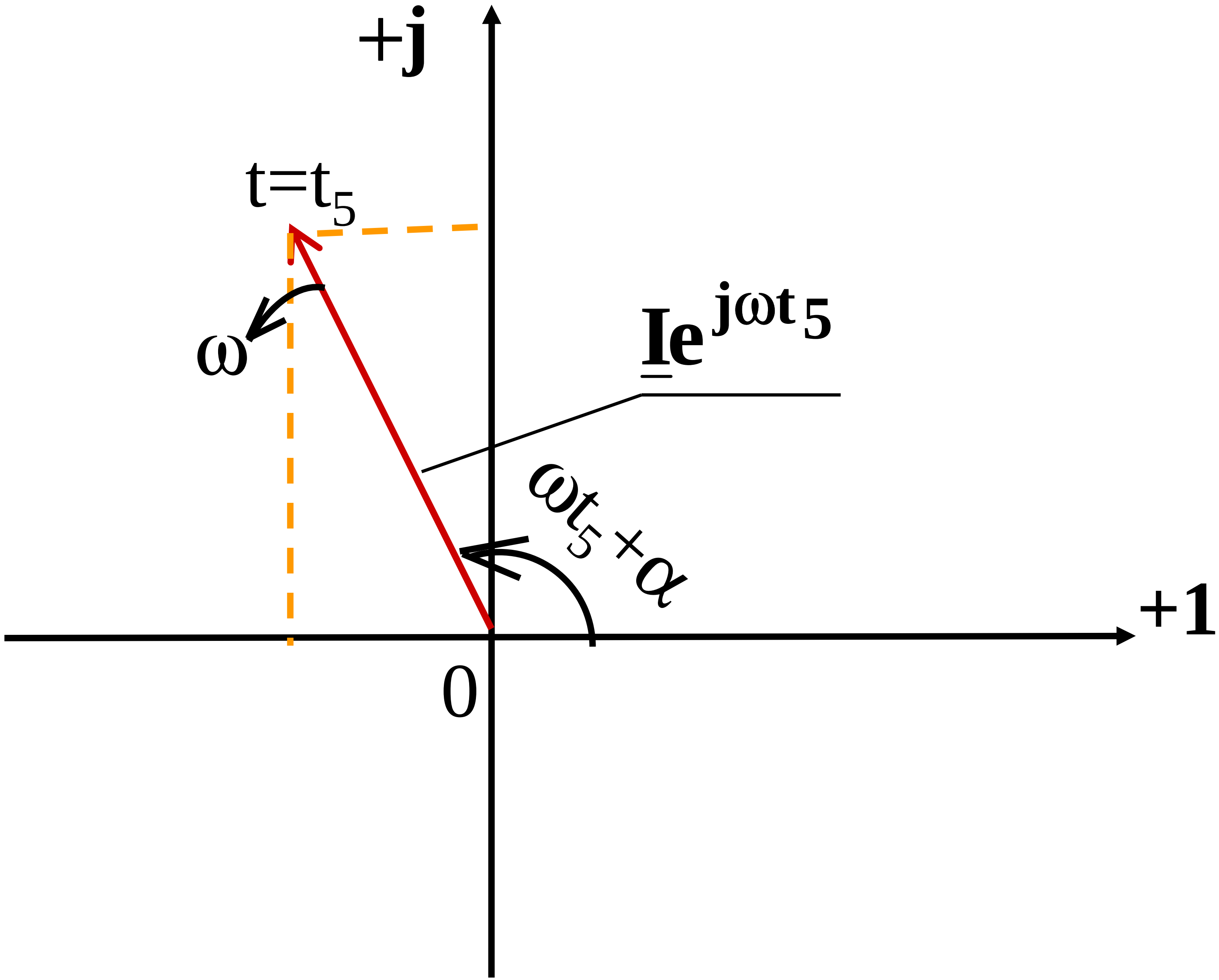


+j
ω
t=t1
Ie jωt1
ωt1+α
+1
0

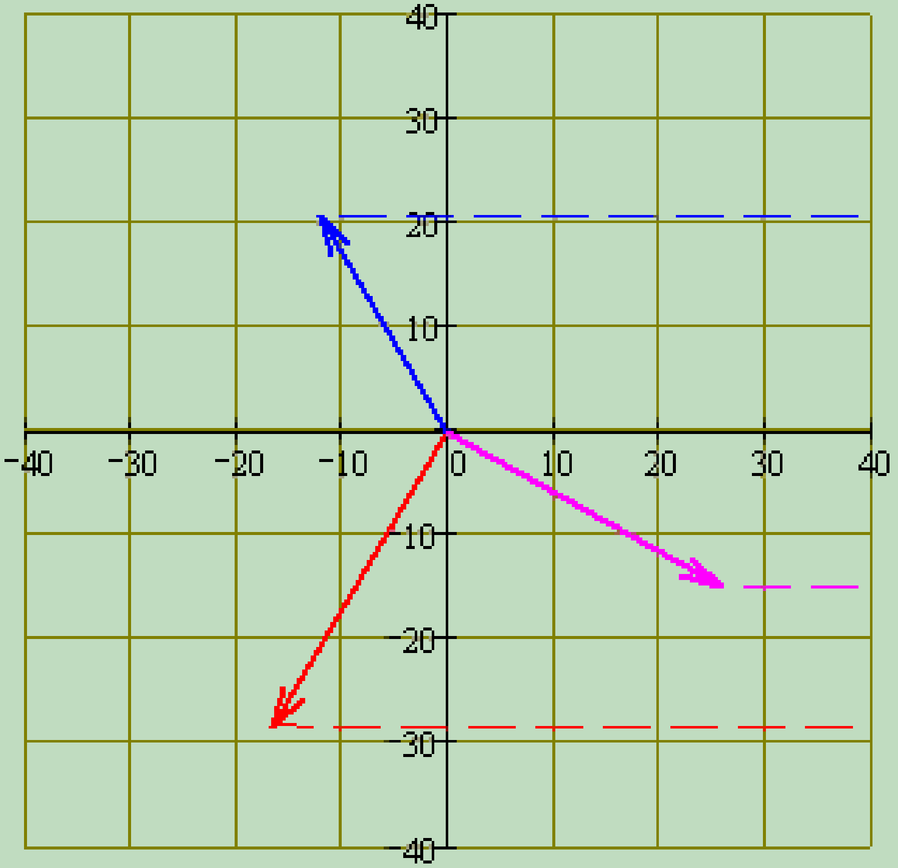

+j
ω
t=t2
Ie jωt 2
ωt2+α
+1
0


+j
t=t3
ω
Ie jωt 3
ωt3+α
+1
0

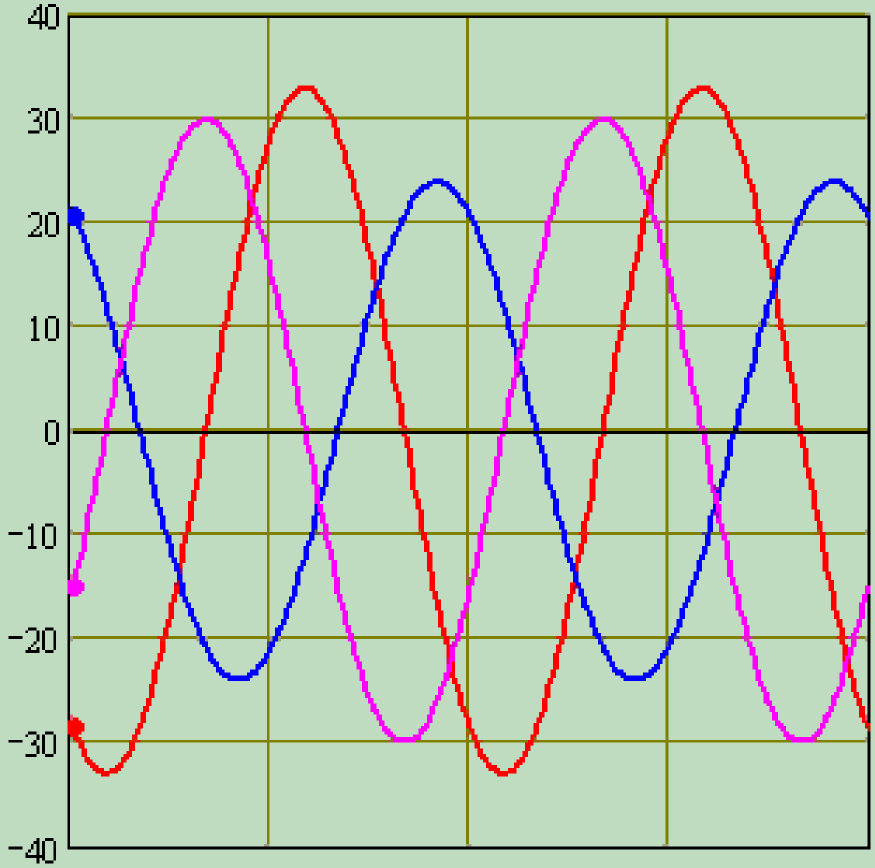

+j
t=t4
ω
Ie jωt4
ωt4+α
+1
0

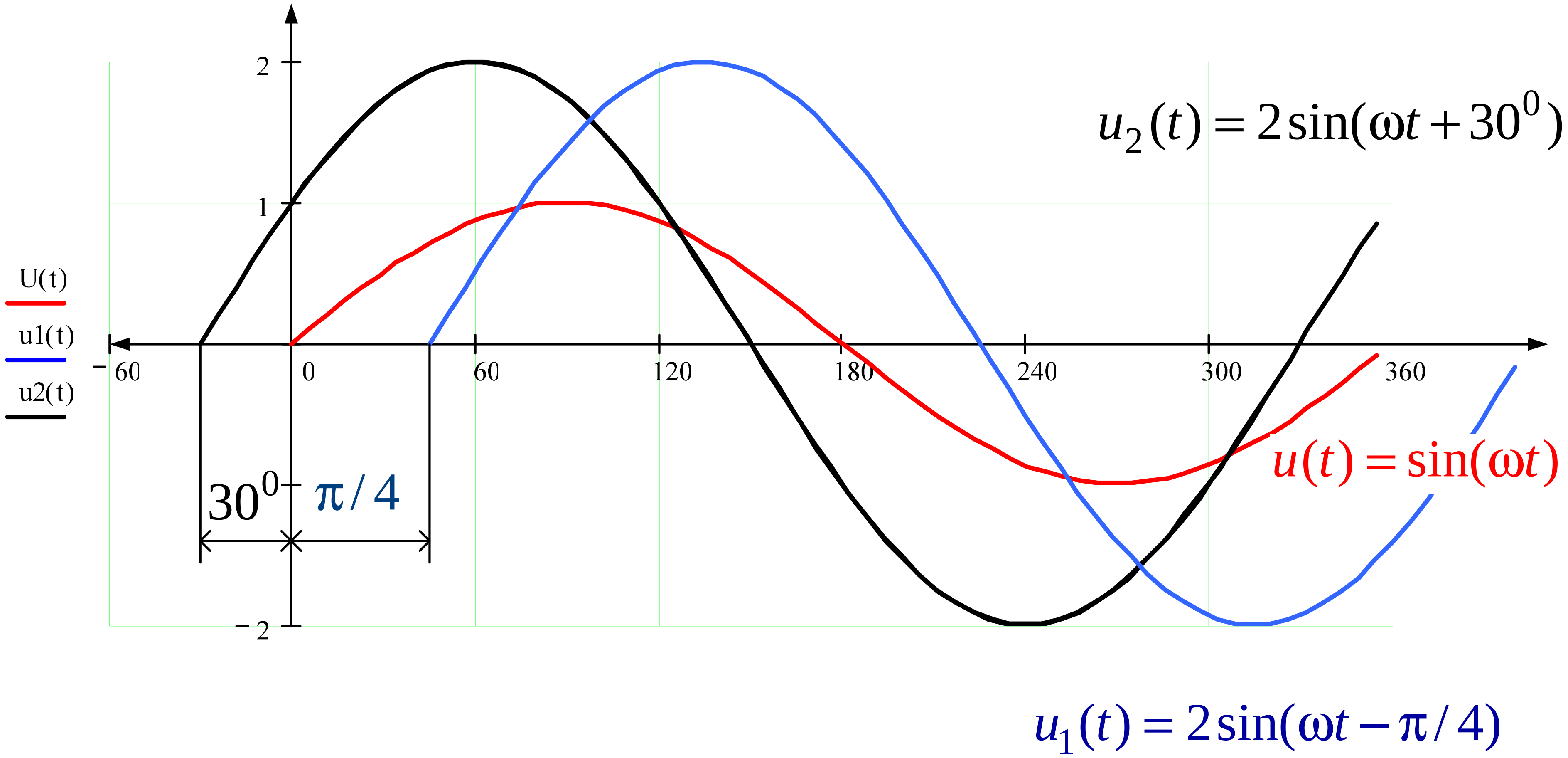

+j
t=t5
ω
Ie jωt 5
ωt5 +α
+1
0

Векторная диаграмма напряжений



Осциллограмма напряжений





2
1
−2
− 60
0
60
120
180
240
300
360
U(t)
u1(t)
u2(t)
30^0
$\pi/4$
$u_2(t) = 2\sin(\omega t + 30^0)$
$u(t) = \sin(\omega t)$
$u_1(t) = 2\sin(\omega t - \pi/4)$

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \alpha)$$

- – Мгновенное значение или функция времени

$$\underline{I} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} e^{j\alpha}$$

- -Комплекс действующего значения

$$\underline{I}_m = I_m e^{j\alpha}$$

- -Комплекс амплитуды

$$\mathbf{u} = \mathbf{U_m} \sin(\omega t + \delta)$$

- \- Мгновенное значение или функция времени

$$\underline{\mathbf{U}} = \frac{\mathbf{U_m}}{\sqrt{2}} \mathbf{e}^{\mathbf{j}\delta}$$

- Комплекс действующего значения

$$\underline{\mathbf{U}}_{\mathbf{m}} = \mathbf{U_m} \mathbf{e}^{\mathbf{j}\delta}$$

- Комплекс амплитуды

$$e(t) = E_m \sin(\omega t + \beta)$$

- \- Мгновенное значение или функция времени

$$\underline{E} = \frac{E_m}{\sqrt{2}} e^{j\beta}$$

- Комплекс действующего значения

$$\underline{E}_m = E_m e^{j\beta}$$

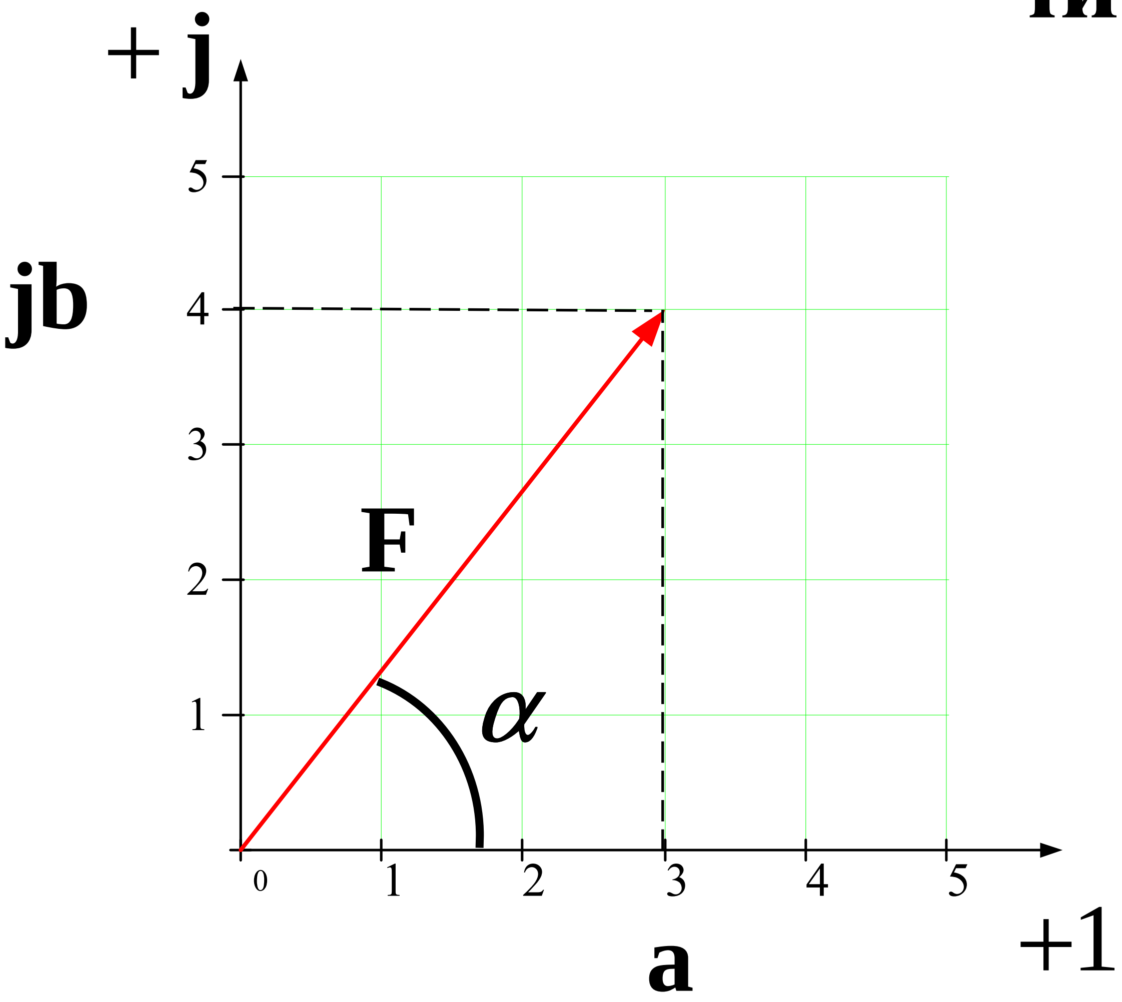
- Комплекс амплитуды

Действия

с комплексными

числами

$$\underline{F} = F \cdot e^{j\alpha} = a + jb$$ - комплексное число



$$\underline{F} = F \cdot e^{j\alpha} = a + jb$$ - **комплексное число**

Показательная форма

Алгебраическая форма

F - **модуль**

α - **аргумент (начальная фаза)**

a - **вещественная часть**

b - **мнимая часть**

1. Переход от алгебраической формы записи к показательной форме

$$\mathbf{a + jb \Rightarrow Fe^{j\alpha}}$$

$$\mathbf{F} = \sqrt{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2}$$

$$\alpha = (180) + \mathbf{arctg}\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}$$

При этом 180 градусов

учитывается при a<0

$$3 + j4 = \sqrt{3^2 + 4^2}\, e^{j\left(\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)} =$$

$$= 5e^{j53,13}$$

2. Переход от показательной формы записи к алгебраической форме

$$Fe^{j\alpha} \Rightarrow a + jb$$

$$a = F\cos\alpha$$

$$b = F\sin\alpha$$

$$5e^{j53,13} = 5\cos(53,13) + j5\sin(53,13) =$$

$$= 3 + j4$$

3. Сложение и вычитание

$$F_1 e^{j\alpha_1} \pm F_2 e^{j\alpha_2} =$$

$$= (a_1 + jb_1) \pm (a_2 + jb_2) =$$

$$= (a_1 \pm a_2) + j(b_1 \pm b_2) =$$

$$= a + jb = Fe^{j\alpha}.$$

$$5e^{j53,13} + 14,14e^{j45} =$$

$$= (3 + j4) + (10 + j10) =$$

$$= (3 + 10) + j(4 + 10) =$$

$$= 13 + j14 = 19,105e^{j47,121^{0}}$$

4. Умножение

$$(a_1 + jb_1)(a_2 + jb_2) =$$

$$= F_1 e^{j\alpha_1} \cdot F_2 e^{j\alpha_2} =$$

$$= F_1 F_2 e^{j(\alpha_1 + \alpha_2)} =$$

$$= F e^{j\alpha}.$$

$$5e^{j53,13}\cdot 14,14e^{j45}=$$

$$=\left(5\cdot 14,14\right)e^{j(53,13+45)}=$$

$$=70,7e^{j98,13^{0}}$$

5. Деление

$$\frac{a_1 + jb_1}{a_2 + jb_2} = \frac{F_1 e^{j\alpha_1}}{F_2 e^{j\alpha_2}} =$$

$$= \frac{F_1}{F_2} e^{j(\alpha_1 - \alpha_2)} =$$

$$= F e^{j\alpha}.$$

$$\frac{3+j4}{10+j10}=\frac{5e^{j53,13}}{14,14e^{j45}}=$$

$$=\frac{5}{14,14}e^{j(53,13-45)}=$$

$$=0,354e^{j8,13}$$

6. Возведение в степень

$$(a_1 + jb_1)^m =$$

$$= (F_1 e^{j\alpha_1})^m =$$

$$= F_1^m e^{jm\alpha_1} =$$

$$= Fe^{j\alpha}.$$

7. Некоторые соотношения

$$\boxed{j = \sqrt{-1}}$$

$$\boxed{j^2 = -1}$$

$$\boxed{1/j = -j}$$

$$\boxed{j^3 = -j}$$

$$\boxed{j = e^{j90^\circ}}$$

$$\boxed{-j = e^{-j90^\circ}}$$

$$\boxed{1 = e^{j0^\circ}}$$

$$\boxed{-1 = e^{j180^\circ}}$$

Действия

с синусоидальными

величинами

Рассмотрим действия с синусоидальными величинами, имеющими одинаковую угловую частоту ω

1. Сложение

$$\mathbf{f(t) = \sqrt{2}F\sin(\omega t + \alpha) =}$$

$$\mathbf{= f_1(t) + f_2(t)}$$

$$f_1(t) = \sqrt{2}F_1 \sin(\omega t + \alpha_1) \rightarrow$$

$$\rightarrow \underline{F}_1 = F_1 e^{j\alpha_1}$$

$$f_2(t) = \sqrt{2}F_2 \sin(\omega t + \alpha_2) \rightarrow$$

$$\rightarrow \underline{F}_2 = F_2 e^{j\alpha_2}$$

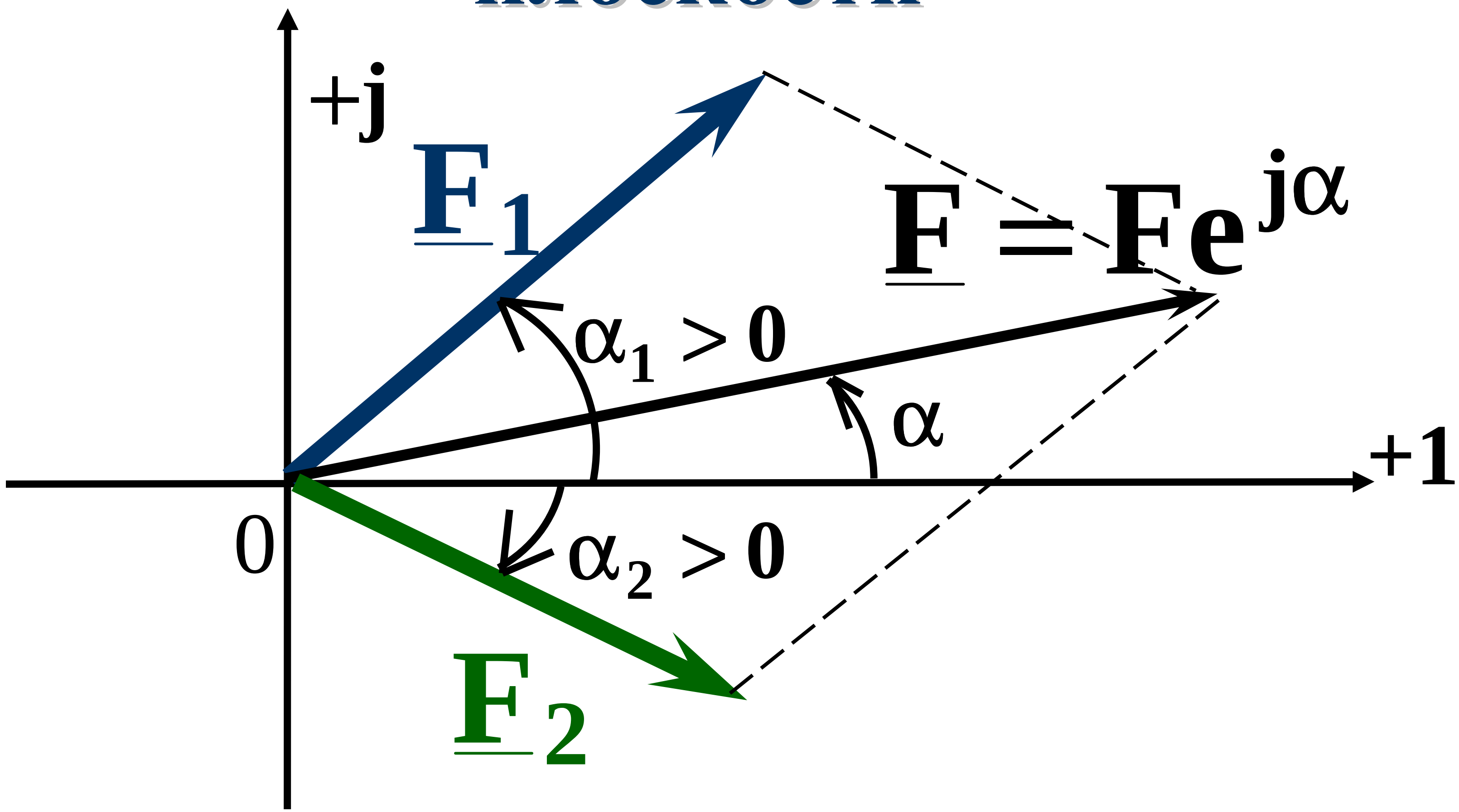
Для определения **F** и α используются:

а) комплексные числа

$$F_1 e^{j\alpha_1} + F_2 e^{j\alpha_2} = F e^{j\alpha}$$

$\Rightarrow$ **определяются** $\quad F$ **и** α

б) вектора на комплексной плоскости



2. Вычитание

$$f(t) = \sqrt{2}F\sin(\omega t + \alpha) =$$

$$= f_1(t) - f_2(t)$$

$$f_1(t) \rightarrow \quad \underline{\underline{F}}_1 = F_1 e^{j\alpha_1}$$

$$f_2(t) \rightarrow \quad \underline{\underline{F}}_2 = F_2 e^{j\alpha_2}$$

Для определения $\mathbf{F}$ и α

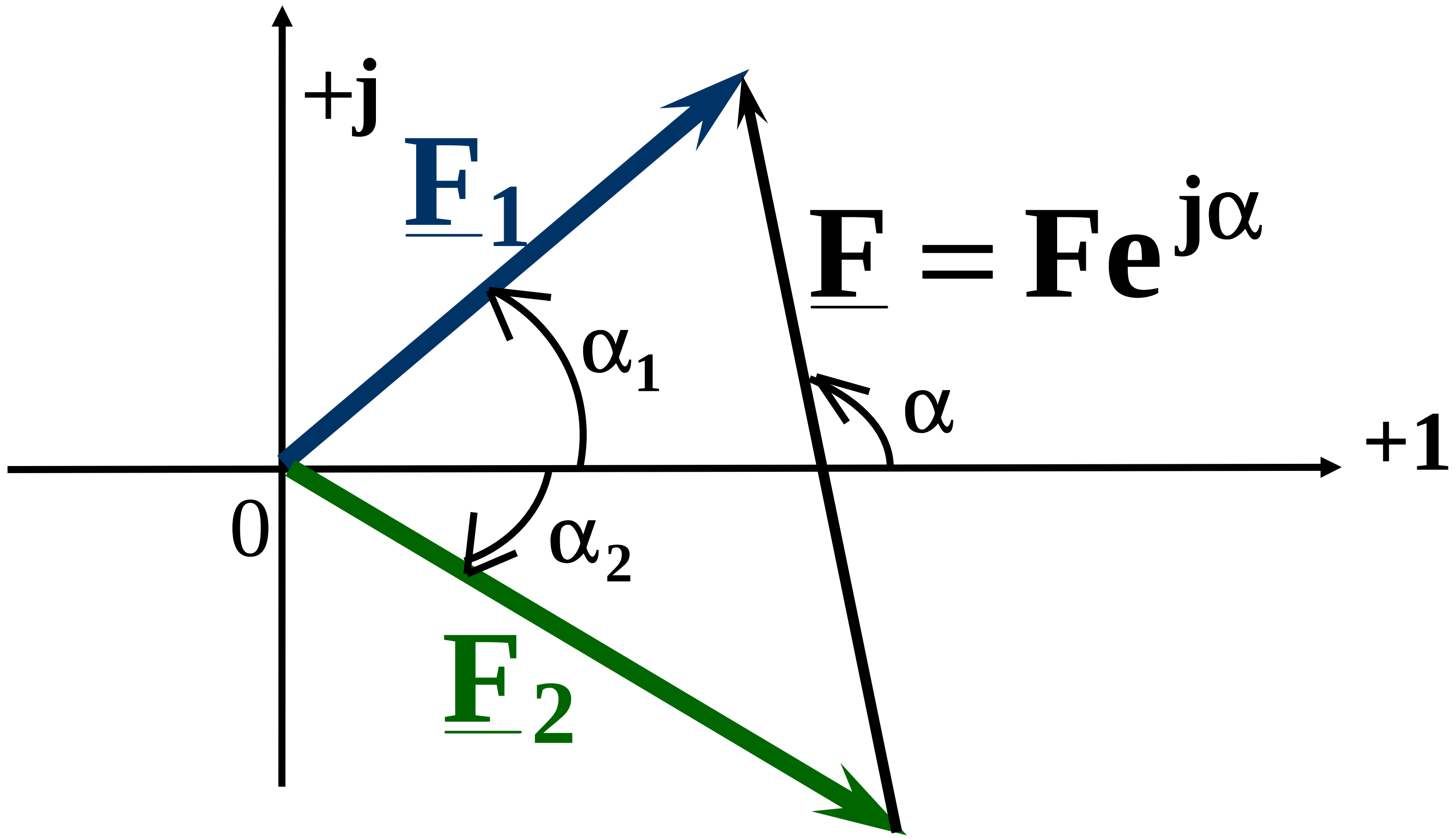
используются:

а) комплексные числа

$$F_1 e^{j\alpha_1} - F_2 e^{j\alpha_2} = F e^{j\alpha}$$

$\Rightarrow$ **определяются** F **и** α

б) вектора на комплексной плоскости



3. Дифференцирование

$$\frac{df(t)}{dt} \to j\omega \underline{F}$$

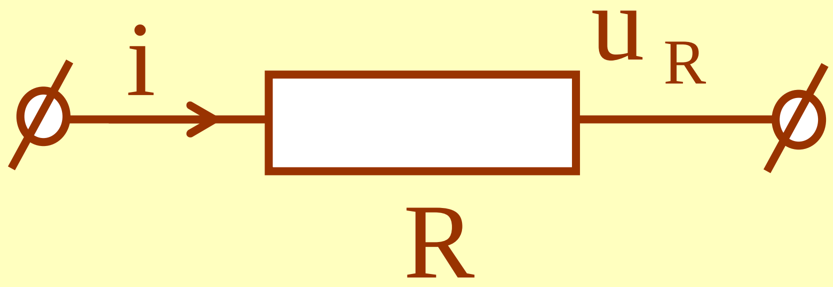
4. Интегрирование

$$\int f(t)dt \rightarrow \frac{\underline{F}}{j\omega}$$

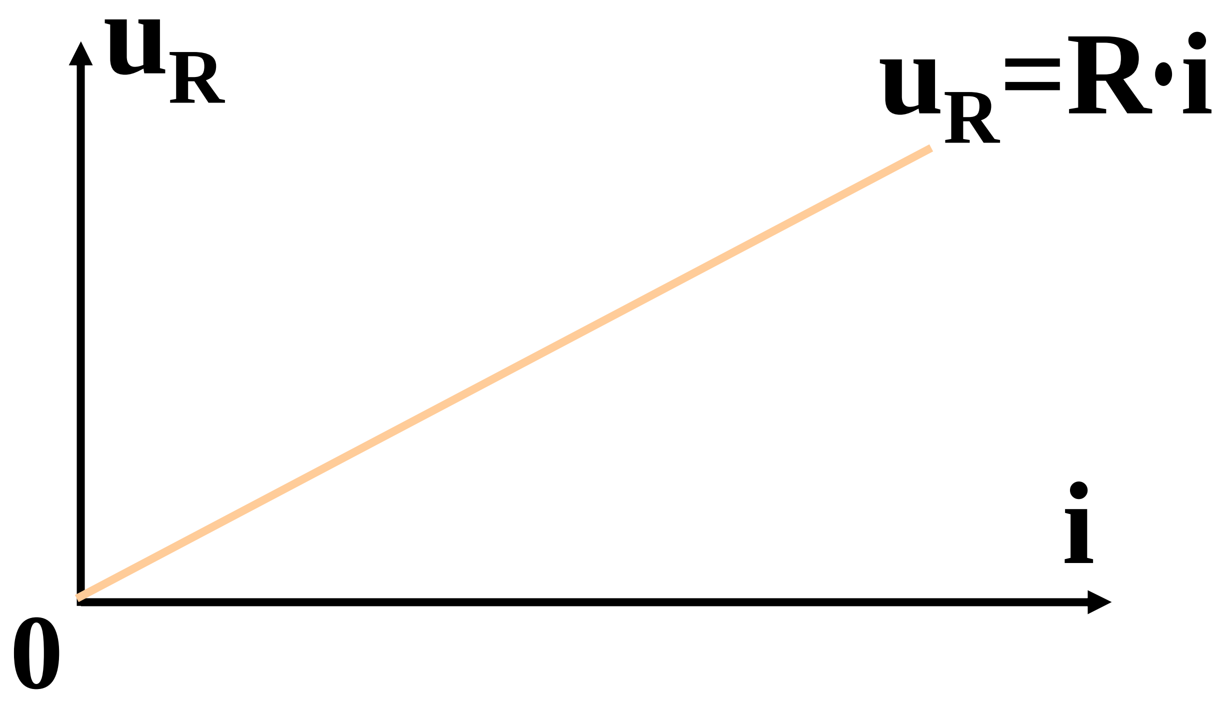
Линейные элементы схем замещения

- Для облегчения расчета и анализа цепей их заменяют схемами замещения, составляемые из пассивных и активных элементов. Математическое описание этих элементов отражает реальные физические процессы, происходящие в электрических цепях. Линейные цепи характеризуются линейными уравнениями для токов и напряжений и заменяются линейными схемами замещения. Линейные схемы замещения составляются из линейных пассивных и активных элементов, вольтамперные характеристики которых линейны.
- Пассивные линейные элементы схем замещения

Пассивные элементы

Элементы и их изображения	Резистивный 
Взаимосвязь между напряжением и током	$\underline{U}_R = R \cdot \underline{I}$
Мощность	$p = i^2 R = u_R^2 / R$

Вольтамперная характеристика $u_R(i)$



Индуктивность

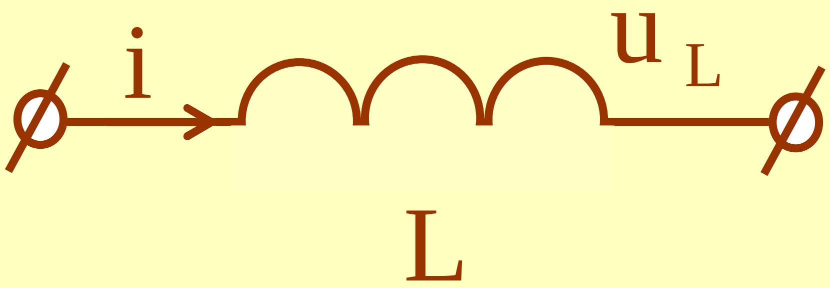
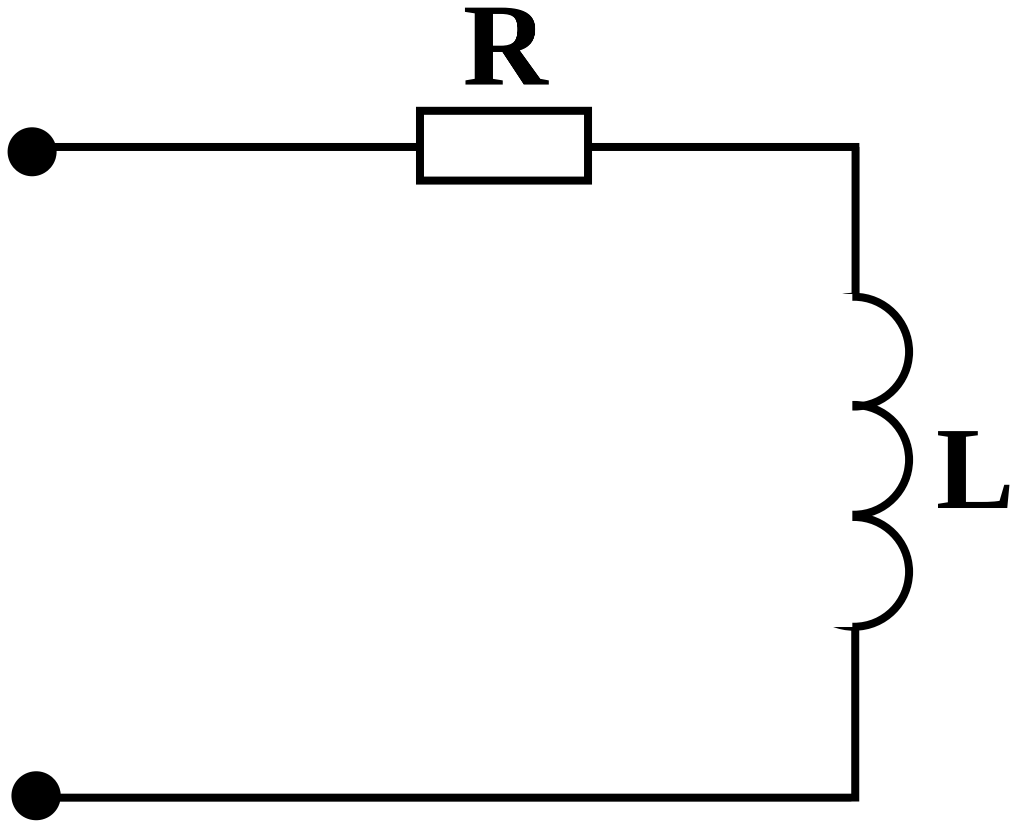
Элементы и их изображения	
Взаимосвязь между напряжением и током	$\mathbf{u_L = L\frac{di}{dt}}$ $\mathbf{i = \frac{1}{L}\int u_L dt}$ В комплексной форме $\mathbf{\underline{U}_L = jX_L \cdot \underline{I}_L}$ $\mathbf{X_L = \omega \cdot L}$
Энергия	$\mathbf{W = \frac{Li^2}{2}}$

Схема замещения катушки



Емкость

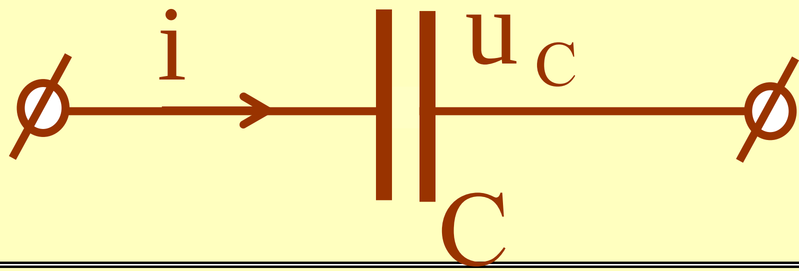
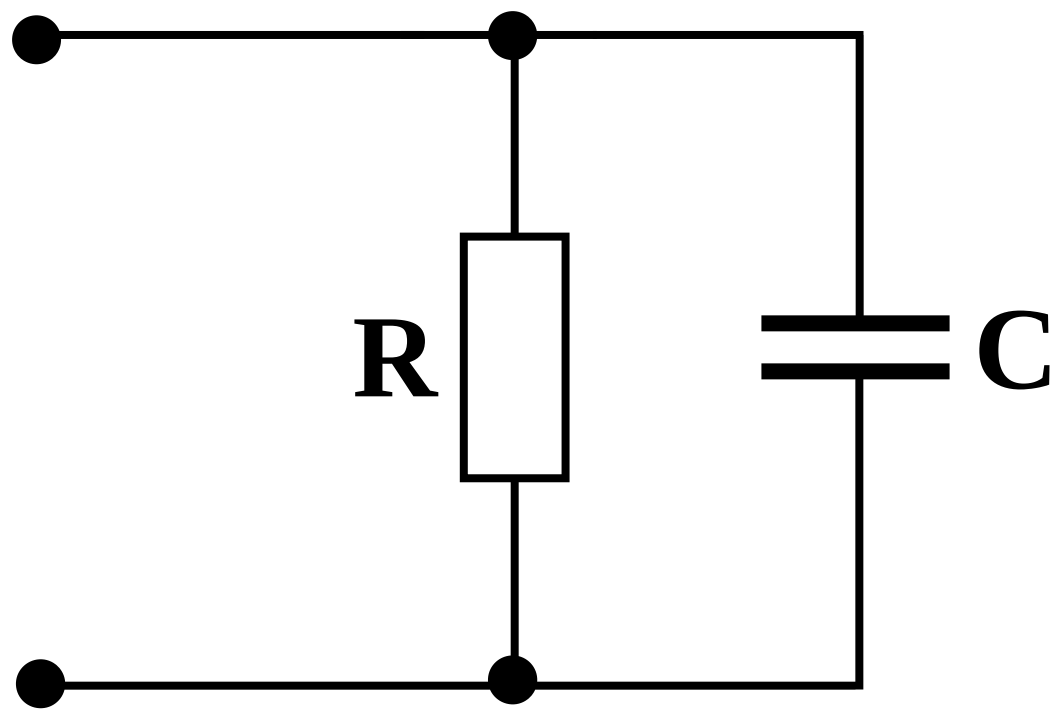
Элементы и их изображения	
Взаимосвязь между напряжением и током	$$u_C = \frac{1}{C}\int i\,dt$$ $$i = C\frac{du_C}{dt}$$ В комплексной форме $$\underline{U}_C = -jX_C \cdot \underline{I}$$ $$X_C = \frac{1}{\omega \cdot C}$$
Энергия	$$W = \frac{C\,u_C^2}{2}$$

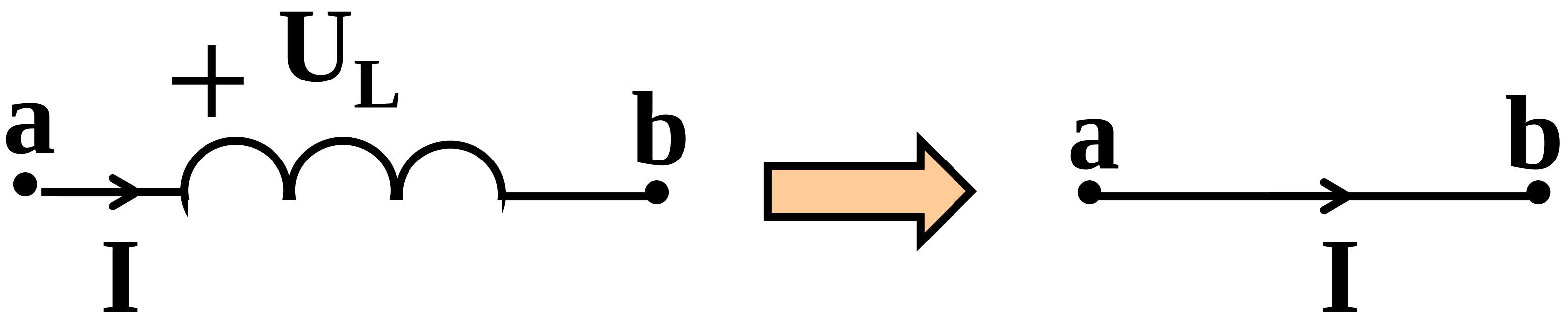
Схема замещения конденсатора



Примечания

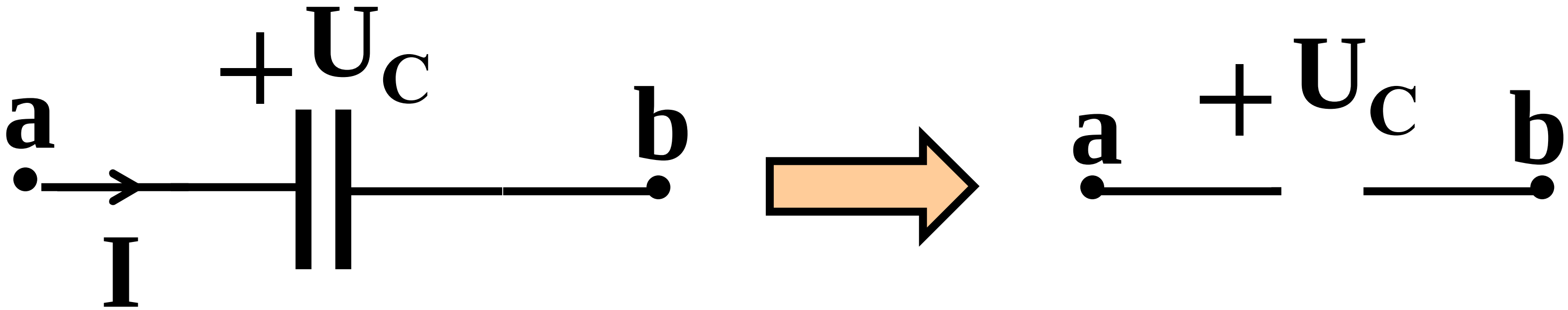
1. При постоянном токе индуктивный элемент - “закоротка”:

Так как $u_L = L\dfrac{di}{dt} = 0$, то



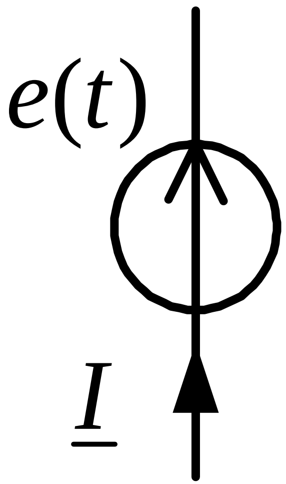
2. При постоянном напряжении емкостный элемент - “разрыв”:

Так как $i = C\dfrac{du_C}{dt} = 0$, то



Активные линейные элементы схем замещения

Идеальный источник ЭДС



$$\underline{\mathbf{E}} = \mathrm{const}$$

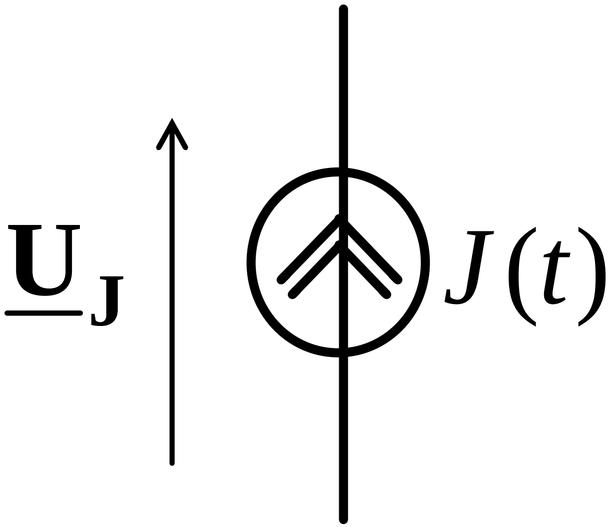
$$\mathbf{R_E} = 0$$

$$\mathbf{S} = \underline{\mathbf{E}}\overset{*}{\mathbf{I}} = \mathbf{P} + \mathbf{jQ}\ \text{ВА}$$

Активная мощность Вт

Реактивная мощность ВАр

- Идеальный источник тока



$$\underline{\mathbf{J}} = \mathbf{const}$$

$$\mathbf{R_J} = \infty$$

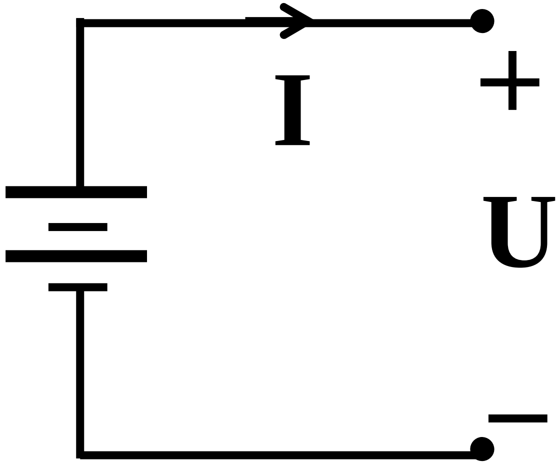
$$\mathbf{S} = \underline{\mathbf{U}}_{\mathbf{J}} \overset{*}{\mathbf{J}} = \mathbf{P} \quad + \quad \mathbf{jQ}\ \text{ВА}$$

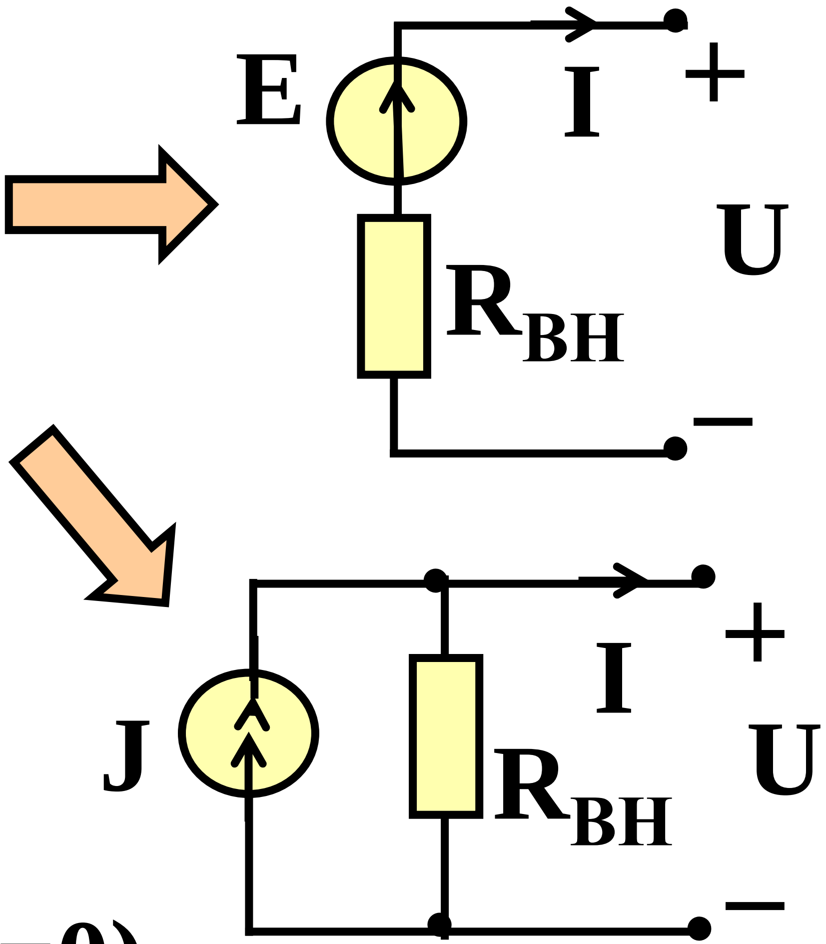
Активная мощность Вт

Реактивная мощность ВАр

Активные и пассивные элементы применяются для составления схем замещения реальных источников электромагнитной энергии

Например, схема замещения аккумулятора:





$E=U_{XX}$ (I=0)

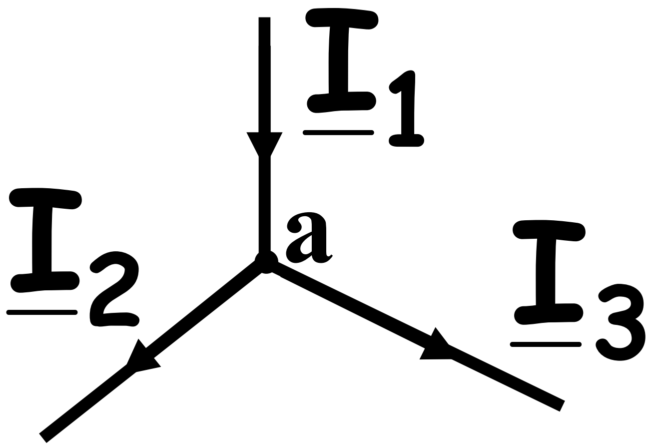
$J=I_{КЗ}=E/R_{ВН}$ (U=0)

ПЕРВЫЙ ЗАКОН КИРХГОФА В КОМПЛЕКСНОЙ ФОРМЕ

Для любого узла комплексной схемы замещения цепи алгебраическая сумма комплексных значений токов равна нулю

$$\sum \pm \mathbf{I_k} = 0$$

Например:



узел **а:**

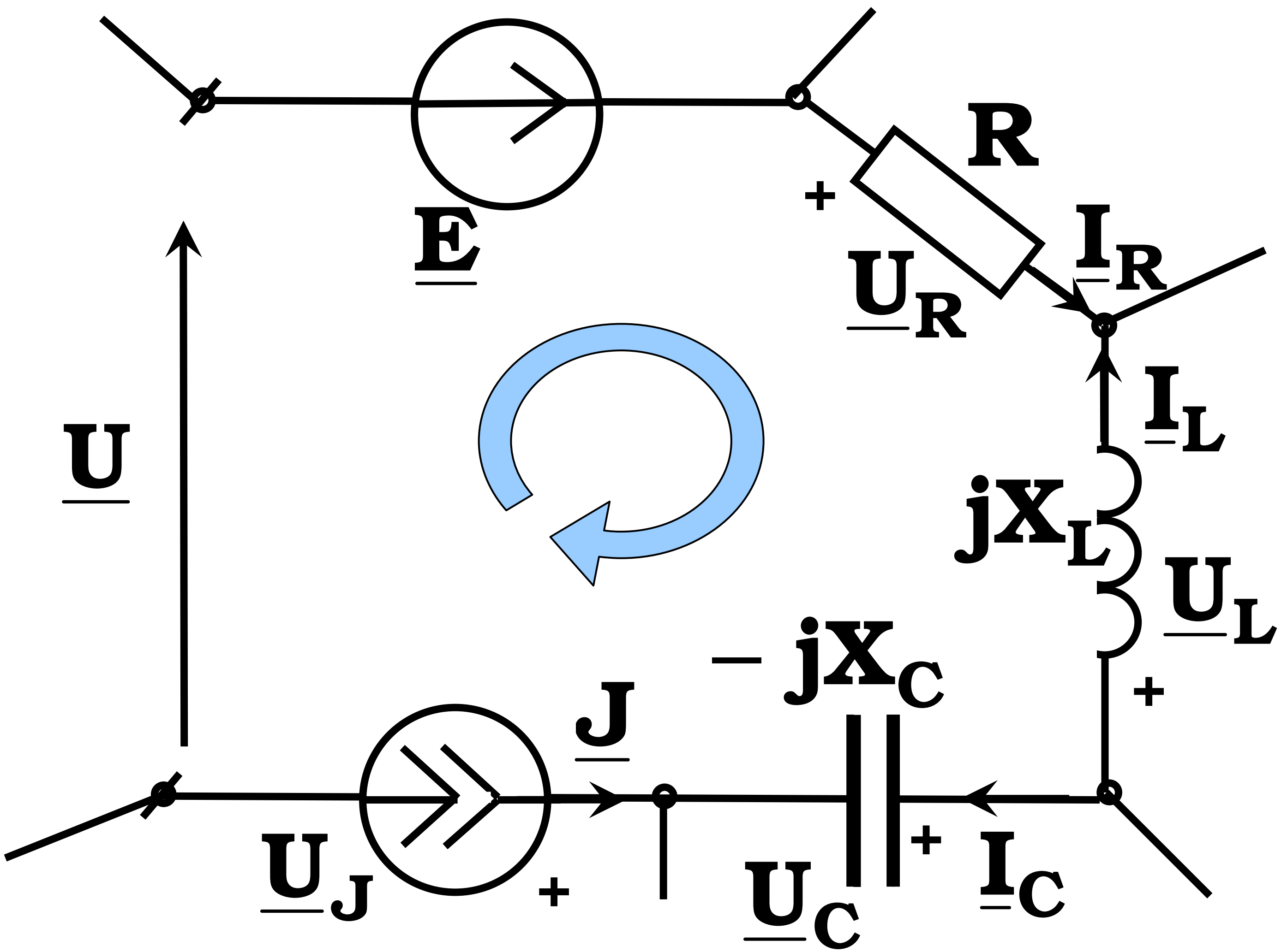
$$-\underline{\mathbf{I}}_1 + \underline{\mathbf{I}}_2 + \underline{\mathbf{I}}_3 = 0$$

ВТОРОЙ ЗАКОН КИРХГОФА В КОМПЛЕКСНОЙ ФОРМЕ

Для любого контура комплексной схемы замещения цепи алгебраическая сумма комплексов напряжений на пассивных элементах равна алгебраической сумме комплексов ЭДС и напряжений на источниках тока

$$\sum \pm \underline{U}_n = \sum \pm \underline{E}_k + \sum \pm \underline{U}_{J_q} + \sum \pm \underline{U}_p$$

Например:



E
R
+
$\underline{U}_R$
$\underline{I}_R$
$\underline{I}_L$
$\underline{U}$
jX_L
$\underline{U}_L$
+
$-jX_C$
$\underline{J}$
$\underline{U}_J$
+
$\underline{U}_C$
+
$\underline{I}_C$

$$\underline{U}_R - \underline{U}_L + \underline{U}_C = \underline{E} - \underline{U}_J + \underline{U}$$

или

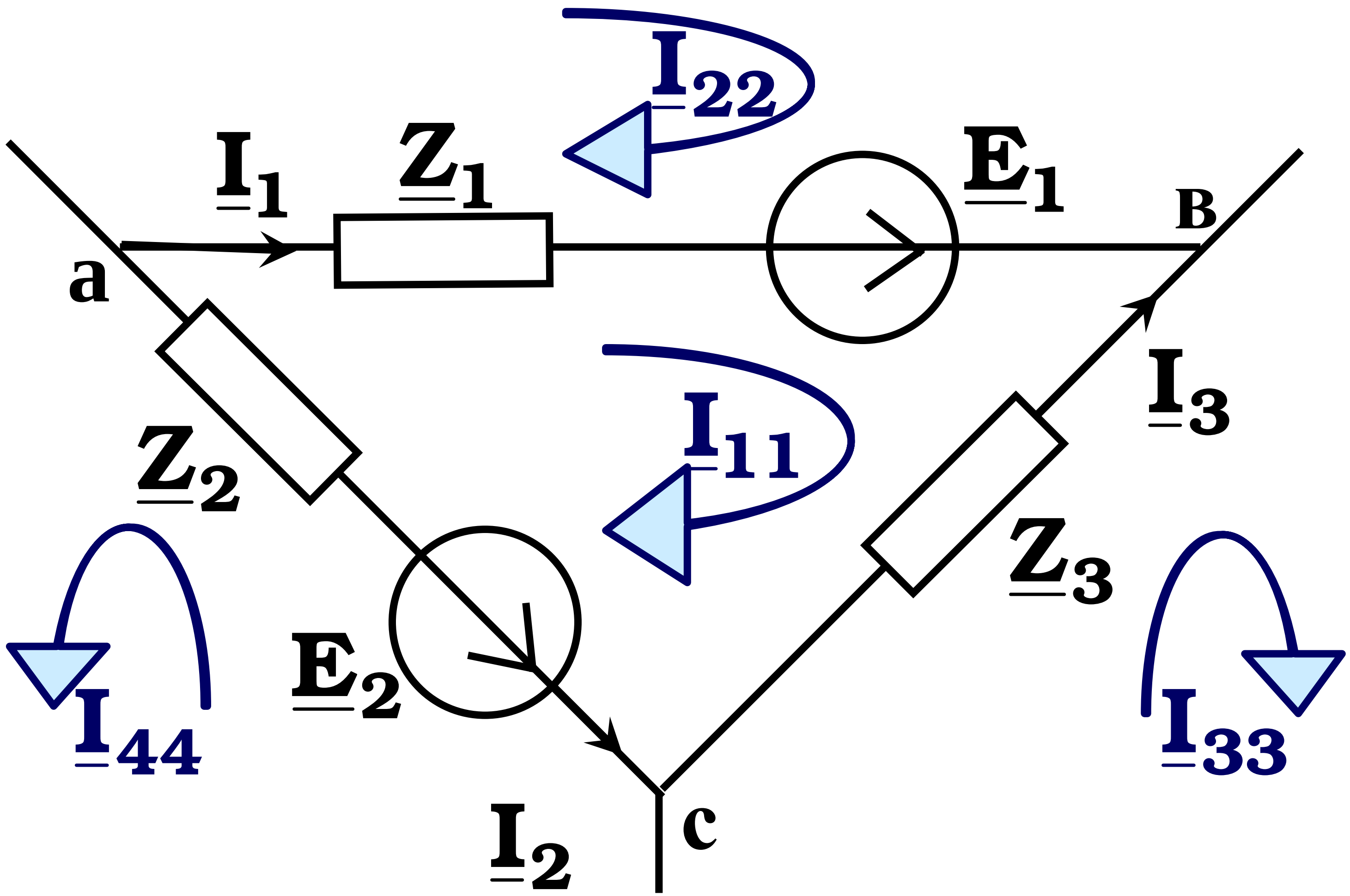
$$R\underline{I}_R - jX_L\underline{I}_L + (-jX_C)\underline{I}_C = \underline{E} - \underline{U}_J + \underline{U}$$

МЕТОД КОНТУРНЫХ ТОКОВ

Метод контурных токов используется для расчета резистивных линейных цепей с постоянными токами и для расчета комплексных схем замещения линейных цепей с гармоническими токами

При этом в расчет вводятся контурные токи – это фиктивные токи, которые замыкаются в независимых замкнутых контурах, отличающихся друг от друга наличием хотя бы одной новой ветви

Например:



$\underline{I}_{22}$
$\underline{I}_1$
$\underline{Z}_1$
$\underline{E}_1$
в
a
$\underline{I}_3$
$\underline{I}_{11}$
$\underline{Z}_2$
$\underline{Z}_3$
$\underline{E}_2$
$\underline{I}_{44}$
$\underline{I}_{33}$
$\underline{I}_2$
c

$$\underline{I}_{11},\ \underline{I}_{22},\ \underline{I}_{33},\ \underline{I}_{44}\ –$$

контурные токи

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{11} - \underline{I}_{22}$$

$$\underline{I}_2 = -\underline{I}_{11} - \underline{I}_{44} \quad –$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_{33} - \underline{I}_{11}$$

токи ветвей контура

$$\underline{Z}_{kk}\underline{I}_{kk} + \sum \pm \underline{Z}_{km}\underline{I}_{mm} = \underline{E}_{kk}$$

$\underline{\mathbf{Z}}_{\mathbf{кк}}$ – суммарное сопротивление *к*-контура

$\underline{\mathbf{I}}_{\mathbf{кк}}$ – контурный ток *к*-контура

$\underline{\mathbf{Z}}_{\mathbf{km}}$ – общее сопротивление между *к*-контуром и *m* -контуром

$\underline{\mathbf{I}}_{\mathbf{mm}}$ – соседний контурный ток *m*-контура

$\underline{\mathbf{E}}_{\mathbf{kk}}$ – суммарная ЭДС *к*-контура

Контурный ток рассматриваемого контура умножается на сумму сопротивлений своего контура, причем перед этим произведением ставится знак “+”

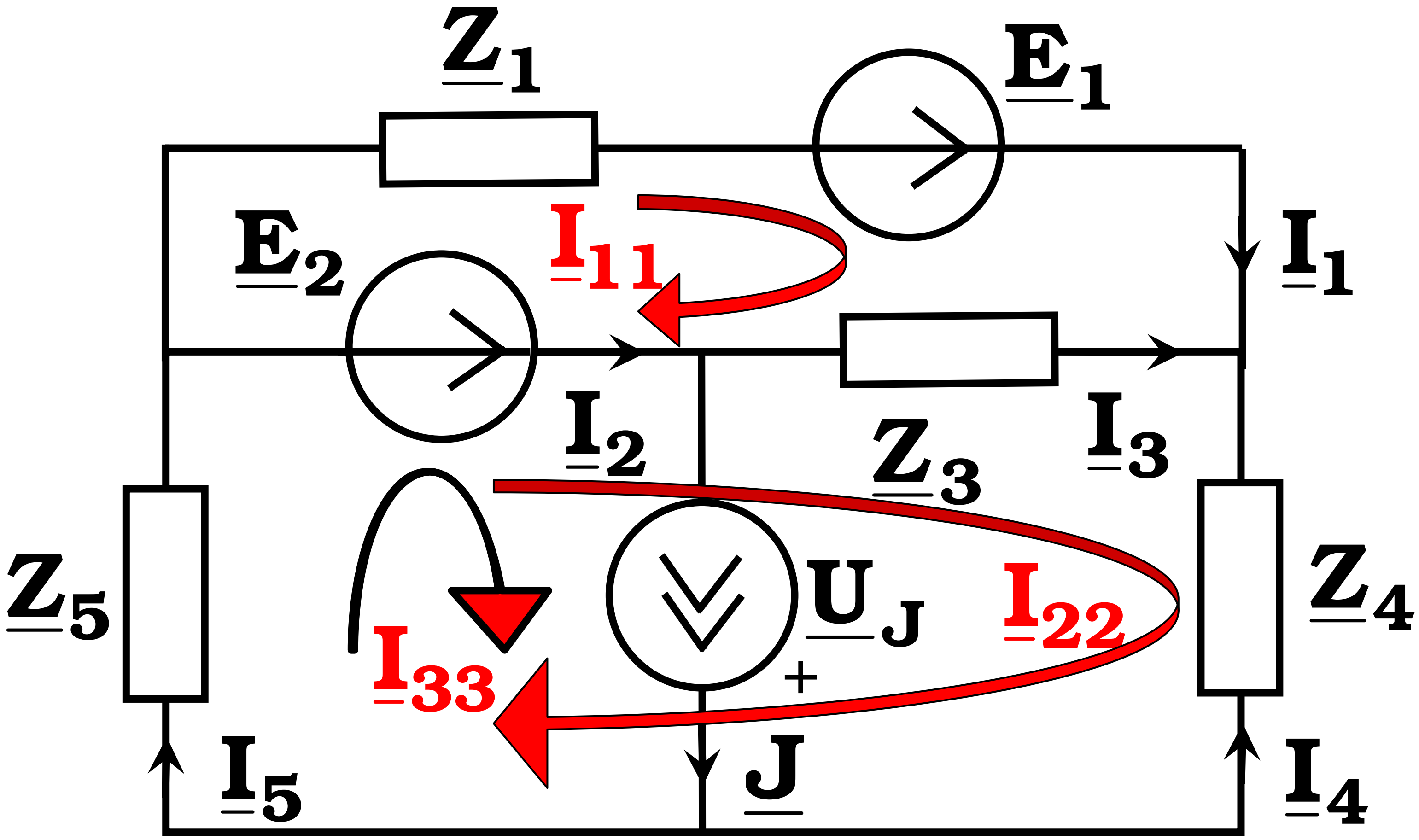
Соседний контурный ток умножается на общее сопротивление

между соседним и рассматриваемым контурными токами, причем перед этим произведением ставится знак “+” если направления этих контурных токов в общем сопротивлении совпадают между собой и ставится знак “-” если направления их не совпадают

В правой части уравнения записывается алгебраическая сумма ЭДС рассматриваемого контура, причем со знаком “+” берутся те ЭДС, направления которых совпадают с направлением рассматриваемого контурного тока

Для контура с источником тока контурное уравнение не составляется, так как контурный ток этого контура известен и равен току источника тока, причем через источник тока должен проходить только один контурный ток

Например:



$n_у = 4$	$n_в = 6$	$n_i = 5$

$$\boxed{n_{кт} = n_{в} - n_{у} + 1 = 3}$$

$$\boxed{n_{ку} = n_{i} - n_{у} + 1 = 2}$$

$$\underline{\mathbf{I}}_{33} = \underline{\mathbf{J}}$$

$$\begin{cases} (\underline{\mathbf{Z}}_1 + \underline{\mathbf{Z}}_3)\underline{\mathbf{I}}_{11} - \underline{\mathbf{Z}}_3\underline{\mathbf{I}}_{22} - \mathbf{0} \cdot \underline{\mathbf{I}}_{33} = \underline{\mathbf{E}}_1 - \underline{\mathbf{E}}_2 \\ -\underline{\mathbf{Z}}_3\underline{\mathbf{I}}_{11} + (\underline{\mathbf{Z}}_5 + \underline{\mathbf{Z}}_3 + \underline{\mathbf{Z}}_4)\underline{\mathbf{I}}_{22} + \underline{\mathbf{Z}}_5\underline{\mathbf{I}}_{33} = \underline{\mathbf{E}}_2 \end{cases}$$

$$
\begin{pmatrix}
(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3) & (-\underline{Z}_3) \\
(-\underline{Z}_3) & (\underline{Z}_5 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4)
\end{pmatrix}
\times
\begin{pmatrix}
\underline{I}_{11} \\
\underline{I}_{22}
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
\underline{E}_1 - \underline{E}_2 \\
\underline{E}_2 - \underline{Z}_5 \underline{J}
\end{pmatrix}
$$

матрица симметрична относительно главной диагонали

$$\underline{\mathbf{I}}_1 = \underline{\mathbf{I}}_{11}$$

$$\underline{\mathbf{I}}_2 = \underline{\mathbf{I}}_{22} + \underline{\mathbf{I}}_{33} - \underline{\mathbf{I}}_{11}$$

$$\underline{\mathbf{I}}_3 = \underline{\mathbf{I}}_{22} - \underline{\mathbf{I}}_{11}$$