

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

Г.В. Носов, В.А. Колчанова, Е.О. Кулешова

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

ЧАСТЬ 2

*Рекомендовано в качестве учебного пособия
Редакционно-издательским советом
Томского политехнического университета*

Издательство
Томского политехнического университета
2014

УДК 621.3.011(075.8)

ББК 31.211я73

Н619

Носов Г.В.

Н619

Теоретические основы электротехники. Ч. 2: учебное пособие / Г.В. Носов, В.А. Колчанова, Е.О. Кулешова; Томский политехнический университет. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2014. – 212 с.

В учебном пособии рассмотрены основные положения и математические понятия теории переходных процессов в линейных цепях, а также методы расчёта нелинейных цепей и цепей с сосредоточенными параметрами. Теоретический материал закрепляется многочисленными примерами и контрольными заданиями.

Пособие подготовлено на кафедре электрических сетей и электротехники и предназначено для студентов ИДО, обучающихся по направлению 140100 «Электроэнергетика и электротехника».

УДК 621.3.011(075.8)

ББК 31.211я73

Рецензенты

Доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник
Института оптики атмосферы им. В.Е. Зуева СО РАН
Ф.Ю. Канев

Кандидат технических наук,
доцент кафедры ТОЭ ТУСУРа
Т.В. Ганджа

© ФГБОУ ВПО НИ ТПУ, 2014

© Носов Г.В., Колчанова В.А.,

Кулешова Е.О., 2014

© Оформление. Издательство Томского
политехнического университета, 2014

ОГЛАВЛЕНИЕ

| | |
|---|------------|
| 1. Переходные процессы в линейных цепях..... | 5 |
| 1.1. Переходные процессы в простейших цепях. Нулевые начальные условия | 5 |
| 1.2. Законы коммутации..... | 6 |
| 1.3. Классический метод расчёта переходных процессов..... | 9 |
| 1.4. Объединение реактивных элементов | 10 |
| 1.5. Линейная цепь первого порядка | 12 |
| 1.6. Классический метод расчета переходных процессов в цепях первого порядка с гармоническим источником | 16 |
| 1.7. Обобщенные законы коммутации | 18 |
| 1.8. Расчет переходных процессов в цепях 2-го порядка классическим методом | 22 |
| 1.9. Операторный метод расчёта переходных процессов..... | 29 |
| 1.10. Комбинированный операторно-классический метод расчета переходных процессов | 41 |
| 1.11. Метод переменных состояния..... | 44 |
| 1.12. Переходные и импульсные характеристики..... | 48 |
| 1.13. Метод интеграла Дюамеля | 52 |
| 2. Нелинейные цепи..... | 56 |
| 2.1. Нелинейные резистивные элементы..... | 56 |
| 2.2. Расчет нелинейных резистивных цепей..... | 60 |
| 2.3. Нелинейные индуктивные элементы..... | 66 |
| 2.4. Расчет неразветвленной магнитной цепи | 72 |
| 2.5. Расчет разветвленной магнитной цепи | 74 |
| 2.6. Расчет цепей с линейными и нелинейными индуктивными элементами | 77 |
| 2.7. Нелинейные емкостные элементы..... | 80 |
| 2.8. Метод эквивалентных синусоид | 83 |
| 2.9. Резонансные явления в нелинейных цепях..... | 92 |
| 2.10. Переходные процессы в нелинейных цепях..... | 101 |
| 3. Электрические цепи с распределенными параметрами..... | 110 |
| 3.1. Установившийся гармонический режим однородной линии | 111 |
| 3.2. Бегущие волны..... | 114 |
| 3.3. Режимы однородной линии при гармонических напряжениях и токах | 116 |
| 3.4. Однородная линия без искажений..... | 120 |

| | |
|---|------------|
| 3.5. Однородная линия без потерь при гармонических напряжениях и токах | 121 |
| 3.6. Режимы однородной линии без потерь | 123 |
| 3.7. Переходные процессы в однородных линиях без потерь .. | 126 |
| 3.8. Включение однородной линии без потерь на постоянное напряжение | 129 |
| 3.9. Отражение и преломление волн в однородных линиях без потерь | 132 |
| Задание № 4 Расчет переходных процессов в линейных электрических цепях | 139 |
| Задание № 5 Расчет установившегося режима в нелинейных электрических цепях | 142 |
| Задание № 6 Расчет длинных линий в установившемся и переходном режимах | 146 |
| | |
| Пример 1. Методические указания к заданию № 4 «Расчет переходных процессов в линейных электрических цепях» | 149 |
| Пример 2. Методические указания к заданию № 5 «Расчет установившегося режимав нелинейных электрических цепях» | 180 |
| Пример 3. Методические указания к заданию № 6 «Расчет длинных линий в установившемся и переходном режимах» | 198 |
| | |
| ЛИТЕРАТУРА..... | 211 |

1. ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЯХ

1.1. Переходные процессы в простейших цепях. Нулевые начальные условия

Под переходными процессами понимают процессы перехода от одного установившегося режима работы электрической цепи к другому, чем-либо отличающемуся от предыдущего, например: величиной амплитуды, фазы, частоты или значениями параметров схемы. Переходные процессы возникают при включении или отключении источников, элементов цепи, при коротких замыканиях и обрывах проводов, а также при различных импульсных воздействиях на цепь, например при грозовых разрядах.

Установившиеся значения напряжений и токов характеризуют установившийся режим цепи и могут оставаться неизменными бесконечно долго, причем эти значения задаются источниками электрической энергии.

При анализе и расчете переходных процессов будем считать, что переходные процессы возникают при включении или отключении элементов цепи посредством ключей, причем эта коммутация происходит мгновенно быстро в момент времени $t = 0$, при времени $t = \infty$ переходный процесс теоретически заканчивается и наступает новый установившийся режим. Время $t < 0$ характеризует режим цепи *до коммутации*, момент времени $t = 0_-$ соответствует последнему моменту перед коммутацией.

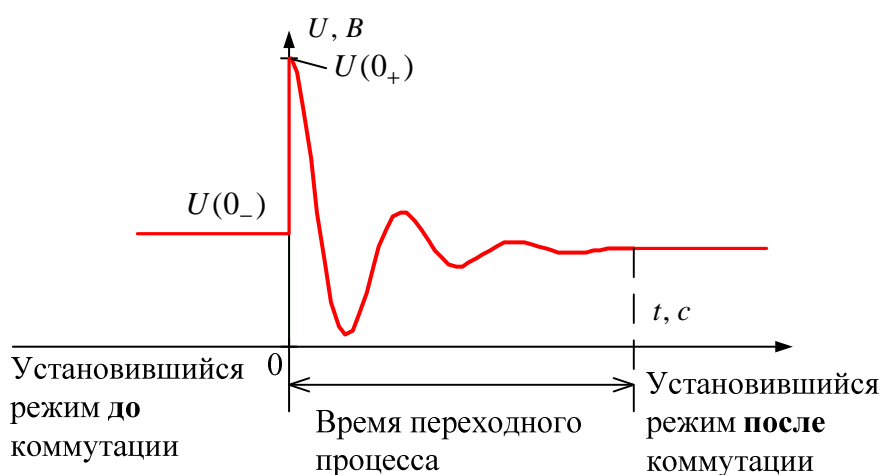


Рис. 1

Момент времени $t = 0_+$ соответствует первому моменту времени после коммутации. Скачок – это мгновенное изменение напряжения или тока при $t = 0_+$.

Анализ и расчет переходных процессов в электроэнергетике осуществляется с целью определения влияния параметров цепи на длительность переходного процесса, что необходимо для различных технологических циклов.

Коммутация – это процесс замыкания и размыкания выключателей. Переходные процессы обычно являются быстропротекающими; длительность их составляет десятые, сотые, а иногда даже миллиардные доли секунд. Сравнительно редко длительность переходных процессов достигает секунд и десятков секунд.

Физически переходные процессы представляют собой процессы перехода электрической системы от одного энергетического состояния к другому, т.е. это процесс перераспределения энергии между элементами цепи.

Переходные процессы обусловлены наличием реактивных элементов (L и C).

1.2. Законы коммутации

В электрической цепи не может быть мгновенного изменения накопленной в электрических и магнитных полях энергии

$$W(0_-) = W(0_+) = W(0),$$

так как энергия электрического поля конденсатора и энергия магнитного поля индуктивной катушки равны соответственно

$$W_C = C \frac{u_C^2}{2}, \quad W_L = L \frac{i_L^2}{2}.$$

При мгновенном изменении этих величин потребовалась бы бесконечно большая мощность, т.к. $P_C = \frac{dW_C}{dt}$, $P_L = \frac{dW_L}{dt}$; это означает, что в момент коммутации остаются неизменными напряжения на обкладках конденсатора и токи в индуктивных катушках. Для перераспределения энергии требуется время – это процесс инерционный, не мгновенный. Поэтому существуют два закона коммутации.

Первый закон коммутации: ток через индуктивность до коммутации $i_L(0_-)$ равен току через индуктивность после коммутации $i_L(0_+)$ или **ток индуктивности не может изменяться скачком:**

$$i_L(0_-) = i_L(0_+) = i_L(0). \quad (*)$$

Второй закон коммутации: напряжение на ёмкости до коммутации $u_C(0_-)$ равно напряжению на ёмкости после коммутации $u_C(0_+)$, или **напряжение на ёмкости не может изменяться скачком:**

$$u_C(0_-) = u_C(0_+) = u_C(0). \quad (**)$$

Это есть **независимые начальные условия**. Независимыми они называются потому, что, независимо от того, до или после коммутации мы их наблюдаем, они всё равно одинаковы и равны, и поэтому знаки « $-$ » и « $+$ » в выражениях (*) и (**) опускают.

Все остальные напряжения и токи электрической цепи в первый момент после коммутации при $t(0_+)$ называют **зависимыми начальными условиями (ЗНУ)**.

Токи и напряжения после завершения переходного процесса при $t = \infty$ называют **принуждёнными составляющими** (рис. 1).

Пример

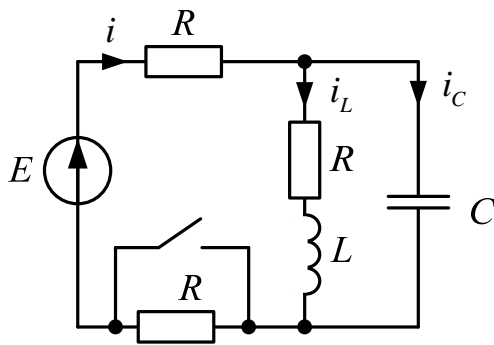


Рис. 2

Дано:

$$E = 100 \text{ В};$$

$$L = 1 \text{ Гн};$$

$$R = 100 \text{ Ом}.$$

Определить:

начальные условия

и принуждённые составляющие.

Определяем независимые начальные условия (**ННУ**) в схеме **до коммутации**. Так как при постоянном источнике конденсатор представляет собой разрыв, а катушка становится закороткой, то

$$i_L(0_-) = \frac{E}{3R} = 1 \text{ А};$$

$$u_C(0_-) = i_L(0_-)R = 100 \text{ В}.$$

Определяем **зависимые начальные условия (ЗНУ)**. Составляем схему для первого мгновения после коммутации при $t(0_+)$. По теореме компенсации заменим конденсатор источником напряжения, величина которого равна напряжению на конденсаторе до коммутации

$E_C = u_C(0_-)$. Индуктивность заменим на источник тока величиной, равной $J_L = i_L(0_-)$. Ключ в схеме после коммутации изменяет своё положение на противоположное.

Сопротивление R закорачивается ключом, поэтому его из схемы можно исключить. Для расчёта токов используем метод контурных токов.

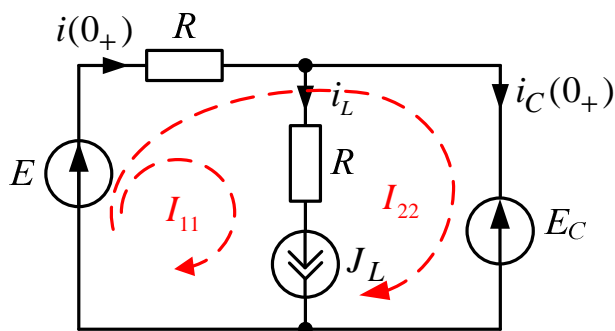


Рис. 3

$$\begin{aligned} J_L &= i_L(0_-); \\ E_C &= u_C(0_-). \end{aligned}$$

$$\begin{cases} I_{11} = J_L = 1 \text{ A}; \\ I_{22}R + I_{11}R = E - E_C. \end{cases}$$

$$I_{22} = \frac{E - E_C - I_{11}R}{R} = 1 \text{ A}; \quad i(0_+) = I_{11} + I_{22} = 2 \text{ A}; \quad i_C(0_+) = I_{22} = 1 \text{ A}.$$

$$E_C - u_L(0_+) = R \cdot i_L(0_+); \quad u_L(0_+) = E_C - R \cdot i_L(0_+) = 0.$$

Определяем **принуждённые составляющие**.

В установившемся режиме в схеме после коммутации, при $t = \infty$,

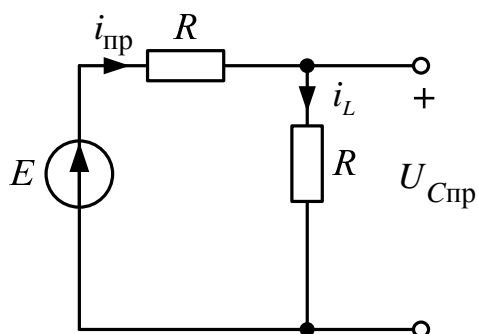


Рис. 4

$$\begin{aligned} i_{\text{пр}} = i_{L_{\text{пр}}} &= \frac{E}{2R} = 1,5 \text{ A}; \\ u_{C_{\text{пр}}} &= R \cdot i_{L_{\text{пр}}} = 150 \text{ В}; \\ i_{C_{\text{пр}}} &= 0; \\ u_{L_{\text{пр}}} &= 0. \end{aligned}$$

1.3. Классический метод расчёта переходных процессов

Метод используется для расчёта линейных цепей, которые характеризуются линейными дифференциальными уравнениями, составленными по законам Кирхгофа для мгновенных значений в цепи после коммутации:

$$a_n \cdot \frac{d^n f(t)}{dt^n} + a_{n-1} \cdot \frac{d^{n-1} f(t)}{dt^{n-1}} + a_1 \cdot \frac{df(t)}{dt} + a_0 \cdot f(t) = F(t), \quad (1.1)$$

где $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ – постоянные коэффициенты, определяемые параметрами (R, L, C) и структурой цепи после коммутации.

Мы получили неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка с постоянными коэффициентами. Общее решение такого уравнения записывается в виде суммы двух составляющих – общего решения однородного уравнения $f_{o.p}(t)$ и частного решения неоднородного уравнения $f_{ч.н}(t)$:

$$f(t) = f_{o.p}(t) + f_{ч.н}(t) = f_{пр}(t) + f_{св}(t).$$

В электротехнике общее решение однородного уравнения $f_{o.p}(t)$ называют свободной составляющей $i_{св}(t) = A \cdot e^{pt}$, потому что эта составляющая не зависит от источника энергии – внешнего воздействия, т.е. она свободна от внешнего влияния и зависит от параметров цепи.

Частное решение неоднородного уравнения $f_{ч.н}(t)$ в электротехнике называют принуждённой составляющей. Она зависит от источника энергии и полностью повторяет его функциональную зависимость от времени с неким коэффициентом пропорциональности. Например, если источник энергии постоянный, то принуждённая составляющая будет постоянной. Если источник энергии имеет синусоидальный вид, то и принуждённая составляющая будет иметь синусоидальный вид.

Характеристическое уравнение (1.2) получено из уравнения (1.1), путём замены производных высших порядков на p :

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 = 0, \quad (1.2)$$

где p – корень характеристического уравнения.

Корни уравнения определяются параметрами цепи. В зависимости от вида корней характеристического уравнения определяется вид свободной составляющей и тип переходного процесса:

- Корни вещественные, отрицательные и кратные.
Критический режим

$$f_{\text{св}}(t) = (A_1 + A_2 t + \dots + A_n t^{n-1}) \cdot e^{p t} .$$

- Корни вещественные отрицательные и неравные.
Апериодический режим

$$f_{\text{св}}(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + \dots + A_n e^{p_n t} .$$

- Корни комплексные попарно-сопряжённые с отрицательной вещественной частью. *Колебательный режим*

$$p_{1,2} = -\delta_2 \pm j\omega_{\text{св}2} ;$$

.....

$$p_{n-1,n} = -\delta_n \pm j\omega_{\text{св}n} .$$

$$f_{\text{св}}(t) = A_2 e^{-\delta_2 t} \cos(\omega_{\text{св}2} t + \beta_2) + A_n e^{-\delta_n t} \cos(\omega_{\text{св}n} t + \beta_n) ,$$

где $A_1, A_2, \dots, A_n, \beta_2, \dots, \beta_n$ – постоянные интегрирования, определяемые начальными условиями; $\delta_2, \dots, \delta_n$ – коэффициенты затухания свободных колебаний [1/с]; $\omega_{\text{св}2}, \dots, \omega_{\text{св}n}$ – угловые частоты свободных колебаний $\left(\frac{\text{рад}}{\text{с}} \right)$.

1.4. Объединение реактивных элементов

В зависимости от количества необъединяемых реактивных элементов определяется **порядок цепи**. Цепь с одним реактивным элементом L или C называется цепью **первого порядка**, цепь с двумя необъединяемыми реактивными элементами – цепью **второго порядка** и т.д.

Последовательное соединение

1) индуктивных элементов:

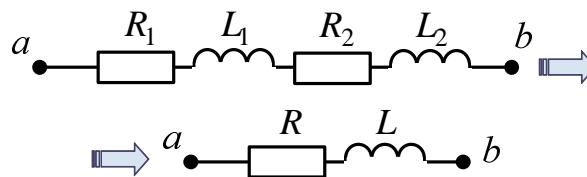


Рис. 5

здесь $R = R_1 + R_2$; $L = L_1 + L_2$;

2) ёмкостей:

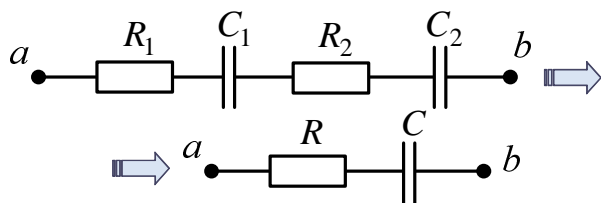


Рис. 6

здесь $R = R_1 + R_2$; $C = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}$.

Параллельное соединение

1) индуктивных элементов:

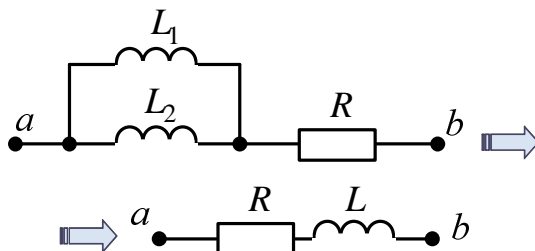


Рис. 7

здесь $R = R_1 + R_2$; $L = \frac{L_1 \cdot L_2}{L_1 + L_2}$;

2) ёмкостей:

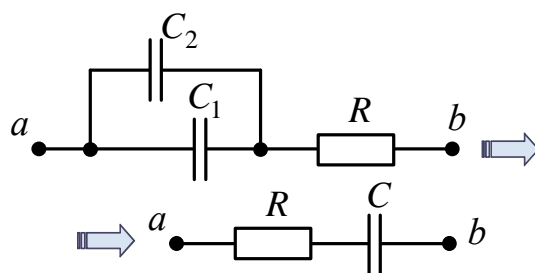


Рис. 8

здесь $R = R_1 + R_2$; $C = C_1 + C_2$.

1.5. Линейная цепь первого порядка

Цепь первого порядка содержит в послекоммутационной цепи только один реактивный элемент – L или C , характеризуется дифференциальным уравнением первого порядка

$$a_1 \frac{df(t)}{dt} + a_0 f(t) = F(t), \quad (1.3)$$

где a_1, a_0 – постоянные коэффициенты; $f(t)$ – напряжение или ток переходного процесса; $F(t)$ – функция, определяемая источниками после коммутации.

Характеристическое уравнение

$$a_1 p + a_0 = 0,$$

где $p = -\frac{a_0}{a_1} < 0$, $\frac{1}{\tau}$ – корень характеристического уравнения.

Решение уравнения (1.3)

$$f(t) = f_{\text{пр}}(t) + f_{\text{св}}(t) = f_{\text{пр}}(t) + Ae^{pt},$$

где $f_{\text{пр}}(t)$ – принуждённая составляющая; $f_{\text{св}}(t) = Ae^{pt}$ – свободная составляющая; A – постоянная интегрирования.

Длительность переходного процесса оценивается с использованием величины, называемой $\tau = \frac{1}{|p|}$ – **постоянная времени**. Как правило, за $5\tau \div 10\tau$ переходный процесс заканчивается.

Порядок расчёта:

1. Записываем решение в виде принужденной и свободной составляющих

$$i(t) = i_{\text{пр}} + i_{\text{св}}(t) = i(\infty) + Ae^{pt} \text{ или } u(t) = u_{\text{пр}} + u_{\text{св}}(t) = u(\infty) + Be^{pt}.$$

2. **ННУ**. Определяем независимые начальные условия в цепи до коммутации $i_L(0_-)$ или $u_C(0_-)$.

3. **ЗНУ**. Определяем искомую величину при $t(0_+)$: $i(0_+)$ или $u(0_+)$.

4. Определяем принужденную составляющую в схеме после коммутации $i_{\text{пр}} = i(\infty)$ или $u_{\text{пр}} = u(\infty)$.

5. Определяем корень характеристического уравнения p через входное сопротивление $Z(p) = 0$ в схеме после коммутации.

6. Определяем постоянную интегрирования из начальных условий $A = i(0_+) - i_{пр}(0)$ или $B = u(0_+) - u_{пр}(0)$.

Записываем окончательное решение и строим график.

Пример

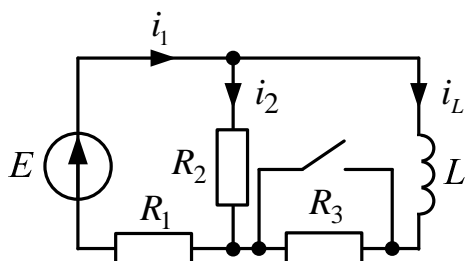


Рис. 9

Дано:

$$E = 100 \text{ В};$$

$$L = 1 \text{ Гн};$$

$$R_1 = 100 \text{ Ом};$$

$$R_2 = 25 \text{ Ом};$$

$$R_3 = 100 \text{ Ом}.$$

Определить: $i_1(t)$

1. Для схемы до коммутации определяем независимые начальные условия:

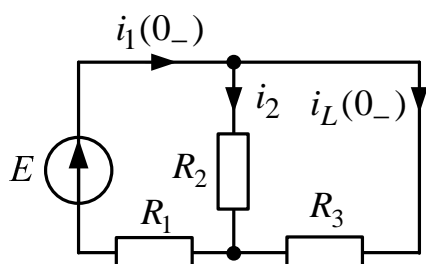


Рис. 10

$$i_1(0_-) = \frac{E}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} = 0,833 \text{ А};$$

$$i_L(0_-) = i_1(0_-) \frac{R_2}{R_2 + R_3} = 0,167 \text{ А}.$$

2. ЗНУ Определяем искомую величину $i_1(0_+)$ при $t(0_+)$:

$$J_L = i_L(0_-);$$

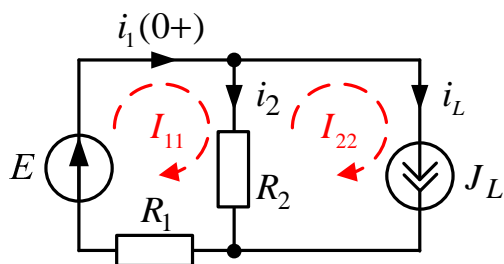


Рис. 11

$$J_L = i_L(0_-);$$

$$\begin{cases} I_{22} = J_L; \\ I_{11}(R_1 + R_2) - I_{22}R_2 = E; \end{cases}$$

$$i_1(0_+) = I_{11} = \frac{e + J_L R_2}{R_1 + R_2} = 0,833 \text{ А}.$$

3. Определяем принужденную составляющую $i_{1пр} = i(\infty)$ в схеме после коммутации:

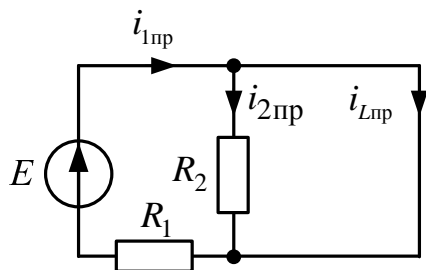
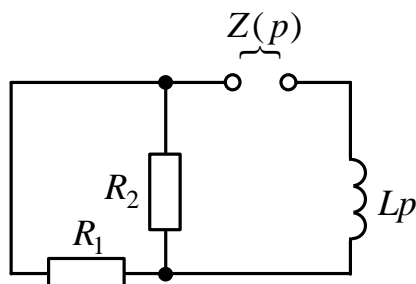


Рис. 12

$$i_{np1} = \frac{E}{R_1} = 1 \text{ А.}$$

4. Определяем корень характеристического уравнения p :



$$Z(p) = R_1 + \frac{R_2 p L}{R_2 + p L} = 0;$$

$$p = -\frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)} = -20 \frac{1}{\text{с}}.$$

Рис. 13

5. Определяем постоянную интегрирования:

$$A = i_1(0_+) - i_{np1} = -0,167 \text{ А.}$$

6. Записываем окончательный результат:

$$i_1(t) = 1 - 0,167 e^{-20t} = 1 - 0,167 e^{-\frac{t}{\tau}}, \text{ А.}$$

где $\tau = \frac{1}{|p|} = \frac{1}{20} = 0,05 \text{ с}$ – постоянная времени.

Пример

Документ Mathcad

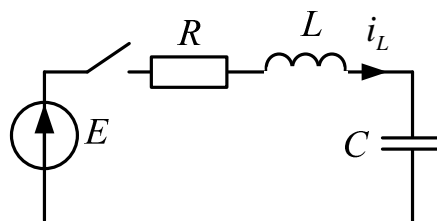
ORIGIN := 1

E := 8

R := 220

L := 100 · 10⁻³

с := 0.22 · 10⁻⁶



Классический метод, постоянный источник, цепь второго порядка

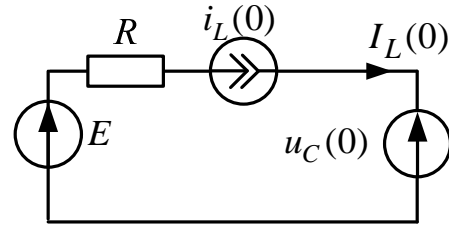
1. Определяем независимые начальные условия:

$$i_{L0} := 0 \quad U_{C0} := 0$$

2. Определяем зависимые начальные условия:

условия:

$$U_{L0} := E \quad U_{L0} = 8$$



3. Определяем принуждённую составляющую:

$$i_{Lпр} := 0$$

4. Определяем корень характеристического уравнения:

$$p := \frac{1}{c \cdot p} + R + L \cdot p \quad \left| \begin{array}{l} \text{solve, p} \\ \text{float, 5} \end{array} \right. \rightarrow \begin{bmatrix} (-1100.) - 6651.7 \cdot i \\ (-1100.) + 6651.7 \cdot i \end{bmatrix}$$

5. Определяем постоянные интегрирования:

$$a := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} i_{L0} - i_{Lпр} \\ \frac{U_{L0}}{L} \end{pmatrix} \quad B := a^{-1} \cdot b \quad B = \begin{pmatrix} 6.014i \times 10^{-3} \\ -6.014i \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

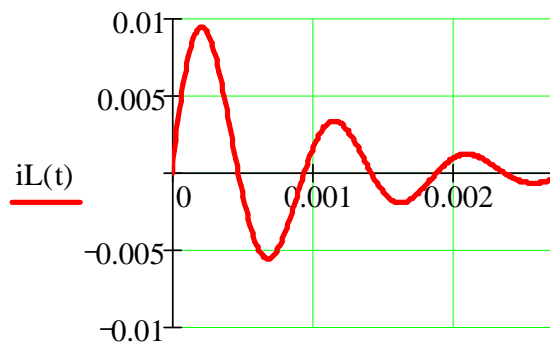
6. Окончательный результат:

$$i_L(t) := i_{Lпр} + B_1 \cdot e^{p_1 \cdot t} + B_2 \cdot e^{p_2 \cdot t}$$

$$i_L(t) \left| \begin{array}{l} \text{complex} \\ \text{float, 3} \end{array} \right. \rightarrow .120e-1 \cdot e^{(-.110e4) \cdot t} \cdot \sin(.665e4 \cdot t)$$

7. График искомой функции:

$$\tau := \frac{1}{|\text{Re}(p_1)|} \quad \tau = 9.091 \times 10^{-4} \quad t := 0, \tau \cdot 0.01 .. 5 \cdot \tau \quad T_{\text{osc}} := 3 \cdot \tau$$



1.6. Классический метод расчета переходных процессов в цепях первого порядка с гармоническим источником

Установившиеся режимы рассчитываются символическим методом.

Порядок расчёта:

1. Записываем решение в виде принужденной и свободной составляющих $i(t) = i(t) + Ae^{pt}$ или $u(t) = u_{\text{пр}}(t) + Ve^{pt}$.
2. **ННУ**. Определяем независимые начальные условия в цепи до коммутации $\dot{I}_L(0_-) \rightarrow i_L(0_-)$ или $\dot{U}_C(0_-) \rightarrow u_C(0_-)$.
3. **ЗНУ**. Определяем искомую величину при $t(0_+)$ $i(0_+)$ или $u(0_+)$.
4. Определяем принужденную составляющую в схеме после коммутации $\dot{I}_{\text{пр}} \rightarrow i_{\text{пр}}(t) \rightarrow i_{\text{пр}}(0)$ или $\dot{U}_{\text{пр}} \rightarrow u_{\text{пр}}(t) \rightarrow u_{\text{пр}}(0)$.
5. Определяем корень характеристического уравнения p через входное сопротивление $Z(p) = 0$, в схеме после коммутации.
6. Определяем постоянную интегрирования из начальных условий $A = i(0_+) - i_{\text{пр}}(0)$ или $B = u(0_+) - u_{\text{пр}}(0)$.
7. Записываем окончательное решение и строим график.

Пример

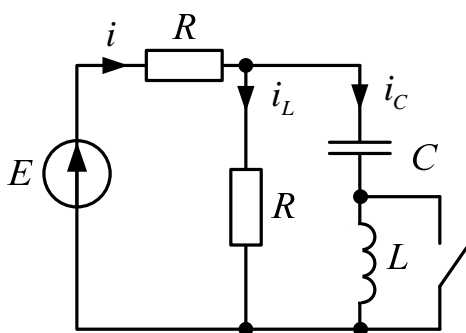


Рис. 14

Дано:

$$e = 100\sqrt{2} \sin(100t + 45^\circ), \text{ В};$$

$$R = 100 \text{ Ом};$$

$$L = 1 \text{ Гн};$$

$$C = 100 \text{ мкФ}.$$

Определить: $i(t)$

1. **ННУ**. Определяем независимые начальные условия в цепи до коммутации:

$$\dot{I}_L(0_-) \rightarrow i_L(0_-) \text{ или } \dot{U}_C(0_-) \rightarrow u_C(0_-);$$

$$\dot{E} = 100e^{j45^\circ} \text{ В}; \quad X_L = \omega L = 100 \text{ Ом}; \quad X_C = \frac{1}{\omega C} = 100 \text{ Ом},$$

т.к. $Z_{ab}^{(д)} = jX_L - jX_C = 0$ – резонанс напряжений.

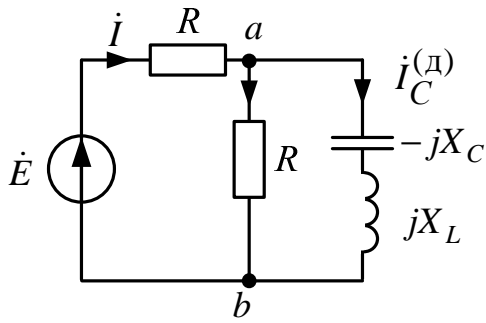


Рис. 15

$$i^{(n)} = i_C^{(n)} = i_L^{(n)} = \frac{\dot{E}}{R} = 1e^{j45^\circ} \text{ A};$$

$$i_L(0_-) = \sqrt{2} \sin 45^\circ = 1 \text{ A};$$

$$\dot{U}_C^{(n)} = (-jX_C) \dot{I}_C = 100e^{-j45^\circ} \text{ В};$$

$$u_C(0_-) = \sqrt{2} \cdot 100 \sin(-45^\circ) = -100 \text{ В}.$$

2. ЗНУ. Определяем искомую величину $i(0_+)$ или $u(0_+)$ при $t(0_+)$:

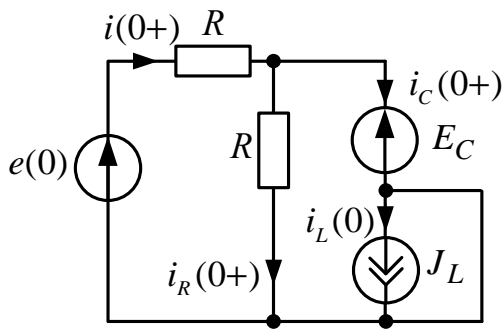


Рис. 16

$$J_L = i_L(0_-); E_C = u_C(0_-).$$

$$e(0) = 100\sqrt{2} \sin(45^\circ) = 100 \text{ В};$$

$$u_L(0_+) = 0;$$

$$e(0) - E_C = R \cdot i(0_+);$$

$$i(0_+) = \frac{e(0) - E_C}{R} = 2 \text{ А}.$$

3. Определяем принужденную составляющую в схеме после коммутации $\dot{I}_{\text{пр}} \rightarrow i_{\text{пр}}(t) \rightarrow i_{\text{пр}}(0)$ или $\dot{U}_{\text{пр}} \rightarrow u_{\text{пр}}(t) \rightarrow u_{\text{пр}}(0)$.

Схема после коммутации, установившийся режим, гармонический источник, символический метод:

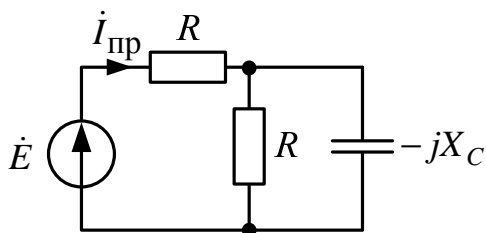


Рис. 17

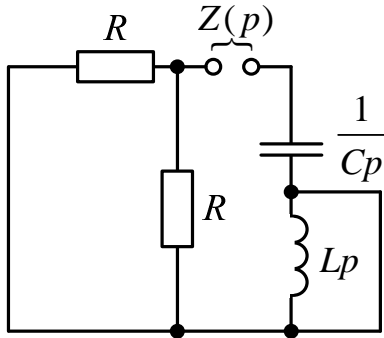
$$\underline{Z}^{(n)} = R + \frac{R(-jX_C)}{R - jX_C} = 158e^{-j18,4^\circ} \text{ Ом};$$

$$i_{\text{пр}} = \frac{\dot{E}}{\underline{Z}^{(n)}} = 0,63e^{j63,4^\circ} \text{ А};$$

$$i_{\text{пр}}(t) = \sqrt{2} \cdot 0,63 \sin(100t + 63,4^\circ), \text{ А};$$

$$i_{\text{пр}}(0) = \sqrt{2} \cdot 0,63 \sin 63,4^\circ = 0,8 \text{ А}.$$

4. Определяем корень характеристического уравнения p через входное сопротивление $Z(p) = 0$ в схеме после коммутации:



$$Z(p) = \frac{R}{2} + \frac{1}{Cp} = 0;$$

$$p = -\frac{2}{RC} = -200 \frac{1}{c}.$$

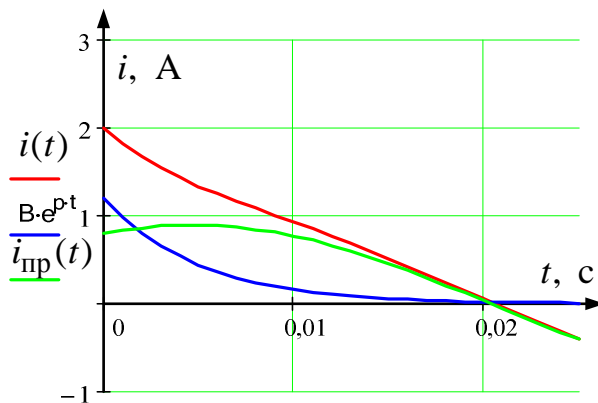
Рис. 18

5. Определяем постоянную интегрирования из начальных условий

$$A = i(0_+) - i_{\text{пр}}(0) = 2 - 0,794 = 1,2 \text{ А}.$$

6. Записываем окончательное решение и строим график:

$$i(t) = \sqrt{2} \cdot 0,63 \sin(100t + 63,4^\circ) + 1,2e^{-200t}, \text{ А};$$



$$\tau = \frac{1}{|p|} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ с};$$

$$t_{\text{п}} = 5\tau = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ с};$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 6,28 \cdot 10^{-2} \text{ с}.$$

Рис. 19

1.7. Обобщенные законы коммутации

В переходных режимах может наблюдаться быстрая начальная импульсная часть переходного процесса, которая для упрощения анализа принимается приближенно происходящей мгновенно (скачком).

При этом законы коммутации будут нарушаться, поэтому в этих случаях используются обобщенные законы коммутации:

1. Для каждого контура, в который входят индуктивности, связанные в узел, имеем

$$\sum \Psi_k(0_+) = \sum \Psi_k(0_-) \text{ или } \sum L_k i_{L_k}(0_+) = \sum L_k i_{L_k}(0_-).$$

2. Для каждого из узлов контура, составленного из емкостей, имеем

$$\sum q_k(0_+) = \sum q_k(0_-) \text{ или } \sum C_k u_{C_k}(0_+) = \sum C_k u_{C_k}(0_-).$$

Пример

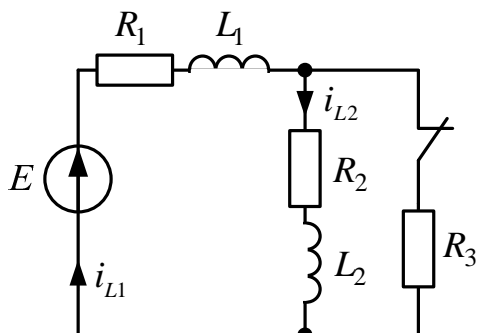


Рис. 20

Дано:

$$\begin{aligned} E &= 100 \text{ В}; \\ R_1 &= 10 \text{ Ом}; \\ R_2 = R_3 &= 30 \text{ Ом}; \\ L_1 &= 1 \text{ Гн}; \\ L_2 &= 3 \text{ Гн}; \\ C &= 100 \text{ мкФ}. \end{aligned}$$

Определить: $i_{L1}(t)$

1. Для схемы до коммутации определяем независимые начальные условия:

$$i_{L1}(0_-) = \frac{E}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} = 4 \text{ А};$$

$$i_{L2}(0_-) = i_{L1}(0_-) \frac{R_3}{R_2 + R_3} = 2 \text{ А}.$$

Суммарное потокосцепление

$$\sum \Psi_k(0_-) = L_1 i_{L1}(0_-) + L_2 i_{L2}(0_-) = 10 \text{ Вб}.$$

Суммарная энергия

$$W_M(0_-) = \frac{L_1 \cdot i_{L1}^2(0_-)}{2} + \frac{L_2 \cdot i_{L2}^2(0_-)}{2} = 14 \text{ Дж}.$$

2. **ЗНУ.** Схема после коммутации, при $t(0_+)$, $i_{L1}(0_+) = i_{L2}(0_+)$, тогда

$$\sum \Psi_k(0_+) = L_1 i_{L1}(0_+) + L_2 i_{L2}(0_+) = (L_1 + L_2) \cdot i_{L1}(0_+),$$

но $\sum \Psi_k(0_+) = \sum \Psi_k(0_-)$, тогда

$$i_{L1}(0_+) = i_{L2}(0_+) = \frac{\sum \Psi_k(0_-)}{L_1 + L_2} = 2,5,$$

причём
$$W_M(0_+) = \frac{L_1 \cdot i_{L1}^2(0_+)}{2} + \frac{L_2 \cdot i_{L2}^2(0_+)}{2} = 12,5 \text{ Дж.}$$

«Пропавшая» энергия $\Delta W_M = W_M(0_-) - W_M(0_+) = 1,5 \text{ Дж}$, которая израсходована на потери в проводах, искру и излучение.

3. Определяем принужденную составляющую в схеме после коммутации:

$$i_{1\text{пр}} = i(\infty), \quad i_{L1\text{пр}} = i_{L2\text{пр}} = \frac{E}{R_1 + R_2} = 2,5 \text{ А.}$$

4. Определяем корень характеристического уравнения p

$$Z(p) = R_1 + pL_1 + R_2 + pL_2 = 0;$$

$$p = -\frac{R_1 + R_2}{L_1 + L_2} = -10 \frac{1}{\text{с}}.$$

5. Определяем постоянную интегрирования $A = i_{L1}(0_+) - i_{L1\text{пр}} = 0$, т.е. переходного процесса не будет.

6. Записываем окончательный результат:

$$i_{L1}(t) = i_{L1\text{пр}} + Ae^{pt} = 2,5 \text{ А.}$$

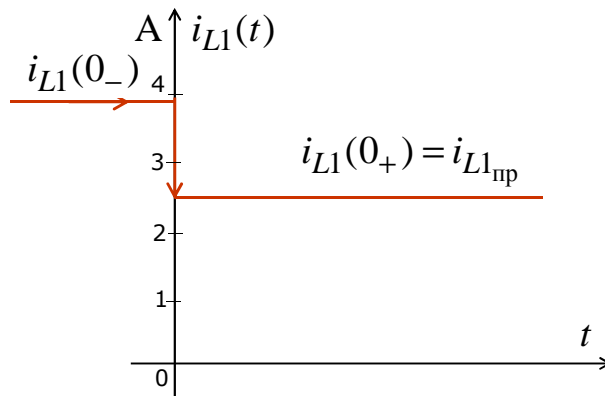


Рис. 21

Пример

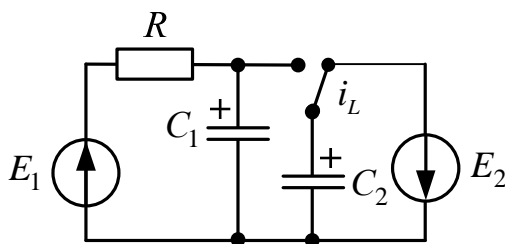


Рис. 22

Дано:

$$E_1 = E_2 = 100 \text{ В;}$$

$$C_1 = 200 \text{ мкФ;}$$

$$C_2 = 100 \text{ мкФ;}$$

$$R = 100 \text{ Ом.}$$

Определить: $u_{C_2}(t)$

1. Для схемы до коммутации определяем независимые начальные условия:

$$u_{C_1}(0_-) = E_1 = 100 \text{ В}; \quad u_{C_2}(0_-) = -E_2 = -100 \text{ В}.$$

Суммарный заряд

$$\sum q_k(0_-) = C_1 u_{C_1}(0_-) + C_2 u_{C_2}(0_-) = 0,01 \text{ Кл}.$$

Суммарная энергия

$$W_9(0_-) = \frac{C_1 \cdot u_{C_1}^2(0_-)}{2} + \frac{C_2 \cdot u_{C_2}^2(0_-)}{2} = 1,5 \text{ Дж}.$$

2. **ЗНУ**. Схема после коммутации, при $t(0_+)$, $u_{C_1}(0_+) = u_{C_2}(0_+)$, тогда

$$\sum q_k(0_+) = C_1 u_{C_1}(0_+) + C_2 u_{C_2}(0_+) = (C_1 + C_2) \cdot u_{C_2}(0_+),$$

но $\sum q_k(0_+) = \sum q_k(0_-)$, тогда

$$u_{C_2}(0_+) = \frac{\sum q_k(0_-)}{C_1 + C_2} = 33,333 \text{ В},$$

причём

$$W_9(0_+) = \frac{C_1 \cdot u_{C_1}^2(0_+)}{2} + \frac{C_2 \cdot u_{C_2}^2(0_+)}{2} = 0,166 \text{ Дж}.$$

«Пропавшая» энергия $\Delta W_9 = W_9(0_-) - W_9(0_+) = 1,334 \text{ Дж}$, которая израсходована на потери в проводах, искру и излучение.

3. Определяем принужденную составляющую в схеме после коммутации:

$$u_{C_2_{\text{пр}}} = u_{C_1_{\text{пр}}} = E_1 = 100 \text{ В}.$$

4. Определяем корень характеристического уравнения p :

$$Z(p) = R + \frac{1}{p(C_1 + C_2)} = 0;$$

$$p = -\frac{1}{R(C_1 + C_2)} = -33,333 \frac{1}{\text{с}}.$$

5. Определяем постоянную интегрирования:

$$B = u_{C_2}(0_+) - u_{C_2_{\text{пр}}} = -66,666 \text{ В}.$$

6. Записываем окончательный результат:

$$u_{C2}(t) = u_{C2_{\text{пр}}} + Be^{pt} = 100 - 66,666e^{-33,333t}, \text{ В};$$

$$\tau = \frac{1}{|p|} = 0,03 \text{ с}, \quad t_{\text{п}} = 5\tau = 0,15 \text{ с}.$$

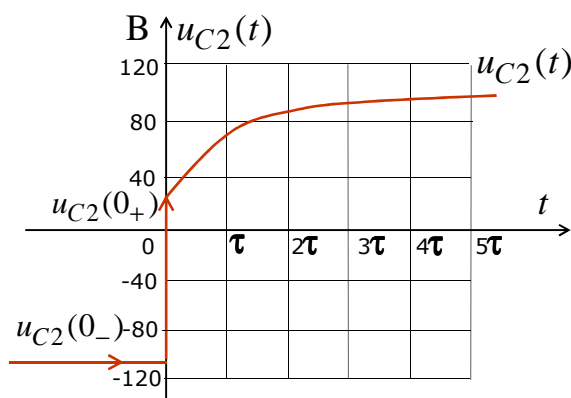


Рис. 23

1.8. Расчет переходных процессов в цепях 2-го порядка классическим методом

Цепь 2-го порядка после коммутации:

содержит

– L и C ;

– или две L ;

– или две C ;

характеризуется уравнениями

$$a_2 \frac{d^2 f(t)}{dt^2} + a_1 \frac{df(t)}{dt} + a_0 f(t) = F(t);$$

$$f(t) = f_{\text{пр}}(t) + f_{\text{св}}(t),$$

где $f(t)$ – напряжение или ток переходного процесса; a_0, a_1, a_2 – постоянные коэффициенты; $F(t)$ – функция, определяемая источниками после коммутации; $f_{\text{пр}}$ и $f_{\text{св}}$ – принужденная и свободная составляющие.

Характеристическое уравнение – $a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0$.

Корни характеристического уравнения:

$$p_{1,2} = -\frac{a_1}{2a_2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4a_2^2} - \frac{a_0}{a_2}}.$$

В зависимости от корней характеристического уравнения возможны следующие виды переходных процессов:

- Если $\frac{a_1^2}{4a_2^2} > \frac{a_0}{a_2}$, корни – вещественные, отрицательные и разные.

Апериодический режим

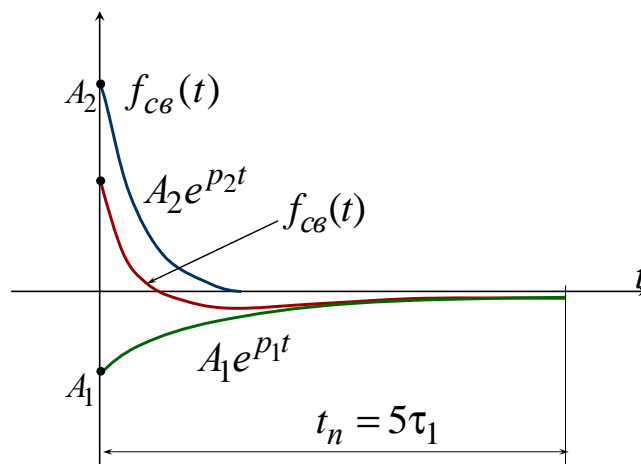


Рис. 24

$$f_{св}(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + \dots + A_n e^{p_n t},$$

$$\tau_1 = \frac{1}{|p_1|}, \quad \tau_2 = \frac{1}{|p_2|} \text{ – постоянные времени;}$$

$$t_{\text{п}} = 5 \cdot \max(\tau_{1,2}) \text{ – длительность переходного процесса.}$$

- Если $\frac{a_1^2}{4a_2^2} = \frac{a_0}{a_2}$, корни – вещественные, отрицательные и равные:

Критический режим

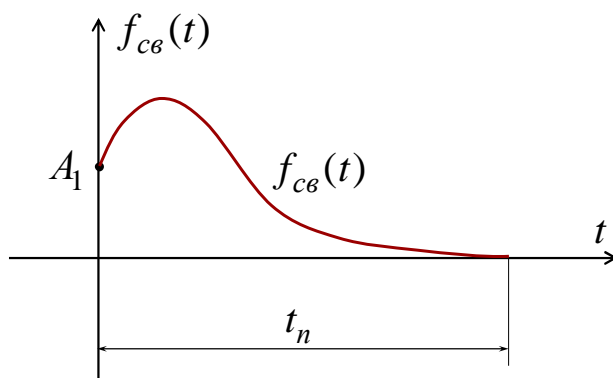


Рис. 25

$$f_{св}(t) = (A_1 + A_2 t + \dots + A_n t^{n-1}) \cdot e^{pt},$$

$$p = p_1 = p_2 = -\frac{a_1}{2a_2}; \quad t_{\Pi} = \frac{5}{|p|} \text{ – длительность переходного процесса.}$$

- Если $\frac{a_1^2}{4a_2^2} = \frac{a_0}{a_2}$, корни – комплексно-сопряжённые, с отрицательной вещественной частью:

Колебательный режим, или периодический режим

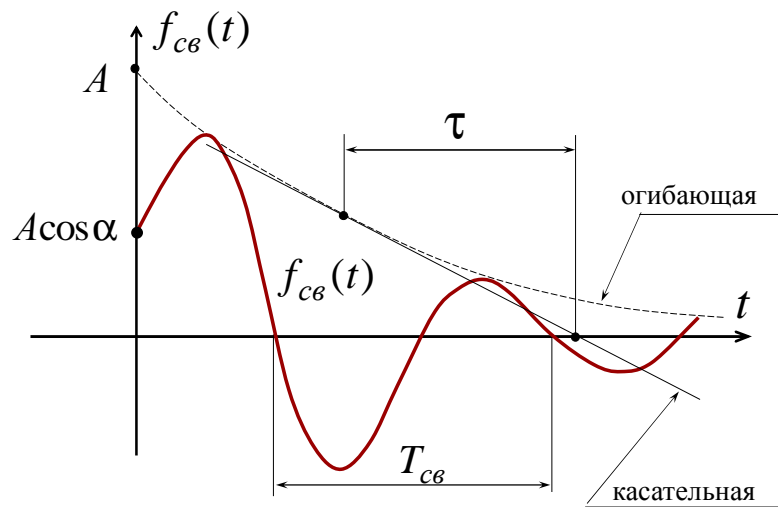


Рис. 26

$$f_{св}(t) = A \cdot e^{-\delta_{св} t} \cos(\omega_{св} t + \alpha),$$

где $p_{1,2} = -\delta_{св} \pm j\omega_{св}$;

$$\delta_{св} = \frac{a_1}{2a_2} \left(\frac{1}{c} \right) \text{ – коэффициент затухания свободных колебаний;}$$

$$\omega_{св} = \sqrt{\frac{a_0}{a_2} - \frac{a_1^2}{4a_2^2}} \left(\frac{1}{c} \right) \text{ – угловая частота свободных колебаний;}$$

$$T_{св} = \frac{2\pi}{\omega_{св}} \text{ – период свободных колебаний;}$$

$$\tau = \frac{1}{\delta_{св}} \text{ (с) – постоянная времени огibaющей свободных колебаний;}$$

$$t_{\Pi} = 5\tau \text{ (с) – длительность переходного процесса;}$$

A, α – постоянные интегрирования.

Пример

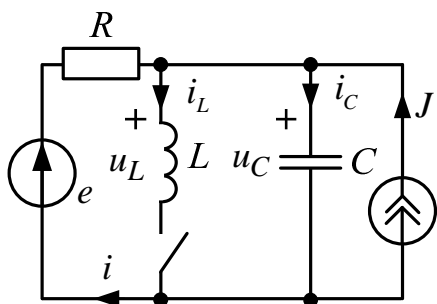


Рис. 27

Дано:

$$E = 100 \text{ В};$$

$$J = 2 \text{ А};$$

$$L = 6,25 \text{ Гн};$$

$$C = 100 \text{ мкФ};$$

$$R = 100 \text{ Ом}.$$

Определить: $i(t)$

Для схемы после коммутации по законам Кирхгофа составляем уравнения

$$-i - J + i_L + i_C = 0; \quad (1.4)$$

$$u_C = u_L = L \frac{di_L}{dt}; \quad (1.5)$$

$$e = R \cdot i + u_C, \quad (1.6)$$

причём

$$i_C = C \frac{du_C}{dt}. \quad (1.7)$$

Из уравнений (1.6) и (1.7)

$$i_C = C \frac{du_C}{dt} = C \frac{d(e - R \cdot i)}{dt} = C \frac{de}{dt} - R \cdot C \frac{di}{dt}. \quad (1.8)$$

Из уравнений (1.5) и (1.6)

$$i_L = \frac{1}{L} \int u_L dt = \frac{1}{L} \int u_C dt = \frac{1}{L} \int (e - R \cdot i) dt. \quad (1.9)$$

Из уравнений (1.4), (1.8), (1.9)

$$-i - J + \frac{1}{L} \int (e - R \cdot i) dt + C \frac{de}{dt} - R \cdot C \frac{di}{dt} = 0. \quad (1.10)$$

Продифференцируем уравнение (1.10)

$$-\frac{di}{dt} - \frac{dJ}{dt} + \frac{e}{L} - \frac{R}{L} \cdot i + C \frac{d^2 e}{dt^2} - R \cdot C \frac{d^2 i}{dt^2} = 0. \quad (1.11)$$

В результате из уравнения (1.11)

$$R \cdot C \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = \frac{e}{L} + C \frac{d^2 e}{dt^2} - \frac{dJ}{dt}, \quad (1.12)$$

или

$$F(t) = \frac{e}{L} + C \frac{d^2 e}{dt^2} - \frac{dJ}{dt},$$

где $a_2 = R \cdot C$; $a_1 = 1$; $a_0 = \frac{R}{L}$.

Решение уравнения (1.12): $i(t) = i_{\text{пр}}(t) + i_{\text{св}}(t)$. Так как $e = 100 = \text{const}_1$, $J = 2 = \text{const}_2$, то $i_{\text{пр}}(t) = I_{\text{пр}} = \text{const}_3$. Подставим $I_{\text{пр}}$ в уравнение (1.12):

$$RC \frac{d^2 I_{\text{пр}}}{dt^2} + \frac{dI_{\text{пр}}}{dt} + \frac{R}{L} I_{\text{пр}} = \frac{e}{L} + C \frac{d^2 e}{dt^2} - \frac{dJ}{dt}.$$

$\begin{matrix} \swarrow \\ 0 \end{matrix}$
 $\begin{matrix} \swarrow \\ 0 \end{matrix}$
 $\begin{matrix} \swarrow \\ 0 \end{matrix}$
 $\begin{matrix} \swarrow \\ 0 \end{matrix}$

Тогда $I_{\text{пр}} = \frac{e}{R} = 1$;

$$i_{\text{пр}}(t) = I_{\text{пр}}$$

можно также найти из расчета установившегося режима после коммутации ($t = \infty$). По второму закону Кирхгофа $e = R \cdot I_{\text{пр}}$, $I_{\text{пр}} = \frac{e}{R} = 1$ А.

Характеристическое уравнение –

$$RCp^2 + p + \frac{R}{L} = 0; \quad (1.10)$$

$$p_{1,2} = -\frac{1}{2RC} \pm \sqrt{\frac{1}{4R^2C^2} - \frac{1}{LC}}, \quad p_1 = -20 \left(\frac{1}{\text{с}} \right), \quad p_2 = -80 \left(\frac{1}{\text{с}} \right) -$$

апериодический переходный процесс. Уравнение (1.10) можно также получить из $Z(p) = 0$ после коммутации:

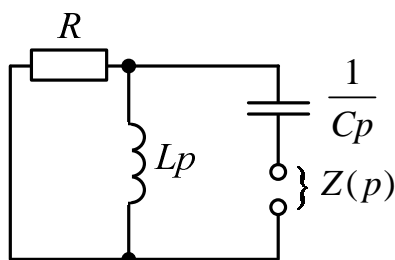


Рис. 28

$$Z(p) = \frac{1}{pC} + \frac{pL \cdot R}{pL + R} = 0,$$

или

$$RCp^2 + p + \frac{R}{L} = 0.$$

При апериодическом переходном процессе $i_{CB}(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$, тогда

$$i(t) = i_{\text{пр}}(t) + i_{CB}(t) = 1 + A_1 e^{-20t} + A_2 e^{-80t}.$$

Для определения A_1 и A_2 найдем $i(0_+)$ и $\left. \frac{di(t)}{dt} \right|_{t=0_+}$ – это зависимые начальные условия.

Определяем независимые начальные условия $i_L(0_-)$ и $u_C(0_-)$:

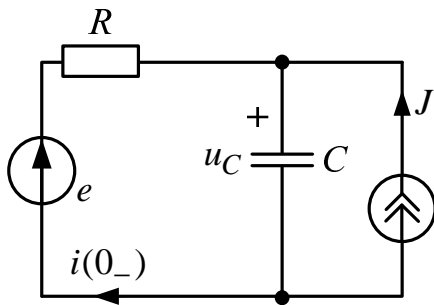


Рис. 29

$$i_L(0_-) = 0;$$

$$u_C(0_-) = e + RJ = 300 \text{ В},$$

причём

$$i(0_-) = -J = -2 \text{ А}.$$

Схема после коммутации при $t = 0_+$:

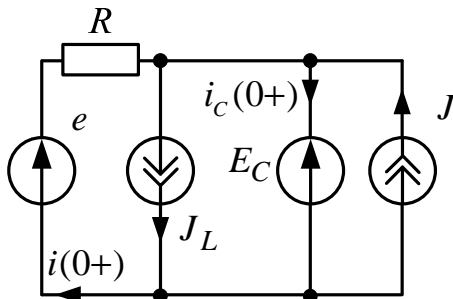


Рис. 30

$$J_L = i_L(0_-) = i_L(0_+) = 0;$$

$$E_C = u_C(0_-) = u_C(0_+) = 300 \text{ В}.$$

По второму закону Кирхгофа

$$e - E_C = R \cdot i(0_+),$$

тогда $i(0_+) = \frac{e - E_C}{R} = -2 \text{ А}.$

Для определения $\left. \frac{di(t)}{dt} \right|_{t=0_+}$ используем уравнение (1.6)

$e = R \cdot i(t) + u_C$, которое продифференцируем:

$$\frac{de}{dt} = R \frac{di(t)}{dt} + \frac{du_C}{dt} = R \frac{di(t)}{dt} + \frac{i_C}{C},$$

0

т.е.
$$\left. \frac{di(t)}{dt} \right|_{t=0_+} = -\frac{i_C(0_+)}{RC};$$

$i_C(0_+)$ найдем по первому закону Кирхгофа:

$$-i(0_+) - J + J_L + i_C(0_+) = 0;$$

$$i_C(0_+) = i(0_+) + J - J_L = -2 + 2 - 0 = 0, \text{ тогда } \left. \frac{di(t)}{dt} \right|_{t=0_+} = 0 \left(\frac{\text{А}}{\text{с}} \right).$$

Таким образом,

$$i(t) = 1 + A_1 e^{-20t} + A_2 e^{-80t}; \quad \frac{di(t)}{dt} = -20A_1 e^{-20t} - 80A_2 e^{-80t}.$$

$$\text{Или, при } t = 0_+, \begin{cases} i(0_+) = 1 + A_1 + A_2 = -2; \\ \left. \frac{di(t)}{dt} \right|_{t=0_+} = -20A_1 - 80A_2 = 0; \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A_1 = -4 \text{ (А)}; \\ A_2 = 1 \text{ (А)}. \end{cases}$$

Окончательный результат $i(t) = 1 - 4e^{-20t} + 1e^{-80t}$, А;

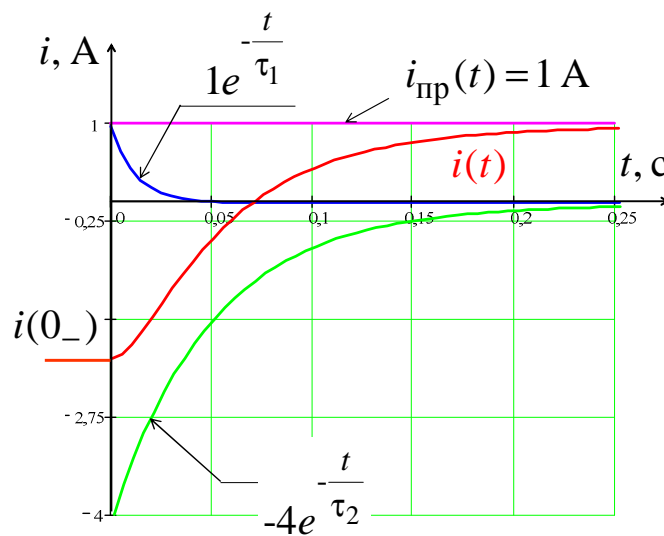


Рис. 31

$$\tau_1 = \frac{1}{20} = 5 \cdot 10^{-2} \text{ с};$$

$$\tau_2 = \frac{1}{80} = 1,25 \cdot 10^{-2} \text{ с};$$

$$t_{\text{п}} = 5 \max(\tau_{1,2}) = 5 \cdot \tau_1 = 25 \cdot 10^{-2} \text{ с}.$$

Порядок расчета переходных процессов в цепях 2-го порядка с постоянными или периодическими источниками:

- Для искомого напряжения или тока $f(t)$ определяются начальные условия $f(0_+)$ и $\left. \frac{df(t)}{dt} \right|_{t=0_+}$.
- Определяется принужденная составляющая $f_{\text{пр}}(t)$.
- При помощи $Z(p)=0$ находятся корни характеристического уравнения.
- В зависимости от p_1 и p_2 записывается $f_{\text{св}}(t)$.
- По начальным условиям $f(0_+)$ и $\left. \frac{df(t)}{dt} \right|_{t=0_+}$ и находятся постоянные интегрирования.
- Записывается окончательный результат $f(t) = f_{\text{пр}}(t) + f_{\text{св}}(t)$.

1.9. Операторный метод расчёта переходных процессов

Операторный метод (преобразование Лапласа) расчета переходных процессов используется для того, чтобы обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами (в пространстве оригиналов) преобразовать в алгебраические (в пространстве изображений). Очевидно, что алгебраические уравнения решаются проще. После решения алгебраического уравнения над полученной функцией (изображением) производится обратное преобразование Лапласа, получается оригинал. Полученный оригинал – это функция, которая и будет решением дифференциального уравнения.

Любой функции можно сопоставить её преобразование Лапласа

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt,$$

где $F(p)$ – изображение; $f(t)$ – оригинал.

Приведём изображение нескольких часто встречающихся функций.

Определим изображение константы $f(t) = A(\text{const})$:

$$F(p) = A \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = -\frac{e^{-pt}}{p} \Big|_0^{\infty} = \frac{A}{p}.$$

Найдем изображение экспоненциальной функции $f(t) = e^{\alpha t}$:

$$F(p) = A \int_0^{\infty} e^{\alpha t} e^{-pt} dt = -\frac{e^{-(p-\alpha)t}}{p-\alpha} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p-\alpha}.$$

Изображение экспоненциальной функции поможет нам найти изображения синусоидальной косинусной функции $\sin(\omega t)$, $\cos(\omega t)$. Для этого запишем эти функции через формулу Эйлера. Далее осуществляем следующую цепочку преобразований:

$$\begin{aligned} \sin(\omega t) &= \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \rightarrow \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{p-j\omega} - \frac{1}{p+j\omega} \right) = \\ &= \frac{1}{2j} \left(\frac{p+j\omega - p+j\omega}{p^2 + \omega^2} \right) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}; \\ \cos(\omega t) &= \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p-j\omega} + \frac{1}{p+j\omega} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{p+j\omega + p-j\omega}{p^2 + \omega^2} \right) = \frac{p}{p^2 + \omega^2}. \end{aligned}$$

Определим изображение производной $\frac{df(t)}{dt}$ функции $f(t)$, имеющей изображение $F(p)$:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-pt} dt &= \int_0^{\infty} e^{-pt} df(t) = f(t)e^{-pt} \Big|_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = \\ &= -f(0) + pF(p). \end{aligned}$$

И наконец, определим изображение интегрального выражения $\int_0^t f(t') dt'$:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \left(\int_0^t f(t') dt' \right) e^{-pt} dt &= -\frac{1}{p} \int_0^{\infty} \left(\int_0^t f(t') dt' \right) d(e^{-pt}) = \\ &= \frac{e^{-pt} \int_0^t f(t') dt'}{p} \Big|_0^{\infty} + \frac{\int_0^t f(t) e^{-pt} dt}{p} = \frac{F(p)}{p}. \end{aligned}$$

Таблица преобразований Лапласа

| $f(t)$ -оригинал | $F(p)$ -изображение |
|-------------------|---------------------------|
| 1 | $1/p$ |
| $e^{\alpha t}$ | $1/(p - \alpha)$ |
| $e^{-\alpha t}$ | $1/(p + \alpha)$ |
| $\sin(\omega t)$ | $\omega/(p^2 - \omega^2)$ |
| $\cos(\omega t)$ | $p/(p^2 + \omega^2)$ |
| $df(t)/dt$ | $-f(0) + pF(p)$ |
| $\int_0^t f(t)dt$ | $\frac{F(p)}{p}$ |

Для определения оригинала $f(t)$ используется обратное преобразование Лапласа

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\delta - j\infty}^{\delta + j\infty} F(p) \cdot e^{pt} dp.$$

На основании обратного преобразования Лапласа получена **теорема разложения**.

Если $F(p) = \frac{D(p)}{B(p)} = \frac{d_0 + d_1 p + d_2 p^2 + \dots + d_m p^m}{b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_n p^n}$, причем:

- $m < n$;
- корни $B(p) = 0$ различны;
- корни $D(p) = 0$ и $B(p) = 0$ различны,

тогда

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{D(p_k)}{B'(p_k)} \cdot e^{p_k t},$$

где p_k – корни $B(p) = 0$;

$$B'(p_k) = \left. \frac{dB(p)}{dp} \right|_{p=p_k}.$$

Пример

Дано: изображение

$$F(p) = I(p) = \frac{p+10}{p^3+6p^2+8p} = \frac{D(p)}{B(p)} \quad (\text{Ac})$$

Определить:
оригинал

$$B(p) = p^3 + 6p^2 + 8p = p(p^2 + 6p + 8) = 0;$$

$$p_1 = 0; \quad p_2 = -2 \left(\frac{1}{c} \right); \quad p_3 = -4 \left(\frac{1}{c} \right);$$

$$B'(p) = 3p^2 + 12p + 8;$$

$$i(t) = \sum_{k=1}^{n=3} \frac{D(p_k)}{B'(p_k)} \cdot e^{p_k t};$$

$$i(t) = \frac{0+10}{3 \cdot 0^2 + 12 \cdot 0 + 8} \cdot e^{0t} + \frac{-2+10}{3 \cdot (-2)^2 + 12 \cdot (-2) + 8} \cdot e^{(-2)t} +$$
$$+ \frac{-4+10}{3 \cdot (-4)^2 + 12 \cdot (-4) + 8} \cdot e^{(-4)t};$$

$$i(t) = 1,25 - 2e^{-2t} + 0,75e^{-4t}, \text{ A.}$$

Пример

Дано: изображение

$$F(p) = U(p) = \frac{2 \cdot 10^4 p + 2 \cdot 10^6}{p(p^2 + 200p + 2 \cdot 10^4)} = \frac{D(p)}{B(p)} \quad (\text{Bc})$$

Определить:
оригинал

$$B(p) = p(p^2 + 200p + 2 \cdot 10^4) = 0;$$

$$p_1 = 0, \quad p_{2,3} = -100 \pm j100 \left(\frac{1}{c} \right);$$

$$B'(p) = \left(p(p^2 + 200p + 2 \cdot 10^4) \right)' = 3p^2 + 400p + 2000;$$

$$u(t) = \sum_{k=1}^{n=3} \frac{D(p_k)}{B'(p_k)} \cdot e^{p_k t};$$

$$\begin{aligned}
u(t) &= \frac{2 \cdot 10^4 \cdot 0 + 2 \cdot 10^6}{3 \cdot 0^2 + 400 \cdot 0 + 2000} e^{0t} + \frac{2 \cdot 10^4 \cdot p_2 + 2 \cdot 10^6}{3p_2^2 + 400p_2 + 2000} e^{p_2 t} + \\
&+ \frac{2 \cdot 10^4 \cdot p_3 + 2 \cdot 10^6}{3p_3^2 + 400p_3 + 2000} e^{p_3 t} = \\
&= 100 + 70,5 e^{-j135^\circ} e^{(-100+j100)t} + 70,5 e^{j135^\circ} e^{(-100-j100)t} = \\
&= 100 + 2 \cdot 70,5 e^{-100t} \cdot \frac{e^{j(100t-135^\circ)} + e^{-j(100t-135^\circ)}}{2} = \\
&= 100 + 141 e^{-100t} \cos(100t - 135^\circ), \text{ В.}
\end{aligned}$$

Пример

Дано: изображение

$$F(p) = U(p) = \frac{2 \cdot 10^4 p + 2 \cdot 10^6}{p(p^2 + 200p + 2 \cdot 10^4)} = \frac{D(p)}{B(p)}, \text{ (Вс)}$$

Определить:

Оригинал

$$B(p) = p(p^2 + 200p + 2 \cdot 10^4) = 0;$$

$$p_1 = 0; \quad p_{2,3} = -100 \pm j100 \left(\frac{1}{c} \right);$$

$$B'(p) = (p^3 + 200p^2 + 2 \cdot 10^4 p)' = 3p^2 + 400p + 2 \cdot 10^4,$$

тогда

$$\begin{aligned}
u(t) &= \sum_{k=1}^{n=3} \frac{D(p_k)}{B'(p_k)} \cdot e^{p_k t} = \frac{2 \cdot 10^4 \cdot 0 + 2 \cdot 10^6}{0^2 + 400 \cdot 0 + 2 \cdot 10^4} e^{0t} + \\
&+ 2 \operatorname{Re} \left[\frac{2 \cdot 10^4 \cdot p_2 + 2 \cdot 10^6}{3p_2^2 + 400p_2 + 2 \cdot 10^4} e^{p_2 t} \right] = 100 + 2 \operatorname{Re} \left[70,5 e^{-j135^\circ} e^{(-100+j100)t} \right] = \\
&= 100 + 2 \operatorname{Re} \left[70,5 e^{j(-135^\circ+100t)} e^{-100t} \right] = 100 + 141 e^{-100t} \cos(100t - 135^\circ), \text{ В.}
\end{aligned}$$

Пример

Дано: изображение

$$I(p) = \frac{p^2 + p + 0,5}{p(p^2 + 2p + 1)} = \frac{D(p)}{B(p)} \quad (\text{Ac})$$

Определить:

оригинал

$$B(p) = p(p^2 + 2p + 1) = 0; \quad p_1 = 0; \quad p_2 = p_3 = -1 \left(\frac{1}{c} \right).$$

Используем метод неопределённых коэффициентов.

$$\frac{a}{p} + \frac{b}{p+1} + \frac{c}{(p+1)^2} = \frac{(a+b)p^2 + (2a+b+c)p + a}{p(p+1)^2}.$$

Сравнивая коэффициенты числителей, находим

$$\begin{cases} (a+b) = 1; \\ (2a+b+c) = 1; \\ a = 0,5. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0,5; \\ b = 0,5; \\ c = -0,5. \end{cases}$$

Оригиналы каждой из простых дробей определим по таблице преобразований Лапласа: $i(t) = 0,5 + 0,5e^{-t} - 0,5te^{-t}$, (А).

Законы Ома и Кирхгофа в операторной форме

- Для резистивного элемента;

$$\text{при } I_R(p) = \int_0^{\infty} i_R(t)e^{-pt} dt,$$

$$U_R(p) = \int_0^{\infty} u_R(t)e^{-pt} dt = R \int_0^{\infty} i_R(t)e^{-pt} dt;$$

$U_R(p) = R \cdot I_R(p)$ – закон Ома в операторной форме для резистивного элемента.

- Для индуктивного элемента $u_L(t) = L \frac{di_L}{dt} = L \cdot i'_L(t)$;

$$I_L(p) = i_L(t), \quad i'_L(t) = p \cdot I_L(p) - i_L(0_+);$$

$$U_L(p) = L \cdot [p \cdot I_L(p) - i_L(0_+)] \text{ или } U_L(p) = Z_L(p) \cdot I_L(p) - L \cdot i_L(0_+);$$

при $Z_L(p) = pL$ и $i_L(0_+) = 0$ получаем закон Ома в операторной форме для индуктивного элемента.

- Для ёмкостного элемента $u_C(t) = u_C(0_+) + \frac{1}{C} \int_0^t i_C(t) dt$.

При $I_C(p) = i_C(t)$, $\int_0^t i_C(t) dt = \frac{I_C(p)}{p}$ имеем

$$U_C(p) = \frac{u_C(0_+)}{p} + \frac{I_C(p)}{pC},$$

или

$$U_C(p) = Z_C(p) \cdot I_C(p) + \frac{u_C(0_+)}{p}.$$

При $Z_C(p) = 1/pC$ и $u_C(0_+) = 0$ получаем закон Ома в операторной форме для емкостного элемента.

- Пассивный двухполюсник при нулевых начальных условиях, когда $i_L(0_+) = 0$ и $u_C(0_+) = 0$, $u = f[R; L; C; i; i'; \int_0^t idt]$.

При $I(p) = i(t)$, по аналогии с законом Ома, для отдельных элементов можно записать операторное изображение напряжения;

$U(p) = Z(p) \cdot I(p)$ – закон Ома в операторной форме при нулевых начальных условиях, где $Z(p)$ – эквивалентное операторное сопротивление двухполюсника.

Пример

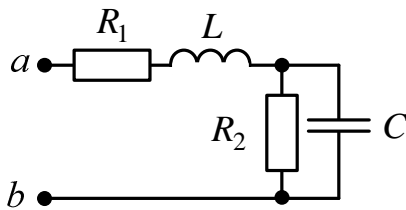
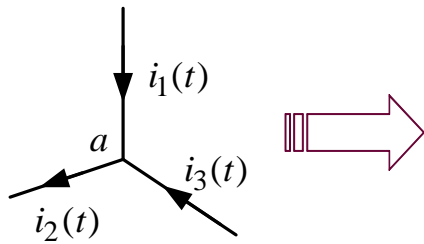


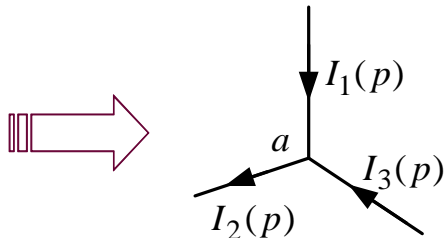
Рис. 32

$$Z(p) = R_1 + pL + \frac{R_2 \frac{1}{pC}}{R_2 + \frac{1}{pC}}.$$

- Первый закон Кирхгофа в операторной форме. Так как $\sum \pm i_k(t) = 0$, то $\sum \pm \int_0^\infty i_k(t) e^{-pt} dt = 0$;
- $\sum \pm I_k(p) = 0$ – первый закон Кирхгофа в операторной форме.



$$-i_1(t) + i_2(t) - i_3(t) = 0;$$



$$-I_1(p) + I_2(p) - I_3(p) = 0.$$

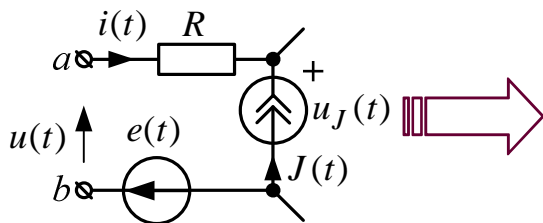
- Второй закон Кирхгофа в операторной форме.

Так как $\sum \pm u_{\Pi}(t) = \sum \pm e_k(t) + \sum \pm u_{J_q}(t)$,

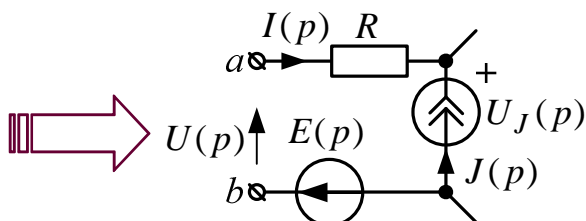
то
$$\sum_{\pm} \int_0^{\infty} u_{\Pi}(t) e^{-pt} dt = \sum_{\pm} \int_0^{\infty} e_k(t) e^{-pt} dt + \sum_{\pm} \int_0^{\infty} u_{J_q}(t) e^{-pt} dt,$$

или
$$\sum \pm U_{\Pi}(p) = \sum \pm E_k(p) + \sum \pm U_{J_q}(p)$$
 – второй закон Кирхгофа в операторной форме,

где $U_{\Pi}(p)$ – операторное изображение напряжения на пассивном элементе; $E_k(p)$ – операторное изображение ЭДС; $U_{J_q}(p)$ – операторное изображение напряжения на источнике тока.



$$R i(t) = u(t) + e(t) - u_J(t);$$



$$R I(p) = U(p) + E(p) - U_J(p).$$

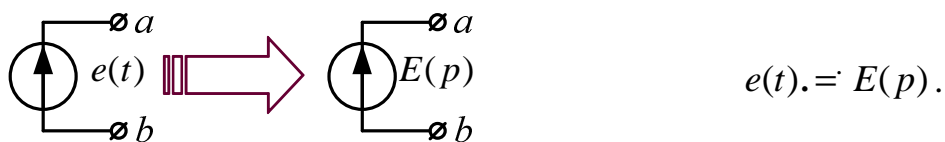
Законы Ома и Кирхгофа в операторной форме аналогичны этим законам на постоянном токе, поэтому к операторным схемам замещения применимы те же методы расчета, но в операторной форме:

- Метод законов Кирхгофа.
- Метод контурных токов.
- Метод узловых потенциалов.
- Метод наложения.
- Метод эквивалентного генератора.
- Метод преобразований.

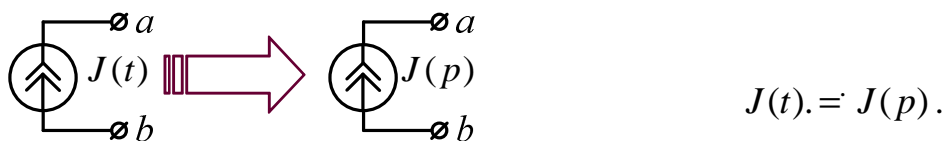
Операторная схема замещения составляется для цепи после коммутации на основании операторных схем отдельных элементов.

Схемы отдельных элементов следуют из законов Ома и Кирхгофа в операторной форме:

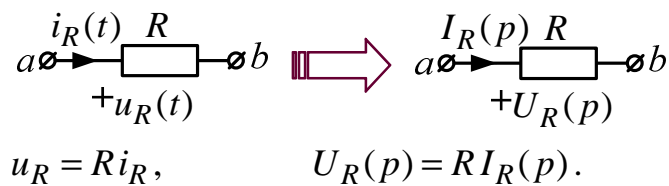
1. Источник ЭДС:



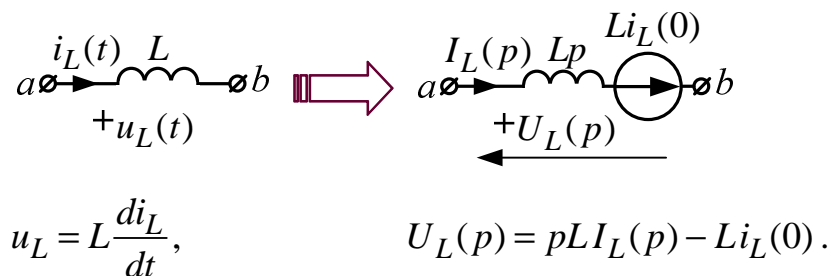
2. Источник тока:



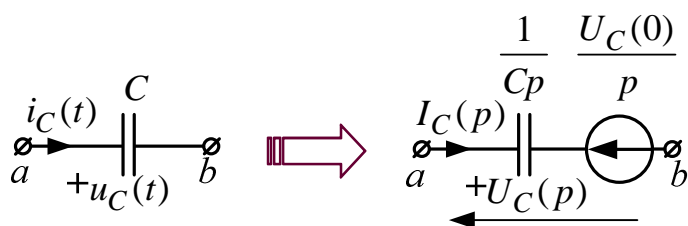
3. Резистивный элемент:



4. Индуктивный элемент:



5. Емкостный элемент:



$$u_C = u_C(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i_C dt,$$

$$U_C(p) = \frac{1}{pC} I_C(p) + \frac{u_C(0)}{p}.$$

Порядок расчета переходных процессов операторным методом:

1. Определяются независимые начальные условия
 $i_L(0_-) = i_L(0)$ и $u_C(0_-) = u_C(0)$.
2. Для схемы после коммутации изображается операторная схема, которая рассчитывается любым методом в операторной форме.
3. По теореме разложения определяются напряжения и токи переходного процесса в функции времени.

Пример

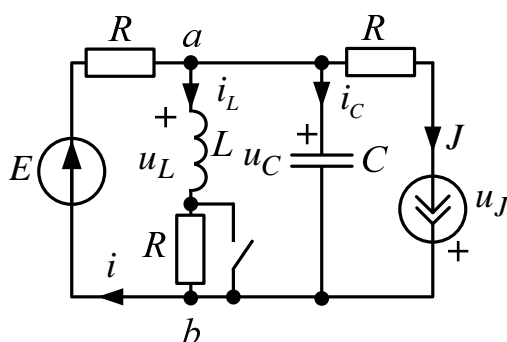


Рис. 33

Дано:

- $E = 100$ В;
- $J = 2$ А;
- $L = 1$ Гн;
- $C = 50$ мкФ;
- $R = 100$ Ом.

Определить: $i(t)$, $u_J(t)$

1. Определяются независимые начальные условия:

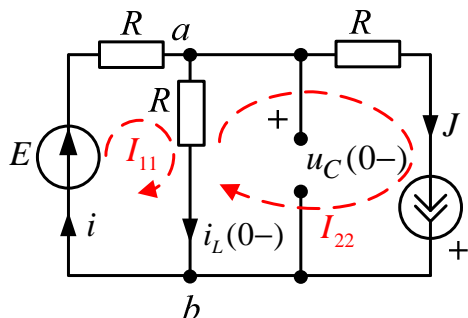


Рис. 34

$$i_L(0_-) = i_L(0); \quad u_C(0_-) = u_C(0);$$

$$I_{22} = J = 2 \text{ А};$$

$$I_{11} \cdot 2R - I_{22}R = E; \quad I_{11} = \frac{E + JR}{2R} = 1,5 \text{ А};$$

$$i_L(0_-) = I_{11} - I_{22} = -0,5 \text{ А};$$

$$u_C(0_-) = i_L(0_-)R = -50.$$

2. Для схемы после коммутации изображается операторная схема, которая рассчитывается любым методом в операторной форме:

$$i_L(0) = i_L(0_-) = -0,5 \text{ А}, u_C(0) = u_C(0_-) = -50 \text{ В}.$$

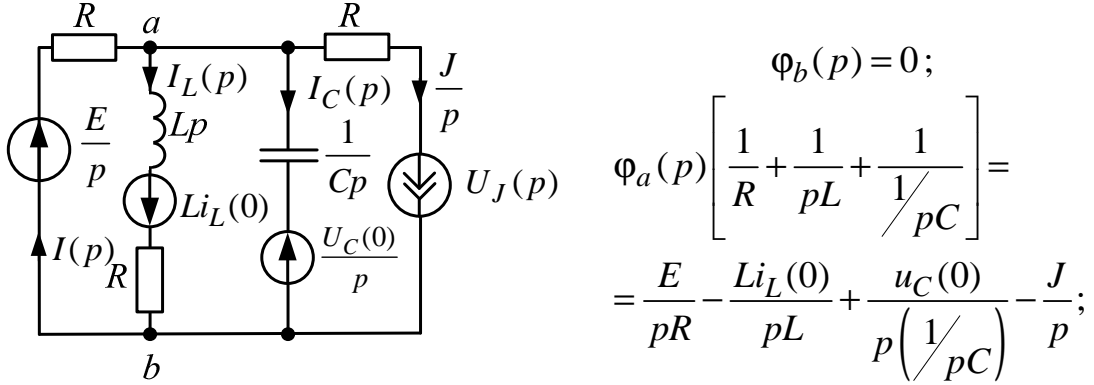


Рис. 35

$$\Phi_a(p) = \frac{EL - RLi_L(0) - RLJ + RLCu_c(0)p}{RLCp^2 + Lp + R}.$$

$$I(p) = \frac{\Phi_b(p) - \Phi_a(p) + E/p}{R} = \frac{E}{Rp} - \frac{\Phi_a(p)}{R};$$

$$I(p) = \frac{E}{Rp} - \frac{EL/R - Li_L(0) - JL + LCu_c(0)p}{RLCp^2 + Lp + R};$$

$$I(p) = \frac{1}{p} + \frac{0,5 + 25 \cdot 10^{-4} p}{0,005 p^2 + p + 100} = \frac{1}{p} + \frac{D_1(p)}{B_1(p)}.$$

По второму закону Кирхгофа

$$\Phi_a(p) - \Phi_b(p) + U_J(p) = R \cdot \frac{J}{p}, \quad U_J(p) = \frac{RJ}{p} - \Phi_a(p);$$

$$U_J(p) = \frac{200}{p} + \frac{50 + 0,25p}{0,005 p^2 + p + 100} = \frac{200}{p} + \frac{D_2(p)}{B_2(p)}.$$

3. По теореме разложения определяются $i(t)$ и $u_J(t)$:

$$i(t) = 1 + \sum_{k=1}^{n=2} \frac{D_1(p_k)}{B_1(p_k)} e^{p_k t} = 1 + 0,707 e^{-100t} \cdot \cos(100t - 45^\circ), \text{ А}.$$

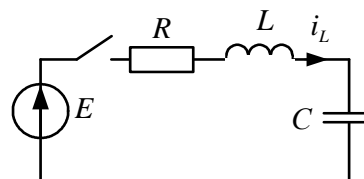
$$u_J(t) = 200 + \sum_{k=1}^{n=2} \frac{D_2(p_k)}{B_2(p_k)} e^{p_k t} = 200 + 70,7 e^{-100t} \cdot \cos(100t - 45^\circ), \text{ В}.$$

Достоинства операторного метода

- Не нужно определять ЗНУ, принужденные составляющие, корни характеристического уравнения и постоянные интегрирования.
- Можно использовать известные методы расчета операторных схем замещения.
- Можно использовать известные методы расчета операторных схем замещения.

Пример решения в MathCAD

$\text{ORIGIN} := 1$
 $E := 8$ $L := 100 \cdot 10^{-3}$
 $R := 220$ $C := 0.22 \cdot 10^{-6}$



Операторный метод, постоянный источник, цепь второго порядка

1. Определяем независимые начальные условия:

$$U_{C0} := 0 \quad i_{L0} := 0$$

2. Определяем изображение искомой функции:

$$I(p) := \frac{\frac{E}{p} - \frac{U_{C0}}{p} + L \cdot i_{L0}}{\frac{1}{C \cdot p} + L \cdot p + R}$$

$$I(p) \left| \begin{array}{l} \text{simplify} \\ \text{float}, 5 \end{array} \right. \rightarrow \frac{.16000e14}{.90909e19 + .44000e15 \cdot p + .20000e12 \cdot p^2}$$

3. Определяем оригинал искомой функции:

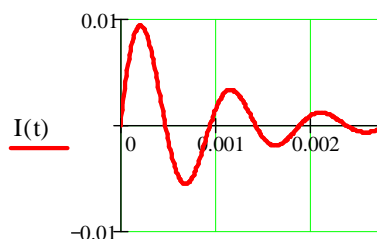
$$I(t) := I(p) \left| \begin{array}{l} \text{invlaplace}, p \\ \text{float}, 3 \end{array} \right. \rightarrow .120e-1 \cdot e^{(-.110e4) \cdot t} \cdot \sin(.665e4 \cdot t)$$

$$I(t) \rightarrow .120e-1 \cdot e^{(-.110e4) \cdot t} \cdot \sin(.665e4 \cdot t)$$

4. Строим график искомой функции:

$$p := .909e19 + .200e12 \cdot p^2 + .440e15 \cdot p \left| \begin{array}{l} \text{solve}, p \\ \text{float}, 5 \end{array} \right. \rightarrow \begin{bmatrix} (-1100.) - 6651.3 \cdot i \\ (-1100.) + 6651.3 \cdot i \end{bmatrix}$$

$$\tau := \frac{1}{|\text{Re}(p_1)|} \quad \tau = 9.091 \times 10^{-4} \quad t := 0, \tau \cdot 0.01 .. 5 \cdot \tau \quad T_w := 3 \cdot \tau$$



1.10. Комбинированный операторно-классический метод расчета переходных процессов

Цель метода – упрощение операторных изображений искомых напряжений и токов.

Сущность метода – применение принципа наложения.

Принужденные составляющие находятся из расчета установившегося режима после коммутации, а свободные составляющие определяются из расчета операторной схемы (после коммутации).

Порядок расчета:

1. Определяются независимые начальные условия:

$$i_L(0_-) = i_L(0) \text{ и } u_C(0_-) = u_C(0).$$

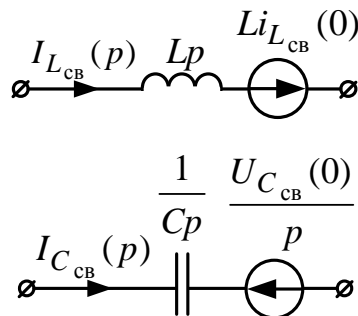
2. Определяются принужденные составляющие тока в индуктивности, напряжения емкости и искомых величин, например $i_{пр}(t)$.

3. Определяются значения свободных составляющих при $t = 0$:

$$i_{L_{св}}(0) = i_L(0) - i_{прL}(0);$$

$$u_{C_{св}}(0) = u_C(0) - u_{прC}(0).$$

4. Рассчитывается операторная схема после коммутации для свободных составляющих, где источники ЭДС закорочены, ветви с источниками тока разорваны, причем индуктивности и емкости изображаются так:



Находится операторное изображение свободной составляющей, например $I_{св}(p) = \frac{D(p)}{B(p)}$.

5. По теореме разложения и принципу наложения находим

$$i(t) = i_{\text{пр}}(t) + \underbrace{\sum_{k=1}^n \frac{D(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t}}_{i_{\text{св}}(t)}$$

Пример

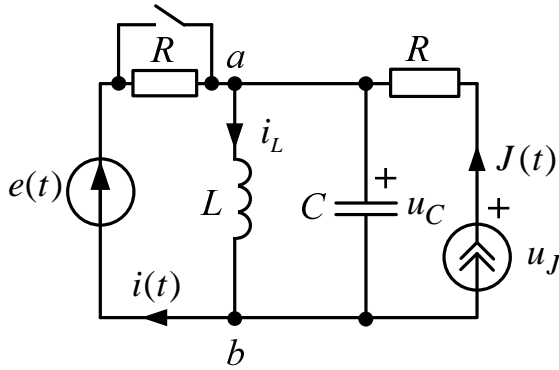


Рис. 36

Дано:

$$e(t) = 200 \sin(100t + 90^\circ), \text{ В};$$

$$J(t) = 1 \sin 100t, \text{ А};$$

$$L = 1 \text{ ГН};$$

$$C = 100 \text{ мкФ};$$

$$R = 100 \text{ Ом}.$$

Определить: $i(t)$, $u_J(t)$

Решение:

1. Определяются независимые начальные условия:

$$i_L(0_-) = i_L(0) \text{ и } u_C(0_-) = u_C(0);$$

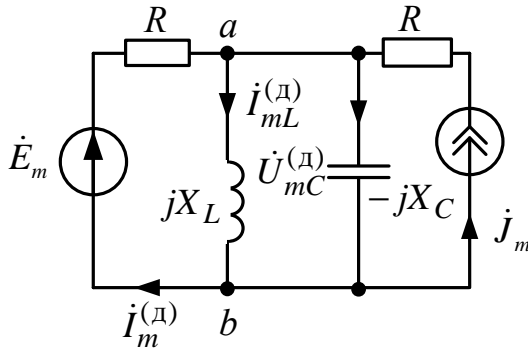


Рис. 37

$$\dot{E}_m = 200e^{j90^\circ}, \text{ В};$$

$$j_m = 1e^{j0^\circ}, \text{ А};$$

$$X_L = \omega L = 100 \text{ Ом};$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = 100 \text{ Ом}.$$

Так как $Z_{ab} = \frac{jX_L(-jX_C)}{jX_L - jX_C} = \infty$, то $\dot{i}_m^{(d)} = -j_m$,

$$\dot{U}_{mC}^{(d)} = \dot{E}_m - \dot{i}_m^{(d)} R = 200e^{j90^\circ} + 2e^{j0^\circ} \cdot 100 = 282e^{j45^\circ}, \text{ В};$$

$$\dot{i}_{mL}^{(d)} = \frac{\dot{U}_{mC}^{(d)}}{jX_L} = \frac{282e^{j45^\circ}}{j100} = 2,82e^{-j45^\circ}, \text{ А};$$

$$i_L^{(d)} = 2,82 \sin(100t - 45^\circ), \quad i_L(0) = i_L^{(d)}(0) = 2,82 \sin(-45^\circ) = -2 \text{ А};$$

$$u_C^{(d)} = 282 \sin(100t + 45^\circ), \quad u_C(0) = u_C^{(d)}(0) = 282 \sin(45^\circ) = 200 \text{ В}.$$

2. Определяются принужденные составляющие тока в индуктивности, напряжения емкости и искомым величин: $i_{прL}(t)$, $i_{пр}(t)$, $u_{прC}$, $u_{прJ}(t)$.

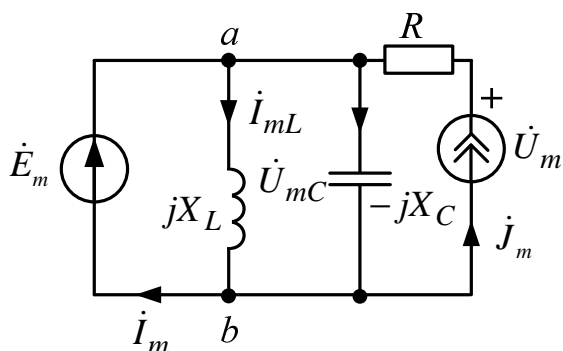


Рис. 38

$$X_L = X_C;$$

$$\dot{U}_{mC} = \dot{E}_m = 200e^{j90^\circ}, \text{ В};$$

$$\dot{i}_{mL} = \dot{U}_{mC} / jX_L = 2e^{j0^\circ}, \text{ А};$$

$$\dot{i}_m = -\dot{J}_m = 2e^{j180^\circ}, \text{ А};$$

$$\dot{U}_m = R\dot{J}_m + \dot{U}_{mC} = 282e^{j45^\circ}, \text{ В}.$$

$$i_{прL}(t) = 2 \sin 100t \text{ А}, \quad u_{прC}(t) = 200 \sin(100t + 90^\circ), \text{ В};$$

$$i_{пр}(t) = 2 \sin(100t + 180^\circ) \text{ А}, \quad u_{прJ}(t) = 282 \sin(100t + 45^\circ), \text{ В}.$$

3. Определяются значения свободных составляющих при $t = 0$:

$$i_{L_{св}}(0) = i_L(0) - i_{прL}(0) = 2 - 2 \sin 0 = -2 \text{ А};$$

$$u_{C_{св}}(0) = u_C(0) - u_{прC}(0) = 200 - 200 \sin 90^\circ = 0 \text{ В}.$$

4. Рассчитывается операторная схема после коммутации для свободных составляющих, где источники ЭДС закорочены, ветви с источниками тока разорваны, причем индуктивности и емкости изображаются так:

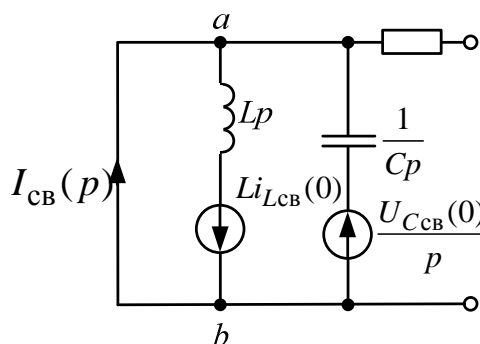


Рис. 39

$$I_{св}(p) = \frac{Li_{L_{св}}(0)}{pL} = -\frac{2}{p} = \frac{D(p)}{B(p)};$$

$$U_{св}(p) = 0.$$

5. По теореме разложения и принципу наложения находим

$$i(t) = i_{пр}(t) + \sum_{k=1}^{n=1} \frac{D(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t} = 2 \sin(100t + 180^\circ) - 2, \text{ А};$$

$$u_J(t) = u_{прJ}(t) + u_{св}(t) = 282 \sin(100t + 45^\circ), \text{ В}.$$

1.11. Метод переменных состояния

Метод переменных состояния используется для численного расчета переходных процессов, особенно в цепях высокого порядка ($n > 2$), когда применение аналитических методов затруднительно. Суть метода заключается в сведении дифференциального уравнения электрической цепи n -го порядка к системе n дифференциальных уравнений первого порядка. Система дифференциальных уравнений первого порядка должна быть разрешена относительно производных. Коэффициенты при производных должны быть равны единице. Такая форма записи называется формой Коши. В качестве переменных состояния выбираются величины, однозначно определяющие состояние цепи – величины, подчиняющиеся законам коммутации, т.е. **токи в индуктивностях и напряжения на емкостях**.

Таким образом, составляются уравнения по законам Кирхгофа для мгновенных значений в послекоммутационной цепи, записываются в нормализованной форме или форме Коши и решаются численно с помощью встроенных функций MathCAD или Matlab.

Уравнения состояния в матричной форме:

$$[\mathbf{X}'(t)] = [\mathbf{A}] \cdot [\mathbf{X}(t)] + [\mathbf{B}] \cdot [\mathbf{F}(t)], \quad (1.14)$$

где $[\mathbf{X}'(t)]$ – матрица-столбец производных от токов в индуктивностях и напряжений в емкостях (n -элементов);

\mathbf{A} – квадратная матрица коэффициентов при переменных состояния (n -строк и n -столбцов);

$[\mathbf{B}]$ – прямоугольная матрица связи, состоящая из коэффициентов перед источниками ЭДС и тока (n -строк, m -столбцов);

$[\mathbf{F}(t)]$ – матрица-столбец (независимых) источников ЭДС и тока (m -элементов);

$\mathbf{D}(x, t)$ – расширенная матрица.

Алгебраические уравнения для выходных величин в матричной форме:

$$[\mathbf{Y}(t)] = [\mathbf{C}] \times [\mathbf{X}(t)] + [\mathbf{D}] \times [\mathbf{F}(t)], \quad (1.15)$$

где $[\mathbf{Y}(t)]$ – матрица-столбец выходных величин (k -элементов);

$[\mathbf{C}]$ – прямоугольная матрица связи выходных величин с переменными состояния (k -строк, n -столбцов);

$[\mathbf{D}]$ – прямоугольная матрица связи выходных величин с источниками (k -строк, m -столбцов).

Порядок расчета:

1. **ННУ.** Определяем независимые начальные условия в цепи до коммутации: $i_L(0_-)$ или $u_C(0_-)$.

2. Для схемы после коммутации по законам Кирхгофа составляем уравнения (1.14, 1.15).

3. Решаем уравнения (1.14, 1.15) численно с помощью встроенных функций MathCAD или MatLab.

Записываем окончательное решение и строим график.

Пример

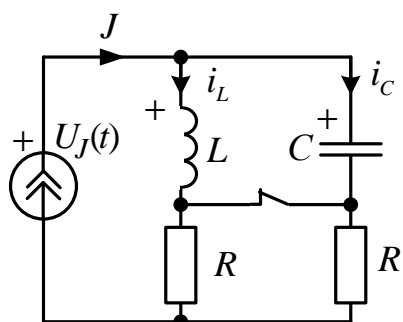


Рис. 40

Дано:

$$J = 1 \text{ А};$$

$$L = 1 \text{ Гн};$$

$$C = 10 \text{ мкФ};$$

$$R = 100 \text{ Ом}.$$

Определить: $U_J(t)$

1. **ННУ.** Для схемы до коммутации определяем независимые начальные условия:

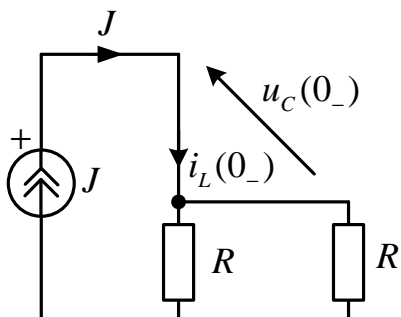


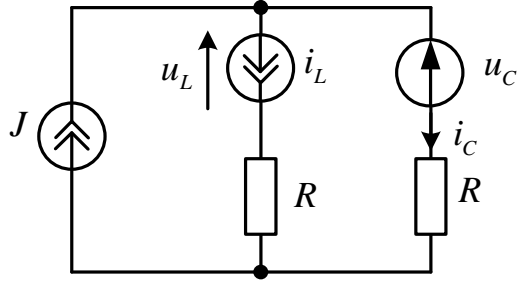
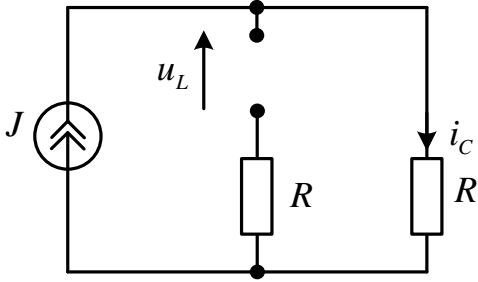
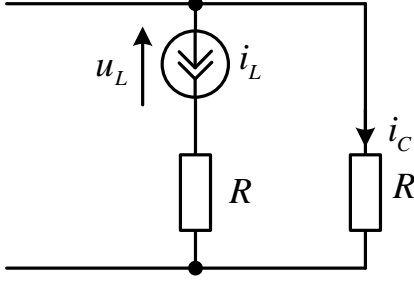
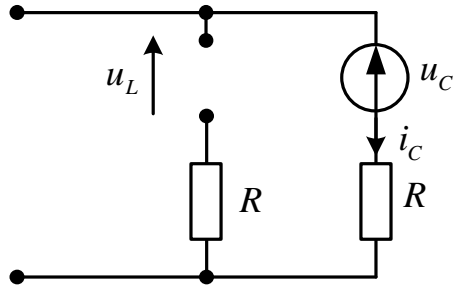
Рис. 41

$$i_L(0_-) = J \text{ А};$$

$$u_C(0_-) = 0 \text{ В}.$$

2. Для схемы после коммутации составляем уравнения по законам Кирхгофа. Система дифференциальных уравнений первого порядка должна быть разрешена относительно производных для получения уравнений в виде (1.14). Для получения уравнений вида (1.14) можно воспользоваться **методом наложения**.

В **послекоммутационной** цепи по теореме компенсации заменим реактивные элементы источниками: индуктивность – источником тока, величиной i_L , а ёмкость – источником ЭДС, величиной u_C . В полученной схеме определим **методом наложения** две величины: i_C и u_L :

| | |
|--|-----------------------------------|
|  <p style="text-align: center;">Рис. 42</p> | |
| <p>Первая подсхема – токи и напряжения от действия источника тока J:</p>  <p style="text-align: center;">Рис. 43</p> | $i_C' = J;$ $u_L' = JR$ |
| <p>Вторая подсхема – определяем токи и напряжения от действия источника тока величиной i_L:</p>  <p style="text-align: center;">Рис. 44</p> | $i_C'' = -i_L;$ $u_L'' = -i_L 2R$ |
| <p>Третья подсхема – токи и напряжения от действия источника ЭДС, величиной u_C:</p>  <p style="text-align: center;">Рис. 45</p> | $i_C''' = 0;$ $u_L''' = u_C$ |

$$u_L = u_L' + u_L'' + u_L''' = JR - i_L 2R - u_C; \quad \text{или} \quad \frac{di_L}{dt} = \frac{u_L}{L} = \frac{-2R}{L}i_L + \frac{1}{L}u_C + \frac{R}{L}J(t);$$

$$i_C = i_C' + i_C'' + i_C''' = J - i_L + 0 \quad \frac{du_C}{dt} = \frac{i_C}{C} = -\frac{1}{C}i_L + 0 \cdot u_C + \frac{1}{C}J(t),$$

$$\begin{bmatrix} \frac{di_L}{dt} \\ \frac{du_C}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-2R}{L} & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_L \\ u_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{R}{L} \\ \frac{1}{C} \end{bmatrix} \cdot J(t), \text{ где } [\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} -2R/L & 1/L \\ -1/C & 0 \end{bmatrix}; [\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} R/L \\ 1/C \end{bmatrix}.$$

$$u_J = u_C + Ri_C = u_C + (J - i_L) = -Ri_L + u_C + RJ,$$

$$\text{тогда } [u_J] = [-R \ 1] \cdot \begin{bmatrix} i_L \\ u_C \end{bmatrix} + [R][J], \text{ где } [\mathbf{C}] = [-R \ 1]; [\mathbf{D}] = [R].$$

Дано: Документ Mathcad

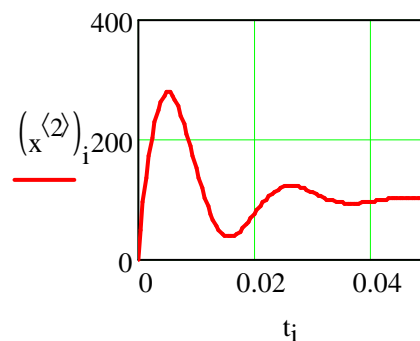
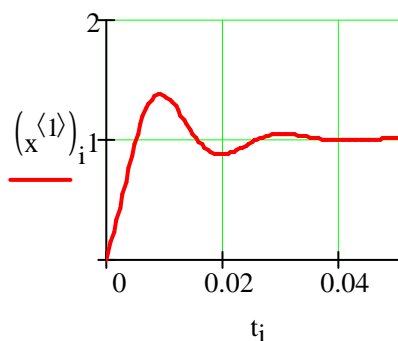
$$\begin{array}{ll} \underline{J} := 1 & \underline{L} := 1 \\ \underline{R} := 100 & \underline{C} := 10 \cdot 10^{-6} \end{array} \quad \underline{A} := \begin{pmatrix} \frac{-2R}{L} & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & 0 \end{pmatrix} \quad \underline{B} := \begin{pmatrix} \frac{R}{L} \\ \frac{1}{C} \end{pmatrix}$$

$$\lambda := \text{eigenval}(A) \quad \lambda = \begin{pmatrix} -100 + 300i \\ -100 - 300i \end{pmatrix}$$

$$D(t, x) := A \cdot x + B \quad \tau := \frac{1}{|\max(\text{Re}(\lambda))|} \quad \tau = 0.01 \quad \underline{T} := 5\tau$$

$$x := \text{rkfixed} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, 0, T, N, D \right) \quad t := x^{(0)} \quad \underline{N} := 100 \quad i := 0..N$$

Строим графики искомым i_L, u_C (переменных состояния):



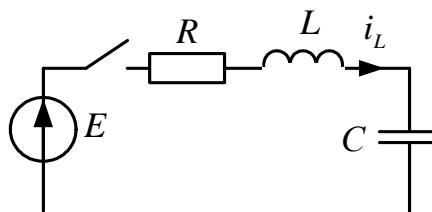
Аналитический метод решения переходных процессов методом переменных состояния

Находим матрицу состояния A используя операции Given и Find. Составляем уравнения по законам Кирхгофа, исключая в них все величины кроме переменных состояния U_C, i_L :

Given

$$i_L \cdot R + L \cdot di_L + U_C = E$$

$$i_L = C \cdot dU_C$$



$$Ao(U_C, i_L, E) := \text{Find}(dU_C, di_L) \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{i_L}{C} \\ \frac{-(i_L \cdot R + U_C - E)}{L} \end{bmatrix}$$

Записываем матрицу переменных состояния A и матрицу-столбец правых частей B :

$$A := \text{augment}(Ao(1, 0, 0), Ao(0, 1, 0))$$

$$B := Ao(0, 0, E)$$

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ \frac{-1}{L} & \frac{-R}{L} \end{pmatrix} \quad B \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{E}{L} \end{pmatrix}$$

Дано: $E := 8$ $L := 100 \cdot 10^{-3}$ $R := 220$ $C := 0.22 \cdot 10^{-6}$

$$A := \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ \frac{-1}{L} & \frac{-R}{L} \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{E}{L} \end{pmatrix}$$

Определяем собственные числа матрицы состояния $A \Rightarrow \lambda$

$$\lambda := \text{eigenvals}(A) \quad \lambda = \begin{pmatrix} -1100 + 6651.657i \\ -1100 - 6651.657i \end{pmatrix}$$

Для проверки определяем корни характеристического уравнения через импеданс схемы $Z(p)$:

$$Z(p) := L \cdot p + \frac{1}{C \cdot p} + R \quad \left| \begin{array}{l} \text{solve, p} \\ \text{float, 5} \end{array} \right. \rightarrow \begin{array}{l} (-1100.) - 6651.7 \cdot i \\ (-1100.) + 6651.7 \cdot i \end{array}$$

Для проверки определяем принуждённые составляющие

$$i_{Lпр} := 0 \quad U_{спр} := E$$

$$-A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} U_{спр} \\ i_{Lпр} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Составляем расширенную матрицу

$$D(t, x) := A \cdot x + B$$

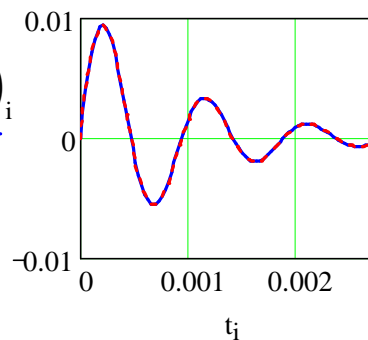
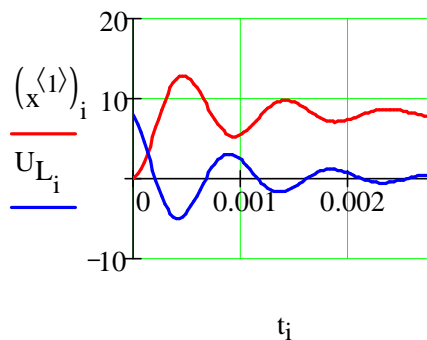
$$\tau := \frac{1}{\left| \overrightarrow{\max(\text{Re}(\lambda))} \right|} \quad \tau = 9.091 \times 10^{-4} := 3\tau \quad N := 100$$

$$x := \text{rkfixed} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, 0, T, N, D \right] \quad t := x^{(0)} \quad i := 0..N$$

Определим для приведенной схемы i_C и U_L . Для этого нужно расширенную матрицу умножить на диагональную матрицу:

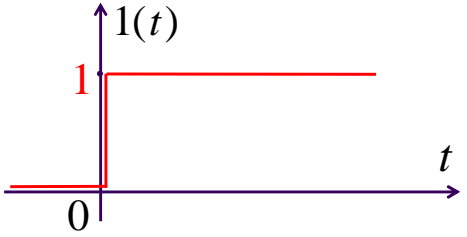
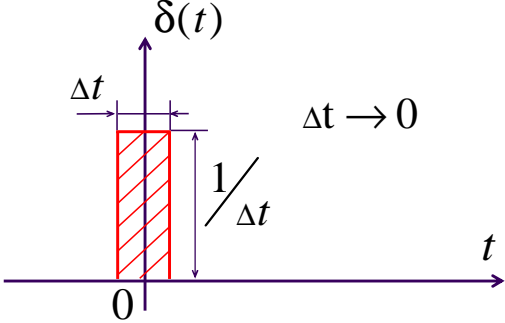
$$\begin{pmatrix} i_{C_i} \\ U_{L_i} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix} \cdot D \left[t_i, \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x^{(1)} \\ x^{(2)} \end{array} \right]_i \end{array} \right]$$

Строим графики искомым U_C, i_L (переменных состояния $x^{(1)}, x^{(2)}$) и U_L и i_C :



1.12. Переходные и импульсные характеристики

Переходные $h(t)$ и импульсные $K(t)$ характеристики используются для расчета переходных процессов при нулевых начальных условиях и импульсных воздействиях на линейные пассивные цепи. Для получения этих характеристик применяются две специальные функции.

| | |
|---|--|
| <p>Единичная функция</p> $1(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ 1 & \text{при } t > 0; \end{cases}$ $1(t) = \frac{1}{p}$ |  <p style="text-align: center;">Рис. 46</p> |
| <p>Единичный импульс (дельта-функция)</p> $\delta(t) = \frac{d1(t)}{dt};$ $\delta(t) \cdot \Delta t = 1,$ <p>при этом $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1;$</p> $\delta(0) = \infty$ |  <p style="text-align: center;">Рис. 47</p> |

Переходная характеристика $h(t)$ зависит от времени t , параметров цепи R, L, C и может быть безразмерной, иметь размерность сопротивления или проводимости. Переходные характеристики $h(t)$ определяются экспериментально или аналитически, например операторным методом при подключении ЭДС в 1 (В) или источника тока в 1 (А).

Если $Y(t)$ – прямоугольный импульс источника ЭДС или тока,

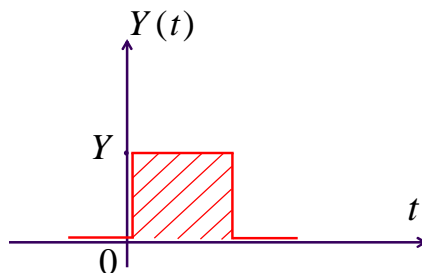


Рис. 48

тогда $X(t)$ – напряжение или ток:

а) на интервале $0 < t < t_{\text{и}}$ равен $X(t) = Y \cdot h(t)$;

б) при $t > t_{\text{и}}$ $X(t) = Y \cdot h(t) - Y \cdot h(t - t_{\text{и}})$,

где $h(t)$ – переходная характеристика.

Импульсная характеристика $K(t)$ – это реакция цепи в виде тока или напряжения на единичный возмущающий импульс $\delta(t)$ источника при нулевых начальных условиях.

Импульсная характеристика

$$K(t) = h(0) \cdot \delta(t) + \frac{dh(t)}{dt}.$$

Пример

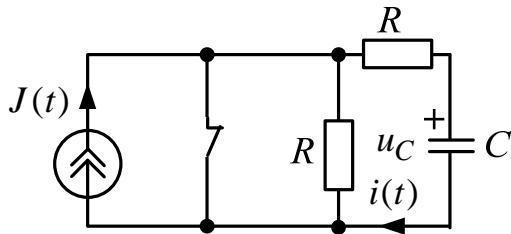


Рис. 49

Дано:

$$J(t) = \begin{cases} J & \text{при } 0 < t < t_{\text{и}}; \\ 0 & \text{при } t > t_{\text{и}}. \end{cases}$$

$$J = 2 \text{ А};$$

$$C = 100 \text{ мкФ};$$

$$R = 100 \text{ Ом};$$

$$t_{\text{и}} = 0,01 \text{ с}.$$

Определить: $h(t)$, $K(t)$

для $i(t)$, $i(t)$

1. Переходную характеристику $h(t)$ для $i(t)$ найдем операторным методом:

1.1. ННУ. $u_C(0) = u_C(0_-) = 0$.

1.2. Операторная схема.

По правилу разброса

$$\begin{aligned} h(p) &= \frac{1}{p} \cdot \frac{R}{2R + \frac{1}{pC}} = \\ &= \frac{RC}{1 + 2RCp} = \frac{0,01}{1 + 0,02p} = \frac{D_1(p)}{B_1(p)}. \end{aligned}$$

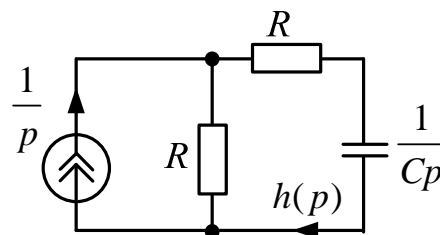


Рис. 50

1.3. По теореме разложения

$$h(t) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{D_1(p_k)}{B_1'(p_k)} \cdot e^{p_k t} = 0,5e^{-50t}$$

– переходная функция.

2. Для $i(t)$ найдем $K(t)$ операторным методом:

2.1. ННУ. $u_C(0) = u_C(0_-) = 0$.

2.2. Операторная схема.

По правилу разброса

$$K(p) = 1 \cdot \frac{R}{2R + \frac{1}{pC}} = \frac{RCp}{1 + 2RCp};$$

$$K(p) = \frac{2RCp + 1 - 1}{2(1 + 2RCp)} = 0,5 - \frac{0,5}{1 + 2RCp} =$$

$$= 0,5 - \frac{0,5}{1 + 0,02p} = 0,5 - \frac{D_2(p)}{B_2(p)}.$$

2.3. По теореме разложения

$$K(t) = 0,5 \cdot \delta(t) - \sum_{k=1}^{n=1} \frac{D_2(p_k)}{B_2(p_k)} \cdot e^{p_k t} = 0,5 \cdot \delta(t) - 25e^{-50t}, \frac{1}{c},$$

– импульсная характеристика.

3. Определяем ток:

а) на интервале $0 < t < t_{ин}$ $i(t) = J \cdot h(t) = 1 \cdot e^{-50t}$, А;

б) на интервале $t > t_{ин}$

$$i(t) = J \cdot h(t) - J \cdot h(t - t_{ин}) = 1 \cdot e^{-50t} - 1 \cdot e^{-50(t - t_{ин})}, \text{ А.}$$

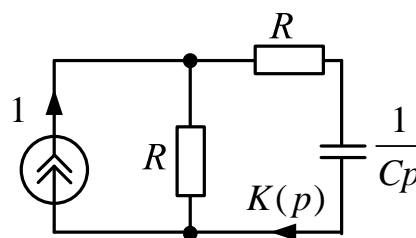


Рис. 51

1.13. Метод интеграла Дюамеля

Интеграл Дюамеля используется для расчета переходных процессов в линейных пассивных цепях с нулевыми начальными условиями при воздействии импульса произвольной формы источника электроэнергии.

Пусть на такую цепь воздействует импульс источника $Y(t)$ произвольной формы, который заменим ступенчатой функцией.

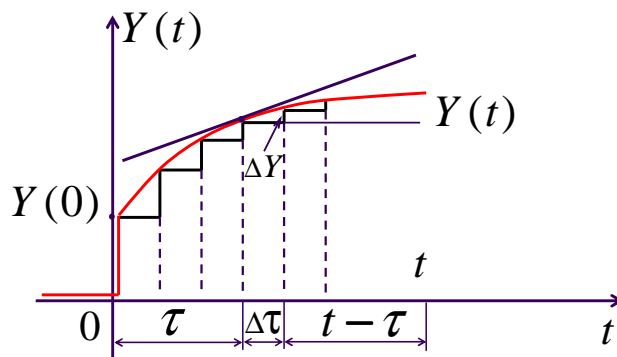


Рис. 52

Тогда ток или напряжение, согласно наложению, составят

$$X(t) = Y(0) \cdot h(t) + \sum \Delta X,$$

где $\Delta X = \Delta Y \cdot h(t - \tau) = (\Delta \tau \cdot \operatorname{tg} \alpha) \cdot h(t - \tau) = \Delta \tau \cdot Y'(\tau) \cdot h(t - \tau)$ или

$$X(t) = Y(0) \cdot h(t) + \int_0^t Y'(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau - \text{интеграл Дюамеля.}$$

Если $X(t)$ является $i_L(t)$ или $u_C(t)$,

$$\text{тогда } X(t) = \int_0^t Y(\tau) \cdot K(t - \tau) d\tau.$$

Если $X(t)$ является сложной функцией, тогда:

а) на интервале $0 < t < t_1$

$$X(t) = Y_1(0) \cdot h(t) + \int_0^t Y_1'(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau;$$

б) на интервале $t > t_1$

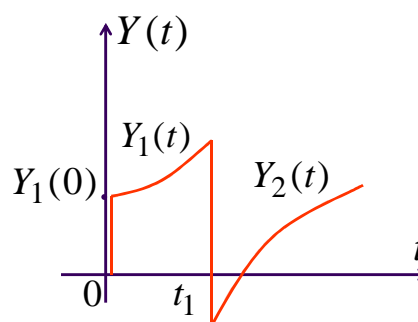


Рис. 53

$$X(t) = Y_1(0) \cdot h(t) + \int_0^{t_1} Y_1'(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau +$$

$$+ [Y_2(t_1) - Y_1(t_1)] \cdot h(t - t_1) + \int_{t_1}^t Y_2'(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau.$$

42

Пример

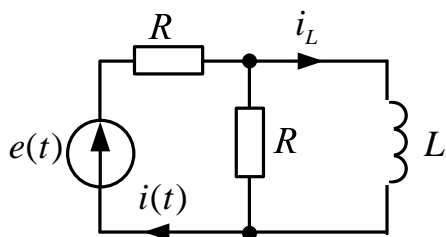


Рис. 54

Дано:

$$e(t) = 100e^{-200t}, \text{ В};$$

$$L = 1 \text{ Гн};$$

$$R = 100 \text{ Ом}.$$

Определить: $i(t)$

1. Переходную характеристику $h(t)$ для $i(t)$ найдем операторным методом:

1.1. ННУ. $i_L(0) = i_L(0_-) = 0$.

1.2. Операторная схема.

По правилу разброса

$$h(p) = \frac{\frac{1}{p}}{R + \frac{RpL}{R + pL}} =$$

$$= \frac{R + pL}{p(R^2 + 2RLp)} = \frac{D(p)}{B(p)}.$$

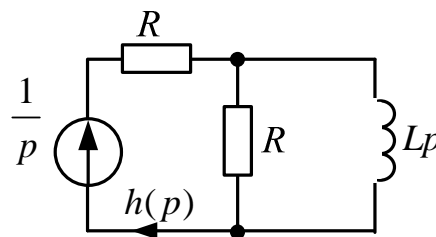


Рис. 55

1.3. По теореме разложения

$$h(t) = \sum_{k=1}^{n=2} \frac{D(p_k)}{B'(p_k)} \cdot e^{p_k t} = \frac{1}{R} - \frac{1}{2R} \cdot e^{-\frac{R}{2L}t}, \frac{1}{\text{Ом}}, \text{ -- переходная проводимость.}$$

2. Расчет $i(t)$ интегралом Дюамеля:

$$i(t) = e(0) \cdot h(t) + \int_0^t e'(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau;$$

$$e(0) = 100 \text{ В};$$

$$e'(\tau) = -2 \cdot 10^4 \cdot e^{-200\tau}, \text{ В/с};$$

$$h(t - \tau) = \frac{1}{R} - \frac{1}{2R} \cdot e^{-\frac{R}{2L}(t-\tau)} = 0,005 - 0,0025 \cdot e^{-100(t-\tau)}, \frac{1}{\text{Ом}};$$

$$\begin{aligned}
i(t) &= 0,5 - 0,25 \cdot e^{-100t} + \int_0^t \left[-2 \cdot 10^4 \cdot e^{-200\tau} \right] \cdot \left[0,005 - 0,0025 \cdot e^{-100(t-\tau)} \right] d\tau = \\
&= 0,5 - 0,25 \cdot e^{-100t} - 100 \int_0^t e^{-200\tau} d\tau + 50 \cdot e^{-100t} \int_0^t e^{-100\tau} d\tau = \\
&= 0,5 - 0,25 \cdot e^{-100t} + 0,5 \cdot e^{-200\tau} \Big|_0^t - 0,5 \cdot e^{-100t} \cdot e^{-100\tau} \Big|_0^t = \\
&= 0,5 - 0,25 \cdot e^{-100t} + 0,5 \cdot (e^{-200t} - 1) - 0,5 \cdot e^{-100t} \cdot (e^{-100t} - 1) = \\
&= 0,25 \cdot e^{-100t}, \text{ A.}
\end{aligned}$$

Проверка:

$$i(\infty) = 0;$$

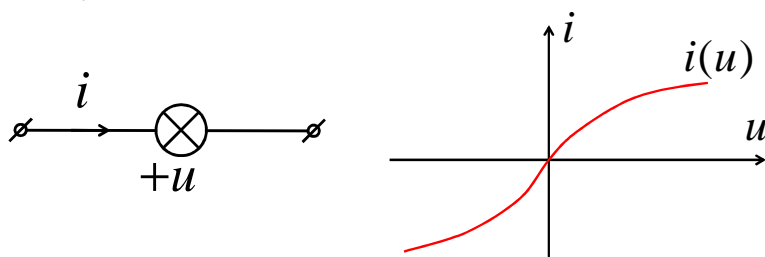
$$i(0+) = e(0) / 2R = 0,25 \text{ A.}$$

2. НЕЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ

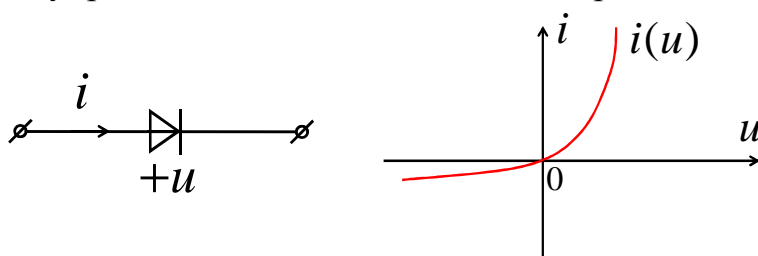
2.1. Нелинейные резистивные элементы

Нелинейные резистивные элементы (НРЭ) имеют нелинейную ВАХ $i(u)$ и необратимо преобразуют электрическую энергию в тепло. К нелинейным резистивным элементам относятся, например:

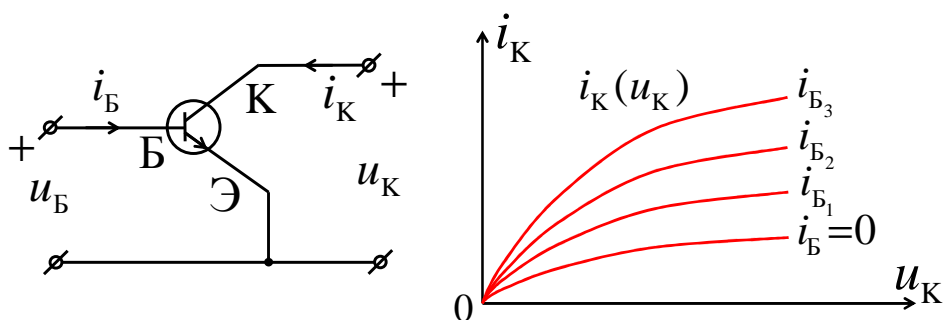
- лампа накаливания; имеет симметричную вольт-амперную характеристику:



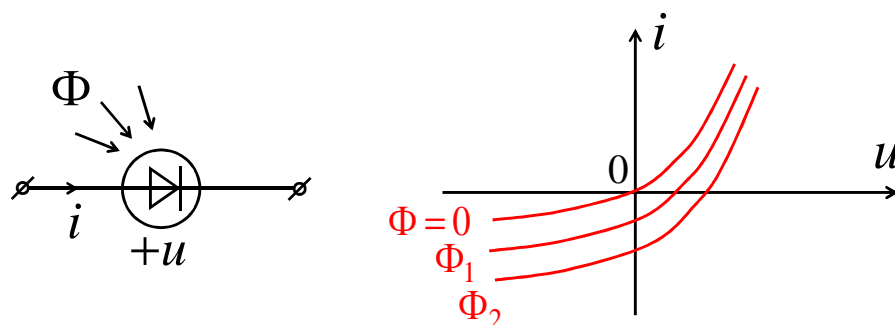
- полупроводниковый диод с несимметричной ВАХ:



- биполярный транзистор, имеет семейство ВАХ:



- фотодиод (активный НРЭ):



Нелинейные резистивные элементы **подразделяются:**

- на пассивные;
- активные;
- управляемые;
- инерционные;
- безынерционные.

У пассивных НРЭ ВАХ $i(u)$ расположена в 1 и 3 квадрантах, а у активных НРЭ участок ВАХ $i(u)$ должен проходить дополнительно во 2 или 4 квадрантах, причем управляемые НРЭ имеют семейства ВАХ $i(u)$.

Инерционные НРЭ имеют линейные динамические ВАХ, а статические ВАХ и ВАХ для действующих значений нелинейны из-за их тепловой инерции, причем у этих элементов за счет линейности динамических ВАХ формы $u(t)$ и $i(t)$ одинаковы.

Безынерционные НРЭ имеют нелинейные динамические ВАХ, причем за счет этого формы $u(t)$ и $i(t)$ различны.

Лампа накаливания – инерционный пассивный НРЭ с симметричной ВАХ $i(u)$.

Полупроводниковый диод – безынерционный пассивный НРЭ с несимметричной ВАХ $i(u)$.

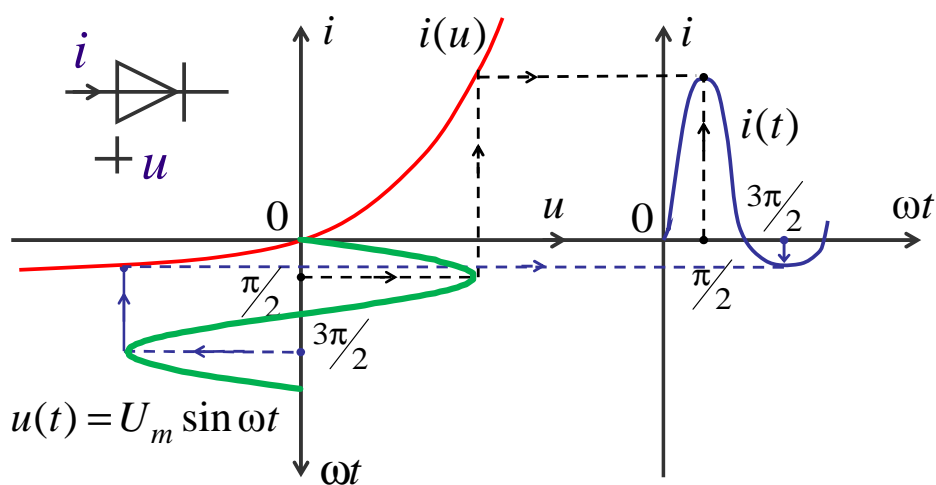


Рис. 56. Безынерционные элементы являются источником высших гармоник

В общем случае НРЭ изображаются:

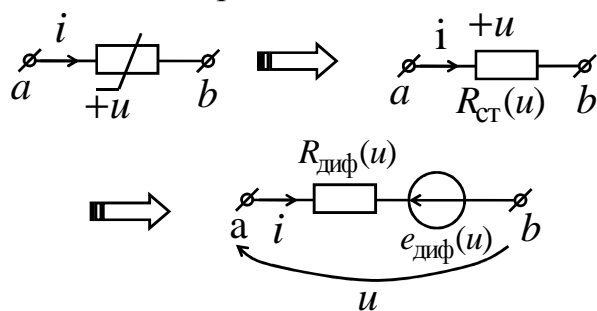


Рис. 57

Статическое сопротивление

$$R_{\text{ст}}(u) = \frac{u}{i(u)}, \text{ Ом.}$$

Дифференциальное сопротивление

$$R_{\text{диф}}(u) = \frac{du}{di} = \frac{u - e_{\text{диф}}(u)}{i(u)} = R_{\text{ст}}(u) - \frac{e_{\text{диф}}(u)}{i(u)}, \text{ Ом.}$$

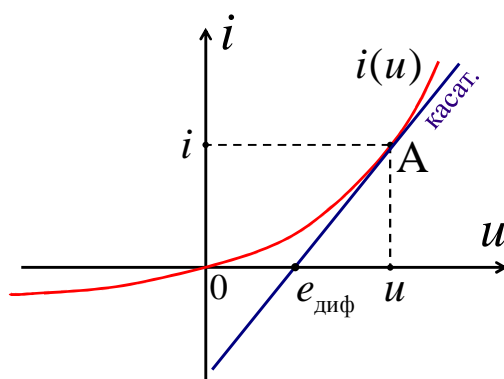


Рис. 58

Закон Ома:

$$i(u) = \frac{u}{R_{\text{ст}}(u)} = \frac{u - e_{\text{диф}}(u)}{R_{\text{диф}}(u)}, \text{ А.}$$

Закон Джоуля – Ленца:

$$P(u) = u \cdot i(u) = \frac{u^2}{R_{\text{ст}}(u)} = \frac{u^2 - u \cdot e_{\text{диф}}(u)}{R_{\text{диф}}(u)}, \text{ Вт.}$$

Пример

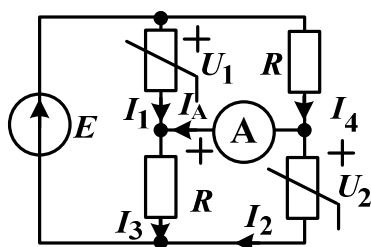


Рис. 59

Дано:

$$E = 50 \text{ В};$$

$$R = 100 \text{ Ом.}$$

НРЭ имеют ВАХ

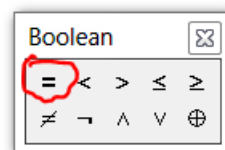
$$U_1 = 200 \cdot I_1^2, \text{ В};$$

$$I_2 = 2 \cdot 10^{-4} U_2^2, \text{ А.}$$

Определить:

показание амперметра I_A (А)

Запишем уравнения по законам Кирхгофа и решим с помощью Given и Fihd в MatCAD. Для записи равенства в системе уравнений после Given используется сочетание двух клавиш Ctrl= либо выбираем из палитры логических символов.



Пример решения в MathCAD

ORIGIN := 1

$$E := 50 \quad R := 100 \quad U_1(I_1) := 200 \cdot I_1^2 \quad U_2(I_2) := \sqrt{\frac{I_2}{2 \cdot 10^{-4}}}$$

Given

$$U_1(I_1) = I_4 \cdot R$$

$$E = U_1(I_1) + I_3 \cdot R$$

$$E = I_4 \cdot R + U_2(I_2)$$

$$I_1 + I_a = I_3$$

$$I_4 = I_a + I_2$$

$$I = I_1 + I_4$$

Возможные варианты ответов, из которых выбираем 1 столбец (все положительные), $I_A = 0$ А:

$$A := \text{find}(I_a, I, I_1, I_2, I_3, I_4) \text{ float}, 2 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & .50 \\ .60 & -1.6 & -.50 \\ .30 & -.80 & -.50 \\ .20 & 1.3 & 0 \\ .30 & -.80 & 0 \\ .20 & 1.3 & .50 \end{pmatrix}$$

Пример

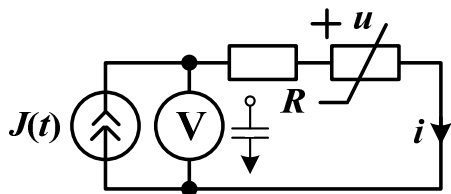


Рис. 60

Дано:

$$J(t) = I_m \sin \omega t \text{ (A);}$$

$$R = \dots \text{ Ом.}$$

НРЭ имеет ВАХ $u = m \cdot i^3$ (В).

Определить:

показание вольтметра U_V (В).

Примечание:

$$\sin^3 \omega t = 0,75 \sin \omega t - 0,25 \sin 3\omega t$$

По второму закону Кирхгофа:

$$\begin{aligned} u_V(t) &= R \cdot i + u_{\text{НРЭ}} = R \cdot i + m \cdot i^3 = R \cdot I_m \sin \omega t + m (I_m \sin \omega t)^3 = \\ &= R \cdot I_m \sin \omega t + m I_m^3 \left(\frac{3}{4} \sin \omega t - \frac{1}{4} \sin 3\omega t \right) = \\ &= \left(R \cdot I_m + m I_m^3 \frac{3}{4} \right) \sin \omega t - \frac{1}{4} m I_m^3 \sin 3\omega t. \end{aligned}$$

Напряжение вольтметра $U_V = \sqrt{U_1^2 + U_3^2}$, В, где действующие значения напряжения первой и третьей гармоники

$$U_1 = \frac{R \cdot I_m}{\sqrt{2}} + \frac{3}{4} \frac{m \cdot I_m^3}{\sqrt{2}}, \text{ В;} \quad U_3 = -\frac{1}{4} \frac{m \cdot I_m^3}{\sqrt{2}}, \text{ В.}$$

2.2. Расчет нелинейных резистивных цепей

Расчёт ведется графоаналитическими методами с использованием статических или динамических ВАХ НРЭ.

1. **Метод эквивалентного генератора** применяется для цепей с одним НРЭ.

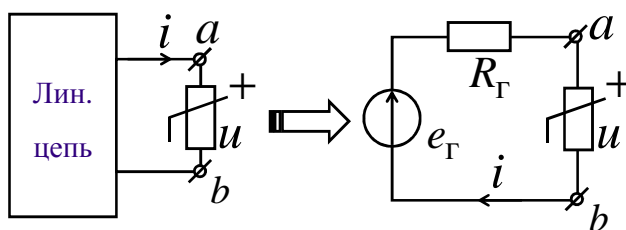


Рис. 61

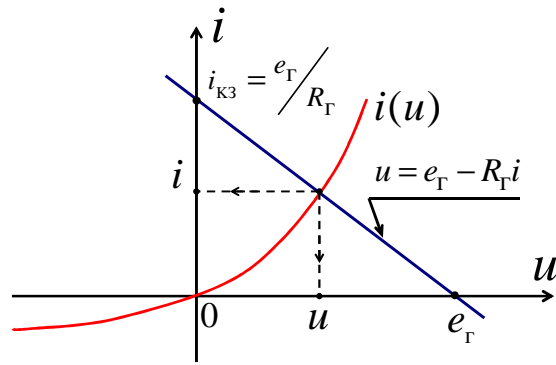


Рис. 62

2. **Сложение ВАХ** применяется для упрощения схем.

При этом на основании законов Кирхгофа ВАХ $i(u)$ последовательно соединенных НРЭ складываются вдоль оси u , а ВАХ параллельно соединенных НРЭ складываются вдоль оси i .

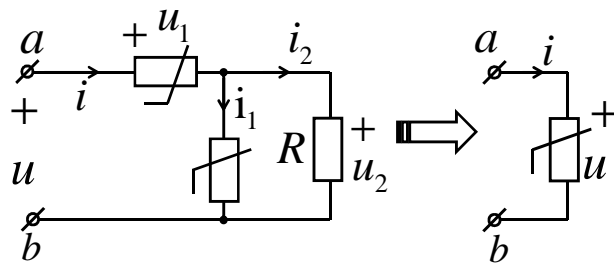


Рис. 63

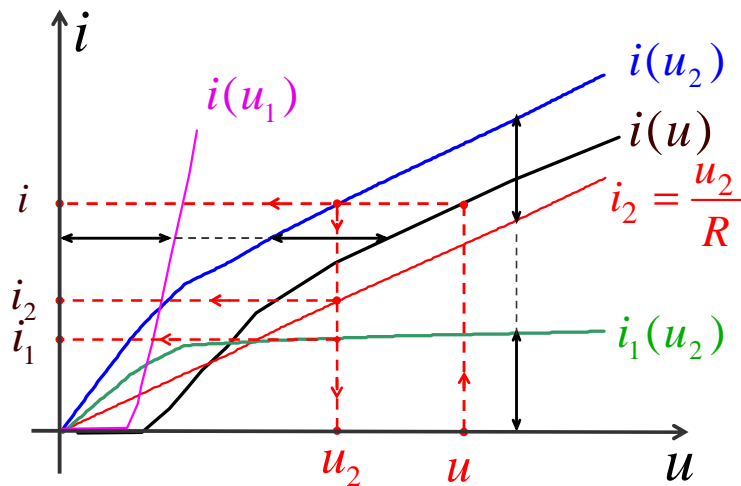


Рис. 64

3. **Метод двух узлов** применяется для схем с двумя узлами.

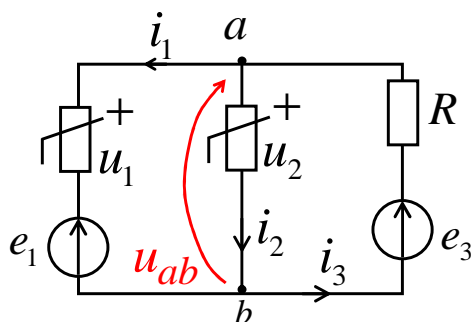


Рис. 65

Уравнения по законам Кирхгофа:

$$i_3 = i_1 + i_2;$$

$$u_{ab}(i_1) = e_1 + u_1(i_1);$$

$$u_{ab}(i_2) = u_2(i_2);$$

$$u_{ab}(i_3) = e_3 - Ri_3.$$

Так как $i_3 = i_1 + i_2$, то $u_{ab}(i_1)$ и $u_{ab}(i_2)$ складываем вдоль оси i , причем точка пересечения полученной ВАХ $u_{ab}(i_1 + i_2)$ с $u_{ab}(i_3)$ даст решение.

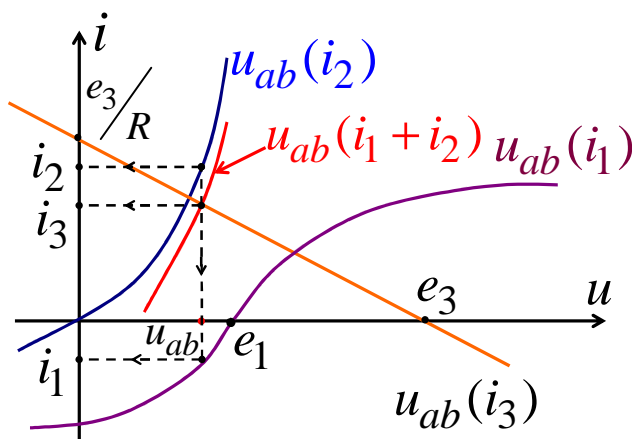


Рис. 66. Графическое решение

4. **Метод итераций** применяется для расчета схем с использованием вычислительной техники.

При этом НРЭ обозначаются в виде неизвестных статических сопротивлений $R_{ст}$, причем для лучшей сходимости итерационное выражение составляется для тока в НРЭ, если его ВАХ загибается к оси i , иначе составляется для u . Расчет ведется до повторения результатов.

Пример

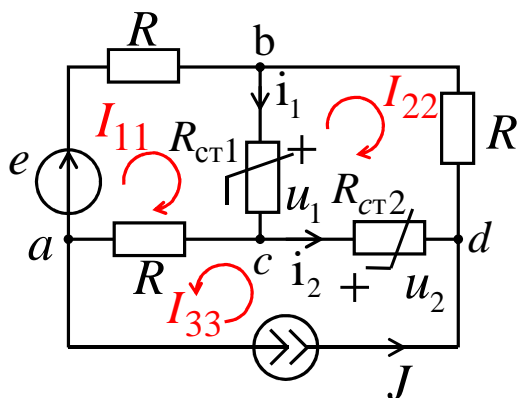


Рис. 67

Дано:

$$e(t) = \dots \text{ В};$$

$$J(t) = \dots \text{ А};$$

$$R = \dots \text{ Ом.}$$

ВАХ нелинейных элементов.

Определить:

$$i_1, u_1, i_2, u_2$$

По ВАХ определяем статические сопротивления нелинейных элементов.

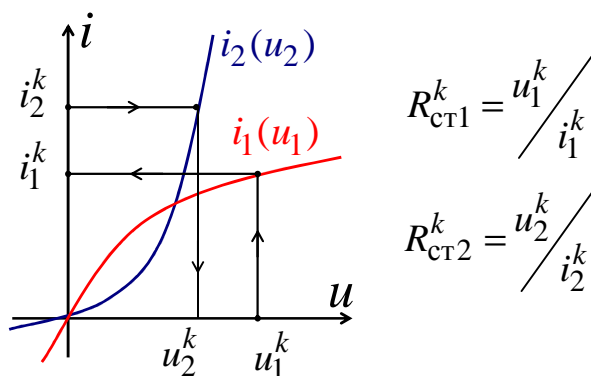


Рис. 68

Для расчета статических сопротивлений $R_{ст1}^k$ и $R_{ст2}^k$ используем метод контурных токов:

$$\begin{cases} [2R + R_{ст1}^k] \cdot I_{11}^{(k+1)} - R_{ст1}^k \cdot I_{22}^{(k+1)} = e - R \cdot J; \\ -R_{ст1}^k \cdot I_{11}^{(k+1)} + [R_{ст1}^k + R_{ст2}^k + R] \cdot I_{22}^{(k+1)} = -R_{ст2}^k \cdot J; \\ I_{33} = J. \end{cases}$$

Итерационные выражения:

$$\begin{cases} u_1^{(k+1)} = R_{\text{ст1}}^k \cdot i_1^{(k+1)} = R_{\text{ст1}}^k \cdot [I_{11}^{(k+1)} - I_{22}^{(k+1)}]; \\ i_2^{(k+1)} = -I_{22}^{(k+1)} - J. \end{cases}$$

Задаемся произвольными значениями $u_1^{(0)}$ и $i_2^{(0)}$, по ВАХ находим $i_1^{(0)}$ и $u_2^{(0)}$, рассчитываем $R_{\text{ст1}}^{(0)}$ и $R_{\text{ст2}}^{(0)}$, по итерационным выражениям определяем $u_1^{(1)}$ и $i_2^{(1)}$, по ВАХ находим $i_1^{(1)}$ и $u_2^{(1)}$ и т.д.

Расчет ведется до повторения результатов.

5. Метод линеаризации ВАХ в области предполагаемого решения применяется как приближенный метод:

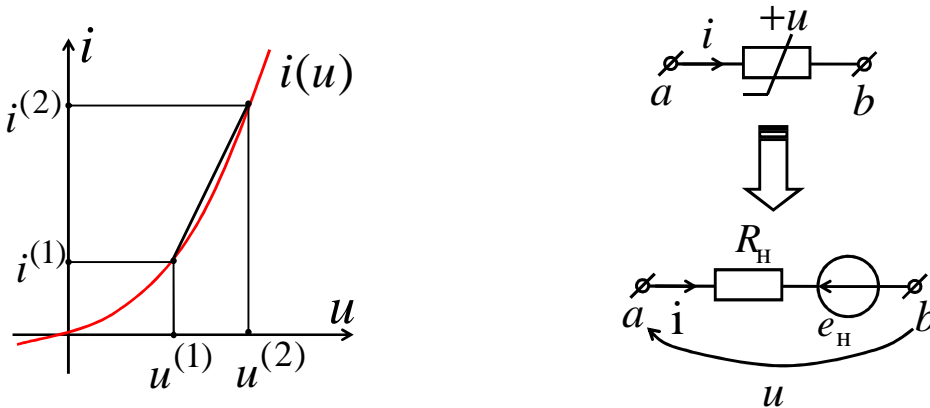


Рис. 69

$$u \approx e_H + R_H i;$$

$$R_H = \frac{u^{(2)} - u^{(1)}}{i^{(2)} - i^{(1)}}, \text{ Ом};$$

$$e_H = u^{(1)} - R_H i^{(1)}, \text{ В.}$$

После замены нелинейных элементов линейными резисторами R_H и ЭДС e_H расчет ведется любым методом.

Если найденные токи i лежат в выбранных интервалах $i^{(1)} < i < i^{(2)}$, то i приближенно истинные.

6. Применение MathCAD для расчета переменных напряжений и ТОКОВ.

Пример

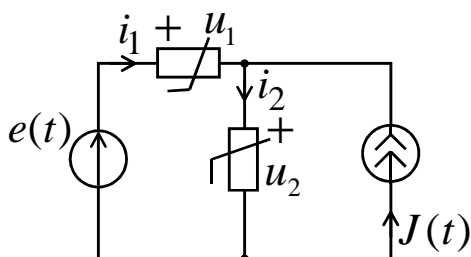


Рис. 70

Дано:

$$e(t) = 200 \sin 314t, \text{ В};$$

$$J(t) = 1 \cos 314t, \text{ А};$$

$$i_1 = 0,1 \cdot (e^{0,02 \cdot u_1} - 1), \text{ А};$$

$$u_2 = 100 \cdot i_2^3, \text{ В}.$$

Определить:

$$i_1, u_1, i_2, u_2$$

По законам Кирхгофа $-i_1 + i_2 - J(t) = 0$, $e(t) = u_1 + u_2$;

$$u_1 := 100 \quad i_2 := -1 \quad t := 0$$

Given

$$-0,1 \cdot (e^{0,02 \cdot u_1} - 1) + i_2 - 1 \cdot \cos(314 \cdot t) = 0$$

$$u_1 + 100 \cdot i_2^3 - 200 \cdot \sin(314 \cdot t) = 0$$

$$A := \text{Find}(u_1, i_2)$$

$$A_0 := u_1 \quad A_1 := i_2$$

$$i_1 := i_2 - 1 \cdot \cos(314 \cdot t)$$

$$u_2 := 200 \cdot \sin(314 \cdot t) - u_1$$

Изменяем $t := 0.001$ и повторяем расчет. Затем строим графики, например $i_1(t)$ и $u_2(t)$.

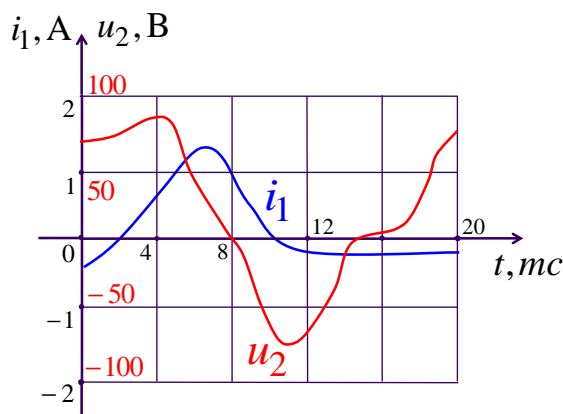


Рис. 71

2.3. Нелинейные индуктивные элементы

Нелинейные индуктивные элементы (НИЭ) запасают энергию в магнитном поле и задаются нелинейной веберамперной характеристикой $\Psi(i_L)$;

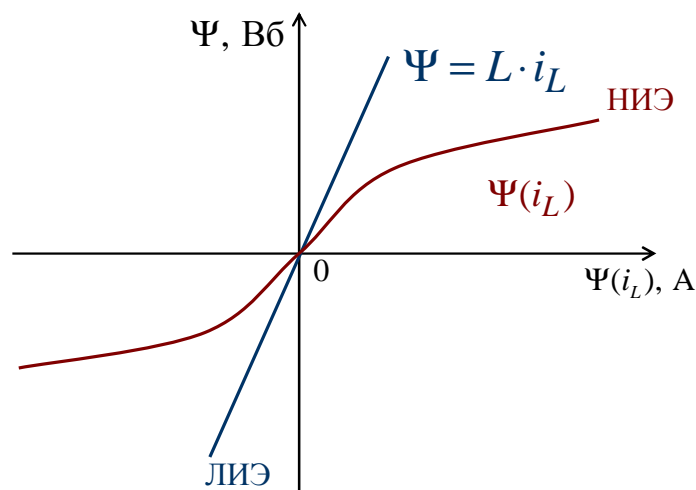


Рис. 72

Ψ – потокосцепление, Вб;

i_L – ток НИЭ, А.

НИЭ обозначаются:

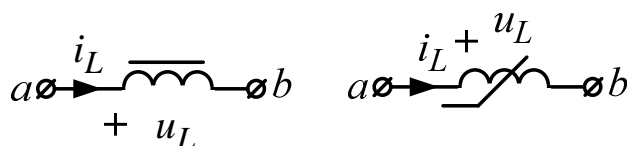


Рис. 73

НИЭ характеризуются:

а) статической индуктивностью $L_{ст}(i_L) = \frac{\Psi}{i_L}$, Гн;

б) дифференциальной индуктивностью $L_{диф}(i_L) = \frac{d\Psi}{di_L}$, Гн.

Для линейного индуктивного элемента (ЛИЭ)

$$L = L_{ст} = L_{диф} = \text{const}.$$

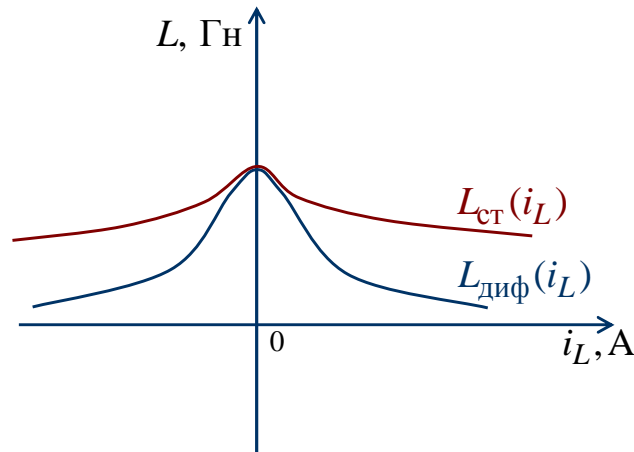


Рис. 74

Напряжение НИЭ

$$u_L = \frac{d\Psi}{dt} = \frac{d\Psi}{di_L} \cdot \frac{di_L}{dt} = L_{\text{диф}}(i_L) \cdot \frac{di_L}{dt}.$$

Веберамперная характеристика (ВБАХ) НИЭ

$$i_L \approx k_1 \Psi + k_3 \Psi^3 + k_5 \Psi^5 + \dots,$$

где $k_1, k_3, k_5 \dots$ – постоянные коэффициенты.

Энергия магнитного поля НИЭ в момент $t = t_0$

$$\begin{aligned} W_M(t_0) &= \int_0^{t_0} u_L i_L dt = \int_0^{t_0} \frac{d\Psi}{dt} \cdot i_L dt = \\ &= \int_0^{\Psi_0} i_L d\Psi = \frac{k_1 \Psi_0^2}{2} + \frac{k_3 \Psi_0^4}{4} + \frac{k_5 \Psi_0^6}{6} + \dots, \text{ Дж,} \end{aligned}$$

где Ψ_0 – значение потокосцепления в момент $t = t_0$; $\Psi(0) = 0$ – значение при $t = 0$.

НИЭ – это безынерционный элемент, т.е. формы кривых $i_L(t)$ и $u_L(t)$ различны.

Если $u_L(t) = U_m \cos \omega t$, то $\Psi(t) = \int u_L dt + A = \frac{U_m}{\omega} \sin \omega t$, Вб.

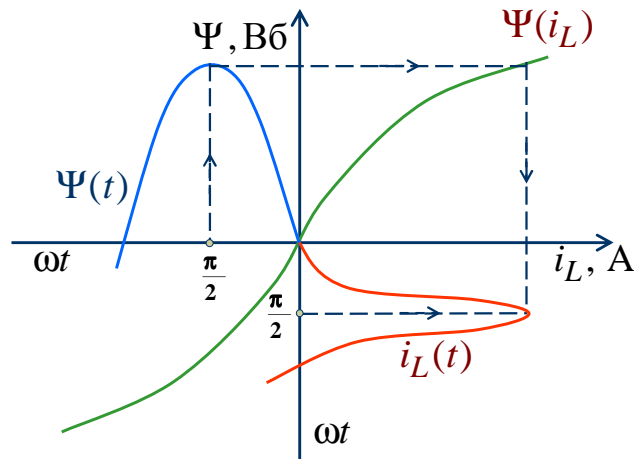


Рис. 75

Ток $i_L(t)$ содержит нечетные гармоники $k = 1, 3, 5$.

Физически НИЭ – это катушка с ферромагнитным магнитопроводом;

$\Psi(i_L)$ – это соединенные между собой вершины петель гистерезиса.

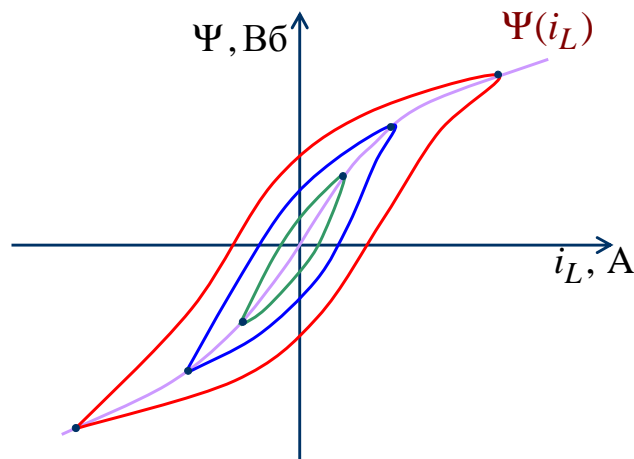


Рис. 76

Законы Кирхгофа для магнитных цепей

Магнитопроводы НИЭ образуют магнитные цепи, которые предназначены для концентрации и усиления магнитного потока Φ . Законы Кирхгофа используются для определения Φ и $\Psi(i_L)$ НИЭ.

Магнитные цепи характеризуются:

- средней длиной участка ℓ (м);
- площадью сечения участка S (м²);
- величиной воздушного зазора δ (м);
- магнитной индукцией B (Тл);

- магнитной напряженностью H (А/м);
- магнитным потоком $\Phi = BS$ (Вб);
- числом витков катушки w (в);
- намагничивающей силой $w \cdot i$ (Ав).

Первый закон Кирхгофа

Для любого узла магнитной цепи алгебраическая сумма магнитных потоков равна нулю, причем магнитные потоки, выходящие из узла, берутся со знаком плюс («+»), а входящие в узел – со знаком минус («-»):

$$\sum \pm \Phi_k = 0.$$

Физически первый закон Кирхгофа основывается на законе непрерывности магнитного потока:

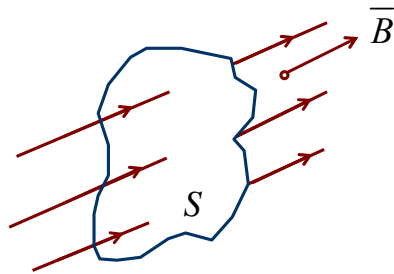


Рис. 77

$$\oint_S \bar{B} \, dS = 0,$$

\bar{B} – вектор индукции магнитного поля (Тл).

Второй закон Кирхгофа

Для любого контура магнитной цепи алгебраическая сумма намагничивающих сил равна алгебраической сумме магнитных напряжений, причем со знаком плюс («+») записываются те слагаемые, положительные направления которых совпадают с направлением обхода контура

$$\sum \pm i_q w_q = \sum \pm U_{\text{МК}}.$$

Физически второй закон Кирхгофа основывается на законе полного тока:

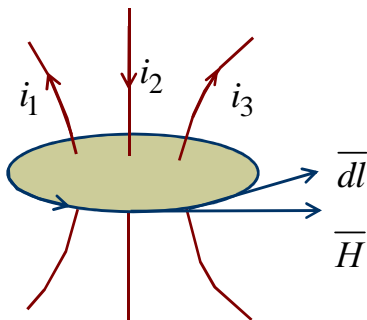


Рис. 78

$$\oint_l \bar{H} \, dl = \sum \pm i_k = i_1 - i_2 + i_3,$$

\bar{H} – вектор напряженности магнитного поля (А/м);

$\bar{B} = \mu_0 \bar{H}$ – для воздуха; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ (Гн/м) – магнитная постоянная.

$\bar{B} = \mu(H) \cdot \bar{H}$ – для магнитопровода. $\mu(H)$ – магнитная проницаемость (Гн/м).

Для ферромагнитного материала $B(H)$ – кривая намагничивания.

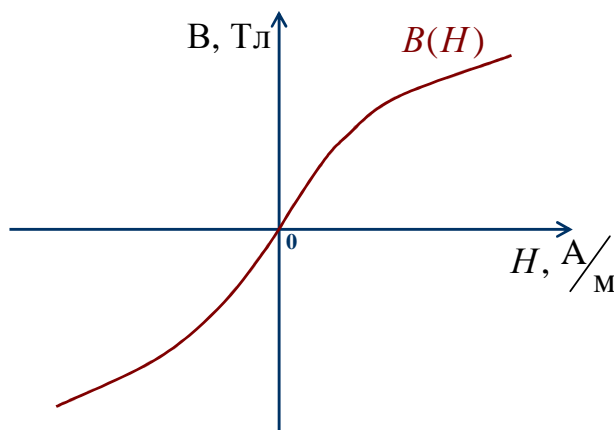


Рис. 79

1. **Намагничивающая сила** – $i_q w_q$ (А), где i_q – ток (А), w_q – число витков катушки.

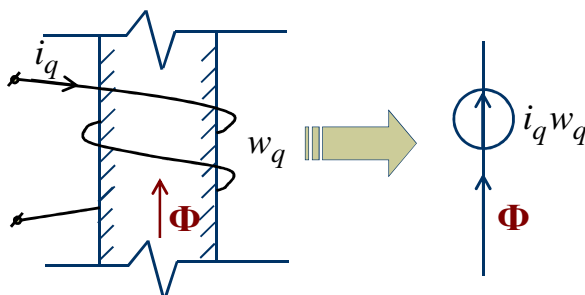


Рис. 80

2. **Нелинейное магнитное сопротивление** участка магнитопровода –

$$R_M \left(\frac{1}{\text{Гн}} \right).$$

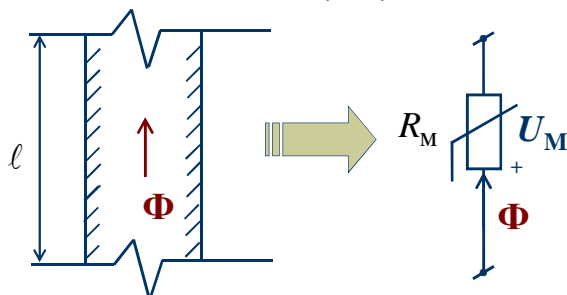


Рис. 81

Для ферромагнитного материала $R_M = \frac{\ell}{\mu(H) \cdot S} = \frac{H\ell}{BS} \left[\frac{1}{\Gamma_H} \right]$.

Магнитное напряжение – $U_M = R_M \Phi$ А.

3. Линейное магнитное сопротивление воздушного зазора –

$$R_\delta = \frac{\delta}{\mu_0 S} \left[\frac{1}{\Gamma_H} \right].$$

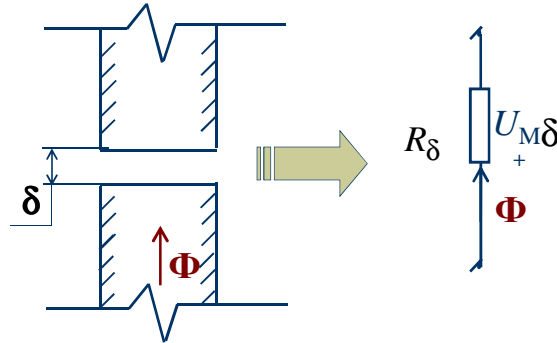


Рис. 82

Магнитное напряжение $U_{M\delta} = R_\delta \Phi = \frac{B\delta}{\mu_0}$, А.

Таким образом, $\sum \pm i_q w_q = \sum \pm R_{M_k} \Phi_k + \sum \pm R_{\delta_k} \Phi_k$.

Аналогия между резистивной и магнитной цепями:

$$i \rightarrow \Phi;$$

$$u \rightarrow U_M;$$

$$e \rightarrow iw.$$

2.4. Расчет неразветвленной магнитной цепи

Неразветвленная магнитная цепь содержит один магнитный поток.

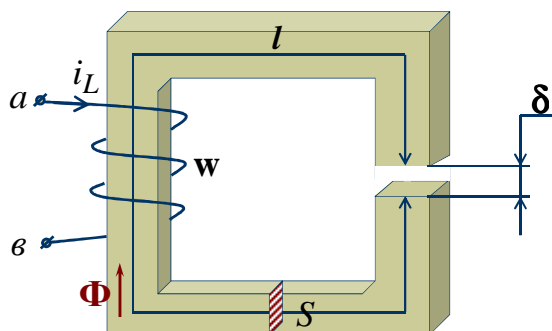


Рис. 83

Схема замещения магнитной цепи:

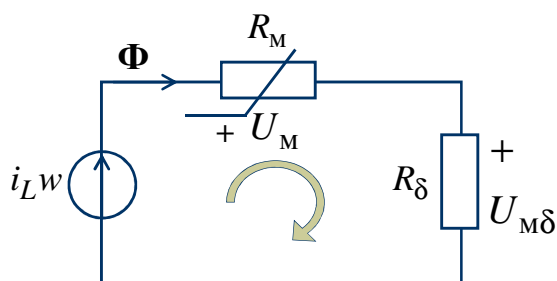


Рис. 84

По второму закону Кирхгофа

$$i_L w = R_M \Phi + R_\delta \Phi = H l + \frac{B \delta}{\mu_0}, \text{ А,}$$

где $\Phi = B S$, Вб.

Прямая задача

Когда известен магнитный поток Φ , тогда $B = \Phi / S$ и по $B(H)$ графически находим H .

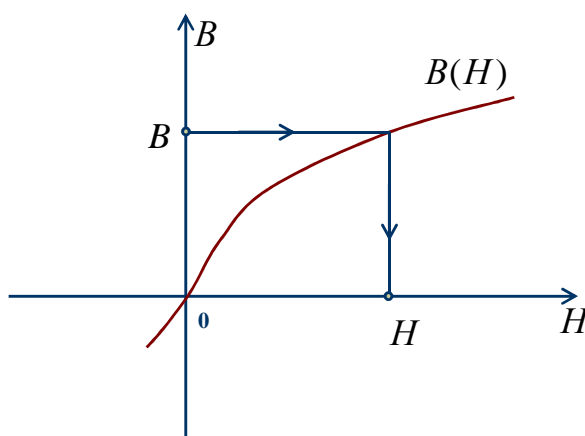


Рис. 85

В результате находим:

- а) ток $i_L = \frac{Hl + B \frac{\delta}{\mu_0}}{w}$, А;
- б) потокосцепление $\Psi = w\Phi$, Вб;
- в) статическую индуктивность $L_{ст} = \frac{\Psi}{i_L}$, Гн;
- г) энергию магнитного поля $W_M \approx \frac{BH}{2} S\ell + \frac{B^2}{2\mu_0} S\delta$, Дж;
- д) силу, стягивающую зазор, $P = \frac{B^2}{2\mu_0} S$, Н.

Обратная задача

Когда известен ток i_L , тогда из уравнения $i_L w = H \cdot \ell + \frac{B \cdot \delta}{\mu_0}$ получаем уравнение прямой линии

$$B = a - b \cdot H,$$

где $a = \frac{\mu_0 i_L w}{\delta}$, Тл; $b = \frac{\mu_0 \cdot \ell}{\delta} \left[\frac{\text{Гн}}{\text{м}} \right]$.

Графически определяем B и H , а затем по известным формулам находятся Φ , Ψ , $L_{ст}$, W_M , P .

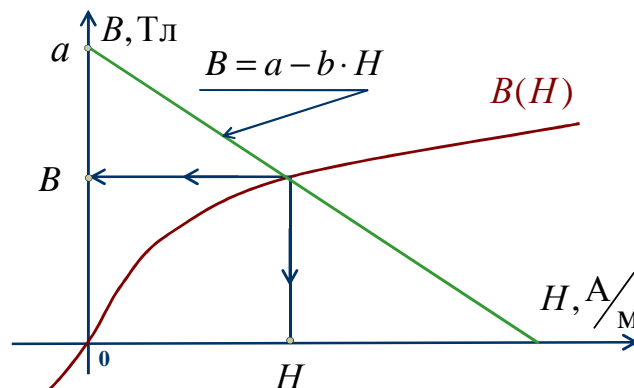
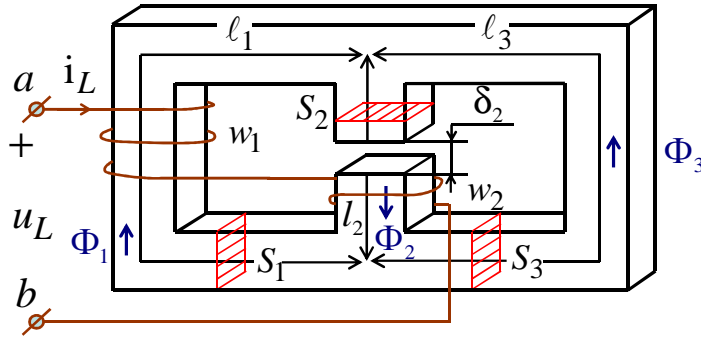


Рис. 86. Графическое решение

2.5. Расчет разветвленной магнитной цепи

Разветвленная магнитная цепь содержит несколько магнитных потоков.

Пример



Дано:

$$\delta_1 = \delta_3 = 0;$$

$$w_3 = 0;$$

$$l_1, l_2, l_3, S_1, S_2, S_3, \delta_2;$$

$B(H)$ – кривая намагничивания стали.

Определить:

$$\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$$

Рис. 87

Схема замещения магнитной цепи

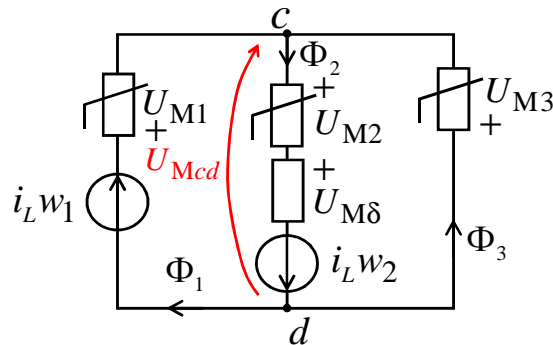


Рис. 88

Воспользуемся методом двух узлов (c и d) и составим уравнения по законам Кирхгофа:

$$\Phi_2 = \Phi_1 + \Phi_3; \quad (2.1)$$

$$U_{mcd}(\Phi_1) = i_L w_1 - U_{M1}(\Phi_1); \quad (2.2)$$

$$U_{mcd}(\Phi_2) = -i_L w_2 + U_{M2}(\Phi_2) + U_{M\delta}(\Phi_2); \quad (2.3)$$

$$U_{mcd}(\Phi_3) = -U_{M3}(\Phi_3). \quad (2.4)$$

Магнитные напряжения:

$$U_{M1}(\Phi_1) = H_1 \ell_1; \quad (2.5)$$

$$U_{M2}(\Phi_2) = H_2 \ell_2; \quad (2.6)$$

$$U_{M3}(\Phi_3) = H_3 \ell_3; \quad (2.7)$$

$$U_{M\delta}(\Phi_2) = \frac{B_2 \delta_2}{\mu_0}. \quad (2.8)$$

Прямая задача

Известны Φ_1 и Φ_2 , тогда $\Phi_3 = \Phi_2 - \Phi_1$,

$$B_1 = \Phi_1 / S_1, \quad B_2 = \Phi_2 / S_2, \quad B_3 = \Phi_3 / S_3.$$

По $B(H)$ и $B_{1,2,3}$ находим $H_{1,2,3}$.

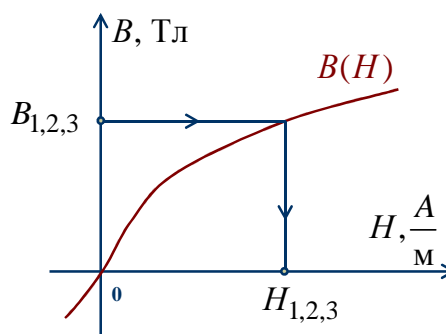


Рис. 89

По уравнениям (2.5 – 2.8) рассчитываем $U_{M1}(\Phi_1)$, $U_{M2}(\Phi_2)$, $U_{M3}(\Phi_3)$, $U_{M\delta}(\Phi_2)$.

По уравнениям (2.1 – 2.4) определяем $U_{Mcd} = U_{Mcd}(\Phi_3)$, $i_L w_1$, $i_L w_2$.

При заданном токе i_L находим:

числа витков w_1 и w_2 ;

суммарное потокосцепление $\Psi = w_1 \Phi_1 + w_2 \Phi_2 + w_3 \Phi_3$, Вб;

суммарную статическую индуктивность $L_{ст} = \Psi / i_L$, Гн.

Обратная задача

При заданном токе i_L и числах витков w_1 и w_2 определяем н.с. $i_L w_1$ и $i_L w_2$. Рассчитываем уравнения (2.1 – 2.4) и (2.5 – 2.8), заполняем табл. 2.1 и 2.2.

Таблица 2.1

| | | | | | |
|-----------------------------|---|-----|-----|-----|----------------|
| $B_{1,2,3}$, Тл | 0 | 0,6 | 1 | ... | 2,5 |
| $H_{1,2,3}$, А/м | 0 | 250 | 500 | ... | $2 \cdot 10^5$ |
| $\Phi_1 = B \cdot S_1$, Вб | | | | | |
| $\Phi_2 = B \cdot S_2$, Вб | | | | | |
| $\Phi_3 = B \cdot S_3$, Вб | | | | | |
| $U_{M1}(\Phi_1)$, А | | | | | |
| $U_{M2}(\Phi_2)$, А | | | | | |
| $U_{M\delta}(\Phi_2)$, А | | | | | |
| $U_{M3}(\Phi_3)$, А | | | | | |

Таблица 2.2

| | | | | | |
|-----------------------|---|-----|---|-----|-----|
| $B_{1,2,3}$, Тл | 0 | 0,6 | 1 | ... | 2,5 |
| $U_{Mcd}(\Phi_1)$, А | | | | | |
| $U_{Mcd}(\Phi_2)$, А | | | | | |
| $U_{Mcd}(\Phi_3)$, А | | | | | |

Строим графики $U_{Mcd}(\Phi_1)$, $U_{Mcd}(\Phi_2)$, $U_{Mcd}(\Phi_3)$. Так как $\Phi_2 = \Phi_1 + \Phi_3$, то $U_{Mcd}(\Phi_1)$ и $U_{Mcd}(\Phi_3)$ складываем вдоль оси Φ . По точке пересечения $U_{Mcd}(\Phi_1 + \Phi_3)$ с $U_{Mcd}(\Phi_2)$ определяем U_{Mcd} и Φ_1 , Φ_2 , Φ_3 .

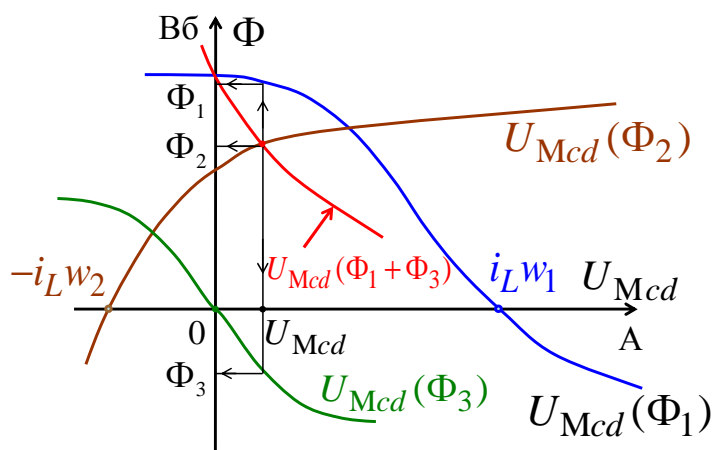


Рис. 90

Если изменить ток i_L , то необходимо повторить расчет, начиная с табл. 2.2, и определить другое значение Ψ . В результате можно построить ВБАХ $\Psi(i_L)$ НИЭ.

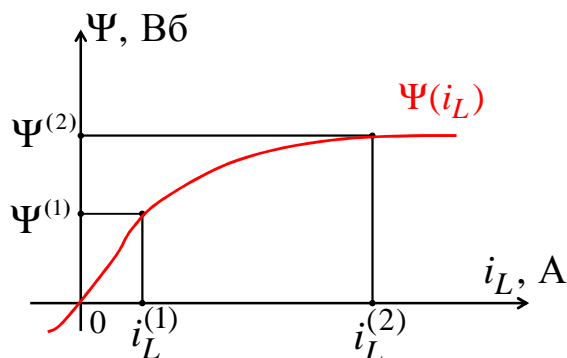


Рис. 91

2.6. Расчет цепей с линейными и нелинейными индуктивными элементами

Расчет осуществляется графоаналитическими методами с использованием ВБАХ $\Psi(i_L)$.

1. Группа линейных и нелинейных индуктивных элементов на основании законов Кирхгофа заменяется одним НИЭ с эквивалентной ВБАХ $\Psi(i_L)$:

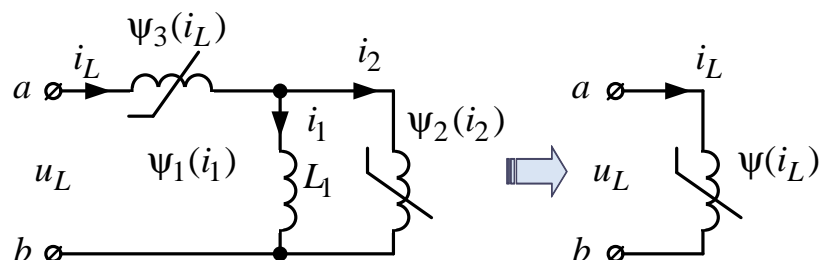


Рис. 92

$$\text{Потокосцепление } \Psi(t) = \int u_L(t) dt + A;$$

$$\left. \begin{array}{l} \Psi = \Psi(t_0) \\ i_L = i_L(t_0) \end{array} \right\} \text{— мгновенные значения;}$$

$t = t_0$ — расчетный момент времени.

Графически определяем мгновенные значения i_L , i_1 и i_2 , причем ВБАХ параллельных элементов складываются вдоль оси i , а последовательно соединенных — вдоль оси Ψ .

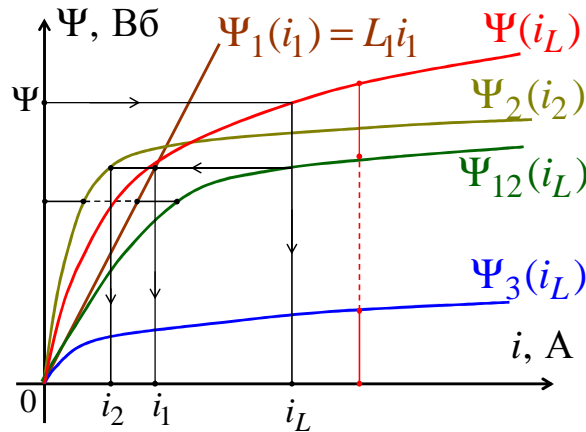
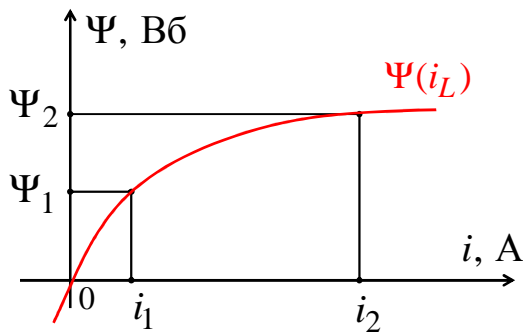


Рис. 93

2. Заданная ВБАХ $\Psi(i_L)$ НИЭ может приближенно заменяться зависимостью $i_L \approx k_1 \Psi + k_3 \Psi^3 + \dots$, коэффициенты k_1 и k_3 находятся из решения уравнений



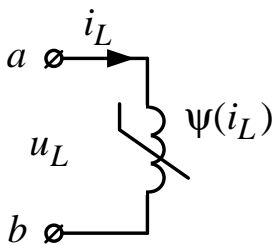
$$\begin{cases} i_1 = k_1 \Psi_1 + k_3 \Psi_1^3; \\ i_2 = k_1 \Psi_2 + k_3 \Psi_2^3. \end{cases}$$

Рис. 94

Если веберамперная характеристика нелинейного индуктивного элемента задана аналитически, $i_L \approx k_1 \Psi + k_3 \Psi^3$. Напряжение на НИЭ $u_L(t) \approx \sqrt{2}U_L \cos(\omega t + \beta)$, тогда

$$\Psi(t) = \int u_L(t) dt + A = \frac{\sqrt{2}U_L}{\omega} \sin(\omega t + \beta);$$

$$\begin{aligned} i_L &\approx k_1 \Psi(t) + k_3 \Psi^3(t) = \\ &= \frac{\sqrt{2}k_1 U_L}{\omega} \sin(\omega t + \beta) + \\ &+ \frac{2\sqrt{2}k_3 U_L^3}{\omega^3} \sin^3(\omega t + \beta); \end{aligned}$$



$$\sin^3(\omega t + \beta) = \frac{3}{4} \sin(\omega t + \beta) - \frac{1}{4} \sin(3\omega t + 3\beta);$$

$$i_L(t) \approx \sqrt{2} I_1 \sin(\omega t + \beta) + \sqrt{2} I_3 \sin(3\omega t + 3\beta).$$

Действующие значения:

$$I_1 = \frac{k_1 U_L}{\omega} + \frac{3k_3 U_L^3}{2\omega^3}; \quad I_3 = -\frac{k_3 U_L^3}{2\omega^3}; \quad I_L = \sqrt{I_1^2 + I_3^2}.$$

Изменяя U_L , можно рассчитать I_1 , I_3 , I_L и получить ВАХ $U_L(I_L)$ НИЭ для действующих значений. При расчете $U_L(I_L)$ удобно заполнять таблицу.

| | | | | |
|-------------------------|--|--|--|--|
| $U_L, \text{ В}$ | | | | |
| $I_1, \text{ А}$ | | | | |
| $I_3, \text{ А}$ | | | | |
| $I_L, \text{ А}$ | | | | |
| $k_r = \frac{I_1}{I_3}$ | | | | |

Пример

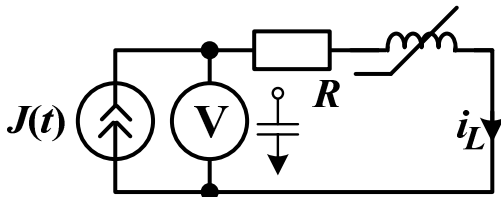


Рис. 95

Дано:

$$J(t) = I_m \sin \omega t \text{ (А);}$$

$$R = \dots \text{ (Ом).}$$

НИЭ имеет ВБАХ

$$\psi = m \cdot i_L^3 \text{ (Вб).}$$

Определить:

показание вольтметра U_V (В)

Решение:

$$u_L(t) = \frac{d\Psi(t)}{dt} = (m \cdot i_L^3)';$$

$$m I_m^3 \sin^3 \omega t = m I_m^3 \left(\frac{3}{4} \sin \omega t - \frac{1}{4} \sin 3\omega t \right);$$

$$\left(m I_m^3 \frac{3}{4} \sin \omega t - m I_m^3 \frac{1}{4} \sin 3\omega t \right)' = m I_m^3 \frac{3}{4} \omega \cos \omega t - m I_m^3 \frac{1}{4} 3\omega \cos 3\omega t;$$

$$u_V(t) = R \cdot i + u_L = R \cdot I_m \sin \omega t + m I_m^3 \frac{3}{4} \omega \cos \omega t - m I_m^3 \frac{1}{4} 3\omega \cos 3\omega t.$$

Напряжение вольтметра

$$U_V = \sqrt{|U_1|^2 + |U_3|^2}, \text{ В,}$$

где действующие значения напряжения первой и третьей гармоники:

$$U_1 = \left| \frac{R \cdot I_m}{\sqrt{2}} + \frac{m I_m^3 \frac{3}{4} \cdot \omega}{\sqrt{2}} e^{90i} \right|, \text{ В};$$

$$U_3 = -\frac{m I_m^3 \frac{3}{4} \cdot 3\omega}{\sqrt{2}}.$$

2.7. Нелинейные емкостные элементы

НЕЭ запасают энергию в электрическом поле и имеют нелинейную кулонвольтную характеристику (КВХ) $q(U_C)$.

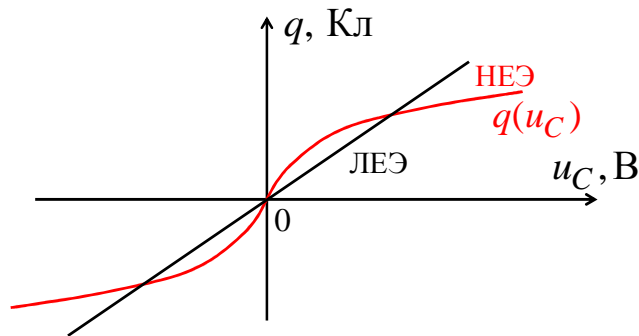


Рис. 96

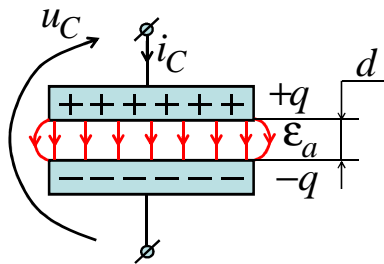


Рис. 97

q – заряд НЕЭ, Кл;
 u_C – напряжение, В;
 ϵ_a – абсолютная диэлектрическая проницаемость, Ф/м;
 d – расстояние между обкладками, м.

НЕЭ обозначаются:

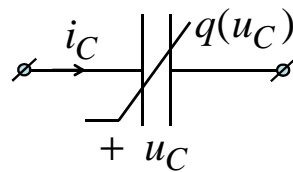


Рис. 98

НЕЭ характеризуется:

1) статической емкостью $C_{ст}(u_C) = q/u_C$, Ф;

2) дифференциальной емкостью $C_{диф}(u_C) = \frac{dq}{du_C}$, Ф.

Для линейного емкостного элемента $C = C_{ст} = C_{диф} = \text{const}$.

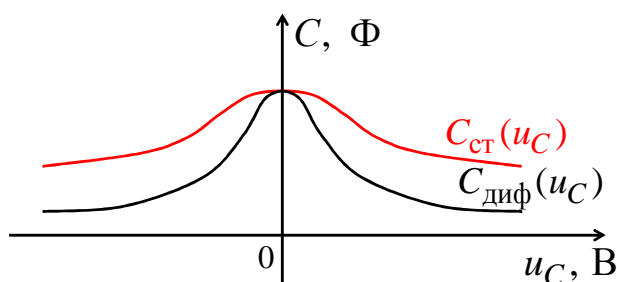


Рис. 99

Ток НЕЭ $i_C = \frac{dq}{dt} = \frac{dq}{du_C} \cdot \frac{du_C}{dt} = C_{диф}(u_C) \cdot \frac{du_C}{dt}$, А.

Кулонвольтная характеристика нелинейного элемента может быть задана аналитически, например

$$u_C \approx m_1 q + m_3 q^3 + m_5 q^5 + \dots,$$

где m_1, m_3, m_5, \dots – постоянные коэффициенты.

Энергия НЕЭ

$$\begin{aligned} W_{Э}(t_0) &= \int_0^{t_0} u_C i_C dt = \int_0^{t_0} u_C \frac{dq}{dt} dt = \int_0^{q_0} u_C dq \approx \\ &\approx \frac{m_1 q_0^2}{2} + \frac{m_3 q_0^4}{4} + \frac{m_5 q_0^6}{6} + \dots, \text{ Дж,} \end{aligned}$$

где q_0 – значение заряда в момент времени $t = t_0$, причем $q(0) = 0$.

НЕЭ – это безынерционный элемент.

Если $i_C(t) = I_m \cos \omega t$, то $q(t) = \int i_C(t) dt + A = \frac{I_m}{\omega} \sin \omega t$, Кл.

Графически определяем напряжение $u_C(t)$

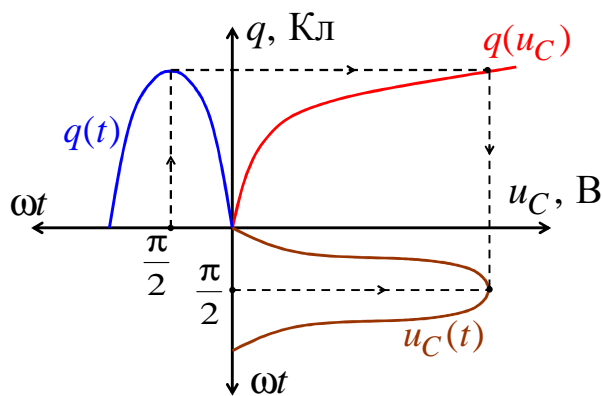


Рис. 100

Напряжение $u_C(t)$ содержит нечетные гармоники.
Физически НЕЭ – это вариконды и варикапы.

1. **Вариконды** содержат сегнетоэлектрики (титанат бария), у которых зависимость $\epsilon_r = f(E)$ нелинейна (рис. 91).

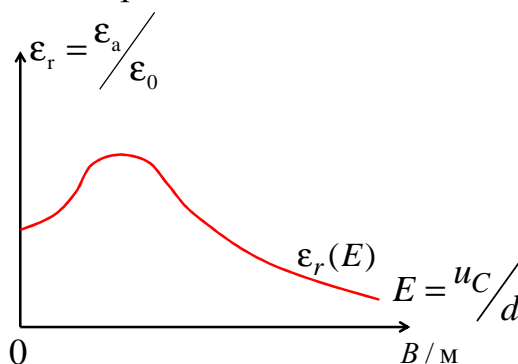


Рис. 101

Вариконды имеют КВХ $q(U_C)$ в виде семейства петель гистерезиса.

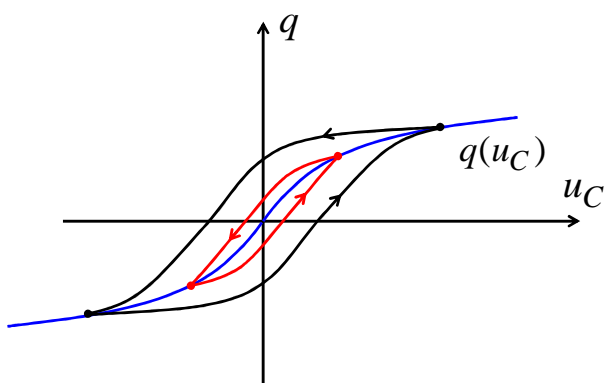


Рис. 102

2. **Варикап** – это барьерная емкость обратно смещенного $p-n$ -перехода специального диода.

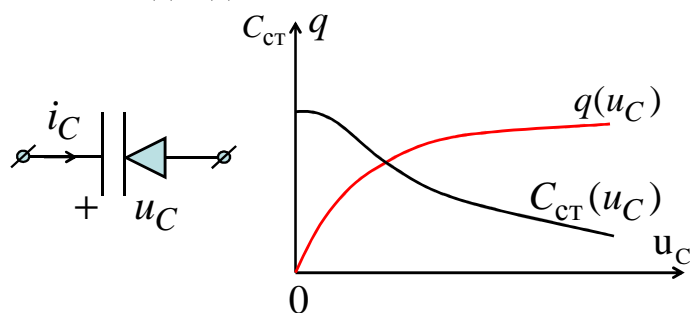


Рис. 103

Для расчета цепей с ЛЕЭ и НЕЭ используются графоаналитические методы с применением:

- КВХ $q(U_C)$ емкостных элементов, которые складываются между собой согласно законам Кирхгофа, причем КВХ последовательных НЕЭ складываются вдоль оси U_C , а параллельных НЕЭ – вдоль оси q .

- КВХ $q(U_C)$ может приближенно заменяться зависимостью $u_C \approx m_1 q + m_3 q^3 + \dots$, тогда при $i_C(t) = \sqrt{2} I_C \cos(\omega t + \alpha)$ получаем

$$q(t) = \frac{\sqrt{2} I_C}{\omega} \sin(\omega t + \alpha);$$

$$u_C \approx m_1 q(t) + m_3 q(t)^3 = \sqrt{2} U_1 \sin(\omega t + \alpha) + \sqrt{2} U_3 \sin(3\omega t + 3\alpha), \text{ В,}$$

где $U_1 = \frac{m_1 I_C}{\omega} + \frac{3m_3 I_C^3}{2\omega^3}$; $U_3 = -\frac{m_3 I_C^3}{2\omega^3}$; $U_C = \sqrt{U_1^2 + U_3^2}$; $k_r = \left| \frac{U_3}{U_1} \right|$.

2.8. Метод эквивалентных синусоид

Метод применяется для приближенного расчета установившегося режима в нелинейных цепях, которые содержат нелинейные элементы и подключены к периодическим источникам с одинаковым периодом T .

При этом напряжения $u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} U_k \sin(k\omega t + \beta_k + \varphi_k)$ и токи

$i(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} I_k \sin(k\omega t + \beta_k)$ заменяются эквивалентными синусоидами

$$u(t) = \sqrt{2} U \sin(\omega t + \beta + \varphi); \quad i(t) = \sqrt{2} I \sin(\omega t + \beta),$$

где $U = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} U_k^2}$; $I = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} I_k^2}$; $\omega = \frac{2\pi}{T}$; $P = \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \cos \varphi_k$;

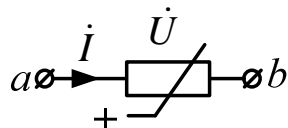
$Q = \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \sin \varphi_k$.

Активная потребляемая мощность $P = UI \cos \varphi$, Вт, должна остаться неизменной, поэтому:

а) если $Q < 0$, $\varphi = -\arccos \frac{P}{UI}$;

б) если $Q > 0$, $\varphi = \arccos \frac{P}{UI}$.

Нелинейные элементы задаются ВАХ $U(I)$ и ФАХ $\varphi(I)$ для действующих значений, при этом применяется символический метод



$\dot{U} = U e^{j[\beta + \varphi(I)]}$, $\dot{I} = I e^{j\beta}$, $P(I) = U(I) \cdot I \cos \varphi(I)$.

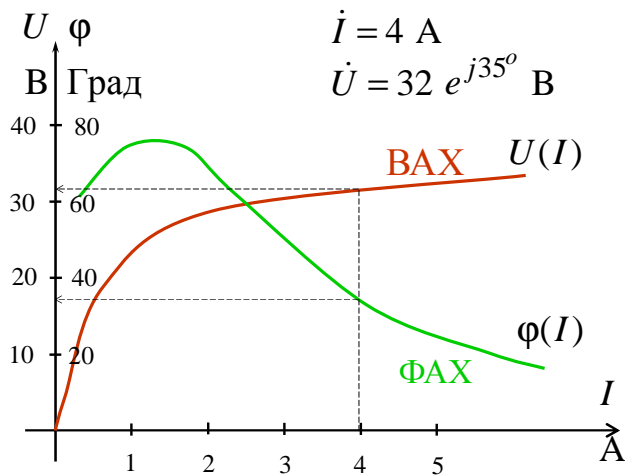


Рис. 104

ВАХ $U(I)$ и ФАХ $\varphi(I)$ нелинейных элементов получают экспериментально или расчетом.

1. Метод эквивалентного генератора применяется для цепей с одним нелинейным элементом.

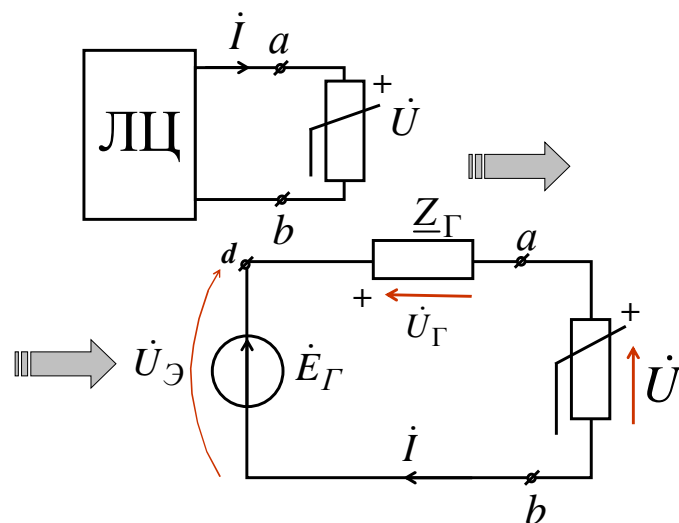


Рис. 105

Для линейной цепи (ЛЦ) определяются параметры эквивалентного генератора $\dot{E}_Г = E_Г e^{j\alpha_Г} (В)$, $\underline{Z}_Г = Z_Г e^{j\phi_Г} (Ом)$.

Задаемся $\dot{i}^{(1)} = I^{(1)} e^{j0^\circ}$ и по известным $U(I)$ и $\phi(I)$ НЭ графически находим $U^{(1)}$ и $\phi^{(1)}$.

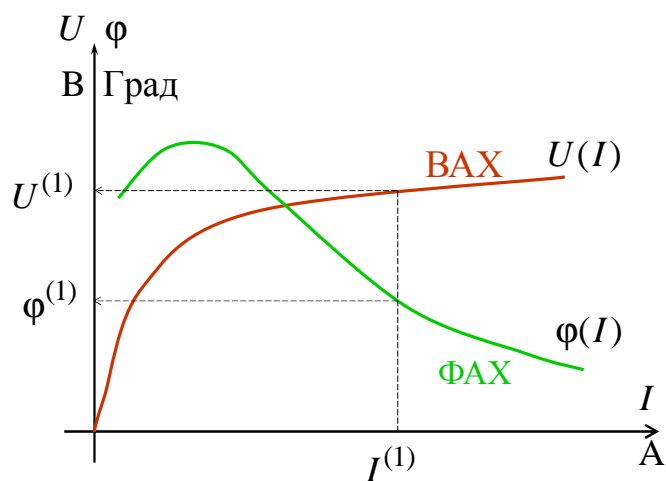


Рис. 106

Рассчитываем $\dot{U}_\Gamma^{(1)} = \underline{Z}_\Gamma \cdot \dot{I}^{(1)}$ и по второму закону Кирхгофа определяем эквивалентное напряжение $\dot{U}_\Delta^{(1)} = U_\Delta^{(1)} \cdot e^{j\varphi_\Delta^{(1)}} = \dot{U}_\Gamma^{(1)} + U^{(1)} \cdot e^{j\varphi^{(1)}}$.

Определяем $U_\Delta^{(1)}$ и $\varphi_\Delta^{(1)}$, соответствующие току $I^{(1)}$.

Для иллюстрации строим векторную диаграмму.

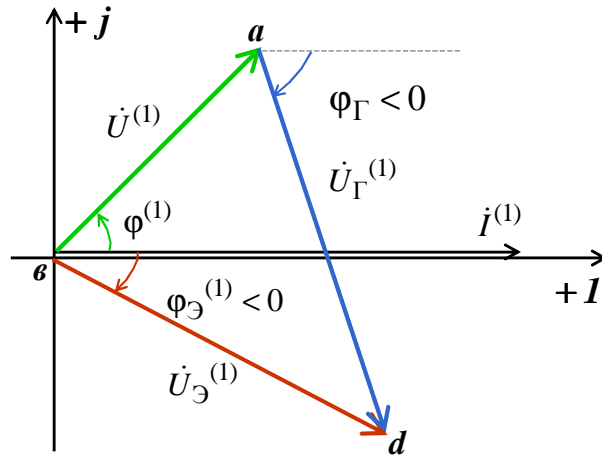


Рис. 107

Задаемся другим значением $\dot{I}^{(2)} = I^{(2)} e^{j0^\circ}$ и аналогично определяем $U_\Delta^{(2)}$ и $\varphi_\Delta^{(2)}$.

Строим эквивалентные характеристики $U_\Delta(I)$ и $\varphi_\Delta(I)$, по которым, при $U_\Delta = E_\Gamma$, графически находим $I, \varphi_\Delta, \varphi, U$.

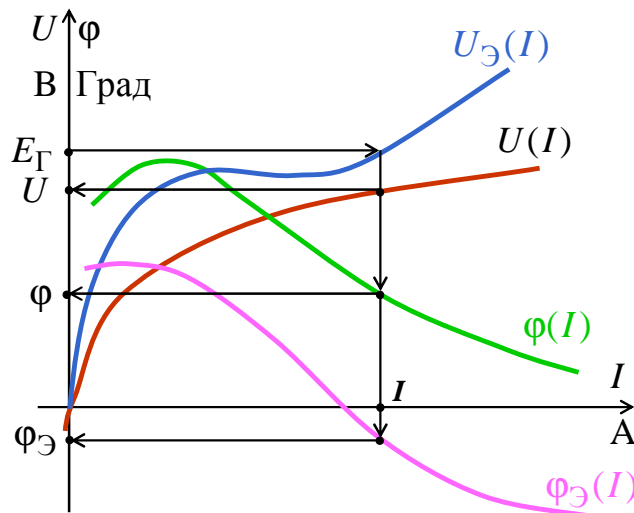


Рис. 108

В результате $\dot{I} = I e^{j\beta}$, $\dot{U} = U e^{j(\beta+\varphi)}$, $\beta = \alpha_\Gamma - \varphi_\Delta$.

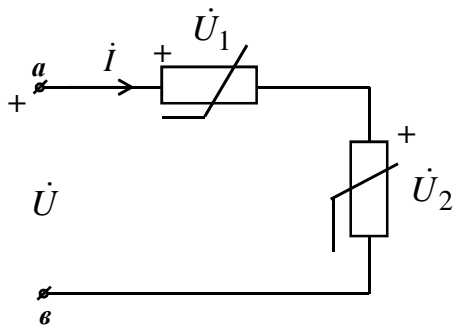
Рассчитываем $P = E_r I \cos \varphi_3$, Вт, $\underline{Z}_H = \frac{U}{I} e^{j\varphi}$, Ом.

При известном сопротивлении НЭ \underline{Z}_H рассчитываем линейную цепь (ЛЦ).

2. Группы линейных и нелинейных элементов для упрощения схем при помощи законов Кирхгофа в комплексной форме могут быть заменены эквивалентными НЭ с эквивалентными ВАХ и ФАХ:

а) **последовательное соединение.**

Пример



Дано:

$$\dot{U} = U e^{j\alpha};$$

$$U_1(I), \varphi_1(I);$$

$$U_2(I), \varphi_2(I).$$

Определить:

$$\dot{I} = I e^{j\beta}$$

Рис. 109

Задаемся током $\dot{I}^{(1)} = I^{(1)} \cdot e^{j0^\circ}$, по характеристикам нелинейных элементов находим $U_1^{(1)}$, $\varphi_1^{(1)}$ и $U_2^{(1)}$, $\varphi_2^{(1)}$.

По второму закону Кирхгофа определяем входное напряжение

$$\dot{U}^{(1)} = U^{(1)} \cdot e^{j\varphi^{(1)}} = U_1^{(1)} \cdot e^{j\varphi_1^{(1)}} + U_2^{(1)} \cdot e^{j\varphi_2^{(1)}}.$$

Задаемся другим значением тока $\dot{I}^{(2)} = I^{(2)} \cdot e^{j0^\circ}$, повторяем расчет и находим $\dot{U}^{(2)} = U^{(2)} \cdot e^{j\varphi^{(2)}}$.

Строим эквивалентные характеристики $U(I)$ и $\varphi(I)$, по которым графически находим I и φ , тогда $\dot{I} = I e^{j(\alpha-\varphi)}$.

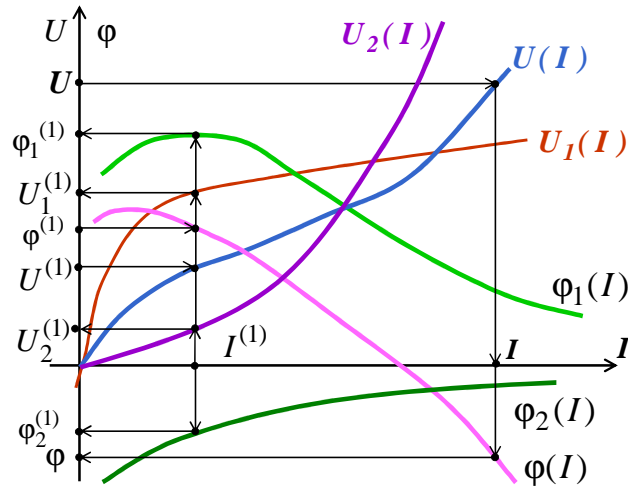


Рис. 110

б) параллельное соединение.

Пример

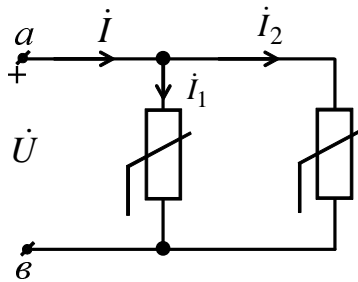


Рис. 111

Дано:
 $\dot{I} = I e^{j\beta}$;
 $U_1(I), \varphi_1(I)$;
 $U_2(I), \varphi_2(I)$.
Определить:
 $\dot{U} = U e^{j\alpha}$

Задаемся напряжением $\dot{U}^{(1)} = U^{(1)} \cdot e^{j0^\circ}$, по характеристикам нелинейных элементов находим $I_1^{(1)}, \varphi_1^{(1)}$ и $I_2^{(1)}, \varphi_2^{(1)}$.

По 1 закону Кирхгофа определяем входной ток

$$\dot{I}^{(1)} = I^{(1)} \cdot e^{-j\varphi^{(1)}} = I_1^{(1)} \cdot e^{-j\varphi_1^{(1)}} + I_2^{(1)} \cdot e^{-j\varphi_2^{(1)}}.$$

Задаемся другим значением напряжения $\dot{U}^{(2)} = U^{(2)} \cdot e^{j0^\circ}$, повторяем расчет и находим $\dot{I}^{(2)} = I^{(2)} \cdot e^{-j\varphi^{(2)}}$.

Строим эквивалентные характеристики $U(I)$ и $\varphi(I)$, по которым графически находим U и φ , тогда $\dot{U} = U e^{j(\beta+\varphi)}$.

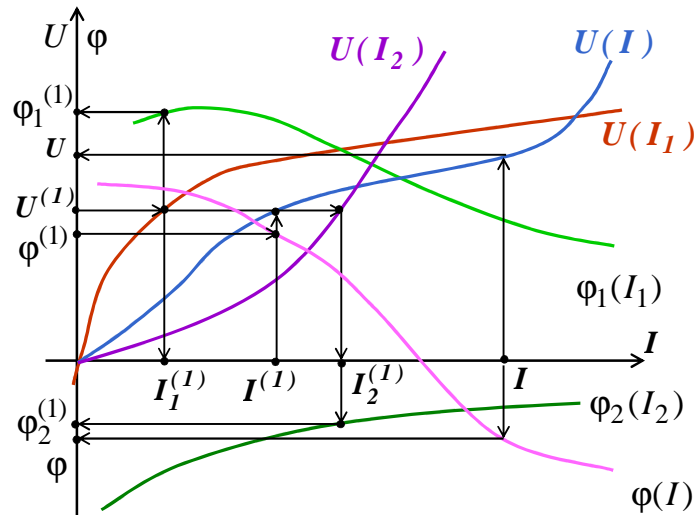


Рис. 112

3. Метод итераций используется для расчета сложных схем с применением вычислительной техники. При этом нелинейные элементы представляются в виде неизвестных комплексных сопротивлений $Z_{\text{н}} = \frac{U(I)}{I} \cdot e^{j\varphi(I)}$, Ом.

Затем, при помощи любого метода расчета, в комплексной форме составляются итерационные выражения:

а) для тока в НЭ, если ВАХ $U(I)$ загибается к оси тока:

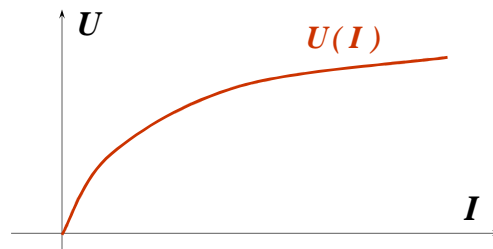


Рис. 113

б) для напряжения в НЭ, если ВАХ $U(I)$ загибается к оси напряжения:

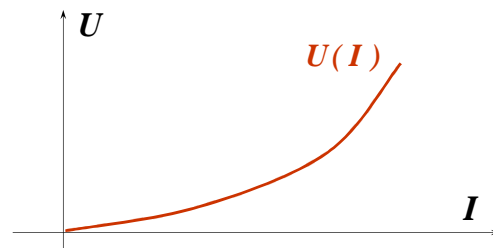
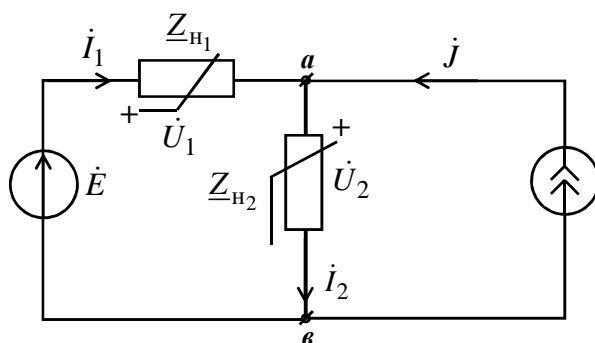


Рис. 114

Пример



Дано:

$$\dot{E} = Ee^{j\alpha}, \quad \dot{J} = Je^{j\beta},$$

$$U_1(I), \quad \varphi_1(I),$$

$$U_2(I), \quad \varphi_2(I).$$

Определить:

$$\dot{I}_1, \quad \dot{I}_2, \quad \dot{U}_1, \quad \dot{U}_2$$

Рис. 115

Обозначим:

$$\underline{Z}_{H1} = \frac{U_1(I_1)}{I_1} \cdot e^{j\varphi_1(I_1)}, \text{ Ом}; \quad \underline{Z}_{H2} = \frac{U_2(I_2)}{I_2} \cdot e^{j\varphi_2(I_2)}, \text{ Ом}.$$

По методу узловых потенциалов:

$$\phi_b = 0, \quad \phi_a \left[\frac{1}{\underline{Z}_{H1}} + \frac{1}{\underline{Z}_{H2}} \right] = \frac{\dot{E}}{\underline{Z}_{H1}} + \dot{J},$$

тогда

$$\phi_a = \frac{\dot{E} + \dot{J} \cdot \underline{Z}_{H1}}{1 + \frac{\underline{Z}_{H1}}{\underline{Z}_{H2}}}.$$

Итерационные выражения:

$$\dot{U}_1 = \dot{E} - \phi_a = \frac{(\dot{E} - \dot{J} \cdot \underline{Z}_{H2}) \cdot \underline{Z}_{H1}}{\underline{Z}_{H1} + \underline{Z}_{H2}}, \text{ В}; \quad \dot{I}_2 = \frac{\phi_a - \phi_b}{\underline{Z}_{H2}} = \frac{(\dot{E} + \dot{J} \cdot \underline{Z}_{H1})}{\underline{Z}_{H1} + \underline{Z}_{H2}}, \text{ А}.$$

Задаемся $U_1 = \dots$, В, $I_2 = \dots$, А.

Находим по ВАХ и ФАХ: $I_1 = \dots$, А, $\varphi_1 = \dots$, град,

$U_2 = \dots$, В, $\varphi_2 = \dots$, град.

Рассчитываем \underline{Z}_{H1} , \underline{Z}_{H2} , \dot{U}_1 , \dot{I}_2 .

Находим по ВАХ и ФАХ: I_1 , U_2 , φ_1 , φ_2 и т.д.

Расчет ведется до тех пор, пока результаты не начнут повторяться.

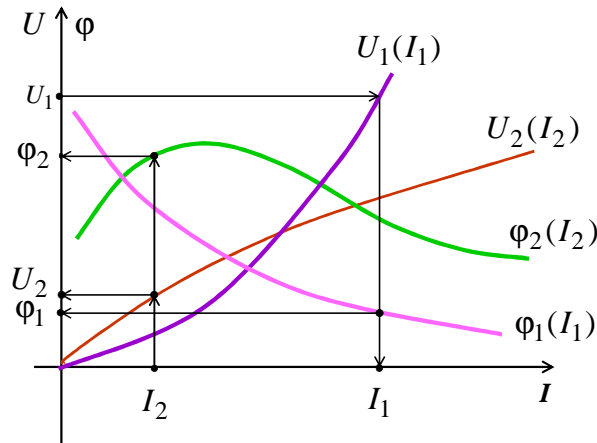


Рис. 116

Пример

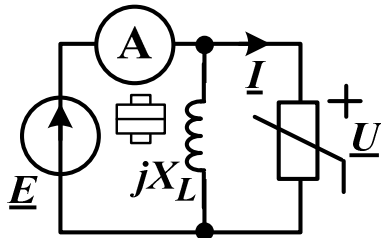


Рис. 117

Дано:

$$\dot{E} = 30e^{j20^\circ}, \text{ В};$$

$$X_L = 20 \text{ Ом.}$$

$$\text{НЭ имеет ВАХ } I = 10^{-4} \cdot U^2, \text{ А}$$

$$\text{ФАХ } \varphi = 40^\circ - 30^\circ \cdot I,$$

где ток I – в амперах.

Определить:

показание амперметра I_A (А)

Расчёт произведём в MathCAD:

Исходные данные:

$$E := 30 \cdot e^{20i \cdot \text{deg}} \quad \varphi_{\text{эдс}} := 20 \quad x_L := 20$$

$$I(U) := 10^{-4} \cdot U^2 \quad \varphi(I) := 40 - 30(I)$$

Решение:

$$I_L := \frac{E}{i \cdot x_L} \quad I_{\text{НЭ}} := I(|E|) \quad \varphi_{\text{НЭ}} := \varphi(I_{\text{НЭ}})$$

$$I_{\text{НЭ}} := I(|E|) \cdot e^{i[(\varphi_{\text{эдс}}) - (\varphi_{\text{НЭ}})] \cdot \text{deg}}$$

$$I := I_L + I_{\text{НЭ}} \quad |I| = 1.556$$

2.9. Резонансные явления в нелинейных цепях

Резонансные явления в нелинейных цепях возможны при периодических напряжениях и токах и наличии индуктивного и емкостного элементов. Резонансные явления в нелинейных цепях сопровождаются рядом особенностей, которые обусловлены зависимостью параметров цепи от величин напряжений и токов.

- Резонанс может наступать при изменении величины напряжения или тока источника питания.

- Напряжения или токи негармонические, поэтому резонанс возможен на первой или других гармониках.

- Возможны скачки амплитуд напряжений и токов (релейный эффект) при изменении знака угла сдвига фаз φ (опрокидывание фазы).

Ограничимся рассмотрением феррорезонанса, т.е. резонансных явлений в цепях с нелинейным индуктивным элементом. Для упрощения анализа представим напряжения и токи эквивалентными синусоидами и будем использовать характеристики для действующих значений.

Феррорезонанс напряжений – это резонансные явления при последовательном соединении катушки с сердечником и конденсатора. Рассмотрим без учета потерь энергии.

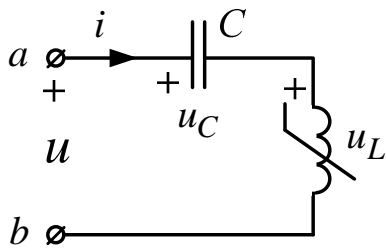


Рис. 118

Эквивалентные синусоиды:

$$i = \sqrt{2} I \sin(\omega t + \beta);$$

$$u_L = \sqrt{2} U_L \sin(\omega t + \beta + 90^\circ);$$

$$u_C = \sqrt{2} U_C \sin(\omega t + \beta - 90^\circ).$$

По второму закону Кирхгофа

$$u = u_C + u_L = \sqrt{2} U \sin(\omega t + \beta \pm 90^\circ),$$

$$\text{где } U = |U_L - U_C|.$$

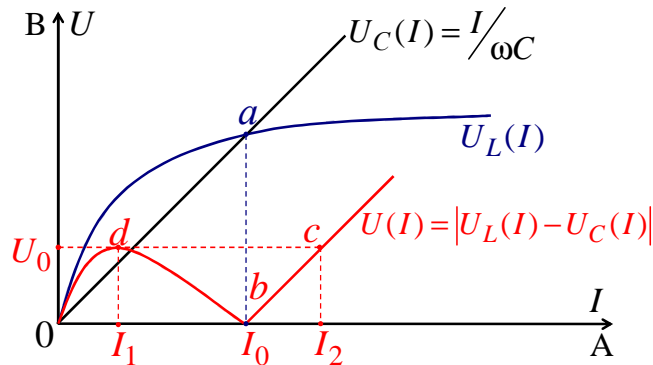


Рис. 119

Необходимое условие феррорезонанса напряжений – пересечение $U_L(I)$ и $U_C(I)$, поэтому точки a и b – это точки резонанса, когда $U_L = U_C$:

- а) $0 < I < I_0$;
 $U_L > U_C$;
 $\varphi = \varphi_1 = 90^\circ$.

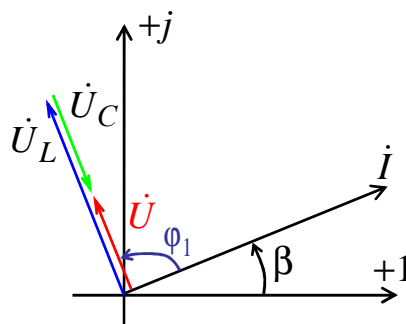


Рис. 120

- б) $I > I_0$;
 $U_L < U_C$;
 $\varphi = \varphi_2 = -90^\circ$.

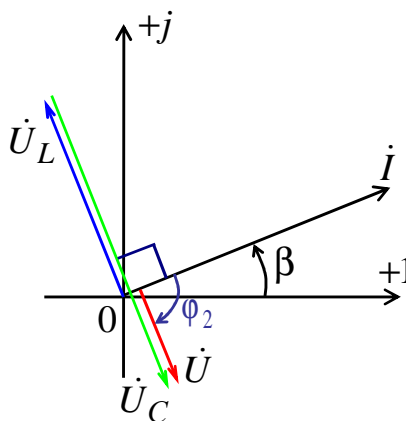


Рис. 121

При питании от источника с малым сопротивлением ($Z_{\text{и}} \rightarrow 0$), при незначительном изменении напряжения (U), наблюдаются скачки тока (I):

а) при плавном увеличении U наблюдается скачок I от I_1 до I_2 при изменении φ от $\varphi_1 = 90^\circ$ до $\varphi_2 = -90^\circ$. Это релейный эффект с опрокидыванием фазы, причем $I_2 \gg I_1$;

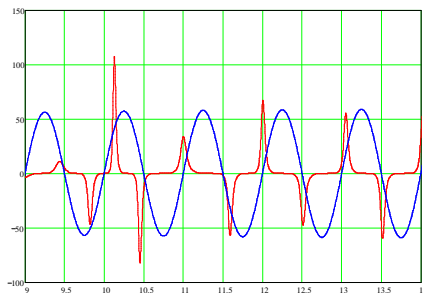


Рис. 122

б) при плавном уменьшении U наблюдается скачок I от I_0 до 0. При наличии потерь энергии в катушке и $Z_{\text{н}} \rightarrow 0$ также наблюдаются скачки тока I .

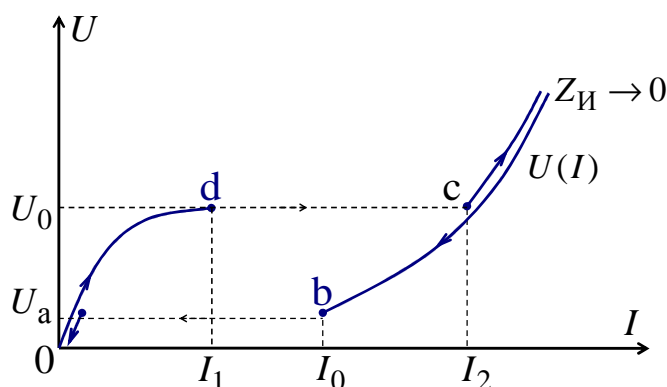


Рис. 123

Таким образом, при $Z_{\text{н}} \rightarrow 0$ невозможно экспериментально получить участок db $U(I)$ и достигнуть устойчивый феррорезонанс в точке b .

При питании от источника с $Z_{\text{н}} \rightarrow \infty$ можно без скачков снять всю ВАХ $U(I)$ и в точке b получить устойчивый феррорезонанс.

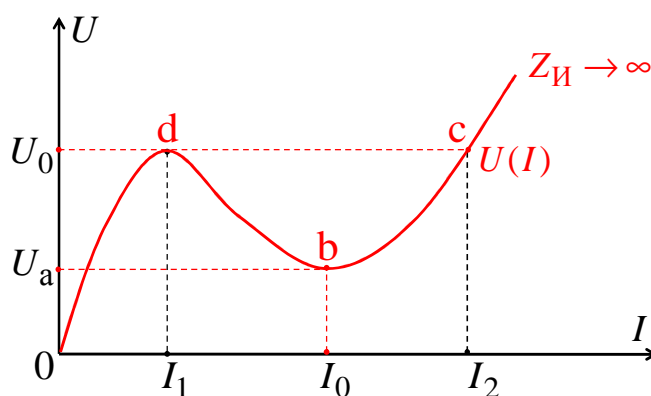


Рис. 124

$R_a \approx \frac{U_a}{I_0}$ – сопротивление, характеризующее потери энергии в катушке.

ВАХ $U(I)$, с учетом потерь энергии, можно рассчитать по формуле

$$U(I) = \sqrt{I^2 R_a^2 + [U_L(I) - I \cdot X_C]^2},$$

которая следует из векторной диаграммы

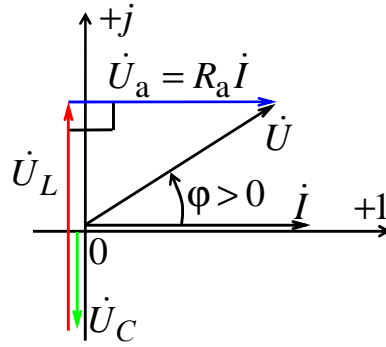


Рис. 125

Феррорезонанс напряжений может применяться:

- Для стабилизации переменного напряжения источника с $Z_{и} \rightarrow 0$.

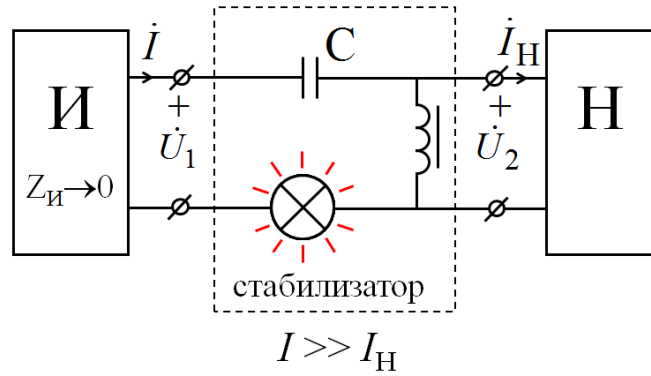


Рис. 126

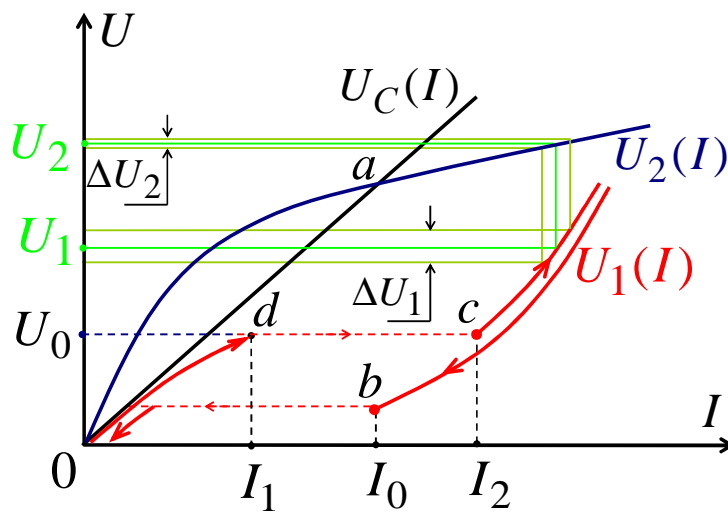


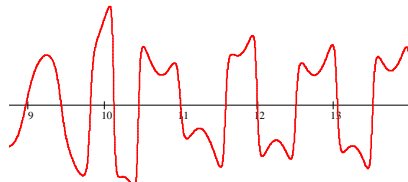
Рис. 127

Коэффициент стабилизации напряжения

$$K_{\text{ст}} = \frac{(\Delta U_1) \cdot U_2}{(\Delta U_2) \cdot U_1} > 1,$$

причем $\Delta U_1 > \Delta U_2$.

Недостаток такого стабилизатора – несинусоидальное выходное напряжение;



- для защиты от повышения переменного напряжения сети.

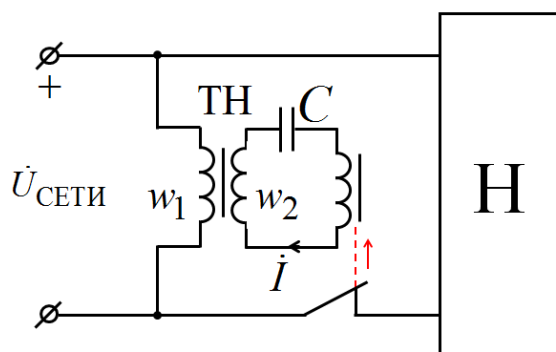


Рис. 128

Происходит отключение нагрузки при $U_{\text{сети}} \geq U_0 \cdot \frac{w_1}{w_2}$, причем

$w_1 > w_2$ – количество витков.

Феррорезонанс токов – это резонансные явления при параллельном соединении катушки с сердечником и конденсатора.

Рассмотрим без учета потерь энергии.

Эквивалентные синусоиды:

$$u = \sqrt{2} \cdot U \sin(\omega t + \alpha);$$

$$i_L = \sqrt{2} \cdot I_L \sin(\omega t + \alpha - 90^\circ);$$

$$i_C = \sqrt{2} \cdot I_C \sin(\omega t + \alpha + 90^\circ).$$

По первому закону Кирхгофа

$$i = i_L + i_C = \sqrt{2} \cdot I \sin(\omega t + \alpha \pm 90^\circ),$$

$$\text{где } I = |I_L - I_C|.$$

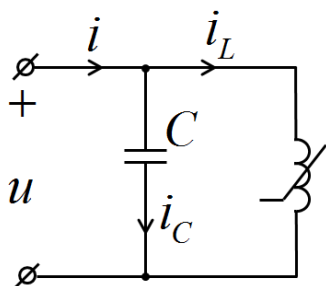


Рис. 129

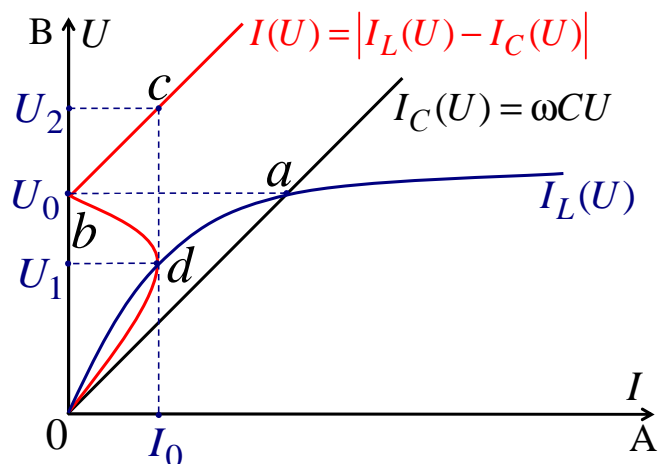


Рис. 130

Необходимое условие феррорезонанса токов – пересечение $I_L(U)$ и $I_C(U)$. Поэтому точки a и b – это точки резонанса, когда $I_L = I_C$:

- а) $0 < U < U_0$;
 $I_C > I_L$;
 $\varphi = \varphi_1 = -90^\circ$.

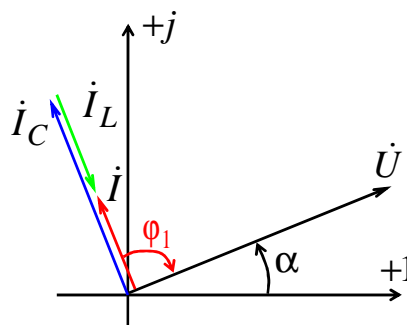


Рис. 131

- б) $U > U_0$;
 $I_C < I_L$;
 $\varphi = \varphi_2 = 90^\circ$.

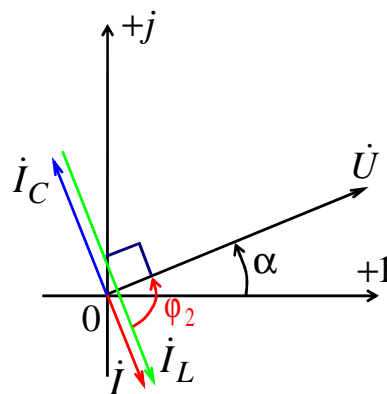


Рис. 132

При питании от источника с большим сопротивлением ($Z_{\text{и}} \rightarrow \infty$) при незначительном изменении тока (I) наблюдаются скачки напряжения (U):

а) при плавном увеличении тока наблюдается скачок напряжения от U_1 до U_2 при изменении φ от $\varphi_1 = -90^\circ$ до $\varphi_2 = 90^\circ$. Это релейный эффект с опрокидыванием фазы, причем $U_2 > U_1$.

Напряжение после скачка опережает ток на 90° и явно несинусоидально.

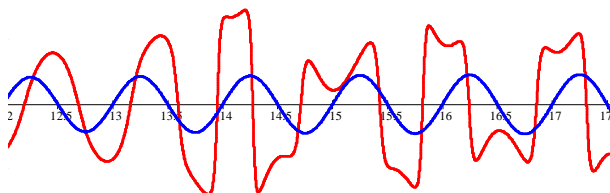


Рис. 133

При наличии потерь энергии в катушке и $Z_{\text{и}} \rightarrow \infty$ также наблюдаются скачки напряжения U ;

б) при плавном уменьшении тока наблюдается скачок напряжения от U_0 до 0. При наличии потерь энергии в катушке и $Z_{\text{и}} \rightarrow \infty$ также наблюдаются скачки напряжения U .

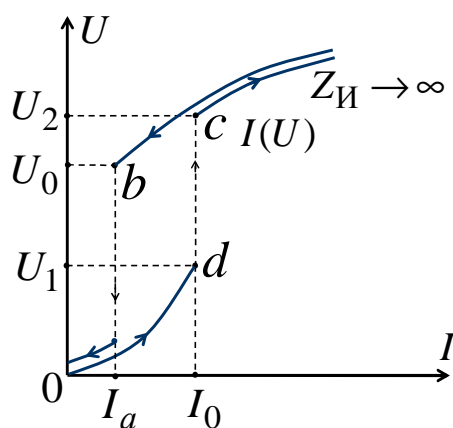


Рис. 134

Таким образом, при $Z_{\text{и}} \rightarrow \infty$ невозможно экспериментально получить участок db $I(U)$ и достигнуть устойчивый феррорезонанс в точке b .

При питании от источника с $Z_{\text{и}} \rightarrow \infty$ можно без скачков снять всю ВАХ $I(U)$ и в точке b получить устойчивый феррорезонанс;

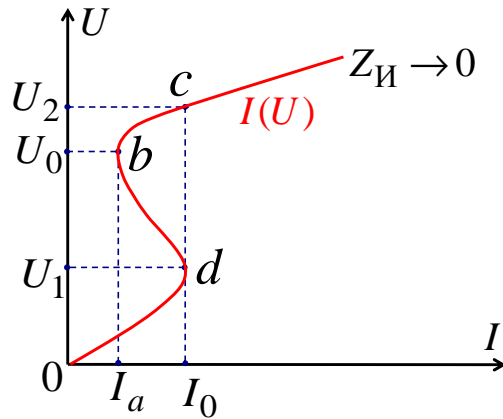


Рис. 135

$g_a \approx \frac{I_a}{U_0} \left(\frac{1}{\text{Ом}} \right)$ – проводимость, характеризующая потери энергии

в катушке.

ВАХ $I(U)$, с учетом потерь энергии, можно рассчитать, изменяя U , по формуле

$$I(U) = \sqrt{U^2 g_a^2 + [I_L(U) - \omega C U]^2},$$

которая следует из векторной диаграммы.

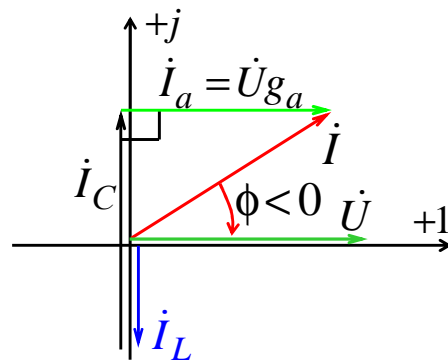


Рис. 136

Феррорезонанс токов может применяться:

а) для стабилизации переменного напряжения источника с $Z_{И} \rightarrow \infty$.

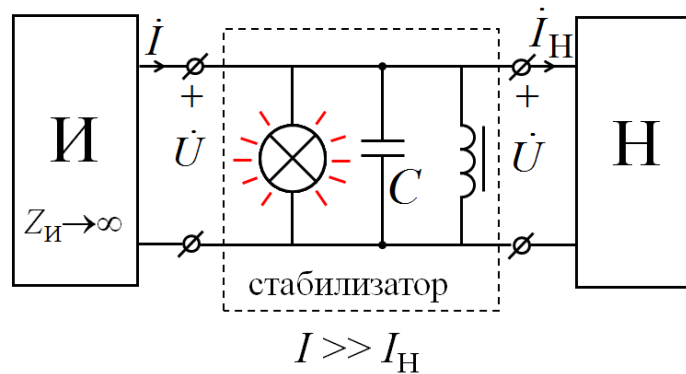


Рис. 137

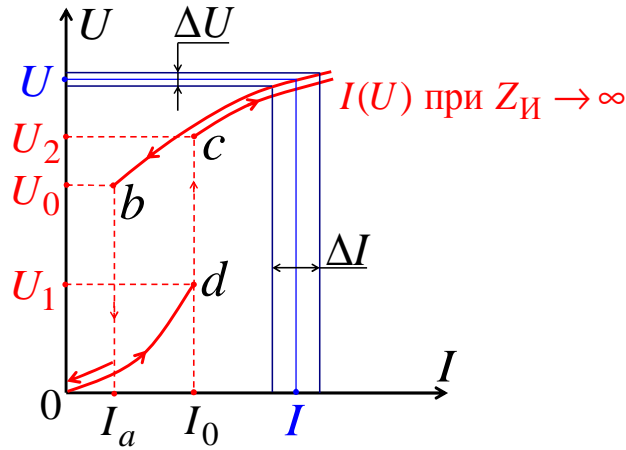


Рис. 138

Коэффициент стабилизации напряжения

$$K_{ст} = \frac{(\Delta I) \cdot U}{I \cdot (\Delta U)} > 1,$$

причём $(\Delta I) / I > (\Delta U) / U$;

б) для защиты от повышения переменного тока сети.

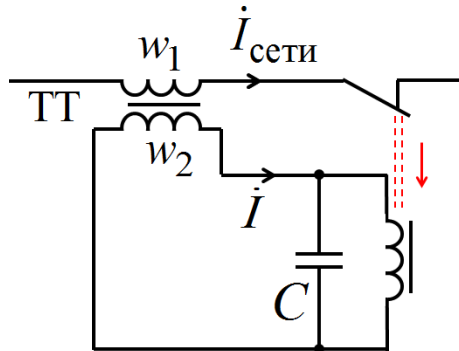


Рис. 139

Происходит отключение нагрузки при $I_{сети} \geq I_0 \cdot \frac{w_2}{w_1}$, причём $w_1 < w_2$ – количество витков.

2.10. Переходные процессы в нелинейных цепях

Расчет переходных процессов имеет ряд особенностей, обусловленных зависимостью параметров нелинейных элементов от величин напряжений и токов.

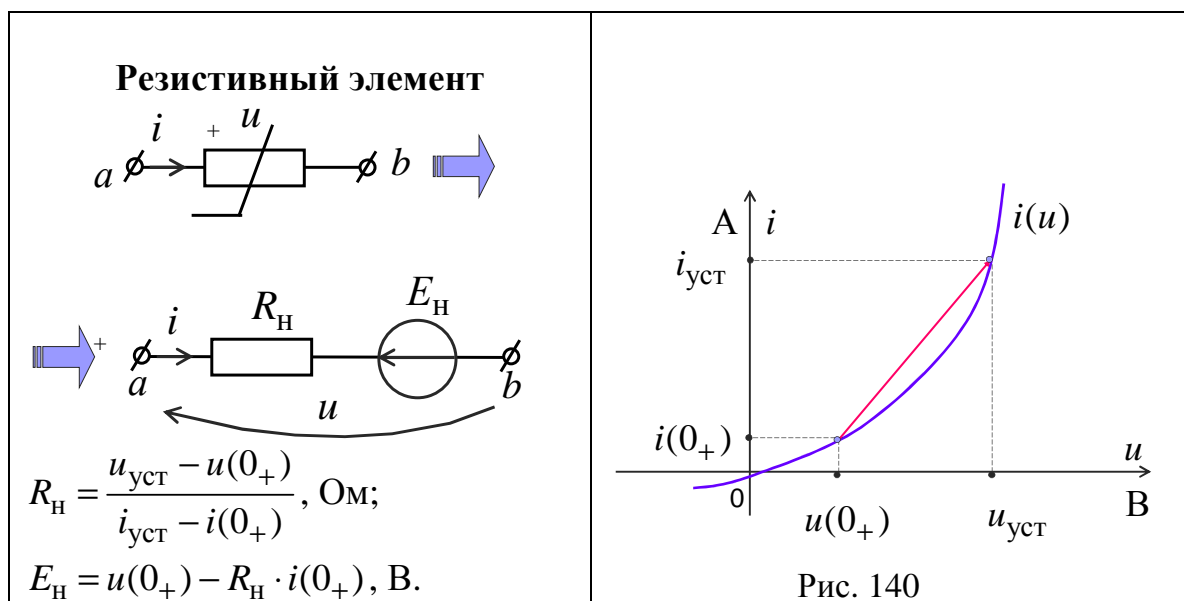
1. Для нелинейных цепей неприменим метод наложения – классический метод и интеграл Дюамеля нельзя использовать.
2. Нелинейные цепи характеризуются нелинейными дифференциальными уравнениями – операторный метод нельзя использовать.
3. Для расчета переходных процессов в нелинейных цепях используют приближенные методы и численные расчеты на ЭВМ.

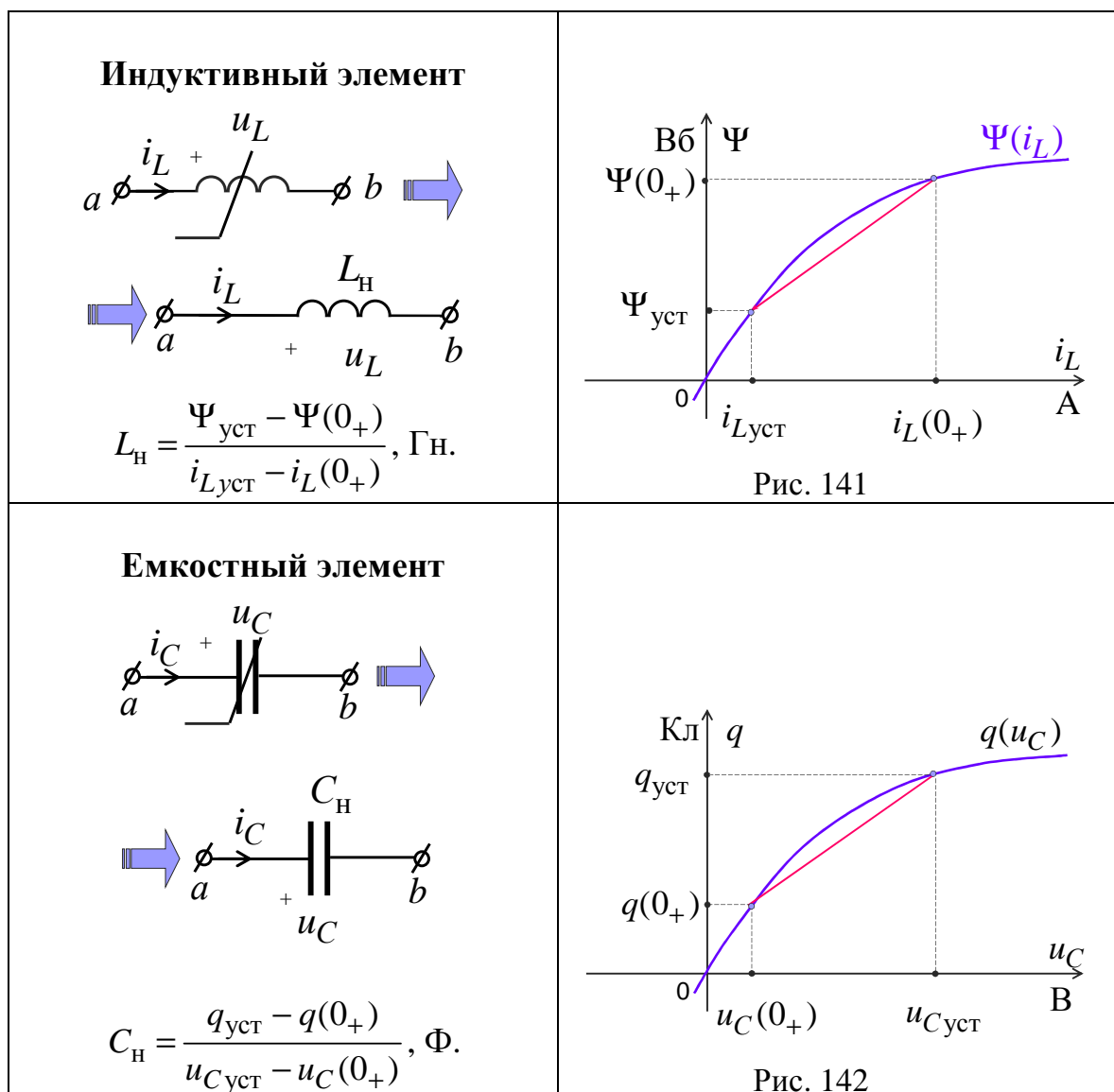
Метод условной линеаризации

Дает ориентировочное решение и заключается в условной замене нелинейных элементов линейными элементами.

Напряжения и токи переходного процесса находятся в виде приближенных функций времени классическим или операторным методом. Этот метод наиболее удобно применять для нелинейных цепей с постоянными источниками.

Условимся, что замена нелинейных элементов линейными осуществляется следующим образом:





Порядок расчёта переходных процессов методом условной линеаризации с использованием классического метода:

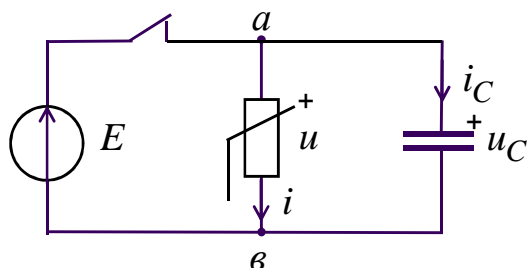
1. **ННУ.** Определяем независимые начальные условия в цепи до коммутации $i_L(0_-)$ или $u_C(0_-)$.
2. **ЗНУ.** Определяем искомую величину при $t(0_+)$ – $i(0_+)$ или $u(0_+)$.
3. Из расчета установившегося режима после коммутации находим установившиеся значения при $t = \infty$: $i_{уст}$ и $u_{уст}$.
4. Линеаризуем участок характеристики НЭ и определяем его условно линейные параметры.
5. Определяем корень характеристического уравнения p через входное сопротивление $Z(p) = 0$ в схеме после коммутации.

6. Определяем постоянную интегрирования из начальных условий $A = i(0_+) - i_{уст}(0)$ или $B = u(0_+) - u_{уст}(0)$.

7. Записываем окончательное решение:

$$i(t) \approx i_{уст} + i_{св}(t) = i(\infty) + Ae^{pt} \text{ или } u(t) \approx u_{уст} + u_{св}(t) = u(\infty) + Be^{pt}.$$

Пример



Дано:

$$e(t) = \text{const}, \text{ В};$$

$$C = 100 \text{ мкФ};$$

$i(u)$ – ВАХ нелинейного элемента.

Определить: $i(t)$

Рис. 143

1. **ННУ.** Определяем независимые начальные условия в цепи до коммутации $u_C(0_-) = u_C(0_+) = E$.

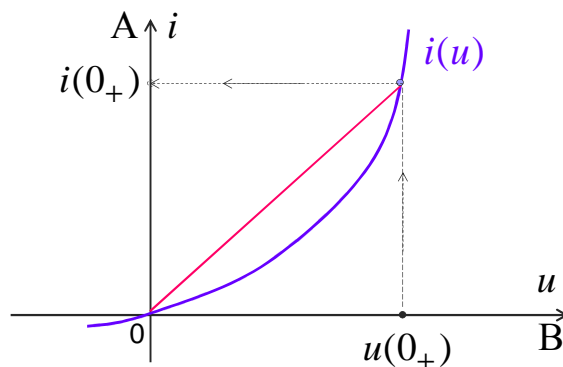
2. **ЗНУ.** Определяем искомую величину при $t(0_+)$; $i(0_+)$ находим графически по $i(u)$ и $u(0_+) = u_C(0_+) = E$.

3. Из расчета установившегося режима после коммутации находим установившиеся значения при $t = \infty$: $i_{уст} = 0$ или $u_{уст} = 0$.

4. Линеаризуем участок характеристик и НЭ и определяем его условно линейные параметры.

$$R_H = \frac{u_{уст} - u(0_+)}{i_{уст} - i(0_+)} = \dots \text{ Ом};$$

$$E_H = u(0_+) - R_H \cdot i(0_+) = 0.$$



В результате при $t > 0$ получим схему (рис. 144)

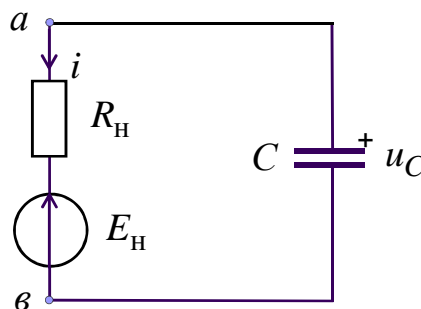


Рис. 144

5. Определяем корень характеристического уравнения p через входное сопротивление $Z(p) = 0$ в схеме после коммутации:

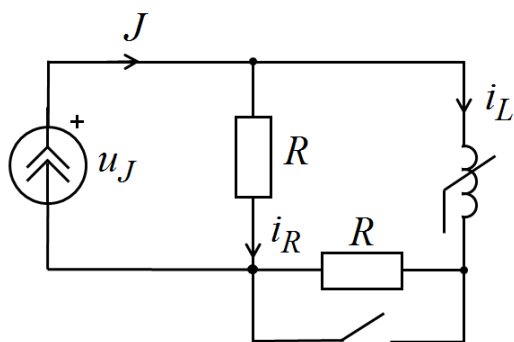
$$Z(p) = R_H + \frac{1}{pC} = 0; \quad p = -\frac{1}{R_H C} = \dots, \frac{1}{c}.$$

6. Определяем постоянную интегрирования из начальных условий $A = i(0_+) - i_{уст} = \dots$.

7. Записываем окончательное решение

$$i(t) \approx i_{уст} + Ae^{pt} = i(0_+) \cdot e^{-t/R_H C}, \text{ А.}$$

Пример



Дано:

$$J = \text{const};$$

$$R = \dots \text{ Ом};$$

$$C = 100 \text{ мкФ};$$

$\Psi(i_L)$ – ВБАХ нелинейного индуктивного элемента.

Определить: $u_J(t)$

Рис. 145

1. **ННУ.** Определяем независимые начальные условия в цепи до коммутации $i_L(0_-) = i_L(0_+) = \frac{J \cdot R}{R + R} = J/2$.

2. **ЗНУ.** Определяем искомую величину при $t(0_+)$

$$i_R(0_+) = J - i_L(0_+) = J/2;$$

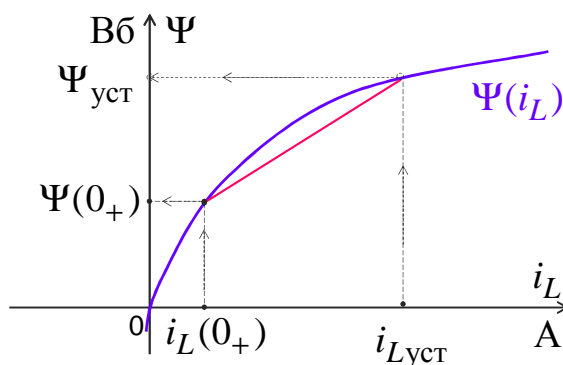
$$u_J(0_+) = R \cdot i_R(0_+) = R \cdot J/2.$$

3. Из расчета установившегося режима после коммутации находим установившиеся значения при $t = \infty$:

$$i_{Lуст} = J, \quad u_{Jуст} = 0; \quad \Psi_{уст} \text{ находим графически по } \Psi(i_L) \text{ и } i_{Lуст}.$$

4. Линеаризуем участок характеристики НЭ и определяем его условно линейные параметры.

$$L_H = \frac{\Psi_{уст} - \Psi(0_+)}{i_{Lуст} - i_L(0_+)} = \dots$$



В результате при $t > 0$ получим схему (рис. 146).

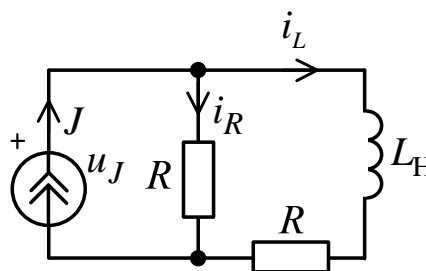


Рис. 146

5. Определяем корень характеристического уравнения p через входное сопротивление $Z(p) = 0$, в схеме после коммутации:

$$Z(p) = R + pL_H = 0; \quad p = -\frac{R}{L_H} = \dots \quad 1/c.$$

6. Определяем постоянную интегрирования из начальных условий

$$B = u_J(0_+) - u_{Jуст} = R \cdot J/2.$$

7. Записываем окончательное решение:

$$u_J(t) \approx u_{Jуст} + [u_J(0_+) - u_{Jуст}] \cdot e^{pt} = \frac{R \cdot J}{2} \cdot e^{-Rt/L_H}, \text{ В.}$$

Пример

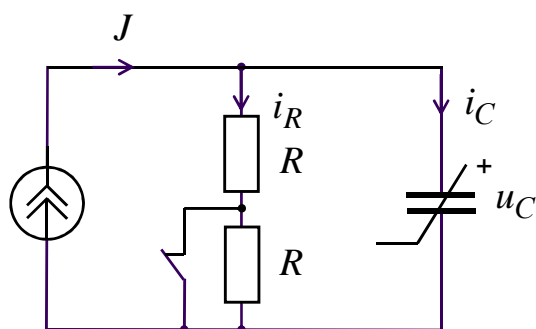


Рис. 147

Дано:

- $J = \text{const}$;
- $R = \dots \text{ Ом}$;
- $C = 100 \text{ мкФ}$;
- $q(u_C)$ – КВХ нелинейного ёмкостного элемента.

Определить: $i_R(t)$

1. **ННУ.** Определяем независимые начальные условия в цепи до коммутации $u_C(0_-) = u_C(0_+) = J \cdot R$.

2. **ЗНУ.** Определяем искомую величину $i_R(0_+) = \frac{u_C(0_+)}{2R} = J/2$ при $t(0_+)$, $q(0_+)$ находим графически по $q(u_C)$ и $u_C(0_+)$.

3. Из расчета установившегося режима после коммутации находим установившиеся значения при $t = \infty$: $i_{R\text{уст}} = J$, $u_{C\text{уст}} = 2R \cdot J$; $q_{\text{уст}}$ находим графически по $q(u_C)$ и $u_{C\text{уст}}$.

4. Линеаризуем участок характеристики НЭ и определяем его условно линейные параметры:

$$C_H = \frac{q_{\text{уст}} - q(0_+)}{u_{C\text{уст}} - u_C(0_+)} = \dots \Phi.$$

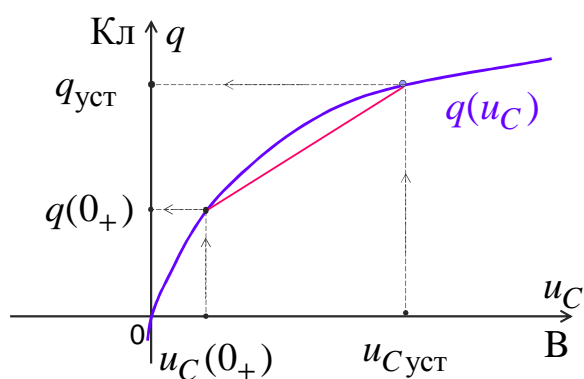


Рис. 148

В результате при $t > 0$ получим схему (рис. 149).

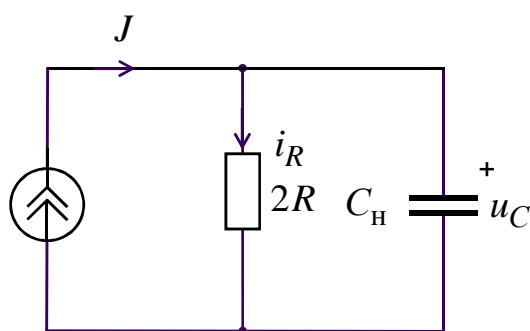


Рис. 149

5. Определяем корень характеристического уравнения p через входное сопротивление $Z(p) = 0$ в схеме после коммутации:

$$Z(p) = 2R + \frac{1}{pC_H} = 0; \quad p = -\frac{1}{2RC_H} = \dots \frac{1}{c}.$$

6. Определяем постоянную интегрирования из начальных условий
 $A = i_R(0_+) - i_{R_{уст}} = -J/2$.

7. Записываем окончательное решение:

$$i_R(t) \approx i_{R_{уст}} + A \cdot e^{-t/2RC_H} = J - \frac{J}{2} \cdot e^{-t/2RC_H}, A.$$

Метод последовательных интервалов

Является приближенным численным методом, заключающимся в замене нелинейных дифференциальных уравнений алгебраическими уравнениями, содержащими конечные приращения исследуемых величин за малые интервалы времени:

а) нелинейные элементы: $u_L = \frac{d\Psi}{dt} \approx \frac{\Delta\Psi}{\Delta t}$, $i_C = \frac{dq}{dt} \approx \frac{\Delta q}{\Delta t}$;

б) линейные элементы: $u_L = L \frac{di_L}{dt} \approx L \cdot \frac{\Delta i_L}{\Delta t}$, $i_C = C \frac{du_C}{dt} \approx C \frac{\Delta u_C}{\Delta t}$.

Пример

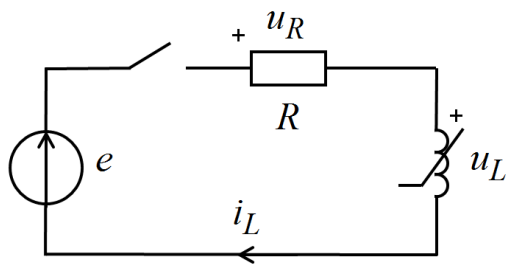


Рис. 150

Дано:

$$e = E_m \cdot \sin(\omega t + \alpha), \text{ В};$$

$$R = \dots \text{ Ом};$$

$$C = 100 \text{ мкФ};$$

$\Psi(i_L)$ – ВбАХ нелинейного индуктивного элемента.

Определить: $i_L(t)$

По второму закону Кирхгофа $e = u_R + u_L = R \cdot i_L + \frac{d\Psi}{dt}$.

Тогда $E_m \cdot \sin(\omega t_k + \alpha) \approx R \cdot i_L^{(k)} + \frac{\Delta\Psi^{(k)}}{\Delta t}$;

$$\Delta\Psi^{(k)} = [E_m \cdot \sin(\omega t_k + \alpha) - R \cdot i_L^{(k)}] \cdot \Delta t,$$

при этом $\Psi^{(k+1)} = \Psi^{(k)} + \Delta\Psi^{(k)}$, $t_k = k \cdot \Delta t$, $k = 0, 1, 2, 3 \dots$

Начальные условия $k = 0$,

$$i_L(0) = i_L^{(0)} = 0, \quad \Psi_L(0) = \Psi^{(0)} = 0,$$

причём $\Delta t \ll T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Расчет удобно вести, заполняя следующую таблицу:

| k | t_k | $\Psi^{(k)}$ | $i_L^{(k)}$ | $\Delta\Psi^{(k)}$ | $\Psi^{(k+1)}$ | $i_L^{(k+1)}$ по $\Psi(i_L)$ |
|-----|--------------------|--------------|-------------|--------------------|----------------|------------------------------|
| – | с | Вб | А | Вб | Вб | А |
| 0 | 0 | $\Psi^{(0)}$ | $i_L^{(0)}$ | $\Delta\Psi^{(0)}$ | $\Psi^{(1)}$ | $i_L^{(1)}$ |
| 1 | Δt | $\Psi^{(1)}$ | $i_L^{(1)}$ | $\Delta\Psi^{(1)}$ | $\Psi^{(2)}$ | $i_L^{(2)}$ |
| 2 | $2 \cdot \Delta t$ | $\Psi^{(2)}$ | $i_L^{(2)}$ | $\Delta\Psi^{(2)}$ | $\Psi^{(3)}$ | $i_L^{(3)}$ |

Ток $i_L^{(k+1)}$ определяется графически.

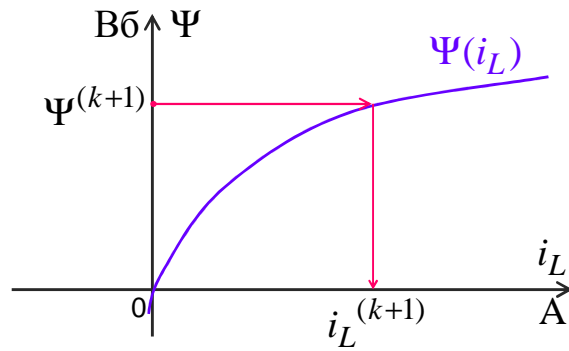


Рис. 151

По результатам расчета строим график $i_L(t)$:

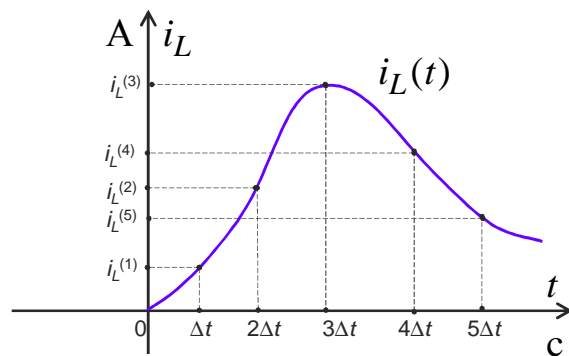


Рис. 152

Недостаток метода – постепенное накопление ошибки при переходе от одного интервала к другому интервалу времени Δt .

3. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Электрические цепи с распределенными параметрами – это такие цепи, длина которых соизмерима с длиной электромагнитной волны и напряжения и токи изменяются вдоль этих цепей.

Примерами цепей с распределенными параметрами являются:

а) двухпроводная линия (связи);

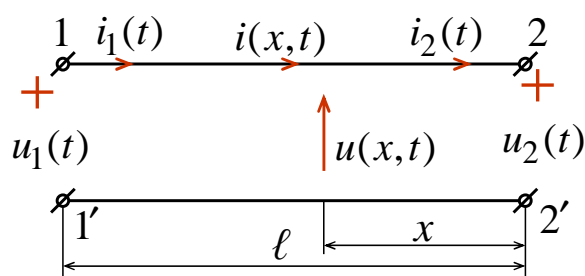


Рис. 153

б) трехфазная транспонированная линия (электропередачи).

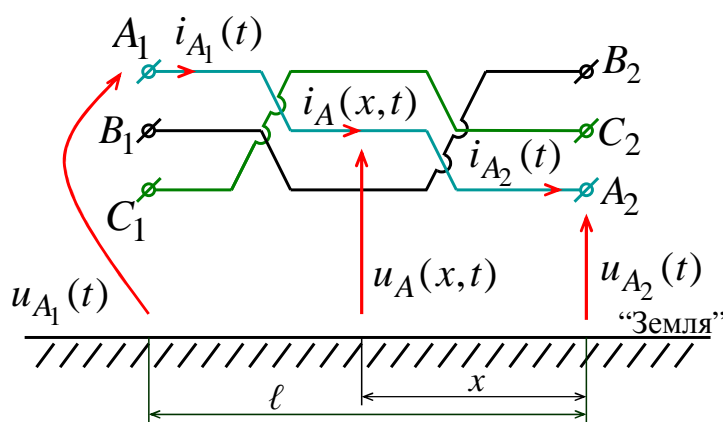


Рис. 154

Изменение напряжения и тока вдоль линии в функции x обусловлено наличием продольных сопротивлений и поперечных проводимостей. Линии, у которых напряжения и токи заметно изменяются вдоль их длины, называются длинными линиями.

Для линий электропередачи при $\omega = 314$ рад/с такое изменение заметно при $\ell > 300$ км.

Бесконечно малый участок dx двухпроводной линии или трехфазной линии на одну фазу (в симметричном режиме) может быть представлен так.

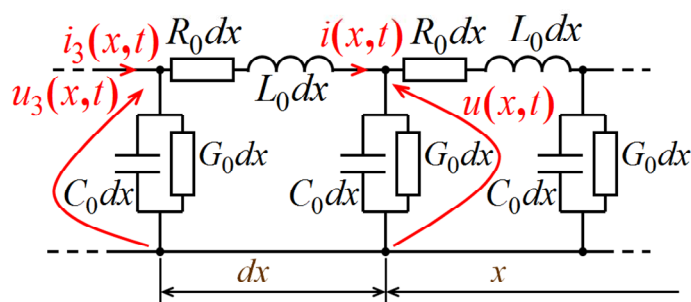


Рис. 155

здесь $i_3(x,t) = i(x,t) + \frac{\partial i(x,t)}{\partial x} dx$; $u_3(x,t) = u(x,t) + \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} dx$; R_0 (Ом/м), L_0 (Гн/м); G_0 (См/м); C_0 (Ф/м) – первичные (удельные) параметры линий.

Ограничимся рассмотрением однородных линий, у которых первичные параметры постоянны. Для бесконечно малого участка линии длиной dx , по законам Кирхгофа, получаем основные уравнения в частных производных:

$$\begin{cases} \pm \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = R_0 \cdot i(x,t) + L_0 \cdot \frac{\partial i(x,t)}{\partial t}; \\ \pm \frac{\partial i(x,t)}{\partial x} = G_0 \cdot u(x,t) + C_0 \cdot \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, \end{cases} \quad (3.1)$$

знак «+» – при отсчете x от конца линии;

знак «-» – при отсчете x от начала линии.

Решение уравнений (3.1), при определенных начальных ($t = 0$) и граничных условиях ($x = 0, x = \ell$), позволяет определить $u(x,t)$ и $i(x,t)$.

3.1. Установившийся гармонический режим однородной линии

При напряжении $u_2(t) = \sqrt{2} \cdot U_2 \cdot \sin(\omega t + \psi_{U_2})$ имеем

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sqrt{2} \cdot U(x) \cdot \sin[\omega t + \psi_U(x)]; \\ i(x,t) &= \sqrt{2} \cdot I(x) \cdot \sin[\omega t + \psi_I(x)]. \end{aligned}$$

Тогда для комплексов действующих значений

$$\begin{aligned}\dot{U}(x) &= U(x) \cdot e^{j\Psi_U(x)}; \\ \dot{I}(x) &= I(x) \cdot e^{j\Psi_I(x)}.\end{aligned}$$

Из уравнений (3.1) получаем

$$\begin{cases} \frac{d\dot{U}(x)}{dx} = \underline{Z}_0 \cdot \dot{I}(x); \\ \frac{d\dot{I}(x)}{dx} = \underline{Y}_0 \cdot \dot{U}(x), \end{cases} \quad (3.2)$$

где $\underline{Z}_0 = R_0 + j\omega L_0$ (Ом/м) – комплекс продольного сопротивления линии на единицу длины;

$\underline{Y}_0 = G_0 + j\omega C_0$ (См/м) – комплекс продольного сопротивления линии на единицу длины.

Решением уравнений (3.2), при отсчете x от конца линии, будут следующие комплексы действующих значений:

а) напряжения

$$\dot{U}(x) = \dot{A}_1 \cdot e^{\underline{\gamma}x} + \dot{A}_2 \cdot e^{-\underline{\gamma}x} = \dot{U}_2 \cdot \text{ch } \underline{\gamma}x + \underline{Z}_B \cdot \dot{I}_2 \cdot \text{sh } \underline{\gamma}x; \quad (3.3)$$

б) тока

$$\dot{I}(x) = \frac{\dot{A}_1}{\underline{Z}_B} \cdot e^{\underline{\gamma}x} - \frac{\dot{A}_2}{\underline{Z}_B} \cdot e^{-\underline{\gamma}x} = \frac{\dot{U}_2}{\underline{Z}_B} \cdot \text{sh } \underline{\gamma}x + \dot{I}_2 \cdot \text{ch } \underline{\gamma}x, \quad (3.4)$$

где $\dot{A}_1 = A_1 \cdot e^{j\Psi_1} = \frac{\dot{U}_2 + \underline{Z}_B \cdot \dot{I}_2}{2}$ (В);

$\dot{A}_2 = A_2 \cdot e^{j\Psi_2} = \frac{\dot{U}_2 - \underline{Z}_B \cdot \dot{I}_2}{2}$ (В) – постоянные интегрирования;

$\underline{Z}_B = Z_B \cdot e^{j\varphi_B} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Y}_0}}$ (Ом) – волновое сопротивление;

$\underline{\gamma} = \alpha + j\beta = \sqrt{\underline{Z}_0 \cdot \underline{Y}_0}$ (1/м) – постоянная распространения (передачи);

α (Нп/м) – коэффициент затухания (ослабления);

β (рад/м) – коэффициент фазы;

$\dot{U}_2 = U_2 \cdot e^{j\Psi_{U_2}}$, $\dot{I}_2 = I_2 \cdot e^{j\Psi_{I_2}}$ – комплексы действующих значений напряжения и тока в конце линии.

Напряжение и ток в линии можно рассматривать как сумму падающей (прямой) и отраженной (обратной) волн:

$$\begin{cases} \dot{U}(x) = \dot{U}_{\text{п}}(x) + \dot{U}_{\text{отр}}(x); \\ \dot{I}(x) = \dot{I}_{\text{п}}(x) + \dot{I}_{\text{отр}}(x), \end{cases} \quad (3.5)$$

где $\dot{U}_{\text{п}}(x) = \dot{A}_1 \cdot e^{-\gamma x}$, $\dot{I}_{\text{п}}(x) = \frac{\dot{U}_{\text{п}}(x)}{Z_{\text{В}}}$ – комплексы действующих значений падающих волн напряжения и тока;

$$\dot{U}_{\text{отр}}(x) = \dot{A}_2 \cdot e^{-\gamma x}, \quad \dot{I}_{\text{отр}}(x) = -\frac{\dot{U}_{\text{отр}}(x)}{Z_{\text{В}}} \text{ – комплексы действующих}$$

значений отраженных волн напряжения и тока.

При изменении x от 0 до ℓ по формулам (3.3) и (3.4) можно рассчитать

$$\dot{U}(x) = U(x) \cdot e^{j\psi_U(x)};$$

$$\dot{I}(x) = I(x) \cdot e^{j\psi_I(x)}$$

и определить активную мощность

$$P(x) = U(x) \cdot I(x) \cdot \cos[\psi_U(x) - \psi_I(x)], \text{ Вт,}$$

которая монотонно возрастает к началу линии.

Графики зависимостей $U(x)$, $I(x)$, $P(x)$ и КПД $\eta = \frac{P_2}{P_1} < 1$ используются для анализа установившегося режима линий.

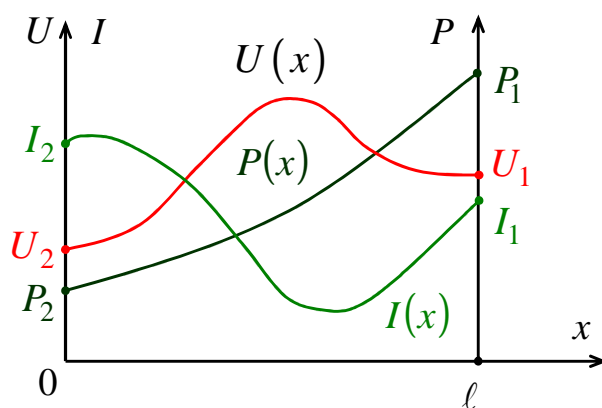


Рис. 156

Примечания:

$$\operatorname{sh} \underline{\gamma}x = \frac{e^{\underline{\gamma}x} - e^{-\underline{\gamma}x}}{2} = B_1 \cdot e^{j\lambda_1}; \quad \operatorname{ch} \underline{\gamma}x = \frac{e^{\underline{\gamma}x} + e^{-\underline{\gamma}x}}{2} = B_2 \cdot e^{j\lambda_2} \sqrt{2};$$

$$e^{\underline{\gamma}x} = e^{(\alpha + j\beta)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{j\beta x} = B_3 e^{j\lambda_3}, \quad B_3 = e^{\alpha x}, \quad \lambda_3 = \frac{\beta x \cdot 180}{\pi}, \text{ град};$$

$$e^{-\underline{\gamma}x} = e^{-(\alpha + j\beta)x} = e^{-\alpha x} \cdot e^{-j\beta x} = B_4 e^{j\lambda_4}, \quad B_4 = 1/B_3, \quad \lambda_4 = -\lambda_3.$$

При постоянных напряжениях и токах ($\omega = 0$) имеем

$$\underline{Z}_B = Z_B = \sqrt{\frac{R_0}{G_0}}; \quad \underline{\gamma} = \alpha = \sqrt{R_0 \cdot G_0};$$

$$\dot{U}(x) = U(x), \quad \dot{I}(x) = I(x), \quad P(x) = U(x) \cdot I(x).$$

3.2. Бегущие волны

При $\dot{A}_1 = A_1 \cdot e^{j\psi_1}$, $\dot{A}_2 = A_2 \cdot e^{j\psi_2}$, $\underline{Z}_B = Z_B \cdot e^{j\phi_B}$, $\underline{\gamma} = \alpha + j\beta$ получаем мгновенные значения:

а) напряжения –

$$\begin{aligned} u(x, t) &= u_{\text{п}}(x, t) + u_{\text{отр}}(x, t) = \\ &= \sqrt{2} \cdot A_1 \cdot e^{\alpha x} \cdot \sin(\omega t + \psi_1 + \beta x) + \\ &+ \sqrt{2} \cdot A_2 \cdot e^{-\alpha x} \cdot \sin(\omega t + \psi_2 - \beta x); \end{aligned}$$

б) тока –

$$\begin{aligned} i(x, t) &= i_{\text{п}}(x, t) + i_{\text{отр}}(x, t) = \\ &= \sqrt{2} \cdot \frac{A_1}{Z_B} \cdot e^{\alpha x} \cdot \sin(\omega t + \psi_1 - \phi_B + \beta x) - \\ &- \sqrt{2} \cdot \frac{A_2}{Z_B} \cdot e^{-\alpha x} \cdot \sin(\omega t + \psi_2 - \phi_B - \beta x). \end{aligned}$$

Падающие и отраженные волны можно рассматривать как бегущие волны, затухающие в направлении своего движения.

1. Падающую волну напряжения

$$u_{\text{п}}(x, t) = \sqrt{2} \cdot A_1 \cdot e^{\alpha x} \cdot \sin(\omega t + \psi_1 + \beta x)$$

рассчитываем для трех моментов времени: $t_1 < t_2 < t_3$.

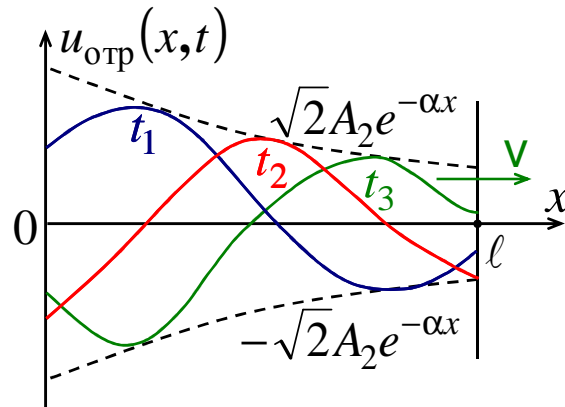


Рис. 157

Падающая волна $u_{\text{п}}(x,t)$, постепенно затухая, движется от начала линии к ее концу с некоторой скоростью v .

2. Отраженную волну напряжения

$$u_{\text{отр}}(x,t) = \sqrt{2} \cdot A_2 \cdot e^{-\alpha x} \sin(\omega t + \psi_2 - \beta x)$$

рассчитываем для трех моментов времени: $t_1 < t_2 < t_3$.

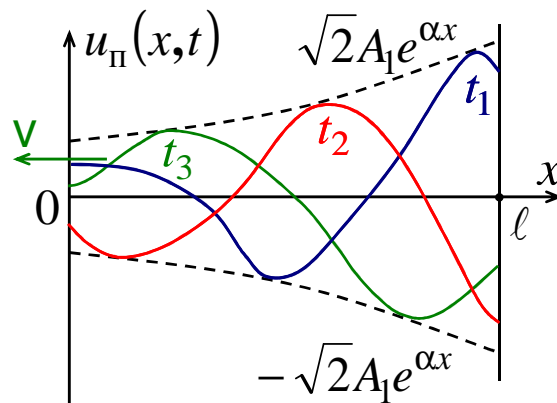


Рис. 158

Аналогично можно сказать о падающей и отраженной волнах тока. При этом скорость v является **фазовой скоростью** – это скорость перемещения значений волн, фаза которых остается неизменной. Так, если для падающей волны напряжения фаза постоянна, т.е.

$$\omega t + \psi_1 + \beta x = \text{const},$$

тогда $\omega + \beta \frac{dx}{dt} = 0$ или $v = -\frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{\beta}$, м/с.

Длина волны λ – это расстояние между ближайшими точками линии, в которых фазы напряжения или тока отличаются на 2π .
Так, для падающей волны напряжения

$$[\omega t + \psi_1 + \beta(x + \lambda)] - [\omega t + \psi_1 + \beta x] = 2\pi,$$

тогда $\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$, причем $v \leq 3 \cdot 10^5$ км/с и при $\omega = 314$ 1/с имеем $\lambda = 6000$ км.

3.3. Режимы однородной линии при гармонических напряжениях и токах

Проанализируем режимы работы для комплексов действующих значений напряжений и токов.

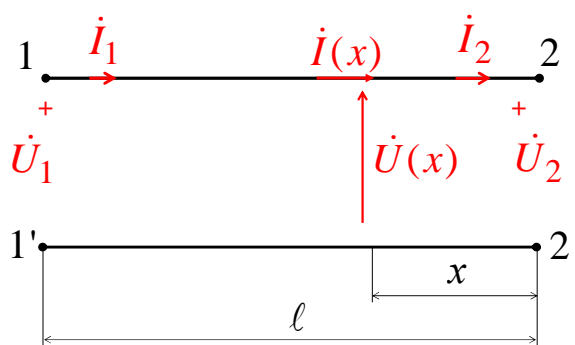


Рис. 159

1. Напряжение

$$\begin{aligned} \dot{U}(x) &= \dot{U}_{\text{п}}(x) + \dot{U}_{\text{отр}}(x) = \dot{A}_1 \cdot e^{\underline{\gamma} \cdot x} + \dot{A}_2 \cdot e^{-\underline{\gamma} \cdot x} = \\ &= \dot{U}_2 \cdot \text{ch} \underline{\gamma} x + \underline{Z}_B \cdot \dot{I}_2 \cdot \text{sh} \underline{\gamma} x. \end{aligned}$$

2. Ток

$$\begin{aligned} \dot{I}(x) &= \dot{I}_{\text{п}}(x) + \dot{I}_{\text{отр}}(x) = \frac{\dot{A}_1}{\underline{Z}_B} \cdot e^{\underline{\gamma} \cdot x} - \frac{\dot{A}_2}{\underline{Z}_B} \cdot e^{-\underline{\gamma} \cdot x} = \\ &= \frac{\dot{U}_2}{\underline{Z}_B} \cdot \text{sh} \underline{\gamma} x + \dot{I}_2 \cdot \text{ch} \underline{\gamma} x. \end{aligned}$$

3. Входное сопротивление

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \underline{Z}_B \cdot \frac{(\underline{Z}_H + \underline{Z}_B \cdot \text{th} \underline{\gamma} \ell)}{(\underline{Z}_B + \underline{Z}_H \cdot \text{th} \underline{\gamma} \ell)},$$

где $\underline{Z}_H = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2}$ – сопротивление нагрузки; $\text{th}\underline{\gamma}l = \frac{\text{sh}\underline{\gamma}l}{\text{ch}\underline{\gamma}l}$ – гиперболический тангенс.

4. Коэффициент отражения волн от нагрузки ($x = 0$):

а) для напряжения $\underline{K}_U = \frac{\dot{U}_{\text{отр}}(0)}{\dot{U}_{\text{п}}(0)} = \frac{\dot{A}_2}{\dot{A}_1}$;

б) для тока $\underline{K}_I = \frac{\dot{I}_{\text{отр}}(0)}{\dot{I}_{\text{п}}(0)} = -\frac{\dot{A}_2}{\dot{A}_1}$,

где $\dot{A}_1 = \frac{\dot{U}_2 + \underline{Z}_B \cdot \dot{I}_2}{2}$; $\dot{A}_2 = \frac{\dot{U}_2 - \underline{Z}_B \cdot \dot{I}_2}{2}$; $\underline{K}_U = -\underline{K}_I = \frac{\underline{Z}_H - \underline{Z}_B}{\underline{Z}_H + \underline{Z}_B}$.

• **Режим согласованной нагрузки**, когда $\underline{Z}_H = \underline{Z}_B = Z_B \cdot e^{j\varphi_B}$.

Входное сопротивление $\underline{Z}_{\text{вх}}^{(c)} = \underline{Z}_B$.

Коэффициенты отражения $\underline{K}_U = -\underline{K}_I = 0$;

$$\dot{A}_1 = \dot{U}_2 = U_2 \cdot e^{j\Psi_{U_2}}, \quad \dot{A}_2 = 0;$$

$$\begin{cases} \dot{U}(x) = \dot{U}_2 \cdot e^{\underline{\gamma}x}; \\ \dot{I}(x) = \dot{I}_2 \cdot e^{\underline{\gamma}x}. \end{cases}$$

При $\dot{I}_2 = \dot{U}_2 / \underline{Z}_B$ мгновенные значения:

а) напряжения $u(x,t) = u_{\text{п}}(x,t) = \sqrt{2}U_2 e^{\alpha \cdot x} \sin(\omega t + \beta x + \Psi_{U_2})$;

б) тока $i(x,t) = i_{\text{п}}(x,t) = \sqrt{2} \frac{U_2}{Z_B} e^{\alpha \cdot x} \sin(\omega t + \beta x + \Psi_{U_2} - \varphi_B)$.

В любой точке линии $\frac{\dot{U}(x)}{\dot{I}(x)} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} = \underline{Z}_B$.

Активные мощности $P_1 = U_1 I_1 \cos \varphi_1 = U_1 I_1 \cos \varphi_B$, Вт;

$$P_2 = U_2 I_2 \cos \varphi_2 = U_2 I_2 \cos \varphi_B;$$

КПД $\eta = \frac{P_2}{P_1} = e^{-2\alpha \cdot l} < 1$.

Так как $\dot{U}(x) = U(x) \cdot e^{j\Psi_U(x)} = \dot{U}_2 \cdot e^{\underline{\gamma}x} = U_2 \cdot e^{j\Psi_{U_2}} \cdot e^{\alpha \cdot x} \cdot e^{j\beta x}$, то коэффициент затухания $\alpha = \frac{1}{x} \cdot \ln \frac{U(x)}{U_2}$ ($\frac{\text{Нп}}{\text{км}}$) в режиме согласованной нагрузки характеризует изменение величины напряжения или тока на

единице длины линии, при этом коэффициент фазы $\beta = \frac{\Psi_U(x) - \Psi_{U_2}}{x}$ (рад/км) в режиме согласованной нагрузки характеризует изменение фазы напряжения или тока на единице длины линии.

• **Режим холостого хода**, когда $\underline{Z}_H = \infty$ и $\dot{I}_2 = 0$.

Входное сопротивление $\underline{Z}_{\text{ВХ}}^{(\text{ХХ})} = \underline{Z}_B \cdot \text{cth} \gamma \ell$.

Коэффициент отражения $\underline{K}_U = -\underline{K}_I = 1$.

Падающие и отраженные волны напряжения в конце линии равны между собой.

При $\dot{A}_1 = \dot{A}_2 = \dot{U}_2 / 2$ получаем

$$\begin{cases} \dot{U}(x) = \frac{\dot{U}_2}{2} \cdot e^{\gamma x} + \frac{\dot{U}_2}{2} \cdot e^{-\gamma x} = \dot{U}_2 \cdot \text{ch} \gamma x; \\ \dot{I}(x) = \frac{\dot{U}_2}{2\underline{Z}_B} \cdot e^{\gamma x} - \frac{\dot{U}_2}{2\underline{Z}_B} \cdot e^{-\gamma x} = \frac{\dot{U}_2}{\underline{Z}_B} \cdot \text{sh} \gamma x. \end{cases}$$

Мгновенные значения:

а) напряжения –

$$\begin{aligned} u(x,t) &= u_{\text{п}}(x,t) + u_{\text{отп}}(x,t) = \\ &= \frac{\sqrt{2}U_2}{2} \cdot e^{\alpha x} \cdot \sin(\omega t + \beta x + \Psi_{U_2}) + \\ &+ \frac{\sqrt{2}U_2}{2} \cdot e^{-\alpha x} \cdot \sin(\omega t - \beta x + \Psi_{U_2}). \end{aligned}$$

б) тока –

$$\begin{aligned} i(x,t) &= i_{\text{п}}(x,t) + i_{\text{отп}}(x,t) = \\ &= \frac{\sqrt{2}U_2}{2\underline{Z}_B} \cdot e^{\alpha x} \cdot \sin(\omega t + \beta x + \Psi_{U_2} - \varphi_B) - \\ &- \frac{\sqrt{2}U_2}{2\underline{Z}_B} \cdot e^{-\alpha x} \cdot \sin(\omega t - \beta x + \Psi_{U_2} - \varphi_B); \end{aligned}$$

• **Режим короткого замыкания**, когда $\underline{Z}_H = 0$, $\dot{U}_2 = 0$.

Входное сопротивление $\underline{Z}_{\text{BX}}^{(\text{кз})} = \underline{Z}_B \cdot \text{th} \underline{\gamma} \ell$.

Коэффициент отражения $\underline{K}_U = -\underline{K}_I = -1$.

Падающие и отраженные волны тока в конце линии равны между собой.

При $\dot{A}_1 = \dot{I}_2 \cdot \underline{Z}_B / 2 = -\dot{A}_2$ получаем

$$\begin{cases} \dot{U}(x) = \frac{\underline{Z}_B \dot{I}_2}{2} \cdot e^{\underline{\gamma} x} - \frac{\underline{Z}_B \dot{I}_2}{2} \cdot e^{-\underline{\gamma} x} = \underline{Z}_B \dot{I}_2 \cdot \text{sh} \underline{\gamma} x; \\ \dot{I}(x) = \frac{\dot{I}_2}{2} \cdot e^{\underline{\gamma} x} + \frac{\dot{I}_2}{2} \cdot e^{-\underline{\gamma} x} = \dot{I}_2 \cdot \text{ch} \underline{\gamma} x. \end{cases}$$

Мгновенные значения:

а) напряжения –

$$\begin{aligned} u(x, t) &= u_{\text{п}}(x, t) + u_{\text{отр}}(x, t) = \\ &= \frac{\sqrt{2} \underline{Z}_B \dot{I}_2}{2} \cdot e^{\alpha x} \cdot \sin(\omega t + \beta x + \Psi_{I_2} + \varphi_B) - \\ &- \frac{\sqrt{2} \underline{Z}_B \dot{I}_2}{2} \cdot e^{-\alpha x} \cdot \sin(\omega t - \beta x + \Psi_{I_2} + \varphi_B); \end{aligned}$$

б) тока –

$$\begin{aligned} i(x, t) &= i_{\text{п}}(x, t) + i_{\text{отр}}(x, t) = \\ &= \frac{\sqrt{2} \dot{I}_2}{2} \cdot e^{\alpha x} \cdot \sin(\omega t + \beta x + \Psi_{I_2}) + \\ &+ \frac{\sqrt{2} \dot{I}_2}{2} \cdot e^{-\alpha x} \cdot \sin(\omega t - \beta x + \Psi_{I_2}). \end{aligned}$$

Режимы холостого хода и короткого замыкания могут использоваться для экспериментального определения \underline{Z}_B и $\underline{\gamma} = \alpha + j\beta$:

а) режим холостого хода (ключ разомкнут)

$$\underline{Z}_{\text{BX}}^{(\text{хх})} = \frac{U_{\text{V}}^{(\text{хх})}}{I_{\text{A}}^{(\text{хх})}} \cdot e^{j\varphi_{\text{хх}}}, \text{ Ом};$$

б) режим короткого замыкания (ключ замкнут)

$$\underline{Z}_{\text{BX}}^{(\text{КЗ})} = \frac{U_{\text{В}}^{(\text{КЗ})}}{I_{\text{А}}^{(\text{КЗ})}} \cdot e^{j\varphi_{\text{КЗ}}}, \text{ Ом};$$

в) расчет волнового сопротивления

$$\underline{Z}_{\text{В}} = Z_{\text{В}} \cdot e^{j\varphi_{\text{В}}} = \sqrt{\underline{Z}_{\text{BX}}^{(\text{XX})} \cdot \underline{Z}_{\text{BX}}^{(\text{КЗ})}};$$

г) расчет постоянной распространения

$$\underline{\gamma} = \frac{1}{2\ell} \cdot \ln \left[\frac{1 + \sqrt{\underline{Z}_{\text{BX}}^{(\text{КЗ})} / \underline{Z}_{\text{BX}}^{(\text{XX})}}}{1 - \sqrt{\underline{Z}_{\text{BX}}^{(\text{КЗ})} / \underline{Z}_{\text{BX}}^{(\text{XX})}}} \right] + j \frac{k\pi}{\ell} \left(\frac{1}{\text{км}} \right),$$

где $k = 0$ при $\ell < \lambda$; $k = 1$ при $\lambda < \ell < 2\lambda$ и т.д.

3.4. Однородная линия без искажений

Однородная линия без искажений – это линия связи, у которой формы кривых напряжения (тока) в начале и конце линии одинаковы.

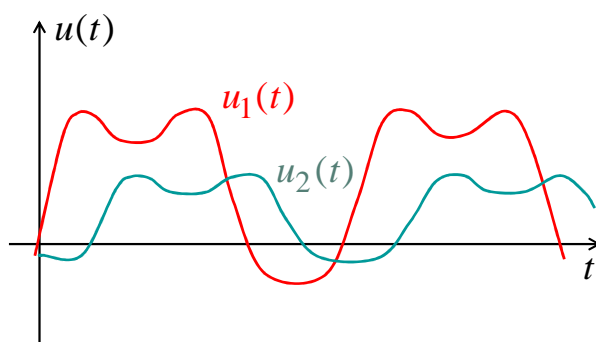


Рис. 160

Для этого необходимо, чтобы α и ν не зависели от ω . Условие не искажения формы кривых напряжения (тока)

$$\frac{R_0}{L_0} = \frac{G_0}{C_0} = K_0; \quad (3.6)$$

$$\underline{Z}_0 = R_0 + j\omega L_0 = L_0(K_0 + j\omega), \text{ Ом/км};$$

$$\underline{Y}_0 = G_0 + j\omega C_0 = C_0(K_0 + j\omega), \text{ См/км};$$

тогда
$$\underline{\gamma} = \sqrt{\underline{Z}_0 \cdot \underline{Y}_0} = \sqrt{L_0 C_0} (K_0 + j\omega), \frac{1}{\text{км}},$$

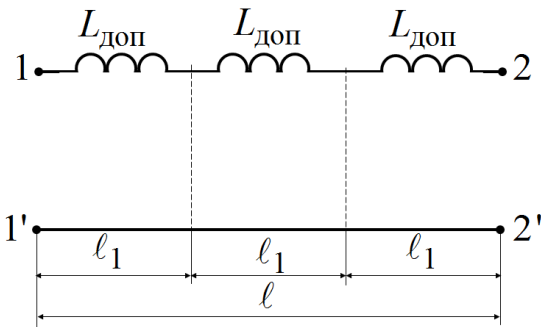
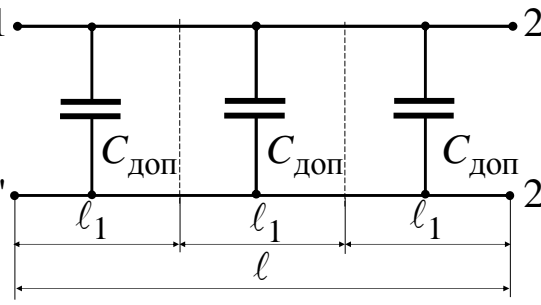
т. е

$$\alpha = K_0 \cdot \sqrt{L_0 C_0}, \quad \beta = \omega \cdot \sqrt{L_0 C_0}.$$

Фазовая скорость
$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}, \quad \text{км/с}.$$

Волновое сопротивление
$$\underline{Z}_B = \sqrt{\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Y}_0}} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = Z_B, \quad \text{Ом}.$$

Если условие (3.6) не выполняется, то используют дополнительные катушки и конденсаторы

| | |
|--|--|
|  <p style="text-align: center;">Рис. 161</p> | $L_{\text{доп}} = \left(\frac{R_0}{K_0} - L_0 \right) \cdot \ell_1, \quad \text{Гн};$ $K_0 = \frac{G_0}{C_0}$ |
|  <p style="text-align: center;">Рис. 162</p> | $C_{\text{доп}} = \left(\frac{G_0}{K_0} - C_0 \right) \cdot \ell_1, \quad \text{Ф};$ $K_0 = \frac{R_0}{L_0}$ |

3.5. Однородная линия без потерь при гармонических напряжениях и токах

Линией без потерь считается линия, у которой $R_0 \ll L_0$ и $G_0 \ll C_0$, поэтому $R_0 \approx 0$, $G_0 \approx 0$.

Тогда $\underline{Z}_0 = j\omega L_0$, $\underline{Y}_0 = j\omega C_0$,

$$\underline{Z}_B = Z_B = \sqrt{\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Y}_0}} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}, \quad \underline{\gamma} = \sqrt{\underline{Z}_0 \underline{Y}_0} = j\omega \sqrt{L_0 C_0};$$

$$\alpha = 0, \quad \beta = \omega \sqrt{L_0 C_0}, \quad \lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\omega \sqrt{L_0 C_0}}.$$

Амплитуды падающей и отраженной волн напряжения и тока вдоль линии меняться не будут ($\alpha = 0$).

Будет изменяться фаза напряжения и тока вдоль линии ($\beta \neq 0$).

Поскольку α и v не зависят от ω , то линия без потерь является линией без искажений.

Так как $\operatorname{ch} \underline{\gamma}x = \operatorname{ch} (j\beta x) = \cos \beta x$, $\operatorname{sh} \underline{\gamma}x = \operatorname{sh} (j\beta x) = j \sin \beta x$, тогда основные уравнения однородной линии без потерь при отсчете x от конца линии будут следующими:

$$\begin{cases} \underline{U}(x) = \underline{U}_2 \cdot \cos \beta x + jZ_B \cdot \underline{I}_2 \cdot \sin \beta x; \\ \underline{I}(x) = j \cdot \frac{\underline{U}_2}{Z_B} \cdot \sin \beta x + \underline{I}_2 \cdot \cos \beta x. \end{cases}$$

Если $\dot{U}_2 = U_2 \cdot e^{j\psi_{U_2}}$ и $\dot{I}_2 = I_2 \cdot e^{j\psi_{I_2}}$, то мгновенные значения будут следующими:

а) напряжения –

$$\begin{aligned} u(x,t) = & \sqrt{2} \cdot U_2 \cdot \cos \beta x \cdot \sin(\omega t + \psi_{U_2}) + \\ & + \sqrt{2} \cdot I_2 \cdot Z_B \cdot \sin \beta x \cdot \sin(\omega t + \psi_{I_2} + 90^\circ); \end{aligned}$$

б) тока –

$$\begin{aligned} i(x,t) = & \sqrt{2} \cdot \frac{U_2}{Z_B} \cdot \sin \beta x \cdot \sin(\omega t + \psi_{U_2} + 90^\circ) + \\ & + \sqrt{2} \cdot I_2 \cdot \cos \beta x \cdot \sin(\omega t + \psi_{I_2}). \end{aligned}$$

Для любого момента времени распределение напряжения и тока вдоль линии в функции x является гармоническим:

а) $t = t_1$

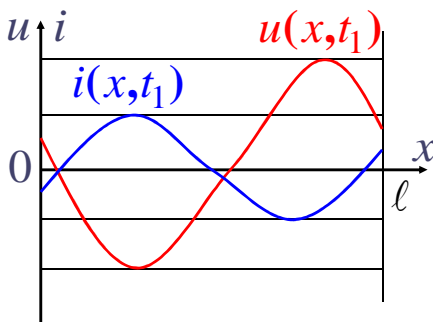


Рис. 163

б) $t = t_2$

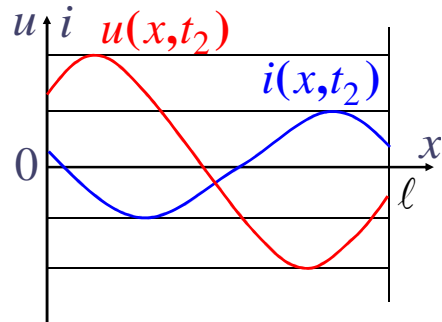


Рис. 164

Комплекс входного сопротивления линии

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = Z_B \cdot \frac{\underline{Z}_H + j \cdot Z_B \cdot \operatorname{tg} \beta l}{Z_B + j \cdot \underline{Z}_H \cdot \operatorname{tg} \beta l},$$

где $\underline{Z}_H = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2}$ – сопротивление нагрузки.

3.6. Режимы однородной линии без потерь

Проанализируем режимы однородной линии без потерь для комплексов действующих значений напряжений и токов с использованием основных уравнений.

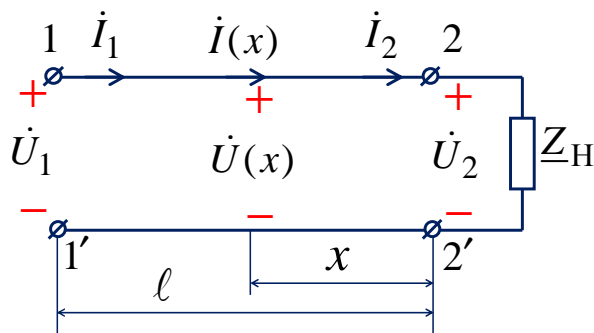


Рис. 165

- **Режим холостого хода**, когда $Z_H = \infty$ и $I_2 = 0$:

$$\begin{cases} \dot{U}(x) = \dot{U}_2 \cdot \cos \beta x; \\ \dot{I}(x) = j \cdot \frac{\dot{U}_2}{Z_B} \cdot \sin \beta x. \end{cases}$$

Входное сопротивление $Z_{\text{ВХ}}^{(\text{ХХ})} = -j \cdot Z_B \cdot \text{ctg} \beta \ell$, в линии стоячие – волны напряжения и тока.

Стоячие волны – это результат наложения падающих и отраженных волн с одинаковой амплитудой. При стоячих волнах активная мощность в любой точке линии равна нулю. При стоячих волнах пучности и узлы неподвижны и сдвинуты друг относительно друга на $\lambda/4$.

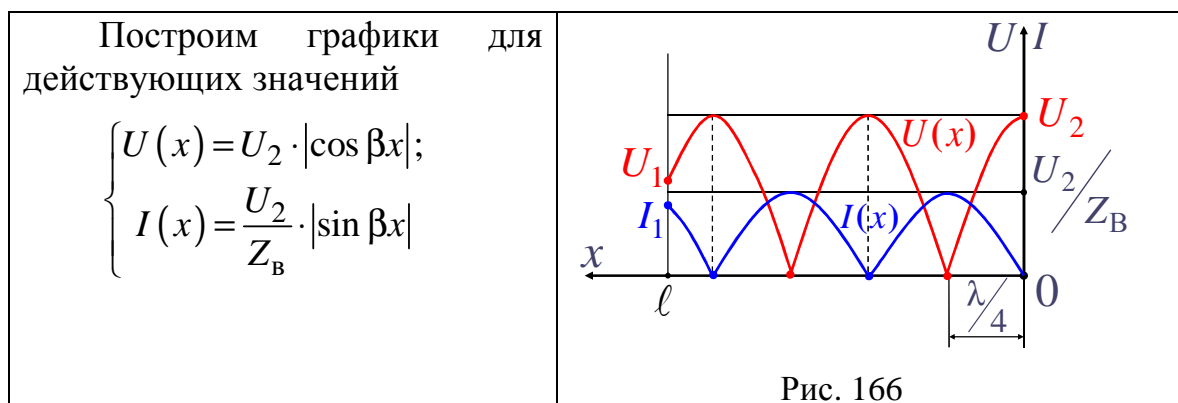
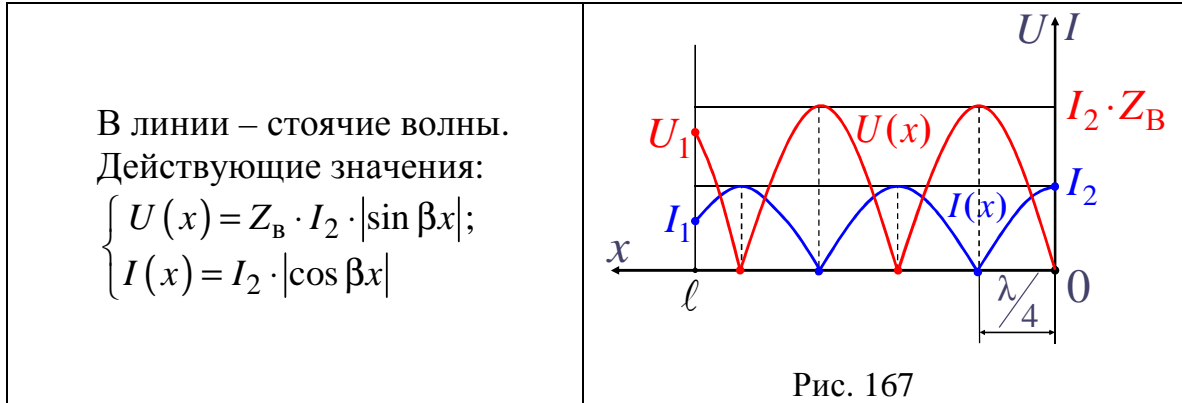


Рис. 166

- **Режим короткого замыкания**, когда $\underline{Z}_H = 0$, $\dot{U}_2 = 0$:

$$\begin{cases} \dot{U}(x) = j \cdot Z_B \cdot \dot{I}_2 \cdot \sin \beta x; \\ \dot{I}(x) = \dot{I}_2 \cdot \cos \beta x. \end{cases}$$

Входное сопротивление $\underline{Z}_{\text{BX}}^{(\text{кз})} = j \cdot Z_B \cdot \text{tg} \beta l$.

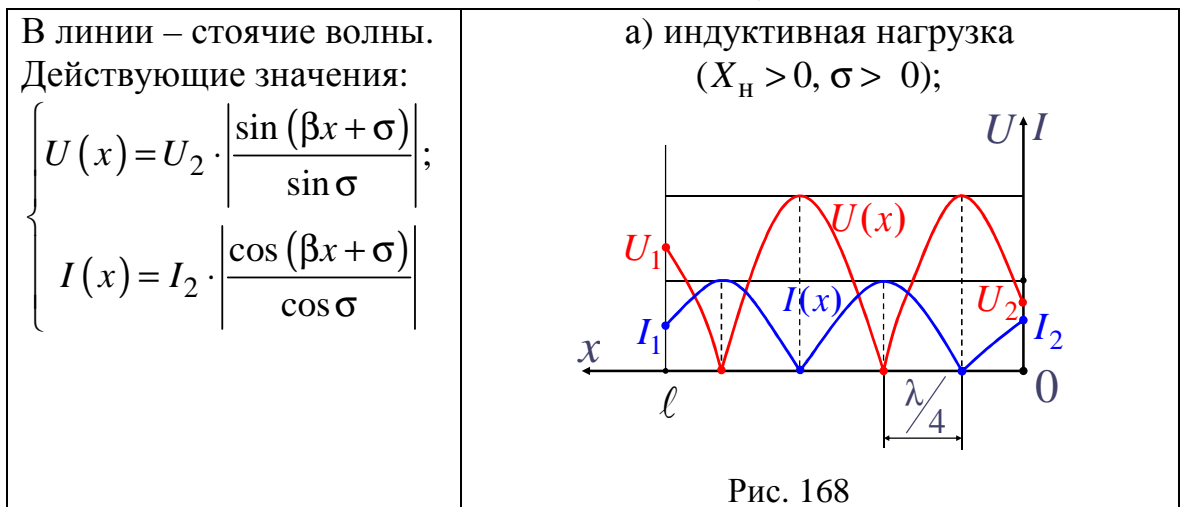


- **Режим реактивной нагрузки**, когда $\underline{Z}_H = jX_H$,

$$\dot{U}_2 = jX_H \cdot \dot{I}_2, \text{tg} \sigma = \frac{X_H}{Z_B} :$$

$$\begin{cases} \dot{U}(x) = \dot{U}_2 \cdot \frac{\sin(\beta x + \sigma)}{\sin \sigma}; \\ \dot{I}(x) = \dot{I}_2 \cdot \frac{\cos(\beta x + \sigma)}{\cos \sigma}. \end{cases}$$

Входное сопротивление $\underline{Z}_{\text{BX}}^{(\text{р})} = j \cdot X_H \cdot \frac{\text{tg}(\beta l + \sigma)}{\text{tg} \sigma}$.



б) емкостная нагрузка ($X_H < 0, \sigma < 0$).

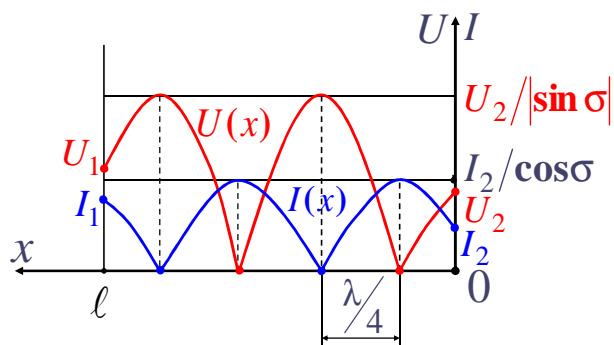


Рис. 169

- **Режим согласованной нагрузки**, когда $\underline{Z}_H = Z_B = \sqrt{L_0/C_0}$,

$$\begin{cases} \dot{U}(x) = \dot{U}_2 \cdot e^{j\beta x}; \\ \dot{I}(x) = \dot{I}_2 \cdot e^{j\beta x}. \end{cases}$$

Входное сопротивление $\underline{Z}_{BX}^{(c)} = Z_B$.

В линии стоячих волн нет.
Действующие значения:

$$\begin{cases} U(x) = U_2; \\ I(x) = I_2 \end{cases}$$

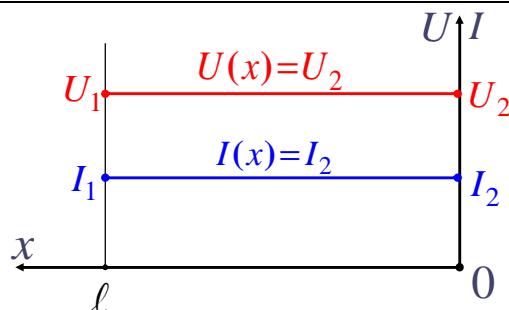


Рис. 170

- **Режим активной нагрузки**, когда $\underline{Z}_H = R_H \neq Z_B$.

$$\begin{cases} \underline{U}(x) = \underline{U}_2 \cdot \left(\cos \beta x + j \cdot \frac{Z_B}{R_H} \cdot \sin \beta x \right); \\ \underline{I}(x) = \underline{I}_2 \cdot \left(\cos \beta x + j \cdot \frac{R_H}{Z_B} \cdot \sin \beta x \right). \end{cases}$$

В линии стоячих волн нет.
Действующие значения:

$$\begin{cases} U(x) = U_2 \cdot \sqrt{\cos^2 \beta x + \frac{Z_B^2}{R_H^2} \cdot \sin^2 \beta x}; \\ I(x) = I_2 \cdot \sqrt{\cos^2 \beta x + \frac{R_H^2}{Z_B^2} \cdot \sin^2 \beta x} \end{cases}$$

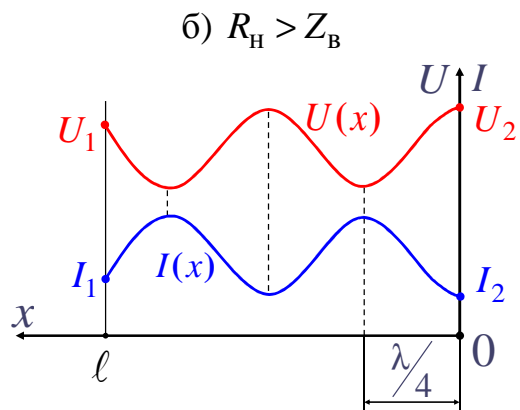
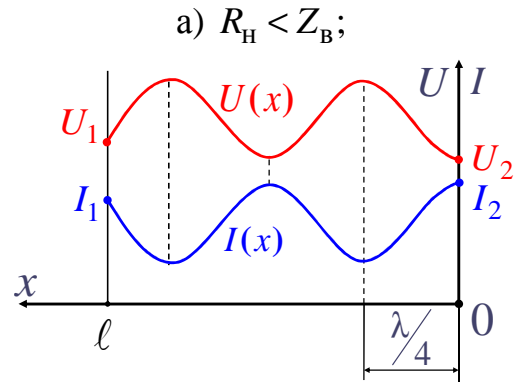


Рис. 171

Если $\ell = \lambda/4$ и $R_H = 10 \cdot Z_B$, то $\frac{U_1}{U_2} = \frac{Z_B}{R_H} = 0,1$, $\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_H}{Z_B} = 10$ – четверть волновой трансформатор.

3.7. Переходные процессы в однородных линиях без потерь

Переходные процессы в линиях возникают:

- при включении и отключении источников и нагрузки;
- при обрывах проводов и коротких замыканиях;
- при грозовых разрядах;
- при прохождении импульсов в линиях связи.

У большинства линий $R_0 \ll \omega L_0$, $G_0 \ll \omega C_0$,

поэтому ограничимся рассмотрением линий без потерь, у которых $R_0 \cong 0$, $G_0 \cong 0$.

Основные уравнения при отсчете x от начала линии:

$$-\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = L_0 \cdot \frac{\partial i(x,t)}{\partial t}; \quad (3.7)$$

$$-\frac{\partial i(x,t)}{\partial x} = C_0 \cdot \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}. \quad (3.8)$$

Продифференцируем уравнения (3.7) и (3.8) по x и t , тогда, при скорости перемещения волн $v = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}$, км/с, после преобразований получаем следующие уравнения для напряжения $u(x, t)$ и тока $i(x, t)$ переходного процесса в линии:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}; \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial^2 i(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 i(x,t)}{\partial t^2}. \quad (3.11)$$

Решение уравнения (3.9):

$$\begin{aligned} u(x,t) &= f_1\left(t - \frac{x}{v}\right) + f_2\left(t + \frac{x}{v}\right) = \\ &= u_{\text{пад}}(x,t) + u_{\text{отр}}(x,t). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Решение уравнения (3.10):

$$\begin{aligned} i(x,t) &= \Phi_1\left(t - \frac{x}{v}\right) + \Phi_2\left(t + \frac{x}{v}\right) = \\ &= i_{\text{пад}}(x,t) + i_{\text{отр}}(x,t). \end{aligned} \quad (3.7.6)$$

Подстановка (3.11) и (3.12) в уравнения (3.7) и (3.8) позволяет определить

$$i_{\text{пад}}(x,t) = \frac{u_{\text{пад}}(x,t)}{Z_{\text{в}}};$$

$$i_{\text{отр}}(x,t) = -\frac{u_{\text{отр}}(x,t)}{Z_{\text{в}}},$$

где $Z_{\text{в}} = \sqrt{L_0/C_0}$, Ом, – волновое сопротивление.

Вид функций f_1, f_2, Φ_1, Φ_2 определяется граничными условиями, т.е. входным напряжением и нагрузкой, причем эти функции должны быть дважды дифференцируемыми по x и t .

Так, при включении линии к источнику напряжения $u_1(t) = U_m \sin(\omega t + \alpha)$ имеем, при замене t на $(t - x/v)$,

$$u_{\text{пад}}(x, t) = f_1(t - x/v) = U_m \sin[\omega(t - x/v) + \alpha],$$

тогда

$$i_{\text{пад}}(x, t) = \Phi_1(t - x/v) = \frac{U_m}{Z_B} \sin[\omega(t - x/v) + \alpha].$$

Падающие волны $u_{\text{пад}}(x, t)$ и $i_{\text{пад}}(x, t)$ перемещаются со скоростью v от начала линии в сторону увеличения координаты x .

Отраженные волны $u_{\text{отр}}(x, t)$ и $i_{\text{отр}}(x, t)$ перемещаются со скоростью v от конца линии в сторону уменьшения координаты x .

Если $u_{\text{пад}}(x_1, t_1) = f_1\left(t_1 - \frac{x_1}{v}\right)$, то при $t_2 = t_1 + \frac{x_2 - x_1}{v} > t_1$ и $x_2 > x_1$ получаем падающую волну напряжения

$$u_{\text{пад}}(x_2, t_2) = f_1\left(t_2 - \frac{x_2}{v}\right) = f_1\left(t_1 - \frac{x_1}{v}\right).$$

При любом законе изменения во времени падающей волны напряжения и тока в начале линии по такому же закону, но с опозданием во времени изменится падающая волна напряжения и тока в любой точке линии.

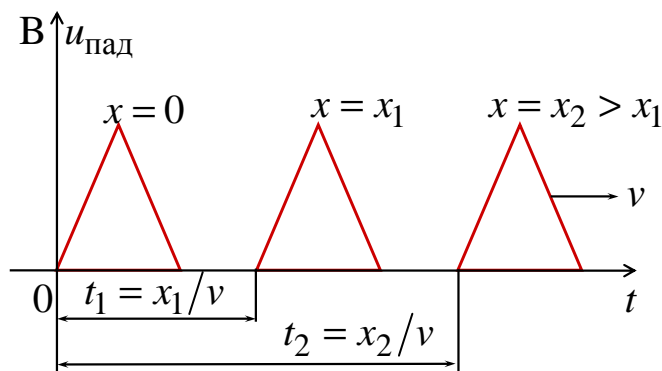


Рис. 172

Таким же образом изменяются отраженные волны напряжения и тока, но с опозданием во времени относительно конца линии.

3.8. Включение однородной линии без потерь на постоянное напряжение

После замыкания ключа по линии начнут перемещаться падающие волны напряжения и тока с прямоугольным фронтом и со скоростью

$$v = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}.$$

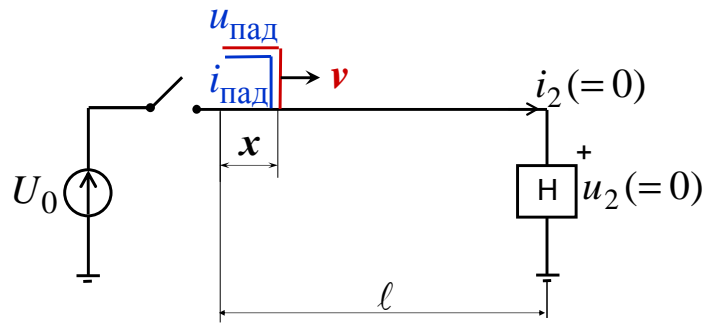


Рис. 173

Падающие волны:

а) напряжения $u_{\text{пад}} = U_0$;

б) тока $i_{\text{пад}} = \frac{u_{\text{пад}}}{Z_{\text{в}}} = \frac{U_0}{Z_{\text{в}}}$, где $Z_{\text{в}} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$, Ом, – волновое сопротивление.

ление.

Когда падающие волны достигнут конца линии, то появляются отраженные волны, которые определяются характером нагрузки. Так как для любой точки линии напряжение и ток равны сумме падающей и отраженной волн, тогда и для нагрузки (н) имеем ($x = l$):

$$\begin{cases} u_2 = u_{\text{пад}} + u_{\text{отр}}; \\ i_2 = i_{\text{пад}} + i_{\text{отр}}. \end{cases} \quad (3.13)$$

Напряжение u_2 и ток i_2 появляются в нагрузке только после прихода падающих волн $u_{\text{пад}}$ и $i_{\text{пад}}$.

Так как $i_{\text{отр}} = -\frac{u_{\text{отр}}}{Z_{\text{в}}}$, то из уравнений (3.13)

$$\begin{cases} u_2 = u_{\text{пад}} + u_{\text{отр}}; \\ i_2 Z_{\text{в}} = u_{\text{пад}} - u_{\text{отр}}. \end{cases} \quad (3.14)$$

После сложения уравнений (3.14) получаем

$$2u_{\text{пад}} = u_2 + Z_{\text{в}} \cdot i_2. \quad (3.15)$$

Уравнению (3.15) соответствует расчетная схема (рис. 168), которая используется для определения $i_2(t)$ и $u_2(t)$ после прихода в нагрузку падающих волн.

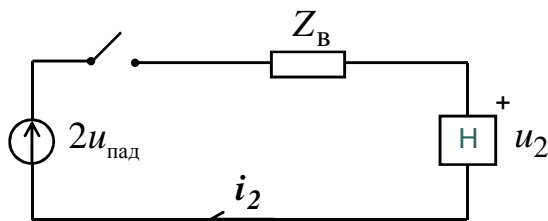


Рис. 174

За начало переходного процесса в нагрузке ($t = 0$) принимается момент прихода туда падающих волн.

Переходный процесс в нагрузке может быть рассчитан классическим или операторным методом при нулевых начальных условиях.

Затем определяются отраженные волны

$$i_{\text{отр}}(t) = -\frac{u_{\text{отр}}(t)}{Z_{\text{в}}};$$

$$u_{\text{отр}}(t) = u_2(t) - u_{\text{пад}}(t).$$

Рассчитываем распределение напряжения и тока для момента времени $t = t_0 = \frac{\ell + \ell_1}{v}$, где ℓ_1 – расстояние от нагрузки, которое прошли отраженные волны. При этом используем, что в каждой точке линии напряжение и ток равны сумме падающих и отраженных волн, которые запаздывают во времени относительно соответственно начала и конца линии.

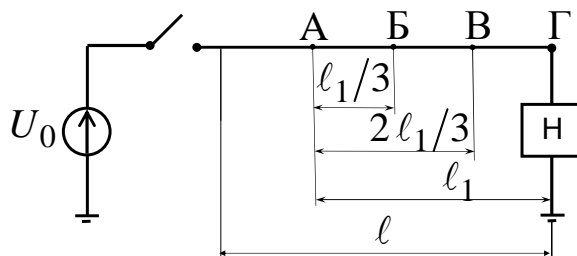


Рис. 175

| | А | Б | В | Г |
|-----------------------------|-----------------------|---------------------------|----------------------------|-------------------------------|
| $t, \text{ с}$ | $t_A = 0$ | $t_B = \frac{\ell_1}{3v}$ | $t_B = \frac{2\ell_1}{3v}$ | $t_\Gamma = \frac{\ell_1}{v}$ |
| $u_{\text{отр}}, \text{ В}$ | $u_{\text{отр}}(t_A)$ | $u_{\text{отр}}(t_B)$ | $u_{\text{отр}}(t_B)$ | $u_{\text{отр}}(t_\Gamma)$ |
| $i_{\text{отр}}, \text{ А}$ | $i_{\text{отр}}(t_A)$ | $i_{\text{отр}}(t_B)$ | $i_{\text{отр}}(t_B)$ | $i_{\text{отр}}(t_\Gamma)$ |
| $u(x, t_0), \text{ В}$ | $u_2(t_A)$ | $u_2(t_B)$ | $u_2(t_B)$ | $u_2(t_\Gamma)$ |
| $i(x, t_0), \text{ А}$ | $i_2(t_A)$ | $i_2(t_B)$ | $i_2(t_B)$ | $i_2(t_\Gamma)$ |

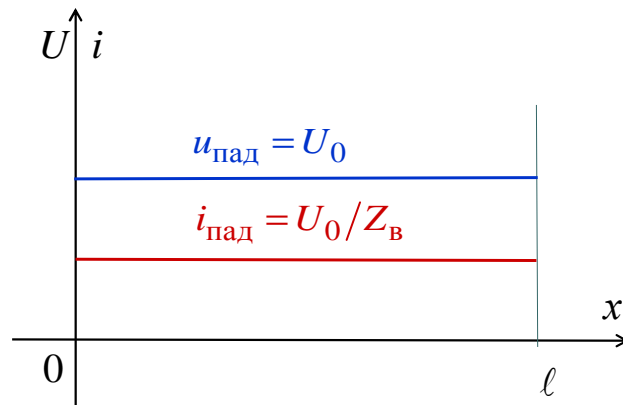


Рис. 176

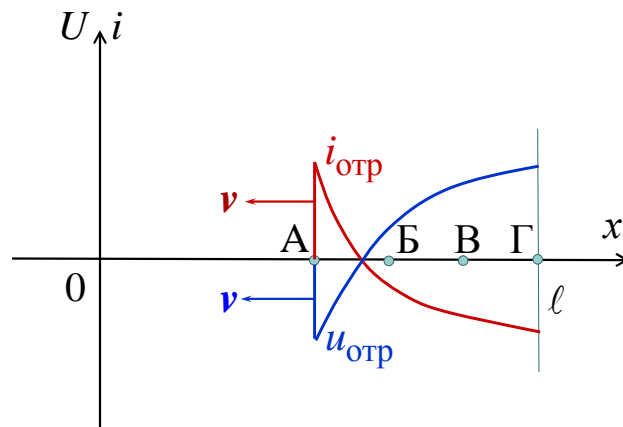


Рис. 177

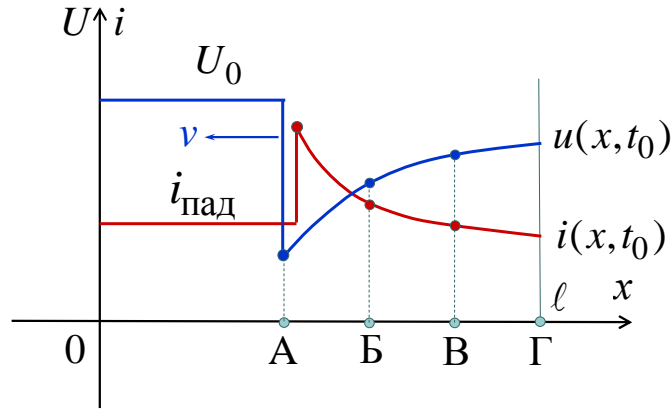


Рис. 178

3.9. Отражение и преломление волн в однородных линиях без потерь

Отражение и преломление волн происходит в местах неоднородностей, которыми являются нагрузка и другие линии с другими волновыми сопротивлениями. При этом используются коэффициенты отражения и преломления:

- а) коэффициенты отражения $K_u = -K_i = \frac{u_{отр1}}{u_{пад1}}$;
- б) коэффициенты преломления $n_u = \frac{u_{пад2}}{u_{пад1}}$ и $n_i = \frac{i_{пад2}}{i_{пад1}}$.

1. Переход волн с одной линии (Z_{B1}) на другую линию (Z_{B2}):

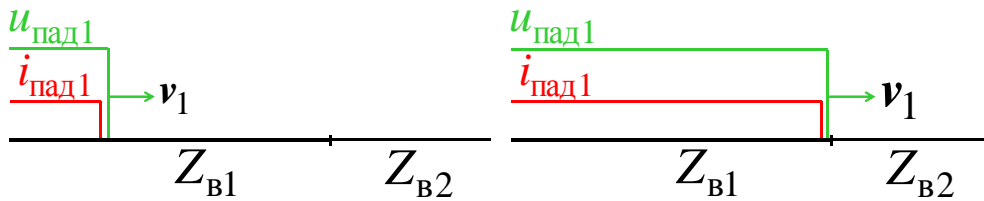


Рис. 179

$$i_{пад1} = \frac{u_{пад1}}{Z_{B1}}.$$

Расчетная схема

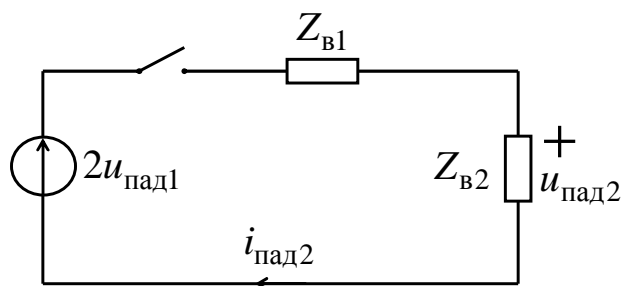


Рис. 180

Определяем:

$$i_{\text{пад}2} = \frac{2u_{\text{пад}1}}{Z_{\text{в}1} + Z_{\text{в}2}}; \quad u_{\text{пад}2} = Z_{\text{в}2} \cdot i_{\text{пад}2};$$

$$u_{\text{отр}1} = u_{\text{пад}2} - u_{\text{пад}1}; \quad i_{\text{отр}1} = -\frac{u_{\text{отр}1}}{Z_{\text{в}1}};$$

$$K_u = -K_i = \frac{Z_{\text{в}2} - Z_{\text{в}1}}{Z_{\text{в}1} + Z_{\text{в}2}}; \quad n_u = \frac{2Z_{\text{в}2}}{Z_{\text{в}1} + Z_{\text{в}2}}; \quad n_i = \frac{2Z_{\text{в}1}}{Z_{\text{в}1} + Z_{\text{в}2}}.$$

Если $Z_{\text{в}1} = 2Z_{\text{в}2}$, то $K_u = -K_i = -\frac{1}{3}$; $n_u = \frac{2}{3}$; $n_i = \frac{4}{3}$.

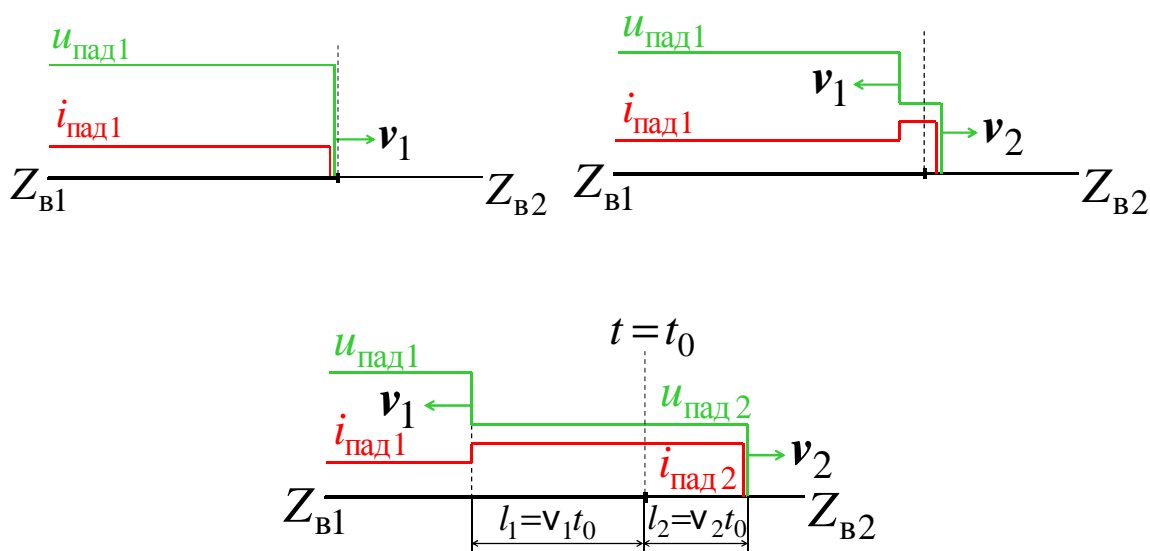


Рис. 181

2. Переход волн с одной линии (Z_{B1}) на две другие линии (Z_{B2} и Z_{B3}):

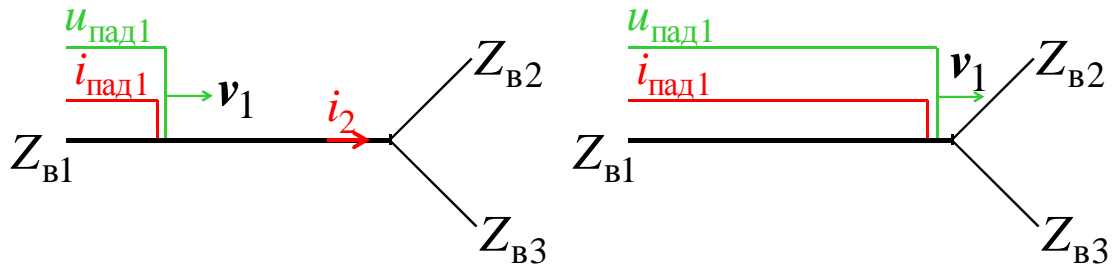


Рис. 182

$$i_{\text{пад1}} = \frac{u_{\text{пад1}}}{Z_{B1}}.$$

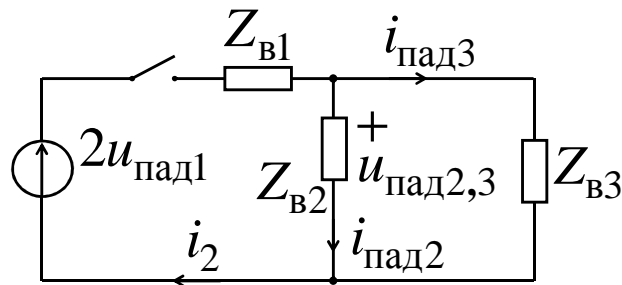


Рис. 183. Расчетная схема

Определяем:

$$i_2 = \frac{2u_{\text{пад1}}}{Z_{B1} + \frac{Z_{B2}Z_{B3}}{Z_{B2} + Z_{B3}}}; \quad i_{\text{пад2}} = i_2 \cdot \frac{Z_{B3}}{Z_{B2} + Z_{B3}};$$

$$i_{\text{пад3}} = i_2 \cdot \frac{Z_{B2}}{Z_{B2} + Z_{B3}}; \quad u_{\text{пад2,3}} = i_{\text{пад2}} \cdot Z_{B2}.$$

Если $Z_{B1} > Z_{B3} > Z_{B2}$, $v_1 > v_3 > v_2$, $l_1 > l_3 > l_2$, то при $i_{\text{пад2}} > i_{\text{пад3}}$ получаем график:

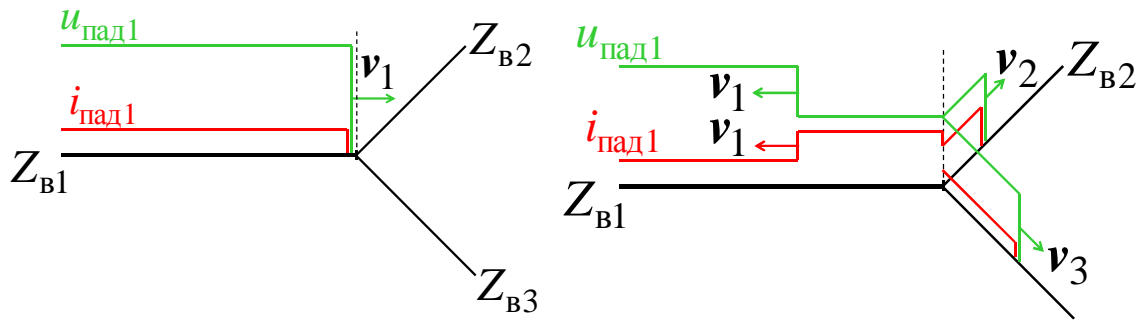


Рис. 184

$$t = t_0; \quad l_1 = v_1 \cdot t_0; \quad l_2 = v_2 \cdot t_0; \quad l_3 = v_3 \cdot t_0.$$

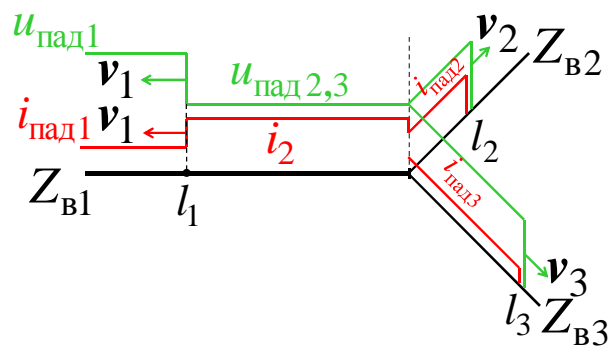


Рис. 185

3. Переход волн с одной линии (Z_{B1}) на другую линию (Z_{B2}), если в месте стыка линий параллельно включен конденсатор с емкостью C :

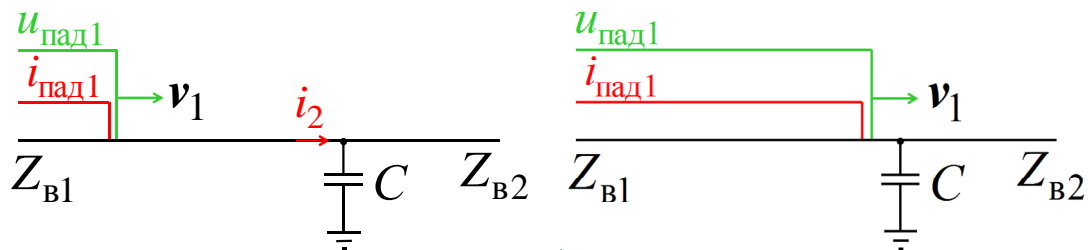


Рис. 186

$$i_{пад1} = \frac{u_{пад1}}{Z_{B1}}.$$

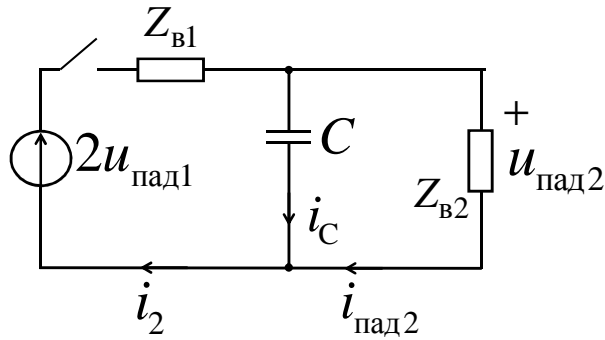


Рис. 187. Расчетная схема

Переходный процесс рассчитывается классическим или операторным методом при нулевых начальных условиях.

Расчетное время:

а) для линии с $Z_{в1}$

$$t_A = X_A / v_1;$$

б) для линии с $Z_{в2}$

$$t_B = X_B / v_2.$$

Изменяя X_A и X_B , рассчитываем распределения напряжения и тока в линиях:

а) в линии с $Z_{в1}$

$$u_A = u_2(t_A) = u_{пад2}(t_A); i_A = i_2(t_A);$$

б) в линии с $Z_{в2}$

$$u_B = u_{пад2}(t_B); i_B = i_{пад2}(t_B).$$

Строим графики для $t = t_0$, когда $l_1 = v_1 \cdot t_0$ и $l_2 = v_2 \cdot t_0$.

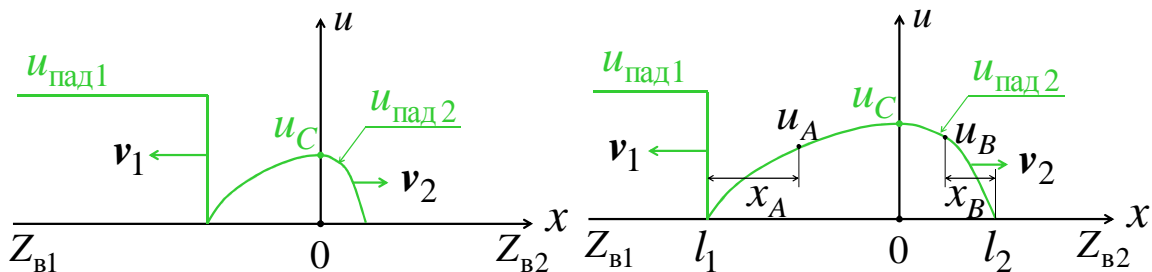


Рис. 188

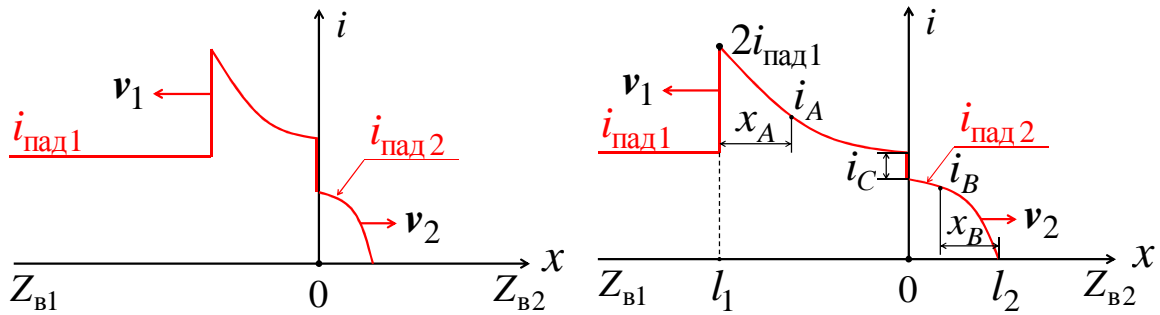


Рис. 189

Такое включение емкости используется для сглаживания фронтов $u_{\text{пад}2}$ и $i_{\text{пад}2}$ в линии с Z_{B2} .

4. Переход волн с одной линии (Z_{B1}) на другую линию (Z_{B2}), если в месте стыка линий последовательно включена катушка с индуктивностью L :

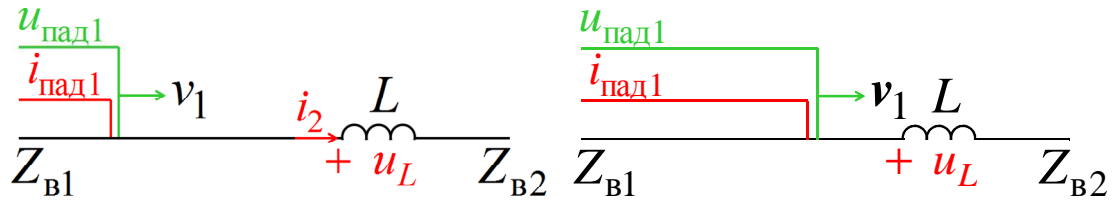


Рис. 190

$$i_{\text{пад}1} = \frac{u_{\text{пад}1}}{Z_{B1}}.$$

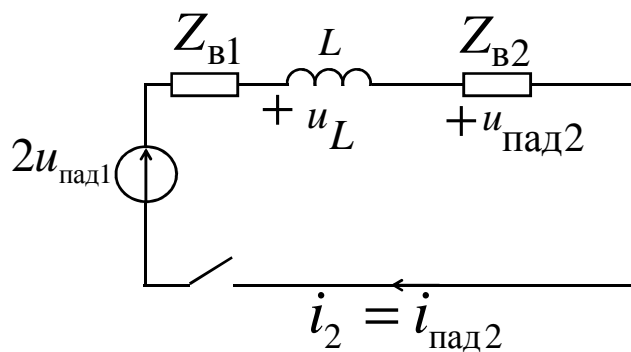


Рис. 191. Расчетная схема

Переходный процесс рассчитывается классическим или операторным методом при нулевых начальных условиях.

Расчетное время:

а) для линии с Z_{B1}

$$t_A = X_A / v_1;$$

б) для линии с Z_{B2}

$$t_B = X_B / v_2.$$

Изменяя X_A и X_B , рассчитываем распределения напряжения и тока в линиях:

а) в линии с Z_{B1}

$$u_A = u_2(t_A); i_A = i_2(t_A);$$

б) в линии с Z_{B2}

$$u_B = u_{\text{пад}2}(t_B); i_B = i_{\text{пад}2}(t_B).$$

Строим графики для момента времени $t = t_0$, когда $l_1 = v_1 \cdot t_0$ и $l_2 = v_2 \cdot t_0$.

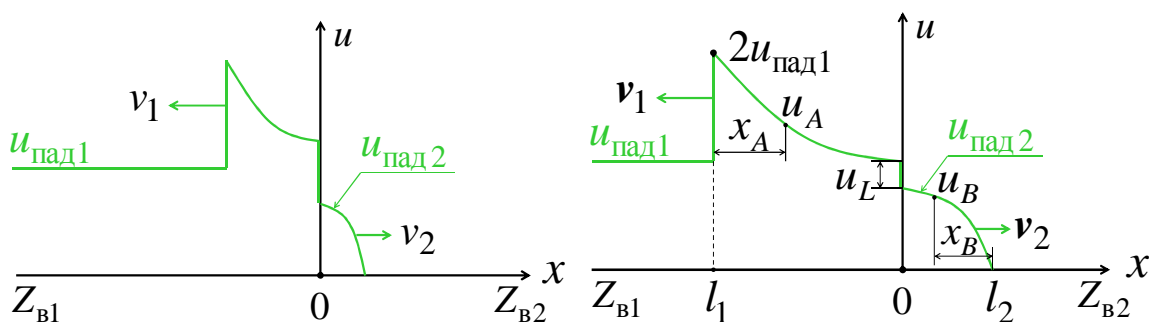


Рис. 192

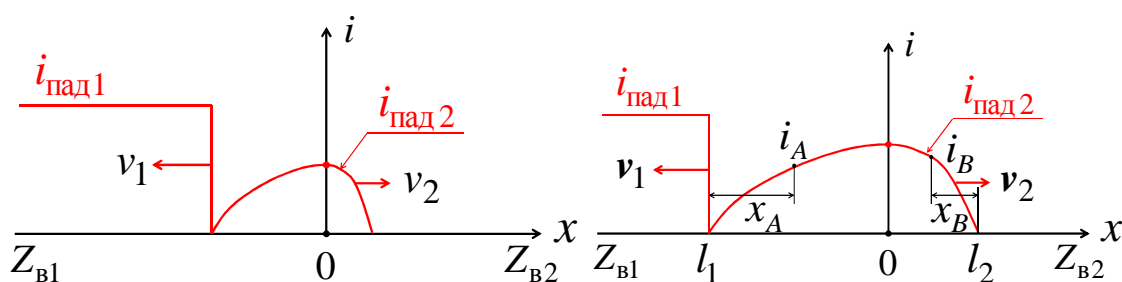


Рис. 193

Такое включение индуктивности используется для сглаживания фронтов $u_{\text{пад}2}$ и $i_{\text{пад}2}$ в линии с Z_{B2} .

Задание № 4

Расчет переходных процессов в линейных электрических цепях

I. Для заданной схемы при коммутации ключа K_1 в момент времени $t = 0$, когда ключ K_2 еще не сработал, выполнить следующее:

1. При постоянном источнике ЭДС $e(t) = E$ или тока $J(t) = J$ определить ток $i(t)$ или напряжение $u_J(t)$:

- а) классическим методом;
- б) операторным методом;

построить график зависимости тока $i(t)$ или напряжения $u_J(t)$.

2. При гармоническом источнике ЭДС $e(t) = \sqrt{2}E \sin(\omega t + \alpha)$ или тока $J(t) = \sqrt{2}J \sin(\omega t + \alpha)$ определить ток $i(t)$ или напряжение $u_J(t)$:

- а) классическим методом;
- б) комбинированным (операторно-классическим) методом;

на интервале времени $0 \leq t \leq 2\pi/\omega$ построить график зависимости тока $i(t)$ или напряжения $u_J(t)$.

3. При импульсном источнике ЭДС $e(t) = Ee^{2pt}$ или тока $J(t) = Je^{2pt}$ и нулевых начальных условиях определить интегралом Дюамеля ток $i(t)$ или напряжение $u_J(t)$, построить их график зависимости (p – корень характеристического уравнения из п. 1, а).

II. Для заданной схемы с постоянным источником ЭДС $e(t) = E$ или тока $J(t) = J$ при коммутации ключа K_2 в момент времени $t=0$, когда ключ K_1 давно уже сработал, определить ток $i(t)$ или напряжение $u_J(t)$:

- а) классическим методом;
- б) операторным методом;
- в) методом переменных состояния;

построить график зависимости тока $i(t)$ или напряжения $u_J(t)$.

III. Проанализировать методы расчета, результаты вычислений, графики зависимостей и сформулировать выводы по работе.

Примечание: объем задания уточняет лектор;

1-я цифра номера задания – номер строки в табл. 1;

2-я цифра номера задания – номер строки в табл. 2;

3-я цифра номера задания – номер схемы.

Таблица 1

| № | E | J | α |
|---|-----|-----|----------|
| – | В | А | град |
| 1 | 300 | 5,5 | 90 |
| 2 | 280 | 5 | 60 |
| 3 | 260 | 4,5 | 45 |
| 4 | 240 | 4 | 30 |
| 5 | 220 | 3,5 | 0 |
| 6 | 200 | 3 | –30 |
| 7 | 175 | 2,5 | –45 |
| 8 | 150 | 2 | –60 |
| 9 | 125 | 1,5 | –90 |
| 0 | 100 | 1 | –120 |

Таблица 2

| № | ω | R | L | C |
|---|----------|-----|------|-----|
| – | 1/с | Ом | Гн | мкФ |
| 1 | 100 | 100 | 2 | 200 |
| 2 | 150 | 90 | 1,2 | 150 |
| 3 | 200 | 80 | 0,8 | 125 |
| 4 | 250 | 75 | 0,6 | 107 |
| 5 | 300 | 60 | 0,4 | 111 |
| 6 | 400 | 50 | 0,25 | 100 |
| 7 | 500 | 40 | 0,16 | 100 |
| 8 | 600 | 30 | 0,1 | 111 |
| 9 | 800 | 24 | 0,06 | 104 |
| 0 | 1000 | 10 | 0,02 | 200 |

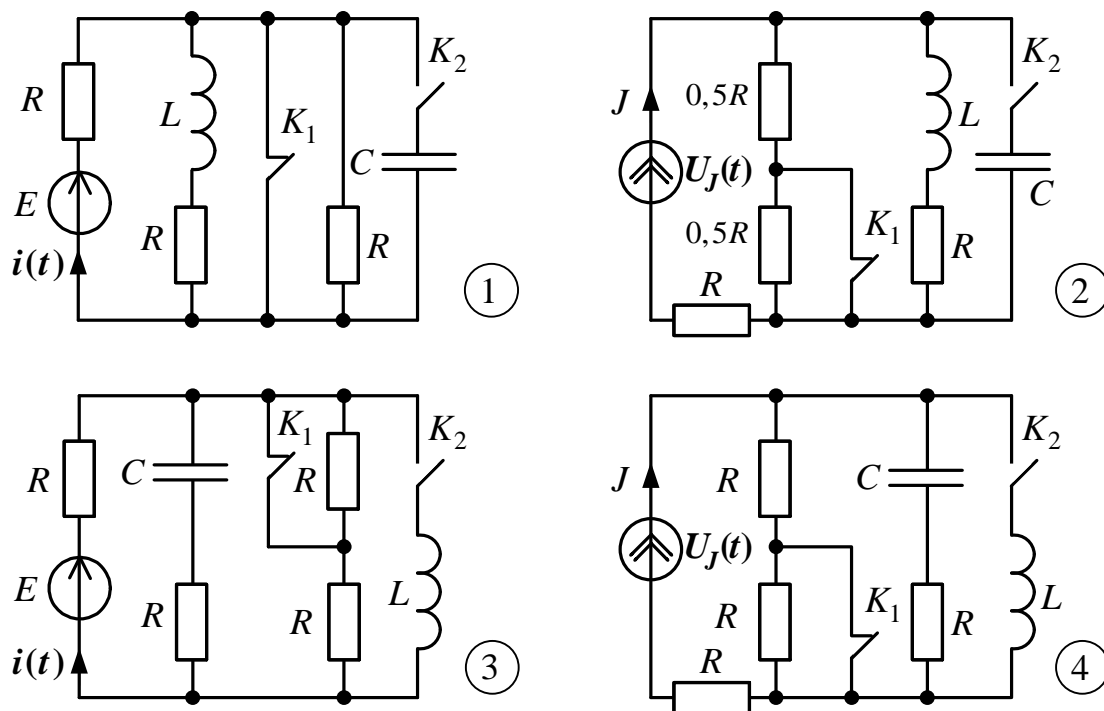
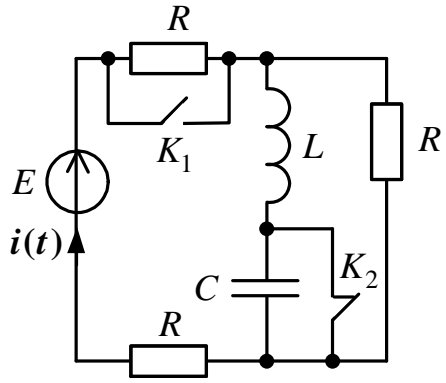
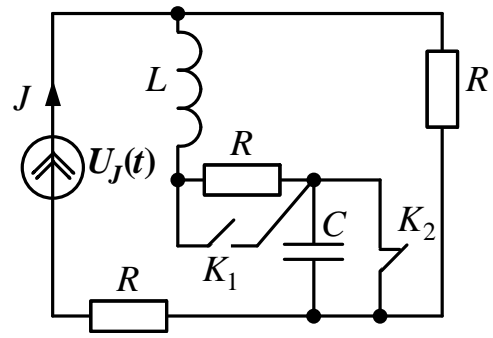


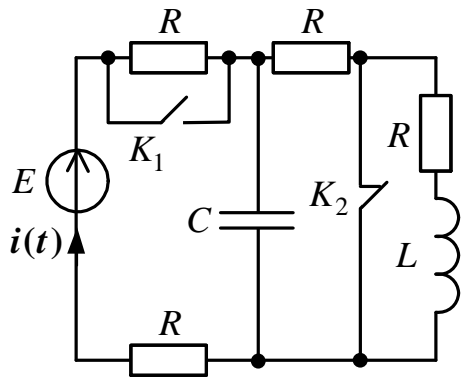
Рис. 194



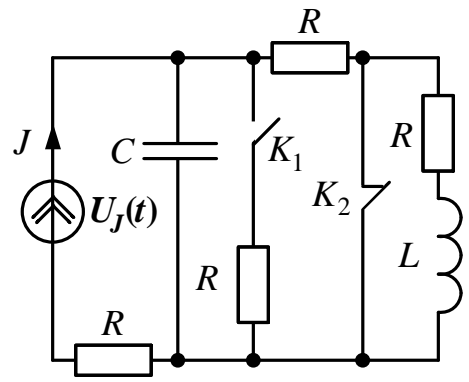
5



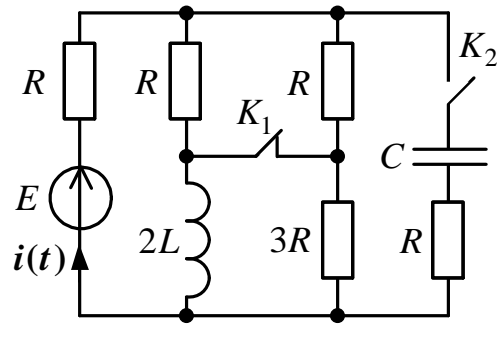
6



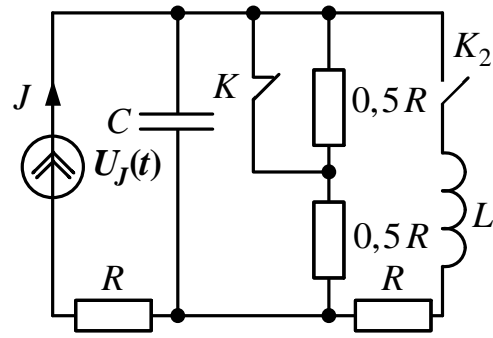
7



8



9



10

Рис. 195

Задание № 5

Расчет установившегося режима в нелинейных электрических цепях

Для заданной схемы с источником гармонической ЭДС $e(t) = \sqrt{2}E \sin(314t + \alpha)$ или тока $J(t) = \sqrt{2}J \sin(314t + \alpha)$ и нелинейным индуктивным элементом (НИЭ), изготовленным в виде последовательно соединенных катушек на общем ферромагнитном сердечнике, без учета рассеяния магнитных потоков и потерь энергии в сердечнике и катушках при заданной основной кривой намагничивания ферромагнитного материала сердечника

| | | | | | | | | | |
|--------|---|-----|-----|------|------|------|-------|-------|--------|
| В, Тл | 0 | 0,6 | 1 | 1,2 | 1,6 | 2 | 2,2 | 2,3 | 2,5 |
| Н, А/м | 0 | 250 | 500 | 1000 | 2000 | 6000 | 12000 | 30000 | 200000 |

выполнить следующее:

1. Относительно зажимов a и b НИЭ определить комплексное сопротивление эквивалентного генератора $\underline{z}_Г = z_Г e^{j\varphi_Г}$, а также комплексы действующих значений ЭДС $\underline{U}_{\text{xx}} = \underline{E}_Г = E_Г e^{j\alpha_Г}$ и тока $\underline{I}_{\text{кз}} = \underline{J}_Г = J_Г e^{j\beta_Г}$ этого генератора.

2. Для двух мгновенных значений тока i_L НИЭ, равных $\sqrt{2}J_Г / 2$ и $\sqrt{2}J_Г$, из расчета магнитной цепи определить величины потокосцепления $\Psi = w_1\Phi_1 + w_2\Phi_2 + w_3\Phi_3$, Вб.

3. По результатам п. 2 построить веберамперную характеристику $\Psi(i_L)$ НИЭ, которую заменить зависимостью $i_L(\Psi) = k_1\Psi + k_3\Psi^3$, и рассчитать коэффициенты k_1 и k_3 .

4. При приближенной гармонической зависимости для напряжения НИЭ $u_L(t) = \sqrt{2}U_L \cos(314t + \beta)$, для его четырех действующих значений U_L ($0 < U_L < E_Г$) по зависимости $i_L(\Psi)$ п. 3 рассчитать соответствующие действующие значения гармоник тока НИЭ I_1 и I_3 , его действующее значение I_L и коэффициент гармоник $k_Г$, причем брать такие U_L , чтобы $0 < I_L < J_Г$.

5. По результатам п. 4 построить вольтамперную характеристику для действующих значений НИЭ $U_L(I_L)$, на основании которой, при

$\varphi_L(I_L) = 90^\circ$, для одноконтурной схемы с \dot{E}_r , z_r и НИЭ найти комплексы действующих значений эквивалентных синусоид \dot{U}_L и \dot{I}_L напряжения и тока НИЭ, построить векторную диаграмму.

6. По току \dot{I}_L из п. 5 и \dot{E}_r определить потребляемую активную мощность P , а по напряжению \dot{U}_L из п. 5 и зависимости $i_L(\Psi)$ из п. 3 для тока НИЭ

$$i_L(t) = \sqrt{2}I_1 \sin(314t + \beta) + \sqrt{2}I_3 \sin(942t + 3\beta)$$

определить I_1 , I_3 и β , а также уточнить его действующее значение I_L и коэффициент гармоник k_r .

7. Проанализировать полученные результаты и сформулировать выводы по работе.

Примечание:

1-я цифра номера задания – номер строки в табл. 1;

2-я цифра номера задания – номер строки в табл. 2;

3-я цифра номера задания – номер схемы.

Таблица 1

| № | E | J | α | R | C |
|----------|-----|-----|----------|-----|--------|
| – | В | А | град | Ом | мкФ |
| 1 | 100 | 1 | –30 | 10 | 318,47 |
| 2 | 110 | 1,1 | –45 | 11 | 289,52 |
| 3 | 120 | 1,2 | –60 | 12 | 265,39 |
| 4 | 130 | 1,3 | –90 | 13 | 244,98 |
| 5 | 140 | 1,4 | 120 | 14 | 227,48 |
| 6 | 150 | 1,5 | 90 | 15 | 212,31 |
| 7 | 160 | 1,6 | 45 | 16 | 199,04 |
| 8 | 170 | 1,7 | 60 | 17 | 187,34 |
| 9 | 180 | 1,8 | 30 | 18 | 176,93 |
| 0 | 190 | 1,9 | 0 | 19 | 167,62 |

Таблица 2

| № | w_1 | w_2 | w_3 | S_1 | S_2 | S_3 | l_1 | l_2 | l_3 | δ_1 | δ_2 | δ_3 |
|---|-------|-------|-------|-----------------|-----------------|-----------------|-------|-------|-------|------------|------------|------------|
| – | ВИТ | ВИТ | ВИТ | см ² | см ² | см ² | см | см | см | мм | мм | мм |
| 1 | 1000 | 500 | 0 | 2 | 1 | 1 | 20 | 10 | 20 | 1 | 0 | 0 |
| 2 | 1000 | 0 | 1000 | 2 | 1 | 1 | 20 | 10 | 20 | 1 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 1000 | 500 | 2 | 1 | 1 | 20 | 10 | 20 | 1 | 0 | 0 |
| 4 | 500 | 1000 | 0 | 1 | 2 | 1 | 30 | 15 | 30 | 0 | 1 | 0 |
| 5 | 1000 | 0 | 1000 | 1 | 2 | 1 | 30 | 15 | 30 | 0 | 1 | 0 |
| 6 | 0 | 500 | 1000 | 1 | 2 | 1 | 30 | 15 | 30 | 0 | 1 | 0 |
| 7 | 1000 | 500 | 0 | 1 | 1 | 2 | 30 | 10 | 30 | 0 | 0 | 1 |
| 8 | 0 | 500 | 1000 | 1 | 1 | 2 | 30 | 10 | 30 | 0 | 0 | 1 |
| 9 | 1000 | 0 | 1000 | 1 | 1 | 2 | 30 | 10 | 30 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 500 | 0 | 500 | 1 | 2 | 1 | 45 | 15 | 45 | 0 | 1 | 0 |

Нелинейный индуктивный элемент (НИЭ)

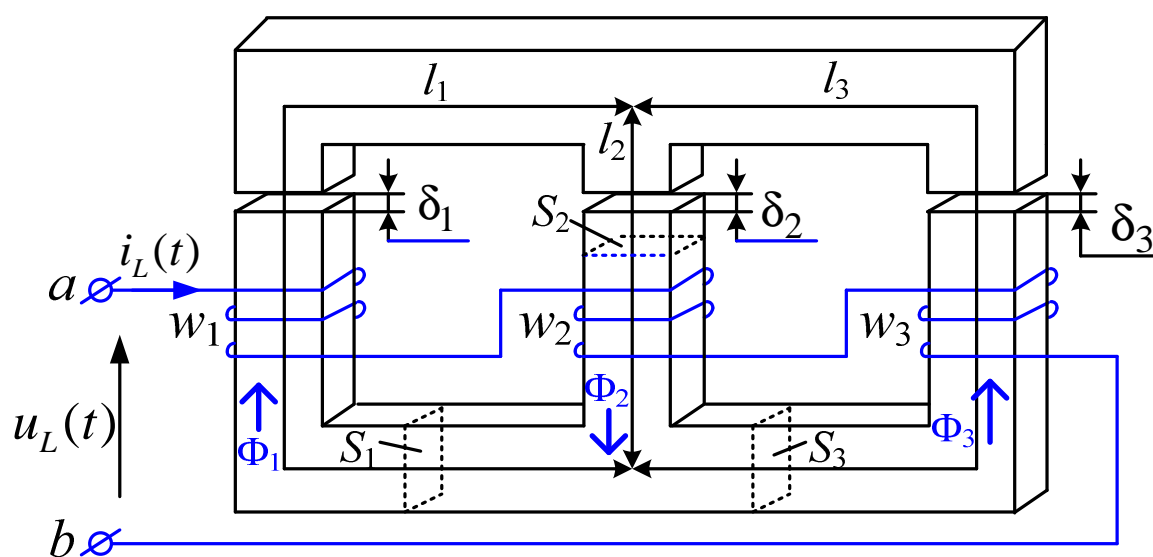


Рис. 196

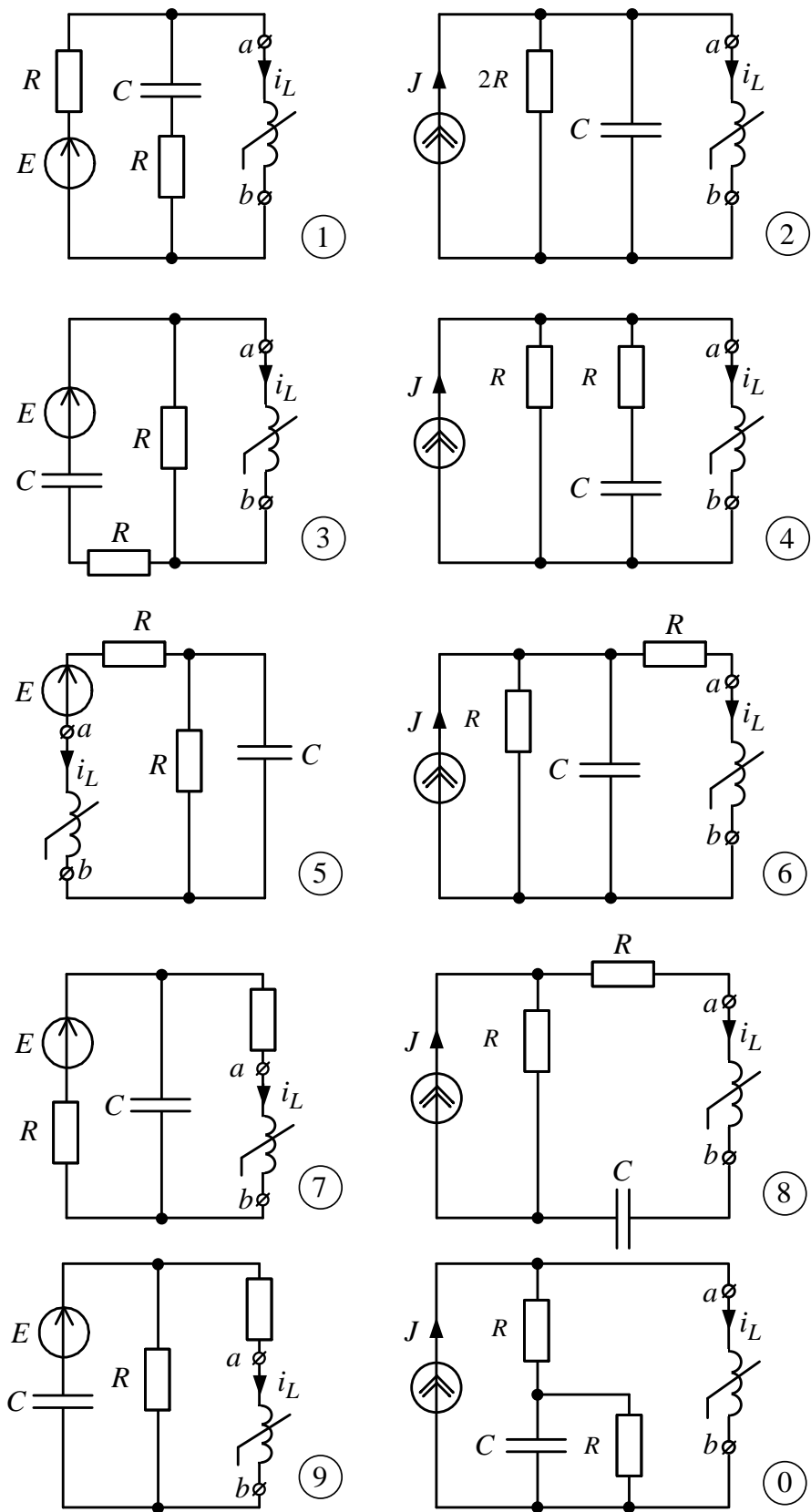


Рис. 197

Задание № 6

Расчет длинных линий в установившемся и переходном режимах

Для одной фазы линии электропередачи длиной $l = 1500$ км и удельными параметрами из табл. 2 выполнить следующее:

1. В установившемся режиме при заданном фазном напряжении в конце линии

$$u_2(t) = \sqrt{2}U_2 \sin(314t + \Psi_{U_2})$$

а) определить волновое сопротивление Z_B , постоянную $\gamma = \alpha + j\beta$, фазовую скорость V , длину волны λ , комплексы действующих значений токов \dot{I}_1 и \dot{I}_2 , напряжения $\dot{U}_1 = U_1 e^{j\Psi_{U_1}}$, а также активные мощности в начале линии P_1 и конце линии P_2 , эффективность передачи энергии по линии (КПД) $\eta = P_2/P_1$;

б) изменяя координату x от 0 до l рассчитать распределение вдоль линии действующих значений напряжения $U(x)$ и тока $I(x)$, а также активной мощности $P(x)$;

в) по результатам расчетов построить совмещенные графики зависимостей для действующих значений $U(x)$ и $I(x)$, а также активной мощности $P(x)$.

2. В переходном режиме при подключении линии без потерь ($R_0 \approx 0$; $G_0 \approx 0$) к источнику постоянного напряжения $U_0 = \sqrt{2}U_1 |\sin \Psi_{U_1}|$ рассчитать и построить совмещенные графики зависимостей распределения вдоль линии волн тока $i(x, t_0)$ и напряжения $u(x, t_0)$, соответствующих моменту времени $t_0 = \frac{3l}{2V}$ после подключения источника, когда отраженные от конца линии волны напряжения и тока достигли середины линии.

3. Проанализировать полученные результаты, графики зависимостей и сформулировать выводы по работе.

Примечание:

- 1-я цифра номера задания – номер строки в табл. 1;
- 2-я цифра номера задания – номер строки в табл. 2;
- 3-я цифра номера задания – номер схемы нагрузки линии.

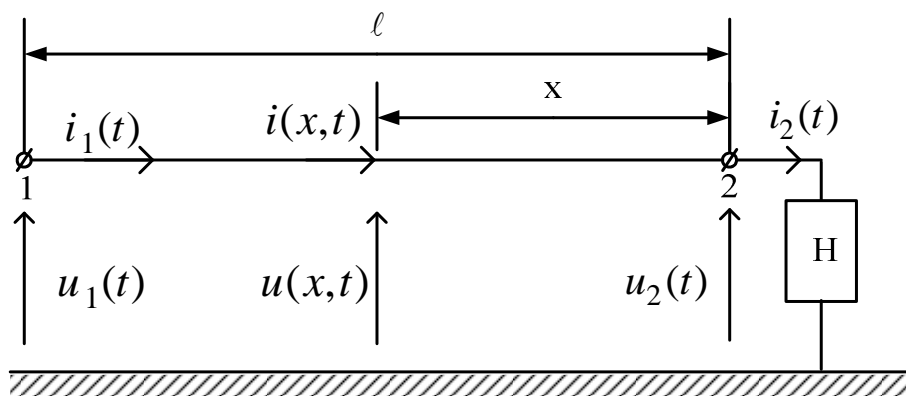


Рис. 198

Таблица 1

| № | U_2 | Ψ_{U_2} | R | L | C |
|---|-------|--------------|------|------|-------|
| – | кВ | град | Ом | Гн | мкФ |
| 1 | 500 | 90 | 1000 | 3,18 | 3,18 |
| 2 | 450 | 60 | 900 | 2,86 | 3,53 |
| 3 | 400 | 45 | 800 | 2,54 | 3,98 |
| 4 | 350 | 30 | 700 | 2,22 | 4,54 |
| 5 | 300 | 0 | 600 | 1,91 | 5,30 |
| 6 | 250 | –30 | 500 | 1,59 | 6,36 |
| 7 | 200 | –45 | 400 | 1,27 | 7,96 |
| 8 | 150 | –60 | 300 | 0,95 | 10,61 |
| 9 | 100 | –90 | 200 | 0,63 | 15,92 |
| 0 | 50 | –120 | 100 | 0,32 | 31,84 |

Таблица 2

| № | R_0 | L_0 | G_0 | C_0 |
|---|-------|---------------------|----------------------|----------------------|
| – | Ом/км | Гн/км | См/км | Ф/км |
| 1 | 0,01 | $1 \cdot 10^{-3}$ | $1,5 \cdot 10^{-6}$ | $1,11 \cdot 10^{-8}$ |
| 2 | 0,02 | $1,1 \cdot 10^{-3}$ | $1,3 \cdot 10^{-6}$ | $1,01 \cdot 10^{-8}$ |
| 3 | 0,04 | $1,2 \cdot 10^{-3}$ | $1,1 \cdot 10^{-6}$ | $0,93 \cdot 10^{-8}$ |
| 4 | 0,05 | $1,3 \cdot 10^{-3}$ | $1 \cdot 10^{-6}$ | $0,86 \cdot 10^{-8}$ |
| 5 | 0,06 | $1,4 \cdot 10^{-3}$ | $0,8 \cdot 10^{-6}$ | $0,8 \cdot 10^{-8}$ |
| 6 | 0,07 | $1,5 \cdot 10^{-3}$ | $0,6 \cdot 10^{-6}$ | $0,74 \cdot 10^{-8}$ |
| 7 | 0,08 | $1,6 \cdot 10^{-3}$ | $0,5 \cdot 10^{-6}$ | $0,7 \cdot 10^{-8}$ |
| 8 | 0,09 | $1,7 \cdot 10^{-3}$ | $0,3 \cdot 10^{-6}$ | $0,66 \cdot 10^{-8}$ |
| 9 | 0,1 | $1,8 \cdot 10^{-3}$ | $0,1 \cdot 10^{-6}$ | $0,62 \cdot 10^{-8}$ |
| 0 | 0,11 | $1,9 \cdot 10^{-3}$ | $0,05 \cdot 10^{-6}$ | $0,59 \cdot 10^{-8}$ |

Схема нагрузки линии к заданию 6

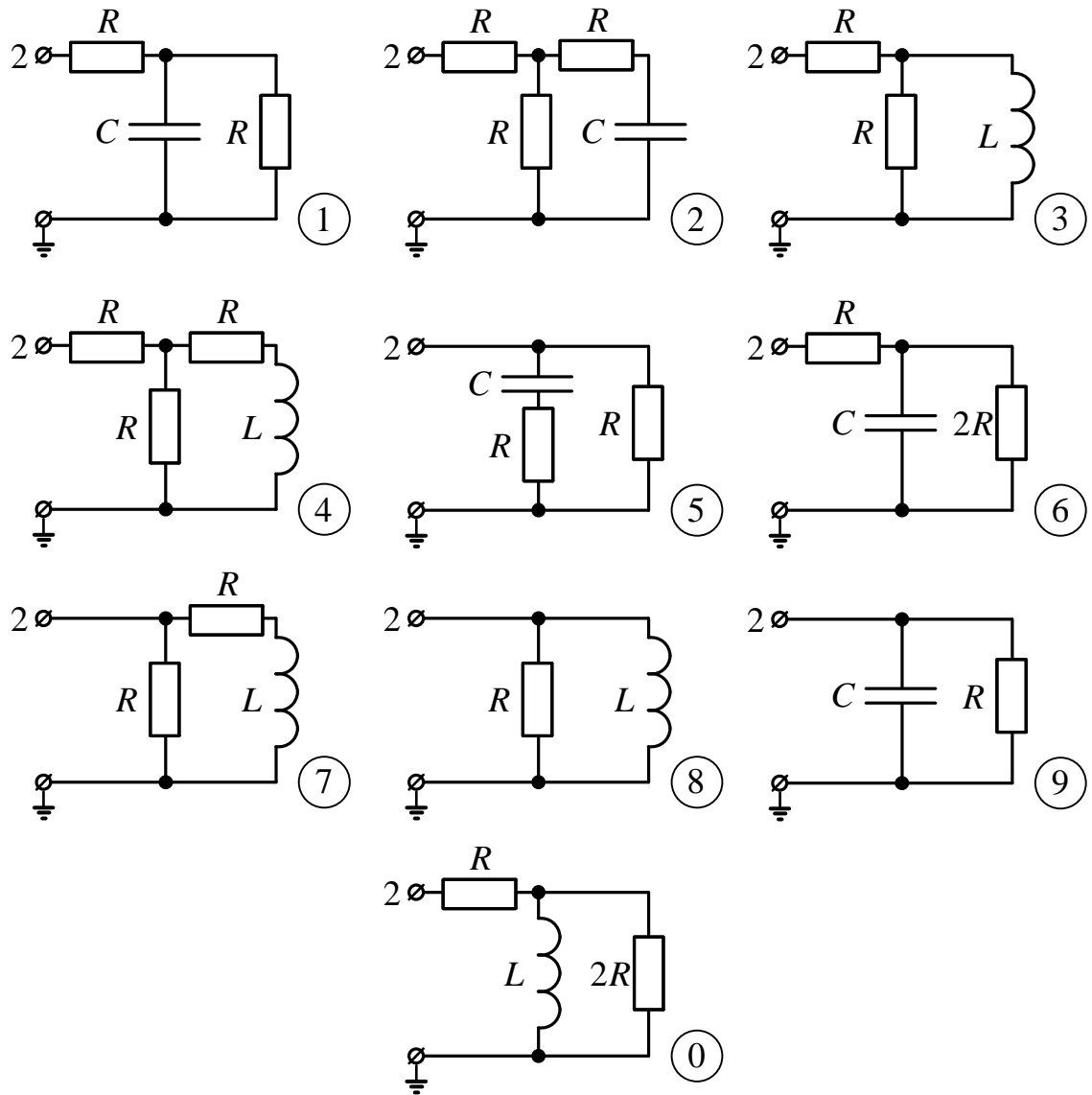


Рис. 199

Пример 1

Методические указания к заданию № 4

«Расчет переходных процессов в линейных электрических цепях»

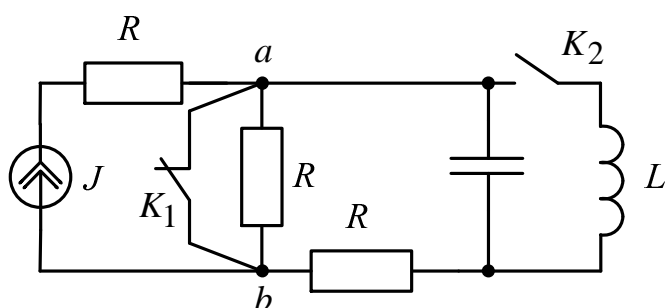


Рис. 200

Дано:

$$J = 2 \text{ А};$$

$$R = 100 \text{ Ом};$$

$$C = 100 \text{ мкФ};$$

$$L = 1 \text{ Гн}.$$

$$\alpha = 90^\circ; \omega = 100 \frac{1}{\text{с}}.$$

Определить: $u_J(t)$

При постоянном источнике тока $J(t) = J$ после срабатывания ключа K_1 , когда ключ K_2 ещё не сработал, определяем напряжение $u_J(t)$.

1.1. Используем упрощённый классический метод, когда дифференциальное уравнение для искомой функции не составляется.

1.1.1. Определяем независимые начальные условия (ННУ) при $t = 0_-$: $u_C(0_-)$. (схема до коммутации: установившийся режим, постоянный источник, C – разрыв, L – коротка).

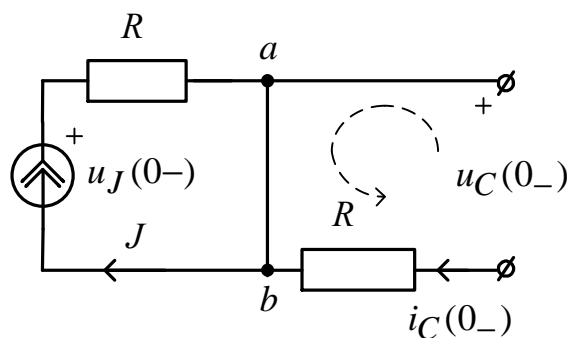


Рис. 201

Так как $i_C(0_-) = 0$, то по второму закону Кирхгофа

$$-u_C(0_-) - R \cdot i_C(0_-) = 0, \Rightarrow u_C(0_-) = 0.$$

Для построения графика $u_J(t)$ определим $u_J(0_-) = RJ = 200$, В.

1.1.2. Определяем ЗНУ при $t = 0_+$: $u_J(0_+)$. (Схема после коммутации ключа K_1). Используем метод узловых потенциалов.

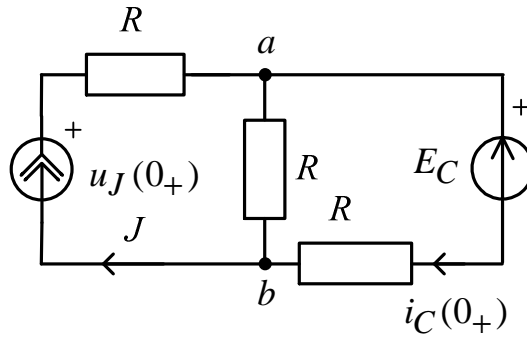


Рис. 202

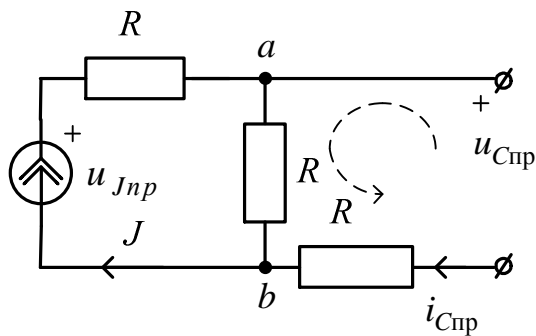
Имеем $E_C = u_C(0_-) = u_C(0_+)$ – второй закон коммутации.

Используя метод узловых потенциалов,

$$\varphi_b = 0, \quad \varphi_a \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R} \right) = J + \frac{E_C}{R};$$

тогда $\varphi_a = 100$ В и $u_J(0_+) = J \cdot R + \varphi_a = 300$ В.

1.1.3. Определяем принуждённую составляющую $u_{Jnp}(t)$ при $t = \infty$: (схема после коммутации ключа K_1 , установившейся режим, постоянный источник, C – разрыв, L – коротка);



$$u_{Jnp} = J \cdot 2R = 400 \text{ В},$$

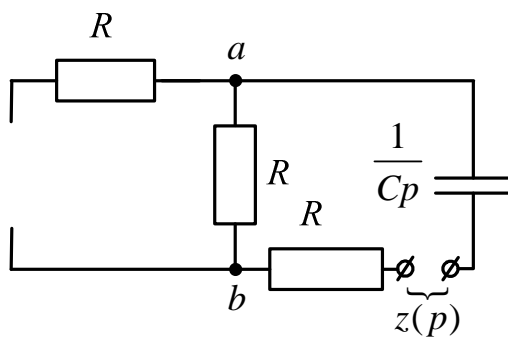
причём

$$u_{Cnp} = JR = 200 \text{ В}.$$

Рис. 203

1.1.4. Определяем корень характеристического уравнения p . Используем метод сопротивления цепи после коммута-

ции $\left(C \rightarrow \frac{1}{Cp}; L \rightarrow Lp \right)$, причём $R_J = \infty$, а $R_E = 0$;



$$z(p) = R + R + \frac{1}{Cp} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p = -\frac{1}{2RC} = -50 \text{ 1/c.}$$

Рис. 204

1.1.5. Определяем постоянную интегрирования B :

$$B = u_J(0+) - u_{Jпр} = 300 - 400 = -100 \text{ В.}$$

1.1.6. Окончательный результат –

$$u_J(t) = u_{Jпр} + Be^{pt} = 400 - 100e^{-50t}, \text{ В,}$$

где $\tau = \frac{1}{|p|} = \frac{1}{|-50|} = 0,02 \text{ с}$ – постоянная времени.

Рассчитываем третью строку таблицы для построения графика:

| t | 0 | τ | 2τ | 3τ | 4τ | 5τ |
|-----------------------|-----|--------|---------|---------|---------|---------|
| $e^{-\frac{t}{\tau}}$ | 1 | 0,368 | 0,135 | 0,05 | 0,018 | 0,007 |
| $u_J(t), \text{ В}$ | 300 | 363 | 386 | 395 | 398 | 399 |

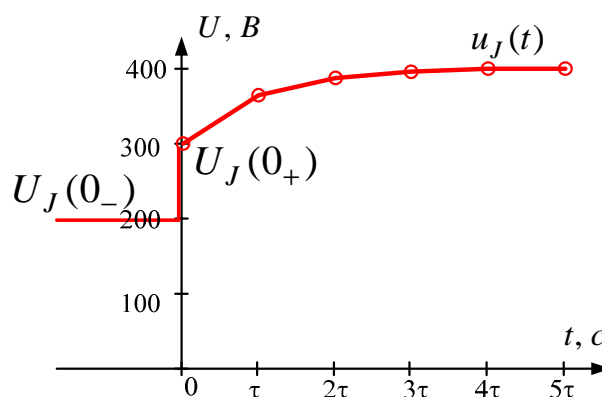


Рис. 205

Ниже приводится расчет рассматриваемого примера в среде *MathCAD*.

Исходные данные:

$$\underline{J} := 2 \quad \underline{R} := 100 \quad \underline{c} := 100 \cdot 10^{-6}$$

1.1. Классический метод, постоянный источник

1.1.1. Определяем независимые начальные условия:

$$U_{co} := 0$$

1.1.2. Определяем зависимые начальные условия:

$$fb := fb \cdot \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R} \right) - J + \frac{U_{co}}{R} \text{ solve, } fb \rightarrow 100$$

$$U_{Jo} := J \cdot (R) + fb \quad U_{Jo} = 300$$

1.1.3. Определяем принуждённую составляющую:

$$U_{Jpr} := J \cdot (2R) \quad U_{Jpr} = 400$$

1.1.4. Определяем корень характеристического уравнения:

$$p := \frac{1}{c \cdot p} + 2 \cdot R \text{ solve, } p \rightarrow -50 \quad p = -50$$

1.1.5. Определяем постоянную интегрирования:

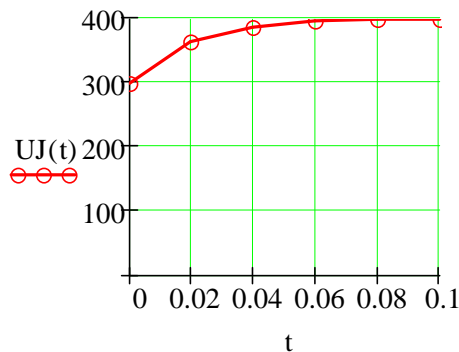
$$B := U_{Jo} - U_{Jpr} \quad B = -100$$

1.1.6. Окончательный результат:

$$UJ(t) := U_{Jpr} + B \cdot e^{p \cdot t} \quad UJ(t) \rightarrow 400 - 100 \cdot e^{(-50) \cdot t}$$

1.1.7. График искомой функции:

$$\tau := \frac{1}{|p|} \quad \tau = 0.02 \quad t := 0, \tau .. 5 \cdot \tau$$



1.2. Используем операторный метод.

1.2.1. Находим независимые начальные условия (п. 1.1.1)

$$u_C(0_-) = u_C(0) = 0.$$

1.2.2. В операторной схеме после коммутации используем метод контурных токов:

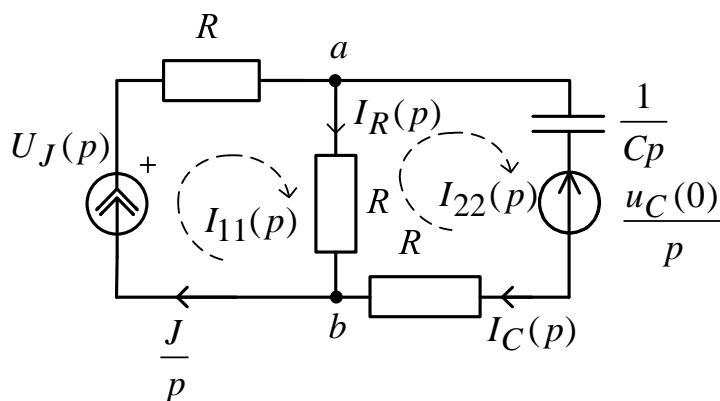


Рис. 206

$$I_{11}(p) = \frac{J}{p};$$

$$I_{22}(p) \left(2R + \frac{1}{Cp} \right) - I_{11}(p)R = -\frac{u_C(0)}{p};$$

$$I_{22}(p) = \frac{I_{11}(p)R - \frac{u_C(0)}{p}}{2R + \frac{1}{Cp}} = \frac{JRC - u_C(0)C}{1 + 2RCp};$$

$$I_R(p) = I_{11}(p) - I_{22}(p) = \frac{J}{p} - \frac{JRC - u_C(0)C}{1 + 2RCp} =$$

$$= \frac{J + J2RCp - JRCp + u_C(0)Cp}{p(1 + 2RCp)} = \frac{J + JRCp + u_C(0)Cp}{p(1 + 2RCp)}.$$

По второму закону Кирхгофа в операторной форме определяем операторное изображение искомого напряжения:

$$\begin{aligned}
U_J(p) &= \frac{J}{p}R + I_R(p)R = \frac{JR}{p} + \frac{JR + JR^2Cp + u_C(0)RCp}{p(1 + 2RCp)} = \\
&= \frac{JR + 2JR^2Cp + JR + JR^2Cp + u_C(0)RCp}{p(1 + 2RCp)} = \\
&= \frac{2JR + 3JR^2Cp + u_C(0)RCp}{p(1 + 2RCp)} = \frac{400 + 6p}{p(1 + 0,02p)} = \frac{D(p)}{B(p)}.
\end{aligned}$$

1.2.3. По теореме разложения находим $u_J(t)$:

$$B(p) = p(1 + 0,02p) = 0; \Rightarrow p_1 = 0; \quad p_2 = -50 \frac{1}{с};$$

$$B'(p) = 1 + 0,04p;$$

$$\begin{aligned}
u_J(t) &= \sum_{k=1}^2 \frac{D_k(p_k)}{B'_k(p_k)} e^{p_k t} = \frac{400 + 6 \cdot 0}{1 + 0,04 \cdot 0} e^{0 \cdot t} + \frac{400 + 6 \cdot (-50)}{1 + 0,04 \cdot (-50)} e^{-50t} = \\
&= 400 - 100e^{-50t}, \text{ В.}
\end{aligned}$$

Результат совпал с классическим методом.

Ниже приводится расчет рассматриваемого примера в среде *MathCAD*.

Документ Mathcad

Исходные данные:

$$\underline{J} := 2 \quad \underline{R} := 100 \quad \underline{c} := 100 \cdot 10^{-6}$$

1.2. Операторный метод, постоянный источник, цепь первого порядка

1.2.1. Определяем независимые начальные условия:

$$U_{co} := 0$$

1.2.2. Определяем изображение искомой функции:

$$I_{22}(p) := I_{22}(p) \cdot \left(2 \cdot R + \frac{1}{c \cdot p} \right) - \frac{J}{p} \cdot R + \frac{U_{co}}{p} \text{ solve, } I_{22}(p) \rightarrow \frac{1}{50 + p}$$

$$UJ(p) := \frac{J}{p} R + \left(\frac{J}{p} - I_{22}(p) \right) \cdot R \text{ simplify} \rightarrow 100 \cdot \frac{200 + 3 \cdot p}{p \cdot (50 + p)}$$

1.2.3. Определяем оригинал искомой функции:

$$Uj(t) := UJ(p) \text{ invlaplace, } p \rightarrow 400 - 100 \cdot e^{(-50) \cdot t}$$

$$Uj(t) \rightarrow 400 - 100 \cdot e^{(-50) \cdot t}$$

$$Uj(0) = 300$$

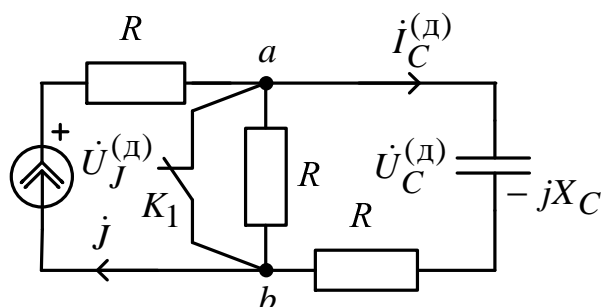
2. При гармоническом источнике тока

$$J(t) = \sqrt{2}J \sin(\omega t + \alpha) = \sqrt{2}2 \sin(100t + 90^\circ), \text{ А,}$$

после срабатывания ключа K_1 определим напряжение $u_J(t)$.

2.1. Используем упрощённый классический метод, когда дифференциальное уравнение для искомой функции $u_J(t)$ не составляется.

2.1.1. ННУ. Определяем независимые начальные условия при $t = 0_-$: $u_C(0_-)$ (схема до коммутации установившийся режим, гармонический источник, символический метод).



$$j = J e^{j\alpha} = 2e^{j90^\circ}, \text{ А;}$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = 100, \text{ Ом;}$$

Рис. 207

$$i_C^{(д)} = j \frac{0}{0 + R - jX_C} = 0;$$

$$\dot{U}_C^{(д)} = (-jX_C) i_C^{(д)} = U_C^{(д)} e^{j\beta} = 0;$$

$$u_C^{(д)}(t) = \sqrt{2} U_C^{(д)} \sin(\omega t + \beta) = 0.$$

Для построения графика $u_J(t)$ определим $u_J(0_-)$:

$$\dot{U}_J^{(д)} = j \underline{Z}_9^{(д)} = jR = 200e^{j90^\circ}, \text{ В;}$$

$$u_J^{(д)}(t) = \sqrt{2} \cdot 200 \sin(\omega t + 90^\circ), \text{ В;}$$

$$u_J(0_-) = \sqrt{2} \cdot 200 \sin(\omega \cdot 0 + 90^\circ) = 282 \text{ В.}$$

2.1.2. Определяем ЗНУ при $t = 0_+$: $u_J(0_+)$ (схема после коммутации ключа K_1):

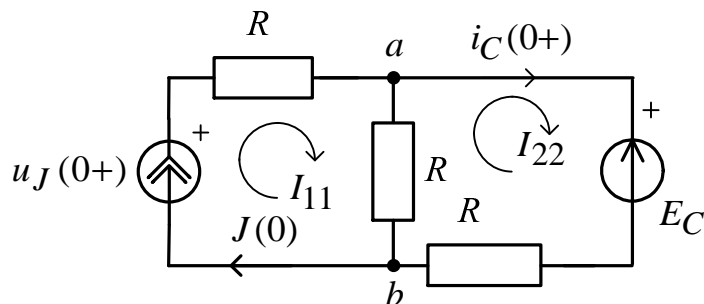


Рис. 208

$$E_C = u_C(0-) = u_C(0+) = 0;$$

$$J(0) = \sqrt{2}J \sin(\omega \cdot 0 + \alpha) = \sqrt{2}2 \sin(90^\circ) = 2,82 \text{ A.}$$

Используем метод контурных токов:

$$I_{11} = J(0) = 2,82 \text{ A;}$$

$$I_{22}2R - I_{11}R = -E_C;$$

$$I_{22} = \frac{I_{11}R - E_C}{2R} = \frac{282 - 0}{200} = 1,41 \text{ A;}$$

$$i_C(0+) = I_{22} = 1,41 \text{ A.}$$

По второму закону Кирхгофа для внешнего контура

$$u_J(0+) - E_C = J(0)R + i_C(0+)R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_J(0+) = E_C + J(0)R + i_C(0+)R = 0 + 282 + 141 = 424,64 \text{ В.}$$

2.1.3. Определяем принуждённую составляющую $u_{Jпр}(t)$ при $t = \infty$: (схема после коммутации ключа K_1 : установившейся режим, гармонический источник, символический метод):

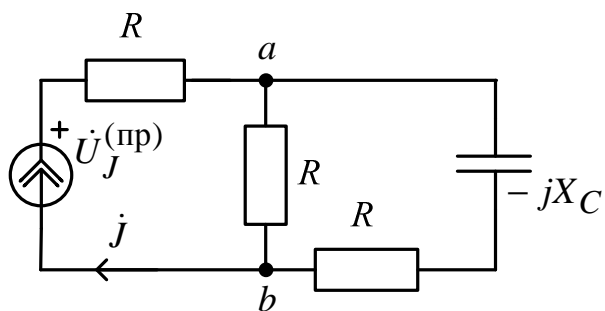


Рис. 209

$$\dot{J} = J e^{j\alpha} = 2e^{j90^\circ}, \text{ A,}$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = 100, \text{ Ом.}$$

По закону Ома

$$\begin{aligned} \dot{U}_J^{(\text{пр})} &= j \cdot \underline{Z}_3^{(\text{п})} = j \left[R + \frac{R(R - jX_C)}{2R - jX_C} \right] = \\ &= 2e^{j90^\circ} \left[100 + \frac{100(100 - j100)}{200 - j100} \right] = \\ &= 2e^{j90^\circ} \cdot 161,245e^{-j7^\circ} = 322,5e^{j83^\circ}, \text{ В.} \end{aligned}$$

Тогда

$$u_{J\text{пр}}(t) = \sqrt{2} 322,45 \sin(100t + 83^\circ), \text{ В;}$$

$$u_{J\text{пр}}(0) = \sqrt{2} \cdot 322,45 \sin(100 \cdot 0 + 83^\circ) = 452,54 \text{ В.}$$

2.1.4. Определяем корень характеристического уравнения p : Используем метод сопротивления цепи после коммутации. Аналогично п. 1.1.4 получаем $p = -50 \frac{1}{\text{с}}$.

2.1.5. Определяем постоянную интегрирования B :

$$B = u_J(0+) - u_{J\text{пр}}(0) = 424,26 - 452,54 = -28,28 \text{ В.}$$

2.1.6. Окончательный результат

$$u_J(t) = u_{J\text{пр}}(t) + Be^{pt} = \sqrt{2} \cdot 322,5 \sin(100t + 83^\circ) - 28,28e^{-50t}, \text{ В,}$$

причем $\tau = \frac{1}{|p|} = \frac{1}{|-50|} = 0,02 \text{ с}$ – постоянная времени;

$t_{\text{п}} = 5\tau = 5 \cdot 0,02 = 0,1 \text{ с}$ – время окончания переходного процесса;

$T = \frac{2\pi}{\omega} = 6,28 \cdot 10^{-2} \text{ с}$ – период принужденной составляющей.

Заполняем таблицу для построения графика:

| t | 0 | τ | 2τ | 3τ | 4τ | 5τ |
|--------------------------------|--------|----------|----------|---------|---------|---------|
| $e^{-t/\tau}$ | 1 | 0,368 | 0,135 | 0,05 | 0,018 | 0,007 |
| $-29,67 e^{-\frac{t}{\tau}}$ | -29,67 | -10,915 | -4,015 | -1,477 | -0,543 | -0,2 |
| $u_{J\text{пр}}(t), \text{ В}$ | 452,67 | -131,838 | -337,949 | 419,11 | -10,874 | -410,06 |
| $u_J(t), \text{ В}$ | 423 | -148,753 | -341,964 | 417,63 | -11,417 | -410,26 |

Строим график, для построения можно использовать MathCAD.

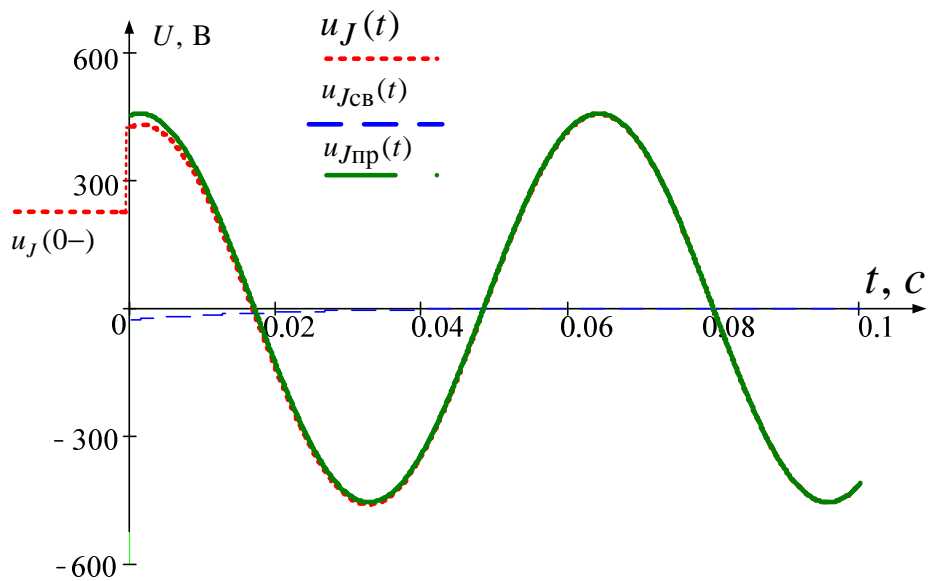


Рис. 210

Ниже приводится расчет рассматриваемого примера в среде *MathCAD*.

Документ Mathcad

Исходные данные:

$$\begin{aligned} J_1 &:= 2 & J &:= J_1 \cdot e^{90i \cdot \text{deg}} & \text{ORIGIN} &:= 1 \\ \omega &:= 100 & R &:= 100 & c &:= 100 \cdot 10^{-6} \end{aligned}$$

$$g(x) := \sqrt{2} \cdot |x| \cdot \sin(\arg(x))$$

$$h(z) := \begin{cases} x_{1,1} \leftarrow \text{Re}(z) \\ x_{1,2} \leftarrow \text{Im}(z) \\ x_{2,1} \leftarrow |z| \\ x_{2,2} \leftarrow \frac{\arg(z)}{\text{deg}} \\ x \end{cases}$$

2.1. Классический метод, гармонический источник

$$x_c := \frac{1}{\omega \cdot c} \quad x_c = 100$$

2.1.1. Определяем независимые начальные условия:

$$U_{c0} := 0$$

$$U_{J_d} := J \cdot R \quad h(U_{J_d}) = \begin{pmatrix} 0 & 200 \\ 200 & 90 \end{pmatrix}$$

$$g(U_{J_d}) = 282.843$$

2.1.2. Определяем зависимые начальные условия:

$$J_0 := g(J) \quad J_0 = 2.828$$

$$I_{22} := I_{22} \cdot 2 \cdot R - J_0 \cdot R + U_{c0} \text{ solve, } I_{22} \rightarrow 2^{\frac{1}{2}} \quad I_{22} = 1.414$$

$$U_{J_0} := U_{c0} + J_0 \cdot R + I_{22} \cdot R \quad U_{J_0} = 424.264$$

2.1.3. Определяем принуждённую составляющую:

$$U_{J_{пр}} := J \cdot \left[R + \frac{R \cdot (R - i \cdot x_c)}{2 \cdot R - i \cdot x_c} \right] \quad U_{J_{пр}} = 40 + 320i$$

$$h(U_{J_{пр}}) = \begin{pmatrix} 40 & 320 \\ 322.49 & 82.875 \end{pmatrix}$$

$$U_{J_{пр0}} := g(U_{J_{пр}}) \quad U_{J_{пр0}} = 452.548$$

$$I_{c_{пр}} := J \cdot \frac{R}{2 \cdot R - i \cdot x_c} \quad h(I_{c_{пр}}) = \begin{pmatrix} -0.4 & 0.8 \\ 0.894 & 116.565 \end{pmatrix}$$

$$U_{c_{пр}} := I_{c_{пр}} \cdot -i \cdot x_c$$

$$g(U_{c_{пр}}) = 56.569 \quad h(U_{c_{пр}}) = \begin{pmatrix} 80 & 40 \\ 89.443 & 26.565 \end{pmatrix}$$

2.1.4. Определяем корень характеристического уравнения:

$$p := \frac{1}{c \cdot p} + 2 \cdot R \text{ solve } , p \rightarrow -50 \quad p = -50$$

2.1.5. Определяем постоянную интегрирования:

$$B := U_{J0} - U_{Jnp0} \quad B = -28.284$$

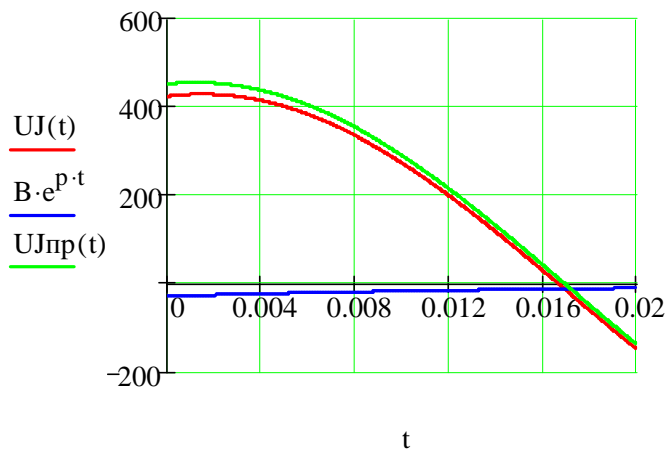
2.1.6. Окончательный результат:

$$U_{Jnp}(t) := |U_{Jnp}| \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\omega \cdot t + \arg(U_{Jnp}))$$

$$U_J(t) := U_{Jnp}(t) + B \cdot e^{p \cdot t}$$

2.1.7. Строим график искомой функции:

$$\tau := \frac{1}{|p|} \quad \tau = 0.02 \quad t := 0, .001 \cdot \tau .. \tau$$

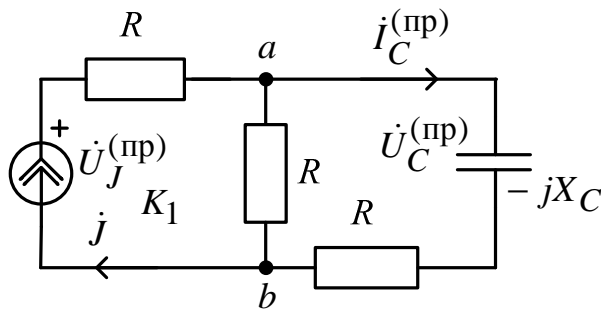


2.2. Используем комбинированный операторно-классический метод для определения $u_J(t)$.

2.2.1. Находим независимые начальные условия (п. 2.1.1):

$$u_C(0-) = u_C(0) = 0.$$

2.2.2. Определяем принуждённые составляющие $u_{Jпр}(t)$, $u_{Cпр}(t)$ при $t = \infty$: (схема после коммутации ключа K_1 : установившийся режим, гармонический источник, символический метод.)



$$j = J e^{j\alpha} = 2e^{j90^\circ}, \text{ A};$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = 100, \text{ Ом},$$

Рис. 211

$$\begin{aligned} \dot{U}_J^{(np)} &= j \cdot \underline{Z}_3^{(n)} = j \left[R + \frac{R(R - jX_C)}{2R - jX_C} \right] = \\ &= 2e^{j90^\circ} \left[100 + \frac{100(100 - j100)}{200 - j100} \right] = \\ &= 2e^{j90^\circ} \cdot 161,245e^{-j7^\circ} = 322,5e^{j83^\circ}, \text{ В}; \\ \dot{I}_C^{(np)} &= j \frac{R}{2R - jX_C} = 2e^{j90^\circ} \left[\frac{100}{200 - j100} \right] = \\ &= 2e^{j90^\circ} 1,41e^{j38^\circ} = 0,894e^{j116,6^\circ}, \text{ А}; \\ \dot{U}_C^{(np)} &= \dot{I}_C^{(np)} (-jX_C) = \\ &= 0,894e^{j116,6^\circ} (-j100) = 89,4e^{j26,6^\circ}, \text{ В}. \end{aligned}$$

В результате

$$u_{Jпр}(t) = \sqrt{2} \cdot 322,45 \sin(100t + 83^\circ), \text{ В};$$

$$u_{Cпр}(t) = \sqrt{2} \cdot 89,4 \sin(100t + 26,6^\circ), \text{ В};$$

$$u_{Cпр}(0) = \sqrt{2} \cdot 89,4 \sin(26,6^\circ) = 56,61 \text{ В}.$$

2.2.3. Определяем начальное значение свободной составляющей напряжения на ёмкости:

$$u_{C_{св}}(0) = u_C(0) - u_{C_{пр}}(0) = 0 - 56,61 = -56,61 \text{ В.}$$

2.2.4. Рассчитываем операторную схему замещения для свободных составляющих.

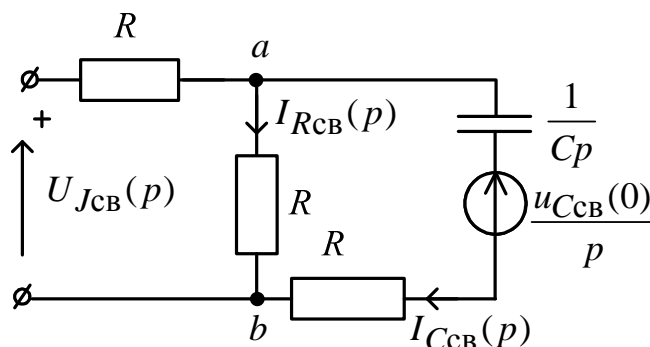


Рис. 212

$$I_{R_{св}}(p) = \frac{u_{C_{св}}(0)}{p \left(2R + \frac{1}{Cp} \right)} = \frac{u_{C_{св}}(0)C}{1 + 2RCp};$$

$$U_{J_{св}}(p) = RI_{R_{св}}(p) = \frac{u_{C_{св}}(0)RC}{1 + 2RCp} = -\frac{0,566}{1 + 0,02p} = \frac{D(p)}{B(p)}.$$

2.2.5. По теореме разложения и принципу наложения получаем окончательный результат

$$\begin{aligned} u_J(t) &= u_{J_{пр}}(t) + u_{J_{св}}(t) = \\ &= \sqrt{2} \cdot 322,45 \sin(100t + 83^\circ) + \sum_{k=1}^2 \frac{D_k(p_k)}{B'_k(p_k)} e^{p_k t} = \\ &= \sqrt{2} \cdot 322,45 \sin(100t + 83^\circ) - 28,28 e^{-50t}, \text{ В} \end{aligned}$$

– результат практически совпал с классическим методом.

3. При импульсном источнике тока $J(t) = Je^{2pt} = 2e^{-100t}$, А (p – корень характеристического уравнения) и нулевых начальных условиях (ключ K_1 сработал) определяем интегралом Дюамеля напряжение $u_J(t)$.

3.1. Находим переходную характеристику $h(t)$ для $u_J(t)$ операторным методом при $u_C(0) = u_C(0_-) = 0$.

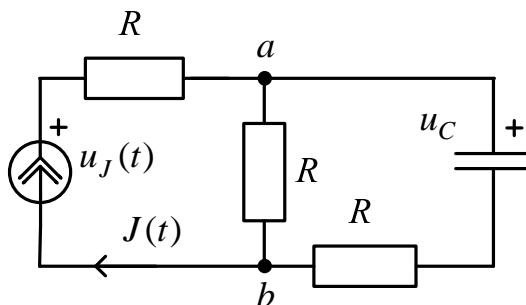


Рис. 213

По закону Ома в операторной форме

$$h(p) = \frac{1}{p} \left[R + \frac{R \left(R + \frac{1}{Cp} \right)}{2R + \frac{1}{Cp}} \right] = \frac{1}{p} \left[R + \frac{R(1 + RCp)}{1 + 2RCp} \right] =$$

$$= \frac{R}{p} + \frac{R + R^2 Cp}{p(1 + 2RCp)} = \frac{R}{p} + \frac{D(p)}{B(p)}.$$

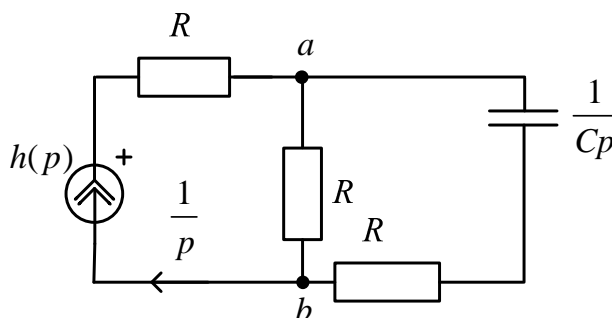


Рис. 214

По теореме разложения находим $h(t)$:

$$B(p) = p(1 + 2RCp) = 0, \Rightarrow p_1 = 0; \quad p_2 = -\frac{1}{2RC} = -50 \frac{1}{c};$$

$$B'(p) = 1 + 4RCp;$$

$$h(t) = R + \sum_{k=1}^2 \frac{D_k(p_k)}{B'_k(p_k)} e^{p_k t} = R + R + \frac{R + R^2 C \cdot \left(-\frac{1}{2RC}\right)}{1 + 4RC \cdot \left(-\frac{1}{2RC}\right)} e^{-\frac{t}{2RC}} =$$

$$= 2R + \frac{0,5R}{-1} e^{-\frac{t}{2RC}} = 2R - 0,5R e^{-\frac{t}{2RC}} = 200 - 50e^{-50t}, \text{ Ом}$$

– переходное сопротивление.

Проверка:

а) $t = 0, \quad h(0) = 2R - 0,5R = \frac{3R}{2} = R_3(0)$ – верно, т.к. $u_C(0_-) = 0$ и

C – замкнута;

б) $t = \infty, \quad h(\infty) = 2R = R_3(\infty)$ – верно, т.к. C – разрыв.

3.2. Рассчитаем интегралом Дюамеля $u_J(t)$:

$$u_J(t) = J(0)h(t) + \int_0^t J'(\tau)h(t-\tau)d\tau,$$

где $J(0) = 2 \text{ А}; J'(\tau) = -200e^{-100\tau}, \text{ А/с},$

$$h(t-\tau) = 200 - 50e^{-(50t-\tau)} = 200 - 50e^{-50t} e^{50\tau}, \text{ Ом.}$$

Тогда

$$u_J(t) = 400 - 100e^{-50t} + \int_0^t \left[-200e^{-100\tau}\right] \left[200 - 50e^{-50t} e^{50\tau}\right] d\tau =$$

$$= 400 - 100e^{-50t} - 40000 \int_0^t e^{-100\tau} d\tau + 1000e^{-50t} \int_0^t e^{-50\tau} d\tau =$$

$$= 400 - 100e^{-50t} + 400e^{-100\tau} \Big|_0^t - 200e^{-50t} e^{-50\tau} \Big|_0^t =$$

$$= 400 - 100e^{-50t} + 400e^{-100t} - 400 - 200e^{-50t} (e^{-50t} - 1) =$$

$$= 400e^{-100t} - 100e^{-50t} - 200e^{-100t} + 200e^{-50t} = 200e^{-100t} + 100e^{-50t}, \text{ В.}$$

Проверка:

а) $t = 0, \quad u_J(0) = 300 \text{ В}$ – верно, т.к.

$$u_J(0) = J(0) \cdot R_3(0) = 2 \cdot \frac{3R}{2} = 300 \text{ В};$$

б) $t = \infty$, $u_J(\infty) = 0$ – верно, т.к.

$$u_J(\infty) = J(\infty)R_3(\infty) = 0 \cdot 2R = 0.$$

3.3. Строим график $u_J(t) = 200e^{-100t} + 100e^{-50t}$, В.

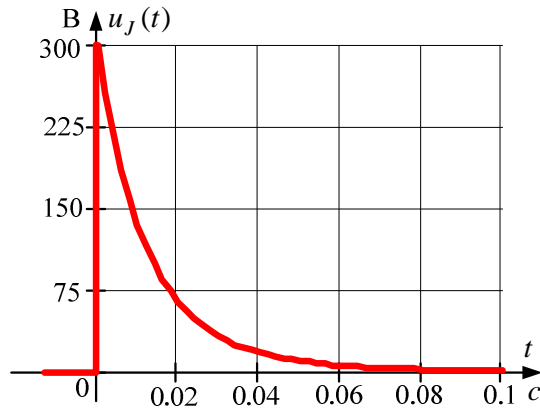


Рис. 215

Ниже приводится расчет рассматриваемого примера в среде *MathCAD*.

Документ Mathcad

3. Интеграл Дюамеля, экспоненциальный источник

$$J(t) := 2e^{-100t}$$

3.1. Переходная характеристика:

$$h(t) := 2 \cdot R - 0.5 \cdot R \cdot e^{-50t}$$

3.2. Искомая функция напряжения на источнике тока:

$$UJ(t) := J(0) \cdot h(t) + \int_0^t \left(\frac{d}{dx} J(x) \right) \cdot h(t-x) dx$$

$$UJ(t) \text{ simplify } \rightarrow 100 \cdot e^{(-50.) \cdot t} + 200 \cdot e^{(-100.) \cdot t}$$

4. Цепь второго порядка. При постоянном источнике тока $J(t) = J$ после срабатывания ключа K_2 определяем напряжение $u_J(t)$. (Ключ K_1 давно уже сработал).

4.1. Используем упрощённый **классический метод**, когда дифференциальное уравнение для искомой функции $u_J(t)$ не составляется.

4.1.1. Определяем независимые начальные условия (ННУ): $u_C(0_-)$ при $t = 0_-$ (Схема до коммутации: установившийся режим, постоянный источник, C – разрыв, L – коротка).

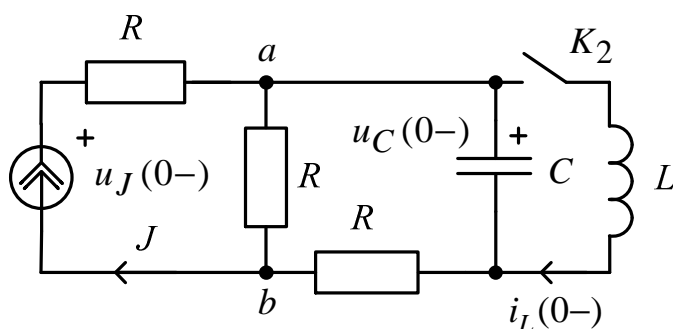


Рис. 216

Находим: $i_L(0_-) = 0$; $u_C(0_-) = J \cdot R = 200 \text{ В}$.

Для построения графика $u_J(t)$ определим $u_J(0_-) = J \cdot 2R = 400 \text{ В}$.

4.1.2. Определяем ЗНУ $U_J(0_+)$ при $t = 0_+$ (Схема после коммутации ключа K_2):

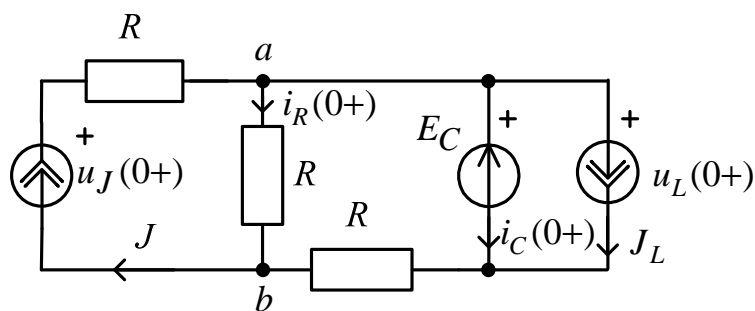


Рис. 217

$$J_L = i_L(0_-) = i_L(0_+) = 0;$$

$$E_C = u_C(0_-) = u_C(0_+) = 200 \text{ В} \text{ – законы коммутации.}$$

По законам Кирхгофа

$$u_L(0_+) = E_C = 200 \text{ В};$$

$$\begin{cases} u_J(0+) = JR + E_C + R \cdot (i_C(0+) + J_L); \\ u_J(0+) = JR + R \cdot i_R(0+); \\ J = i_R(0+) + i_C(0+) + J_L; \end{cases}$$

$$i_R(0+) = J - i_C(0+);$$

$$u_J(0+) = JR + JR - R \cdot i_C(0+) = 2JR - R \cdot i_C(0+);$$

$$2JR - R i_C(0+) = JR + E_C + R \cdot i_C(0+);$$

$$i_C(0+) = \frac{JR - E_C}{2R} = \frac{200 - 200}{200} = 0;$$

$$u_J(0+) = 2JR - R \cdot i_C(0+) = 400 \text{ В};$$

$$\left. \frac{di_L}{dt} \right|_{t=0+} = \frac{u_L(0+)}{L} = 200 \frac{\text{А}}{\text{с}};$$

$$\left. \frac{du_C}{dt} \right|_{t=0+} = \frac{i_C(0+)}{C} = 0 \frac{\text{В}}{\text{с}}.$$

Находим $\left. \frac{du_J}{dt} \right|_{t=0+}$.

Записываем уравнения по законам Кирхгофа:

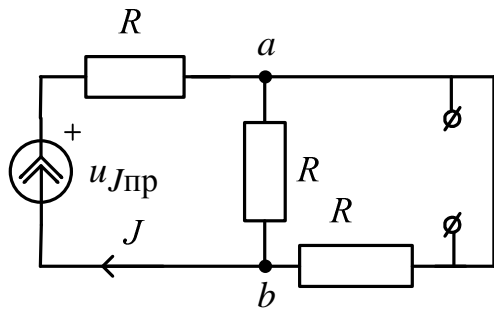
$$\begin{cases} u_J = JR + u_C + R \cdot (i_C + i_L); \\ u_J = JR + R \cdot i_R \Rightarrow i_R = \frac{u_J}{R} - J; \\ J = i_R + i_C + i_L; \Rightarrow i_C = J - i_R - i_L = 2J - \frac{u_J}{R} - i_L; \end{cases}$$

$$u_J = JR + R \left[i_L + 2J - \frac{u_J}{R} - i_L \right] + u_C;$$

$$\Rightarrow u_J = 3JR - u_J + u_C; \Rightarrow u_J = \frac{3}{2}JR + \frac{u_C}{2};$$

$$\left. \frac{du_J}{dt} \right|_{t=0+} = \frac{3R}{2} \frac{dJ}{dt} + \frac{1}{2} \frac{du_C}{dt}; \left. \frac{du_J}{dt} \right|_{t=0+} = \frac{1}{2} \frac{du_C}{dt} \Big|_{t=0+} = 0.$$

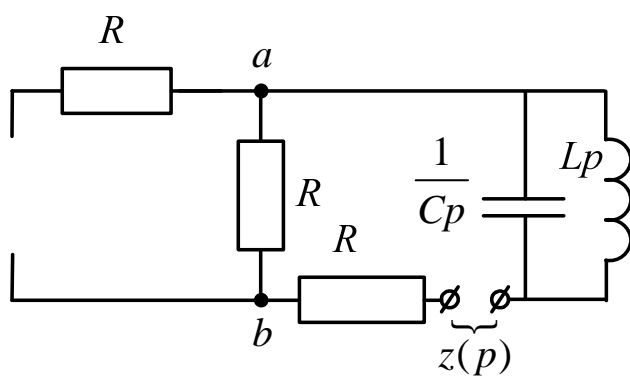
4.1.3. Определяем принуждённую составляющую $u_{J\text{пр}}$ при $t = \infty$: (Схема после коммутации ключа K_2 : установившийся режим, постоянный источник, C – разрыв, L – коротка);



$$u_{Jпр} = J \left[R + \frac{R \cdot R}{2R} \right] = 2 \cdot 150 = 300 \text{ В.}$$

Рис. 218

4.1.4. Определяем корень характеристического уравнения p . Используем метод сопротивления цепи после коммутации: $C \rightarrow \frac{1}{Cp}$; $L \rightarrow Lp$, причём $R_J = \infty$, а $R_E = 0$.



$$z(p) = R + R + \frac{\frac{1}{Cp} Lp}{\frac{1}{Cp} + Lp} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p^2 + \frac{1}{2RC} p + \frac{1}{Lp} = 0;$$

Рис. 219

$$p_{1,2} = -\frac{1}{4RC} \pm \sqrt{\frac{1}{16R^2C^2} - \frac{1}{LC}} = -25 \pm j96,8 = -\delta \pm j\omega_{св}, \frac{1}{c}.$$

4.1.5. Определяем постоянные интегрирования B и β :

$$\delta = 25 \frac{1}{c}; \quad \omega_{св} = 98,6 \frac{1}{c};$$

$$\begin{cases} u_J(t) = u_{Jпр} + Be^{-\delta t} \cos(\omega_{св}t + \beta); \\ \frac{du_J(t)}{dt} = -\delta Be^{-\delta t} \cos(\omega_{св}t + \beta) - \omega_{св} e^{-\delta t} \sin(\omega_{св}t + \beta) \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} u_J(0+) = u_{J\text{пр}} + B \cos(\beta); \\ \left. \frac{du_J(t)}{dt} \right|_{t=0+} = -\delta B \cos(\beta) - \omega_{\text{св}} e^{-\delta t} \sin(\beta). \end{cases}$$

$$\begin{cases} 400 = 300 + B \cos \beta; \\ 0 = -25B \cos \beta - 96,8B \sin \beta. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 100 = B \cos \beta; \\ \text{tg} \beta = -0,258. \end{cases}$$

$$\beta = -0,252 \text{ рад} = -14,467^\circ; B = \frac{100}{\cos \beta} = 103,275 \text{ В.}$$

4.1.6. Окончательный результат –

$$\begin{aligned} u_J(t) &= u_{J\text{пр}} + B e^{-\delta t} \cos(\omega_{\text{св}} t + \beta) = \\ &= 300 + 103,275 e^{-25t} \cos(96,8t - 14,467^\circ), \text{ В,} \end{aligned}$$

где $\tau = \frac{1}{\delta} = \frac{1}{25} = 0,04 \text{ с}$ – постоянная времени;

$t_{\text{п}} = 5\tau = 5 \cdot 0,04 = 0,2 \text{ с}$ – длительность переходного процесса;

$T = \frac{2\pi}{\omega_{\text{св}}} = 0,065 \text{ с}$ – период свободных колебаний.

4.1.7. На интервале времени $0 \leq t \leq t_{\text{п}} = 0,2 \text{ с}$ при помощи MathCAD строим $u_J(t)$.

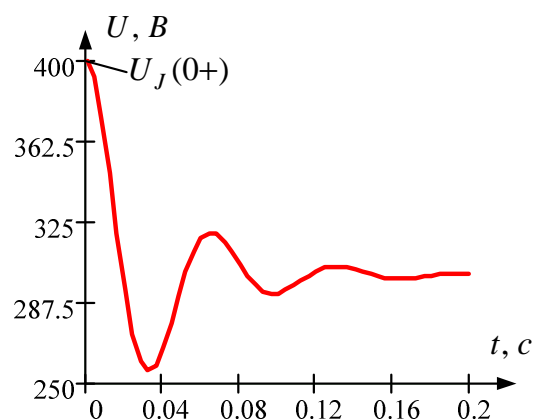


Рис. 220

Ниже приводится расчет рассматриваемого примера в среде *MathCAD*.

ORIGIN:= 1

Документ Mathcad

$J := 2$ $L := 1$ $R := 100$ $c := 100 \cdot 10^{-6}$

4.1. Классический метод, постоянный источник, цепь второго порядка

4.1.1. Определяем независимые начальные условия:

$$\begin{aligned} i_{L0} &:= 0 & i_{L0} &= 0 \\ U_{C0} &:= J \cdot R & U_{C0} &= 200 \end{aligned}$$

4.1.2. Определяем зависимые начальные условия:

$$i_{C0} := i_{C0} \cdot (2 \cdot R) - J \cdot R + U_{C0} \text{ solve, } i_{C0} \rightarrow 0$$

4.1.3. Определяем принуждённую составляющую:

$$\begin{aligned} U_{спр} &:= 0 \\ U_{Jпр} &:= J \cdot \left(\frac{3}{2} R \right) & U_{Jпр} &= 300 \end{aligned}$$

4.1.4. Определяем корень характеристического уравнения:

$$p := \frac{1}{c \cdot p} + \frac{2 \cdot R \cdot L \cdot p}{2R + L \cdot p} \left| \begin{array}{l} \text{solve, } p \\ \text{float, } 3 \end{array} \right. \rightarrow \begin{bmatrix} (-25.) + 96.8 \cdot i \\ (-25.) - 96.8 \cdot i \end{bmatrix}$$

4.1.5. Определяем постоянные интегрирования:

$$a := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} U_{C0} - U_{спр} \\ \frac{i_{C0}}{c} \end{pmatrix} \quad B := a^{-1} \cdot b \quad B = \begin{pmatrix} 100 - 25.826i \\ 100 + 25.826i \end{pmatrix}$$

4.1.6. Окончательный результат:

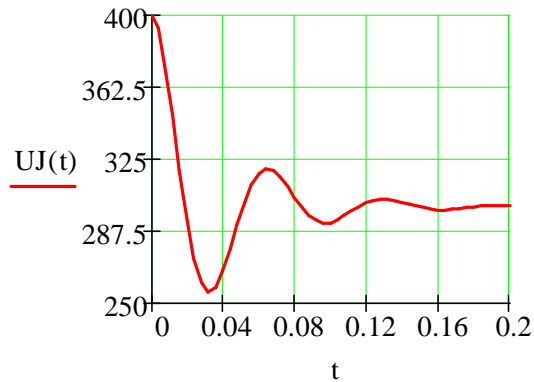
$$U_C(t) := U_{спр} + B_1 \cdot e^{p_1 \cdot t} + B_2 \cdot e^{p_2 \cdot t}$$

$$U_J(t) := \frac{3}{2} \cdot R \cdot J + \frac{1}{2} \cdot U_C(t)$$

$$U_J(t) \left| \begin{array}{l} \text{complex} \\ \text{float, } 3 \end{array} \right. \rightarrow 300. + 100. \cdot e^{(-25.) \cdot t} \cdot \cos(96.8 \cdot t) + 25.8 \cdot e^{(-25.) \cdot t} \cdot \sin(96.8 \cdot t)$$

4.1.7. График искомой функции

$$\tau := \frac{1}{|\operatorname{Re}(p_1)|} \quad \tau = 0.04 \quad t := 0, \tau \cdot 0.1 \dots 5 \cdot \tau$$



В результате преобразований

$$\begin{aligned} & 300 + 100e^{-25t} \cos(96,8t) + 25,82e^{-25t} \sin(96,8t) = \\ & = 300 + e^{-25t} (100e^{j90^\circ} + 25,82e^{j0^\circ}) = \\ & = 300 + e^{-25t} (103,28e^{j75,522^\circ}) = \\ & = 300 + e^{-25t} 103,28 \sin(96,8t + 75,522^\circ) = \\ & = 300 + 103,28e^{-25t} \cos(96,8t - 14,478^\circ). \end{aligned}$$

Т.е. результат совпадает с расчётом «вручную».

4.2. Используем операторный метод для определения $u_J(t)$.

4.2.1. Из расчёта установившегося режима до коммутации находим независимые начальные условия (п. 4.1.1):

$$i_L(0-) = 0; u_C(0-) = J \cdot R = 200 \text{ В.}$$

4.2.2. В операторной схеме после коммутации используем метод наложения:

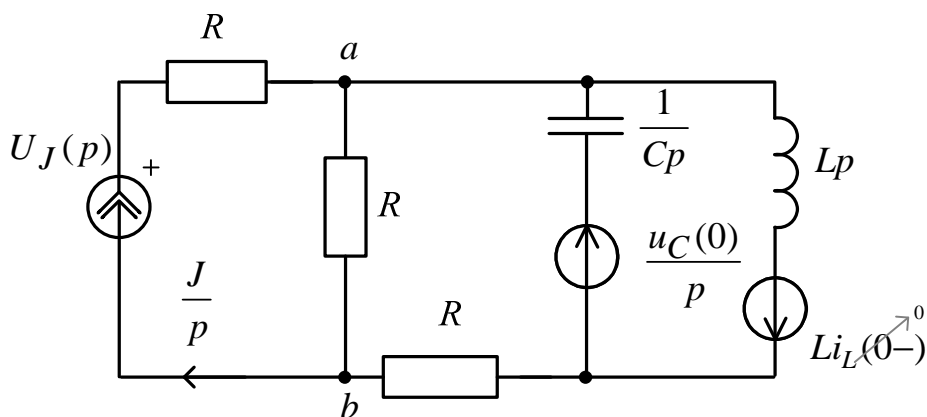


Рис. 221

а) подсхема с источником тока $\frac{J}{p}$:

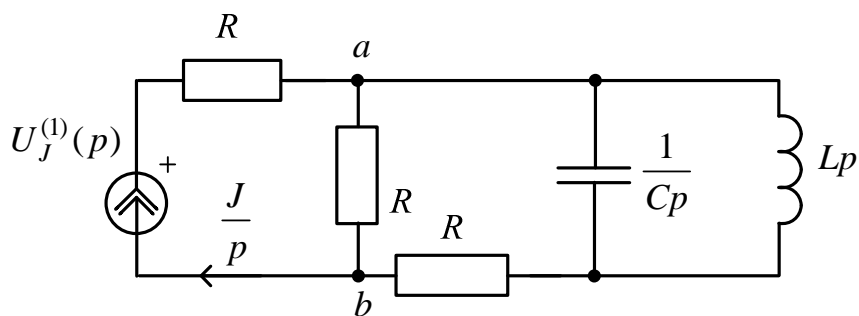


Рис. 222

$$\begin{aligned}
U_J^{(1)}(p) &= \frac{J}{p} Z_3^{(1)}(p) = \frac{J}{p} \left[R + \frac{R \left(R + \frac{\frac{1}{Cp} Lp}{\frac{1}{Cp} + Lp} \right)}{2R + \frac{\frac{1}{Cp} Lp}{\frac{1}{Cp} + Lp}} \right] = \\
&= \frac{J}{p} \left[R + \frac{R^2 + \frac{RLp}{1 + L Cp^2}}{2R + \frac{Lp}{1 + L Cp^2}} \right] = \frac{J}{p} \left[R + \frac{R^2 + R^2 L Cp^2 + RLp}{2R + 2RL Cp^2 + Lp} \right] = \\
&= \frac{J}{p} \frac{2R^2 + 2R^2 L Cp^2 + RLp + R^2 + R^2 L Cp^2 + LRp}{2R + 2RL Cp^2 + Lp} = \\
&= \frac{J}{p} \frac{(3R^2 L Cp^2 + 2RLp + 3R^2)}{(2RL Cp^2 + Lp + 2R)} = \frac{6p^2 + 400p + 60000}{p(0,02p^2 + p + 200)} = \frac{D_1(p)}{B_1(p)}.
\end{aligned}$$

б) подсьема с источником $\frac{u_C(0)}{p}$:

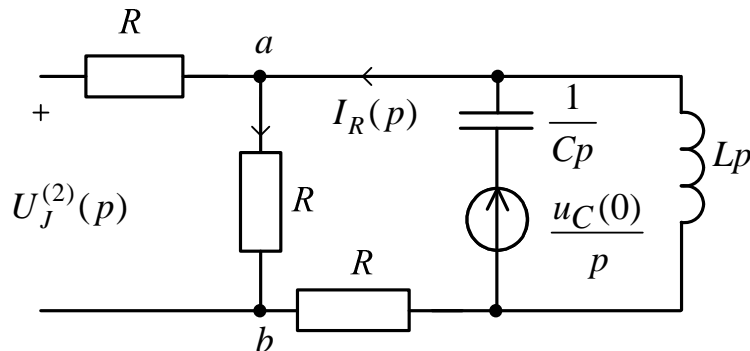


Рис. 223

$$\begin{aligned}
 U_J^{(2)}(p) &= RI_R(p) = R \frac{\frac{u_C(0)}{p}}{\frac{1}{Cp} + \frac{2RLp}{2R + Lp}} \cdot \frac{Lp}{2R + Lp} = \\
 &= \frac{u_C(0)RLp}{p \left[\frac{2R + Lp}{Cp} + 2RLp \right]} = \frac{u_C(0)RCLp}{2RLCp^2 + Lp + 2R} = \\
 &= \frac{2p}{0,02p^2 + p + 200} = \frac{D_2(p)}{B_2(p)}.
 \end{aligned}$$

Операторное изображение искомого напряжения

$$U_J(p) = U_J^{(1)}(p) + U_J^{(2)}(p) = \frac{8p^2 + 400p + 60000}{p(0,02p^2 + p + 200)} = \frac{D(p)}{B(p)}.$$

4.2.3. По теореме разложения находим искомое напряжение

$u_J(t)$:

$$B(p) = p(0,02p^2 + p + 200) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_1 = 0; \quad p_{2,3} = -25 \pm j96,8 = -\delta \pm j\omega_{CB} \frac{1}{c};$$

$$B'(p) = 0,06p^2 + 2p + 200;$$

$$u_J(t) = \sum_{k=1}^3 \frac{D_k(p_k)}{B'_k(p_k)} e^{p_k t} = \frac{60000}{200} + 2 \operatorname{Re} \left(\sum_{k=2}^3 \frac{D(p_2)}{B'(p_2)} e^{p_2 t} \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= 300 + 2 \operatorname{Re} \left[\frac{8(-25 + j96,8)^2 + 400(-25 + j96,8) + 60000}{0,06(-25 + j96,8)^2 + 2(-25 + j96,8) + 200} e^{(-25 + j96,8)t} \right] = \\
&= 300 + 2 \operatorname{Re} \left[\frac{2000}{-375 + j96,8} e^{-25t} e^{j96,8t} \right] = \\
&= 300 + 2 \operatorname{Re} \left[51,64 e^{-j14,478^\circ} e^{-25t} e^{j96,8t} \right] = \\
&= 300 + 2 \cdot 51,64 \cdot e^{-25t} \cos(96,8t - 14,478^\circ) = \\
&= 300 + 103,28 e^{-25t} \cos(96,8t - 14,478^\circ), \text{ В.}
\end{aligned}$$

Проверка:

$$u_J(0) = 300 + 103,28 \cdot \cos(-14,478^\circ) = 400 \text{ В.}$$

$$\left. \frac{du_J}{dt} \right|_{t=0} = 103,28(-25) \cos(-14,478^\circ) -$$

$$-103,28 \cdot 96,8 \sin(-14,478^\circ) = -0,547 \frac{\text{В}}{\text{с}} \approx 0.$$

Ниже приводится расчет рассматриваемого примера программой MathCAD.

Документ Mathcad

$$\underline{\text{ORIGIN}} := 1$$

$$\underline{J} := 2 \quad \underline{L} := 1 \quad \underline{R} := 100 \quad \underline{c} := 100 \cdot 10^{-6}$$

4.2. Операторный метод, постоянный источник, цепь второго порядка

4.2.1. Определяем независимые начальные условия:

$$iLo := 0 \quad iLo = 0$$

$$Uco := J \cdot R \quad Uco = 200$$

4.2.2. Определяем изображение искомой функции:

$$UJ(p) := \frac{J}{p} \cdot \left[R + \frac{R \cdot \left(R + \frac{\frac{1}{c \cdot p} \cdot L \cdot p}{\frac{1}{c \cdot p} + L \cdot p} \right)}{2 \cdot R + \frac{\frac{1}{c \cdot p} \cdot L \cdot p}{\frac{1}{c \cdot p} + L \cdot p}} \right] + R \cdot \frac{\frac{Uco}{p}}{\frac{1}{c \cdot p} + \frac{2 \cdot R \cdot L \cdot p}{2 \cdot R + L \cdot p}} \cdot \frac{L \cdot p}{L \cdot p + 2 \cdot R}$$

$$UJ(p) \text{ simplify} \rightarrow 400 \cdot \frac{7500 + 50 \cdot p + p^2}{(10000 + 50 \cdot p + p^2) \cdot p}$$

4.2.3. Определяем оригинал искомой функции:

$$Uj(t) := UJ(p) \left| \begin{array}{l} \text{invlaplace, } p \\ \text{float, } 3 \end{array} \right. \rightarrow 300. + 100. \cdot e^{(-25.) \cdot t} \cdot \cos(96.8 \cdot t) + 25.8 \cdot e^{(-25.) \cdot t} \cdot \sin(96.8 \cdot t)$$

$$Uj(t) \rightarrow 300. + 100. \cdot e^{(-25.) \cdot t} \cdot \cos(96.8 \cdot t) + 25.8 \cdot e^{(-25.) \cdot t} \cdot \sin(96.8 \cdot t)$$

4.3. Методом переменных состояния находим $u_J(t)$.

4.3.1. Начальные условия:

$$i_L(0-) = 0; u_C(0-) = J \cdot R = 200 \text{ В}; u_J(0) = 400 \text{ В}.$$

4.3.2. По законам Кирхгофа составляем уравнения состояния:

$$\begin{cases} u_L = u_C; \\ R \cdot i_R = u_C + i_L R + i_C R \Rightarrow i_R = \frac{u_C}{R} + i_C + i_L; \\ J = i_R + i_C + i_L; \Rightarrow J = \frac{u_C}{R} + 2i_C + 2i_L; \end{cases}$$

$$J = \frac{u_C}{R} + 2C \frac{du_C}{dt} + 2i_L; \Rightarrow \frac{du_C}{dt} = -\frac{1}{C} i_L - \frac{1}{2CR} u_C + \frac{J}{2C};$$

$$u_L = u_C \Rightarrow L \frac{di_L}{dt} = 0 \cdot i_L + u_C + 0 \cdot J;$$

$$\begin{cases} \frac{di_L}{dt} = 0 \cdot i_L + \frac{u_C}{L} + 0 \cdot J; \\ \frac{du_C}{dt} = -\frac{1}{C} i_L - \frac{1}{2CR} u_C + \frac{J}{2C}; \end{cases}$$

$$u_J = 0 \cdot i_L + \frac{1}{2} u_C + \frac{3R}{2} \cdot J.$$

4.3.3. Решаем с использованием MathCAD методом Эйлера. Пункт 4.3.3 можно решить методом Рунге – Кутта (смотри пример п. 1.11).

Документ Mathcad

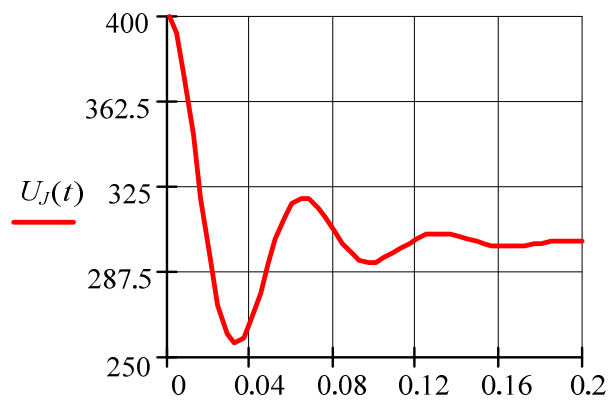
$$J := 2 \quad L := 1 \quad R := 100 \quad c := 100 \cdot 10^{-6}$$

$$p := \frac{1}{c \cdot p} + \frac{2 \cdot R \cdot L \cdot p}{2R + L \cdot p} \text{ solve, } p \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{15^2} \\ -25 + 25 \cdot i \cdot 15^2 \\ \frac{1}{15^2} \\ -25 - 25 \cdot i \cdot 15^2 \end{pmatrix} \quad \tau := \frac{1}{|\operatorname{Re}(p)|}$$

$$U_{c_0} := 200 \quad iL_0 := 0 \quad t_0 := 0$$

$$N := 1000 \quad k := 0..N \quad h := \frac{5 \cdot \tau}{N}$$

$$\begin{pmatrix} t_{k+1} \\ iL_{k+1} \\ U_{c_{k+1}} \\ U_{k+1} \end{pmatrix} := \begin{bmatrix} t_k + h \\ iL_k + \left(0 \cdot iL_k + \frac{1}{L} \cdot U_{c_k} + 0 \cdot J \right) \cdot h \\ U_{c_k} + \left(\frac{-1}{c} \cdot iL_k + \frac{-1}{2R \cdot c} \cdot U_{c_k} + \frac{1}{2c} \cdot J \right) \cdot h \\ 0 \cdot iL_k + \frac{1}{2} \cdot U_{c_k} + \frac{3 \cdot R}{2} \cdot J \end{bmatrix}$$



Полученный график полностью совпадает с уже построенной зависимостью с использованием классического и операторного методов.

Пример 2
Методические указания к заданию № 5 «Расчет установившегося режима в нелинейных электрических цепях»

Для заданной схемы дано:

$$e(t) = \sqrt{2} \cdot E \cdot \sin(314t + \alpha), \text{ В};$$

$$J(t) = \sqrt{2} \cdot J \cdot \sin(314t + \alpha), \text{ А}.$$

| E | J | α | R | C |
|-----|-----|----------|-----|--------|
| В | А | ° | Ом | мкФ |
| 100 | 2 | 90 | 100 | 31,847 |

Нелинейный индуктивный элемент (НИЭ)

| w_1 | w_2 | w_3 | S_1 | S_2 | S_3 |
|-------|-------|-------|-----------------|-----------------|-----------------|
| Вит. | Вит. | Вит. | см ² | см ² | см ² |
| 2000 | 0 | 1000 | 1 | 2 | 1 |

| l_1 | l_2 | l_3 | δ_1 | δ_2 | δ_3 |
|-------|-------|-------|------------|------------|------------|
| см | см | см | мм | мм | мм |
| 30 | 15 | 30 | 1 | 0 | 0 |

Схема:

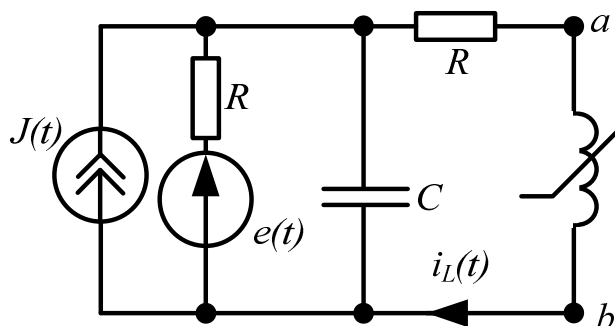


Рис. 224

1. Относительно зажимов a и b НИЭ определяем комплексное сопротивление эквивалентного генератора $\underline{Z}_\Gamma = Z_\Gamma e^{j\alpha}$, а также комплексы действующих значений ЭДС $\dot{U}_{xx} = \dot{E}_\Gamma = E_\Gamma e^{j\alpha_\Gamma}$ и тока $\dot{I}_{кз} = \dot{J}_\Gamma = J_\Gamma e^{j\beta_\Gamma}$ этого генератора, если:

$$\dot{E} = E e^{j\alpha} = 100 e^{j90^\circ}, \text{ В};$$

$$\dot{J} = J e^{j\alpha} = 2 e^{j90^\circ}, \text{ А}.$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{314 \cdot 31,847 \cdot 10^{-6}} = 100 \text{ Ом}.$$

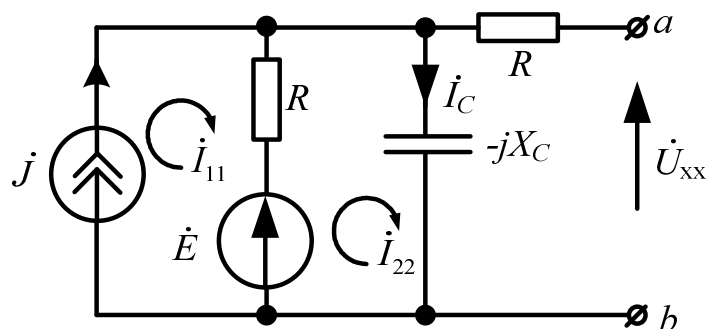


Рис. 225

$$\underline{Z}_\Gamma = R + \frac{R \cdot (-jX_C)}{R - jX_C} = 100 + \frac{100 \cdot (-j100)}{100 - j100} =$$

$$100 + 50 - j50 = 150 - j50 = 158,1 e^{-j18,4^\circ}, \text{ Ом},$$

т.е. $Z_\Gamma = 158,1 \text{ Ом}, \varphi_\Gamma = -18,4^\circ$;

$$\begin{cases} \dot{I}_{11} = \dot{J}; \\ \dot{I}_{22} \cdot (R - jX_C) - \dot{I}_{11} \cdot R = \dot{E}; \end{cases}$$

$$\dot{I}_{22} = \dot{I}_C = \frac{\dot{E} + \dot{J} \cdot R}{R - jX_C} = \frac{100 e^{j90^\circ} + 2 e^{j90^\circ} \cdot 100}{100 - j100} = 2,12 e^{j135^\circ}, \text{ А};$$

$$\dot{U}_{xx} = \dot{E}_\Gamma = \dot{I}_C (-jX_C) = 2,12 e^{j135^\circ} (-j100) = 212 e^{j45^\circ}, \text{ В};$$

$$\dot{I}_{кз} = \dot{J}_\Gamma = \frac{\dot{E}_\Gamma}{\underline{Z}_\Gamma} = \frac{212 e^{j45^\circ}}{158,1 e^{-j18,4^\circ}} = 1,34 e^{j63,4^\circ}, \text{ А}.$$

Таким образом,

$$E_\Gamma = 212 \text{ В}; \alpha_\Gamma = 45^\circ; J_\Gamma = 1,34 \text{ А}; \beta_\Gamma = 63,4^\circ.$$

2. Для двух мгновенных значений тока i_L НИЭ, равных $i_{L1} = \sqrt{2}J_r/2 = 0,945$ А и $i_{L2} = \sqrt{2}J_r = 1,89$ А, из расчета магнитной цепи определяем величины потокоцепления:

$$\Psi = w_1\Phi_1 + w_2\Phi_2 + w_3\Phi_3, \text{ Вб.}$$

Для этого заданную магнитную цепь заменяем схемой замещения, для которой воспользуемся методом двух узлов (c и d) и составим уравнения по законам Кирхгофа для магнитной цепи:

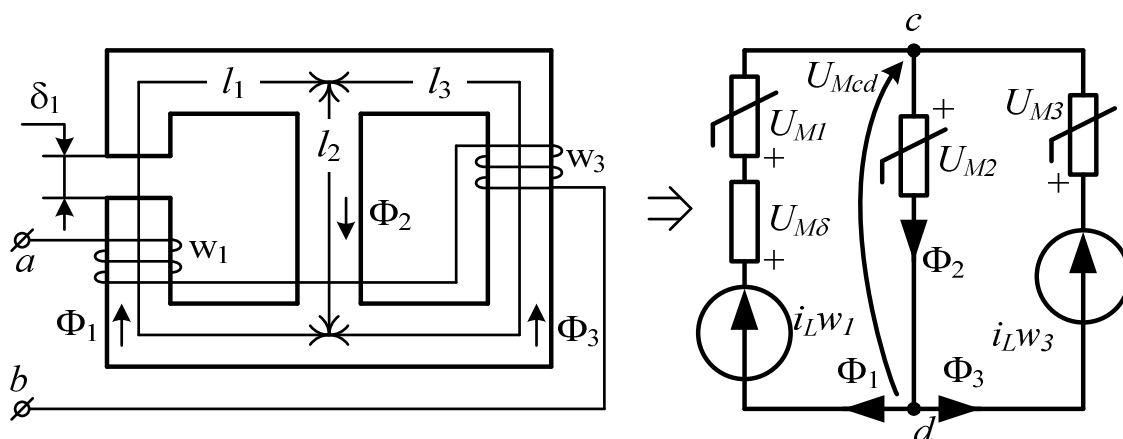


Рис. 226

$$\begin{cases} \Phi_2 = \Phi_1 + \Phi_3; \\ U_{mcd}(\Phi_1) = i_L w_1 - U_{m1}(\Phi_1) - U_{m\delta}(\Phi_1); \\ U_{mcd}(\Phi_2) = U_{m2}(\Phi_2); \\ U_{mcd}(\Phi_3) = i_L w_3 - U_{m3}(\Phi_3), \end{cases} \quad (1)$$

где магнитные напряжения

$$\begin{aligned} U_{m1}(\Phi_1) &= H_1 l_1; & U_{m2}(\Phi_2) &= H_2 l_2; \\ U_{m3}(\Phi_3) &= H_3 l_3; & U_{m\delta}(\Phi_1) &= \frac{B_1 \delta_1}{\mu_0}. \end{aligned} \quad (2)$$

Используя заданную кривую намагничивания ферромагнитного материала магнитной цепи $B(H) = B_{1,2,3}(H_{1,2,3})$, рассчитываем уравнения (2) и заполняем табл. 1.

Таблица 1

| | | | | | | | | | | |
|-----------------------|-----|---|-------|-----|--------|----------------|----------------|-----------------|----------------|----------------|
| $B_{1,2,3}$ | Тл | 0 | 0,6 | 1 | 1,2 | 1,6 | 2 | 2,2 | 2,3 | 2,5 |
| $H_{1,2,3}$ | А/м | 0 | 250 | 500 | 10^3 | $2 \cdot 10^3$ | $6 \cdot 10^3$ | $12 \cdot 10^3$ | $3 \cdot 10^4$ | $2 \cdot 10^5$ |
| $\Phi_1 = B_1 S_1$ | мВб | 0 | 0,06 | 0,1 | 0,12 | 0,16 | 0,2 | 0,22 | 0,23 | 0,25 |
| $\Phi_2 = B_2 S_2$ | мВб | 0 | 0,12 | 0,2 | 0,24 | 0,32 | 0,4 | 0,44 | 0,46 | 0,5 |
| $\Phi_3 = B_3 S_3$ | мВб | 0 | 0,06 | 0,1 | 0,12 | 0,16 | 0,2 | 0,22 | 0,23 | 0,25 |
| $U_{M1}(\Phi_1)$ | А | 0 | 75 | 150 | 300 | 600 | 1800 | 3600 | 9000 | $6 \cdot 10^4$ |
| $U_{M\delta}(\Phi_1)$ | А | 0 | 477,6 | 796 | 955,2 | 1273,6 | 1592 | 1751,2 | 1830,8 | 1990 |
| $U_{M2}(\Phi_2)$ | А | 0 | 37,5 | 75 | 150 | 300 | 900 | 1800 | 4500 | $3 \cdot 10^4$ |
| $U_{M3}(\Phi_3)$ | А | 0 | 75 | 150 | 300 | 600 | 1800 | 3600 | 9000 | $6 \cdot 10^4$ |

2.1. При токе $i_{L1} = \frac{\sqrt{2}J_r}{2} = 0,945$ А по данным табл. 1 рассчитываем уравнения (1) и заполняем табл. 2.

Таблица 2

| | | | | | | | | | | |
|-------------------|----|------|--------|-----|-------|------|-------|---------|---------|--------|
| $B_{1,2,3}$ | Тл | 0 | 0,6 | 1 | 1,2 | 1,6 | 2 | 2,2 | 2,3 | 2,5 |
| $U_{Mcd}(\Phi_1)$ | А | 1890 | 1337,4 | 944 | 634,8 | 16,4 | -1502 | -3461,2 | -8940,8 | -60100 |
| $U_{Mcd}(\Phi_2)$ | А | 0 | 37,5 | 75 | 150 | 300 | 900 | 1800 | 4500 | 30000 |
| $U_{Mcd}(\Phi_3)$ | А | 945 | 870 | 795 | 645 | 345 | -855 | -2655 | -8055 | -59055 |

Строим графики $U_{Mcd}(\Phi_1)$, $U_{Mcd}(\Phi_2)$, $U_{Mcd}(\Phi_3)$. Так как $\Phi_2 = \Phi_1 + \Phi_3$, то графики $U_{Mcd}(\Phi_1)$, $U_{Mcd}(\Phi_2)$ складываем вдоль

оси Φ и получаем $U_{mcd}(\Phi_1 + \Phi_3)$. По точке пересечения $U_{mcd}(\Phi_1 + \Phi_3)$ и $U_{mcd}(\Phi_2)$ определяем магнитные потоки Φ_1 , Φ_2 и Φ_3 .

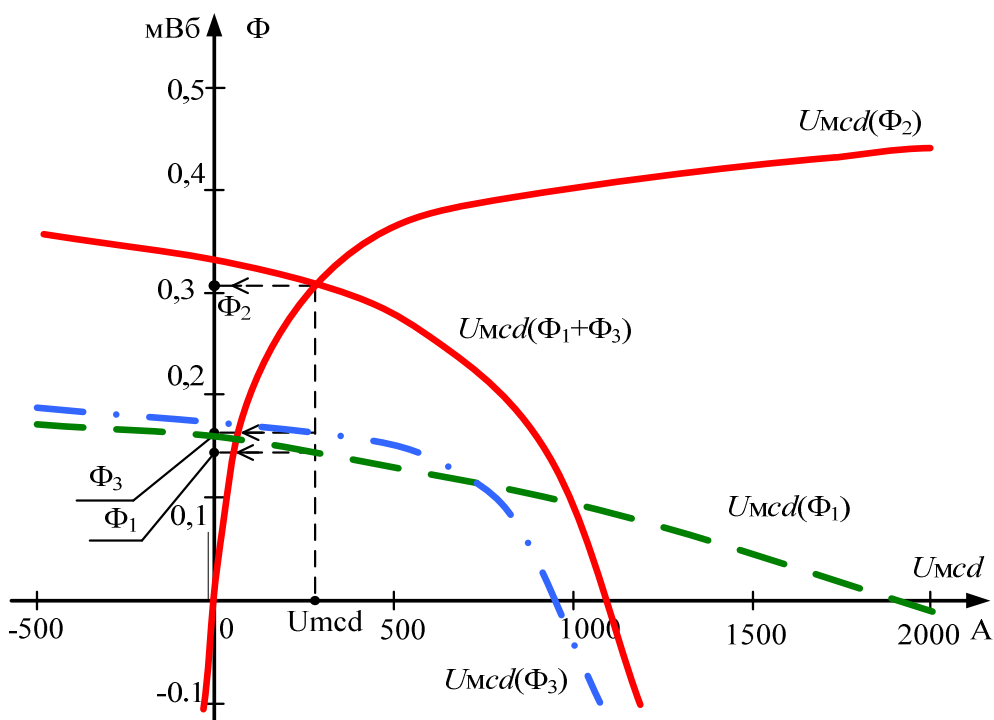


Рис. 227

Таким образом, $\Phi_1 = 0,14$ мВб, $\Phi_2 = 0,32$ мВб и $\Phi_3 = 0,18$ мВб. Далее рассчитываем суммарное потокосцепление обмоток:

$$\Psi_1 = w_1\Phi_1 + w_2\Phi_2 + w_3\Phi_3 = 2000 \cdot 0,14 \cdot 10^{-3} + 0 \cdot 0,32 \cdot 10^{-3} + 1000 \cdot 0,18 \cdot 10^{-3} = 0,46 \text{ Вб.}$$

2.2. При токе $i_{L2} = \sqrt{2}J_{\Gamma} = 1,89$ А по данным табл. 1 рассчитываем уравнения (1) и заполняем табл. 3.

Таблица 3

| $B_{1,2,3}$ | Тл | 0 | 0,6 | 1 | 1,2 | 1,6 | 2 | 2,2 | 2,3 | 2,5 |
|-------------------|----|------|--------|------|--------|--------|-----|---------|---------|--------|
| $U_{mcd}(\Phi_1)$ | А | 3780 | 3227,4 | 2834 | 2524,8 | 1906,4 | 388 | -1571,2 | -7050,7 | -58210 |
| $U_{mcd}(\Phi_2)$ | А | 0 | 37,5 | 75 | 150 | 300 | 900 | 1800 | 4500 | 30000 |
| $U_{mcd}(\Phi_3)$ | А | 1890 | 1815 | 1740 | 1590 | 1290 | 90 | -1710 | -7110 | -58110 |

Вновь строим графики $U_{mcd}(\Phi_1)$, $U_{mcd}(\Phi_2)$, $U_{mcd}(\Phi_3)$.
 Аналогично находим графически магнитные потоки $\Phi_1 = 0,19$ мВб,
 $\Phi_2 = 0,37$ мВб и $\Phi_3 = 0,18$ мВб.

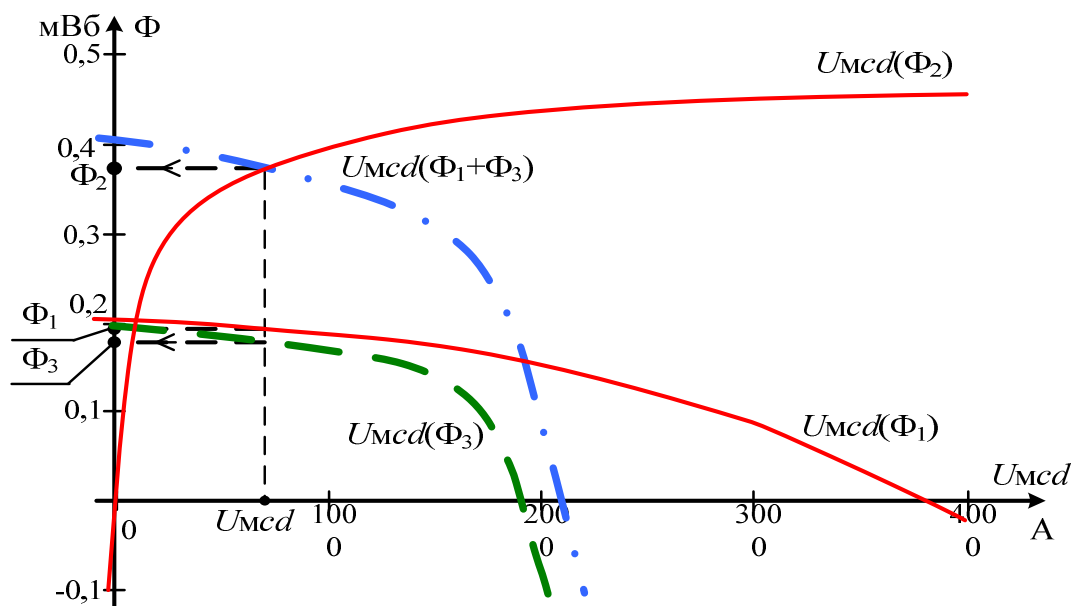


Рис. 228

Рассчитываем суммарное потокоцепление обмоток:

$$\Psi_2 = w_1\Phi_1 + w_2\Phi_2 + w_3\Phi_3 = 2000 \cdot 0,19 \cdot 10^{-3} + 0 \cdot 0,37 \cdot 10^{-3} + 1000 \cdot 0,18 \cdot 10^{-3} = 0,56 \text{ Вб.}$$

3. Строим веберамперную характеристику НИЭ $\Psi(i_L)$, которую заменяем зависимостью $i_L(\Psi) = k_1\Psi + k_3\Psi^3$.

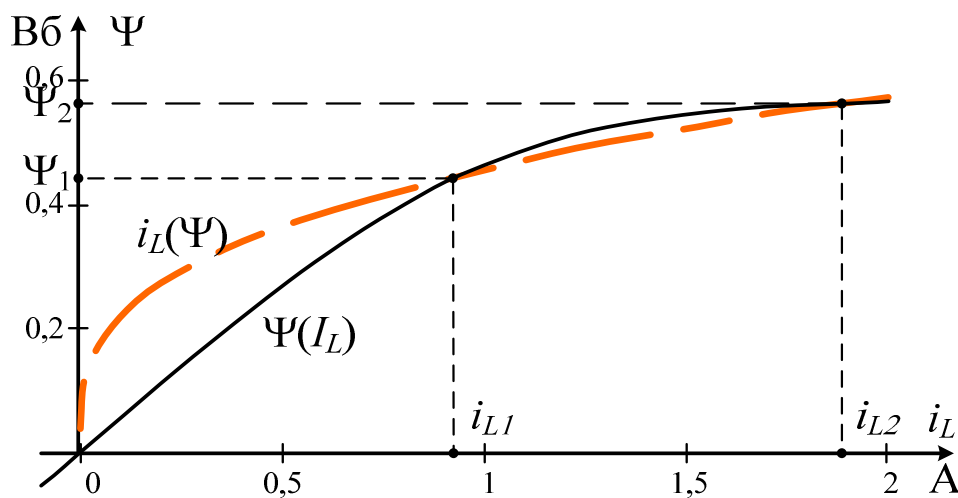


Рис. 229

Для этого находим коэффициенты k_1 и k_3 из решения уравнений:

$$\begin{cases} i_{L_1} = k_1 \Psi_1 + k_3 \Psi_1^3; \\ i_{L_2} = k_1 \Psi_2 + k_3 \Psi_2^3. \end{cases}$$

т.е. $k_1 = \frac{i_{L_1} - k_3 \Psi_1^3}{\Psi_1}$; $i_{L_2} = (i_{L_1} - k_3 \Psi_1^3) \frac{\Psi_2}{\Psi_1} + k_3 \Psi_2^3$, тогда

$$k_3 = \frac{i_{L_2} - i_{L_1} \frac{\Psi_2}{\Psi_1}}{\Psi_2^3 - \Psi_1^2 \cdot \Psi_2} = \frac{1,89 - 0,945 \cdot \frac{0,56}{0,46}}{0,56^3 - 0,46^2 \cdot 0,56} = 12,96 \text{ А/Вб}^3;$$

$$k_1 = \frac{i_{L_1} - k_3 \Psi_1^3}{\Psi_1} = \frac{0,945 - 12,96 \cdot 0,46^3}{0,46} = -0,687 \text{ А/Вб}.$$

Для проверки строим зависимость $i_L(\Psi)$ в тех же осях, что и $\Psi(i_L)$. Зависимость $i_L(\Psi) = k_1 \Psi + k_3 \Psi^3$ удовлетворительно совпадает с веберамперной характеристикой $\Psi(i_L)$ на интервале $\Psi_1 \leq \Psi \leq \Psi_2$.

4. При приближенной гармонической зависимости напряжения НИЭ $u_L(t) = \sqrt{2} U_L \cos(314t + \beta)$ для четырех значений U_L ($0 < U_L < E_r$) рассчитываем действующие значения гармоник тока I_1 и I_3 , его действующее значение I_L , коэффициент гармоник k_r , причем берем такие U_L , чтобы $0 < I_L < J_r$.

При этом заполняем табл. 4.

Таблица 4

| $U_L, \text{ В}$ | 30 | 70 | 100 | 135 |
|--|---------|--------|--------|--------|
| $I_1 = \frac{k_1 U_L}{\omega} + \frac{3k_3 U_L^3}{2\omega^3}, \text{ А}$ | -0,049 | 0,062 | 0,409 | 1,25 |
| $I_3 = -\frac{k_3 U_L^3}{2\omega^3}, \text{ А}$ | -0,0056 | -0,072 | -0,209 | -0,515 |
| $I_L = \sqrt{I_1^2 + I_3^2}, \text{ А}$ | 0,049 | 0,095 | 0,46 | 1,352 |
| $k_r = \left \frac{I_3}{I_1} \right $ | 0,116 | 1,154 | 0,512 | 0,412 |

5. По результатам п. 4 строим ВАХ $U_L(I_L)$ НИЭ. Задаваясь несколькими значениями тока $\dot{I}_L = I_L e^{j0^\circ}$ для одноконтурной схемы, определяем эквивалентное напряжение

$$\dot{U}_\varnothing = U_\varnothing e^{j\varphi_\varnothing} = \underline{Z}_\Gamma \dot{I}_L + \dot{U}_L = 158,1 e^{-j18,4^\circ} \cdot \dot{I}_L + U_L(I_L) e^{j90^\circ}.$$

При этом I_L находим U_L по ВАХ $U_L(I_L)$ и заполняем табл. 5.

Таблица 5

| | | | | |
|-------------------------------------|------|-------|-------|---------|
| $\dot{I}_L = I_L, \text{ A}$ | 0,3 | 0,6 | 1 | 1,35 |
| $U_L, \text{ В}$ | 90 | 105 | 123 | 135 |
| $U_\varnothing, \text{ В}$ | 87,5 | 117,2 | 166,9 | 213,517 |
| $\varphi_\varnothing, \text{ град}$ | 59 | 39,8 | 26 | 18,46 |

Строим эквивалентную ВАХ $U_\varnothing(I_L)$ и ФАХ $\varphi_\varnothing(I_L)$. По известной ЭДС $E_\Gamma = U_\varnothing = 212 \text{ В}$ и построенным характеристикам графически находим $I_L = 1,3 \text{ A}$, $U_L \approx 135 \text{ В}$, $\varphi_\varnothing = 19^\circ$ (рис. 225).

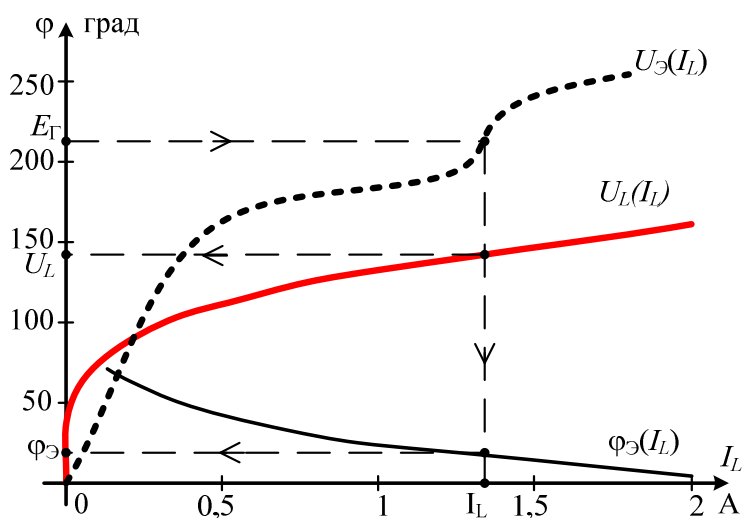


Рис. 230

В результате

$$\beta = \alpha_\Gamma - \varphi_\varnothing = 45 - 19 = 26^\circ;$$

$$\dot{I}_L = I_L e^{j\beta} = 1,3 e^{j26^\circ}, \text{ A};$$

$$\dot{U}_L = U_L e^{j(\beta+90^\circ)} = 135 e^{j116^\circ}, \text{ В}.$$

Построим в принятых масштабах m_U и m_I векторную диаграмму:

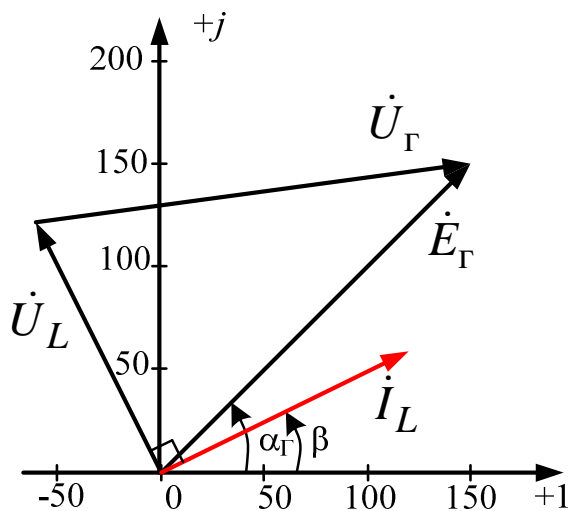


Рис. 231

$$\begin{aligned} \dot{E}_\Gamma &= E_\Gamma e^{j\alpha_\Gamma} = 212e^{j45^\circ} \text{ В}; \\ \dot{I}_L &= I_L e^{j\beta} = 1,3e^{j26^\circ} \text{ А}; \\ \dot{U}_L &= U_L e^{j(\beta+90^\circ)} = 135e^{j116^\circ} \text{ В}; \\ \dot{U}_\Gamma &= \underline{Z}_\Gamma \cdot \dot{I}_L = \\ &= 158,1e^{-j18,4^\circ} \cdot 1,3e^{j26^\circ} = \\ &= 205,53e^{j7,6^\circ} \text{ В}; \\ m_U &= 5 \text{ В/мм}; \quad m_I = 0,05 \text{ А/мм}. \end{aligned}$$

6. Определяем потребляемую активную мощность:

$$P = E_\Gamma I_L \cos \varphi_3 = 212 \cdot 1,3 \cdot \cos 19^\circ = 260,6 \text{ Вт.}$$

По известной величине напряжение $U_L = 135 \text{ В}$; уточняем значения:

$$I_1 = \frac{k_1 \cdot U_L}{\omega} + \frac{3k_3 \cdot U_L^3}{2\omega^3} = 1,25 \text{ А};$$

$$I_3 = -\frac{k_3 \cdot U_L^3}{2\omega^3} = -0,515 \text{ А};$$

$$I_L = \sqrt{I_1^2 + I_3^2} = 1,352 \approx 1,3 \text{ А} - \text{ верно};$$

$$k_\Gamma = \left| \frac{I_3}{I_1} \right| = 0,412;$$

$$\beta = \alpha_\Gamma - \varphi_3 = 26^\circ;$$

$$i(t) = \sqrt{2} \cdot 1,25 \sin(314t + 26^\circ) - \sqrt{2} \cdot 0,515 \sin(942t + 78^\circ), \text{ А.}$$

7. Анализируем полученные результаты и формируем выводы по работе.

Ниже приводится расчет рассматриваемого примера при помощи программы MathCAD.

Исходные данные:

$$\begin{aligned}
 E &:= 100 & R &:= 100 \\
 J &:= 2 & C &:= 31.847 \cdot 10^{-6} & \mu_0 &:= 4\pi \cdot 10^{-7} \\
 \alpha &:= 90 \cdot \text{deg} & \omega &:= 314 \\
 w_1 &:= 2000 & S_1 &:= 1 \cdot 10^{-4} & I_1 &:= 0.30 & \delta_1 &:= 1 \cdot 10^{-3} \\
 w_2 &:= 0 & S_2 &:= 2 \cdot 10^{-4} & I_2 &:= 0.15 & \delta_2 &:= 0 \\
 w_3 &:= 1000 & S_3 &:= 1 \cdot 10^{-4} & I_3 &:= 0.30 & \delta_3 &:= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V &:= (-2.5 \ -2.3 \ -2.2 \ -2 \ -1.6 \ -1.2 \ -1 \ -0.6 \ 0 \ 0.6 \ 1 \ 1.2 \ 1.6 \ 2 \ 2.2 \ 2.3 \ 2.5) \\
 H &:= (-200000 \ -30000 \ -12000 \ -6000 \ -2000 \ -1000 \ -500 \ -250 \ 0 \ 250 \ 500 \ 1000 \ 2000 \ 6000)
 \end{aligned}$$

Определяем комплексное сопротивление емкости:

$$Z_c := -i \cdot \frac{1}{\omega \cdot C}$$

Определение E, Z, I генератора:

$$E_g := E \cdot e^{i\alpha} \quad E = 100i$$

$$J_g := J \cdot e^{i\alpha} \quad J = 2i$$

$$Z_g := R + \frac{R \cdot Z_c}{R + Z_c}$$

$$|Z_g| = 158.11 \quad \arg(Z_g) = -18.43 \text{ deg}$$

$$E_g := (E + J \cdot R) \cdot \frac{Z_c}{R + Z_c}$$

$$|E_g| = 212.13 \quad \arg(E_g) = 45 \text{ deg}$$

$$I_g := \frac{E_g}{Z_g}$$

$$|I_g| = 1.342 \quad \arg(I_g) = 63.44 \text{ deg}$$

2. Находим два значения тока:

$$\Pi_1 := \sqrt{2} \cdot \frac{|I_g|}{2} \qquad \Pi_2 := \sqrt{2} \cdot |I_g|$$

$$\Pi_1 = 0.949$$

$$\Pi_2 = 1.897$$

Для каждого значения индукции и напряженности рассчитываем:

$$k := 0, 1..8$$

2.1. потоки;

$$\Phi_1 := B \cdot S_1$$

$$\Phi_2 := B \cdot S_2$$

$$\Phi_3 := B \cdot S_3$$

2.2. напряжения в зазорах;

$$U_{\delta 1} := \frac{B \cdot \delta_1}{\mu_0} \qquad U_{\delta 2} := \frac{B \cdot \delta_2}{\mu_0} \qquad U_{\delta 3} := \frac{B \cdot \delta_3}{\mu_0}$$

2.3. напряжения магнитопроводов;

$$U_{m1} := H \cdot l_1$$

$$U_{m2} := H \cdot l_2$$

$$U_{m3} := H \cdot l_3$$

2.4. между узлами cd при первом значении тока;

$$U_{11} := \Pi_1 \cdot w_1 - U_{\delta 1} - U_{m1}$$

$$U_{12} := -\Pi_1 \cdot w_2 + U_{\delta 2} + U_{m2}$$

$$U_{13} := \Pi_1 \cdot w_3 - U_{\delta 3} - U_{m3}$$

2.5. напряжения между узлами cd при втором значении тока

$$U_{21} := \Pi_2 \cdot w_1 - U_{\delta 1} - U_{m1}$$

$$U_{22} := -\Pi_2 \cdot w_2 + U_{\delta 2} + U_{m2}$$

$$U_{23} := \Pi_2 \cdot w_3 - U_{\delta 3} - U_{m3}$$

Сводная таблица данных 1

St1 := stack(B, H, Φ1, Φ2, Φ3, Uδ1, Uδ2, Uδ3, Um1, Um2, Um3)

| | | | | | | | | |
|----|---------|--------|--------|-------|-------|-------|------|------|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 0 | -3 | -2 | -2 | -2 | -2 | -1 | -1 | -1 |
| 1 | -200000 | -30000 | -12000 | -6000 | -2000 | -1000 | -500 | -250 |
| 2 | -0 | -0 | -0 | -0 | -0 | -0 | -0 | -0 |
| 3 | -0 | -0 | -0 | -0 | -0 | -0 | -0 | -0 |
| 4 | -0 | -0 | -0 | -0 | -0 | -0 | -0 | -0 |
| 5 | -1989 | -1830 | -1751 | -1592 | -1273 | -955 | -796 | -477 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 8 | -60000 | -9000 | -3600 | -1800 | -600 | -300 | -150 | -75 |
| 9 | -30000 | -4500 | -1800 | -900 | -300 | -150 | -75 | -38 |
| 10 | -60000 | -9000 | -3600 | -1800 | -600 | -300 | -150 | -75 |

Сводная таблица данных 2

St2 := stack(B, U11, U12, U13)

| | | | | | | | | | |
|---|--------|-------|-------|------|------|------|------|------|------|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 0 | -3 | -2 | -2 | -2 | -2 | -1 | -1 | -1 | 0 |
| 1 | 63887 | 12728 | 7248 | 5289 | 3771 | 3152 | 2843 | 2450 | 1897 |
| 2 | -30000 | -4500 | -1800 | -900 | -300 | -150 | -75 | -38 | 0 |
| 3 | 60949 | 9949 | 4549 | 2749 | 1549 | 1249 | 1099 | 1024 | 949 |

Сводная таблица данных 3

St3 := stack(B, U21, U22, U23)

| | | | | | | | | | |
|---|--------|-------|-------|------|------|------|------|------|------|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 0 | -3 | -2 | -2 | -2 | -2 | -1 | -1 | -1 | 0 |
| 1 | 65784 | 14625 | 9145 | 7186 | 5668 | 5050 | 4741 | 4347 | 3795 |
| 2 | -30000 | -4500 | -1800 | -900 | -300 | -150 | -75 | -38 | 0 |
| 3 | 61897 | 10897 | 5497 | 3697 | 2497 | 2197 | 2047 | 1972 | 1897 |

Для построения графиков, необходимо выполнить следующее:

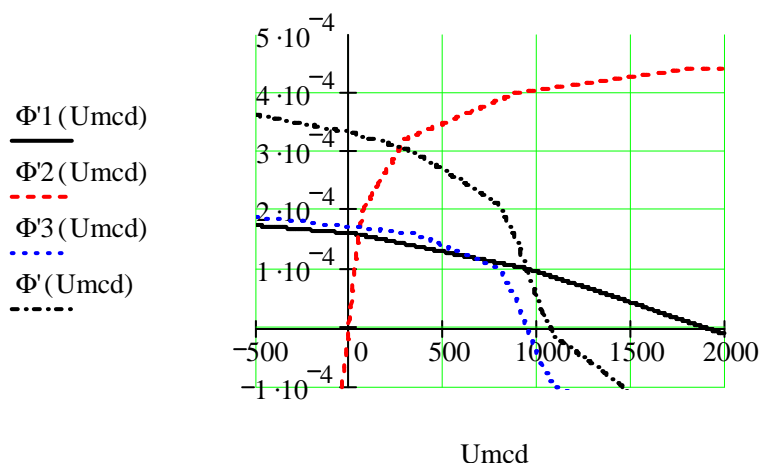
$$\underline{U11} := \text{reverse}(U11^T) \quad \underline{U12} := U12^T \quad \underline{U13} := \text{reverse}(U13^T)$$

$$\underline{\Phi1} := \text{reverse}(\Phi1^T) \quad \underline{\Phi2} := \Phi2^T \quad \underline{\Phi3} := \text{reverse}(\Phi3^T)$$

$$\Phi'1(\text{Umcd}) := \text{linterp}(U11, \Phi1, \text{Umcd})$$

$$\Phi'2(\text{Umcd}) := \text{linterp}(U12, \Phi2, \text{Umcd})$$

$$\Phi'3(\text{Umcd}) := \text{linterp}(U13, \Phi3, \text{Umcd}) \quad \Phi'(\text{Umcd}) := \Phi'1(\text{Umcd}) + \Phi'3(\text{Umcd})$$



Определение точки пересечения:

$$Umcd := 1$$

Given

$$\Phi'(Umcd) - \Phi'2(Umcd) = 0$$

$$Umcd1 := \text{Find}(Umcd)$$

$$Umcd1 = 274.3$$

$$\Phi'1 := \Phi'1(Umcd1) \quad \Phi'2 := \Phi'2(Umcd1) \quad \Phi'3 := \Phi'3(Umcd1)$$

$$\Phi'1 = 1.44 \times 10^{-4} \quad \Phi'2 = 3.06 \times 10^{-4} \quad \Phi'3 = 1.62 \times 10^{-4}$$

Проверка:

$$\Phi'1 + \Phi'3 = 3.06 \times 10^{-4}$$

Определяем величину потокосцепления:

$$\Psi1 := w1 \cdot \Phi'1 + w2 \cdot \Phi'2 + w3 \cdot \Phi'3 \quad \Psi1 = 0.45$$

Сводная таблица данных 3:

$$St3 := \text{stack}(B, U21, U22, U23)$$

| | | | | | | | | | | |
|-------|---|--------|-------|-------|------|------|------|------|------|------|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | |
| St3 = | 0 | -3 | -2 | -2 | -2 | -2 | -1 | -1 | -1 | 0 |
| | 1 | 65784 | 14625 | 9145 | 7186 | 5668 | 5050 | 4741 | 4347 | 3795 |
| | 2 | -30000 | -4500 | -1800 | -900 | -300 | -150 | -75 | -38 | 0 |
| | 3 | 61897 | 10897 | 5497 | 3697 | 2497 | 2197 | 2047 | 1972 | 1897 |

Для построения графиков, необходимо выполнить следующее:

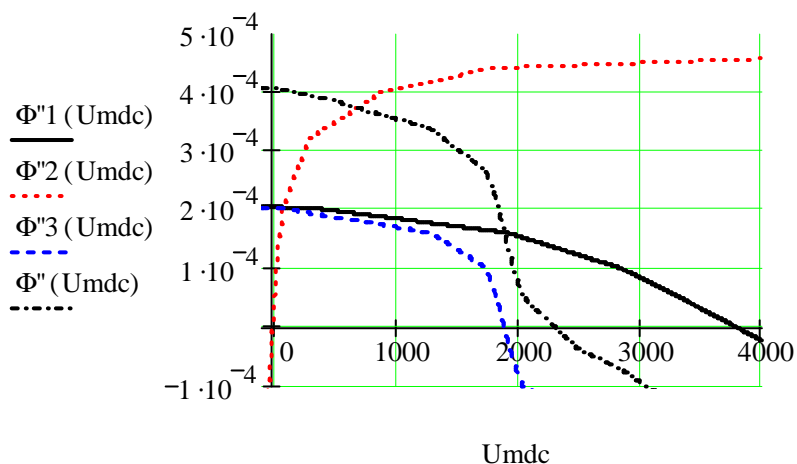
$$\underline{U21} := \text{reverse}(U21^T) \quad \underline{U22} := U22^T \quad \underline{U23} := \text{reverse}(U23^T)$$

$$\Phi''1(U\text{mdc}) := \text{linterp}(U21, \Phi1, U\text{mdc})$$

$$\Phi''2(U\text{mdc}) := \text{linterp}(U22, \Phi2, U\text{mdc})$$

$$\Phi''3(U\text{mdc}) := \text{linterp}(U23, \Phi3, U\text{mdc})$$

$$\Phi''(U\text{mdc}) := \Phi''1(U\text{mdc}) + \Phi''3(U\text{mdc})$$



Определение точки пересечения:

$$U\text{mdc} := 1$$

Giver

$$\Phi''(U\text{mdc}) - \Phi''2(U\text{mdc}) = 0$$

$$U\text{mdc1} := \text{Find}(U\text{mdc})$$

$$U\text{mdc1} = 693.57$$

$$\underline{\Phi''1} := \Phi''1(U\text{mdc1})$$

$$\underline{\Phi''2} := \Phi''2(U\text{mdc1})$$

$$\underline{\Phi''3} := \Phi''3(U\text{mdc1})$$

$$\Phi''1 = 1.92 \times 10^{-4}$$

$$\Phi''2 = 3.72 \times 10^{-4}$$

$$\Phi''3 = 1.8 \times 10^{-4}$$

Проверка:

$$\Phi''1 + \Phi''3 = 3.72 \times 10^{-4}$$

Определяем величину потокосцепления:

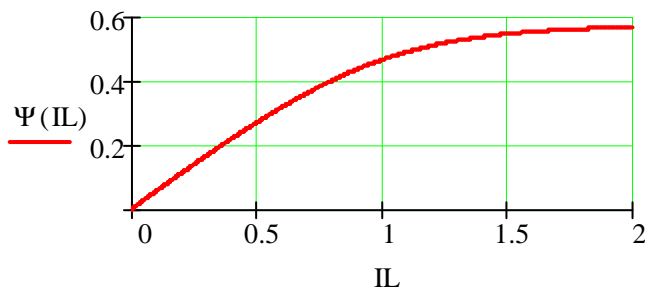
$$\Psi2 := w1 \cdot \Phi''1 + w2 \cdot \Phi''2 + w3 \cdot \Phi''3$$

$$\Psi2 = 0.56$$

3. Строим веберамперную характеристику $\Psi(iL)$:

$$\Psi := \begin{pmatrix} 0 \\ \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} \quad iL := \begin{pmatrix} 0 \\ \Pi_1 \\ \Pi_2 \end{pmatrix}$$

$$s := \text{lspline}(iL, \Psi) \quad \Psi(\Pi) := \text{interp}(s, iL, \Psi, \Pi)$$



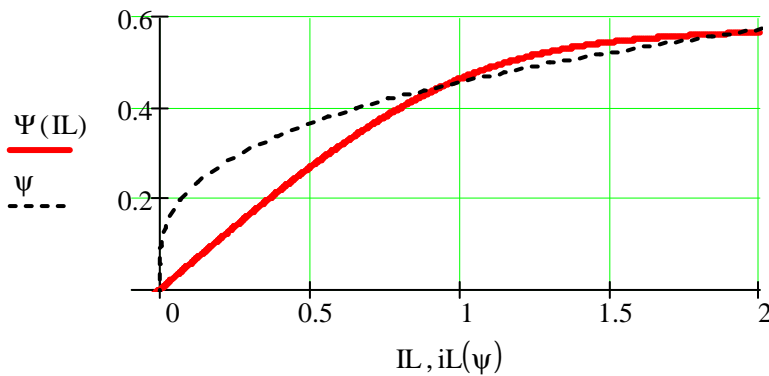
Заменяем зависимостью $iL(\Psi)$.

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \Psi_1 & \Psi_1^3 \\ \Psi_2 & \Psi_2^3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \Pi_1 \\ \Pi_2 \end{pmatrix}$$

Определяем коэффициенты:

$$k_1 = -0.07 \quad k_3 = 10.75$$

$$iL(\psi) := k_1 \cdot \psi + k_3 \cdot \psi^3$$



4. Определяем четыре действующих значения напряжения (для точности расчетов можно брать большее число точек K):

$$K := 7 \quad j := 1..K$$

$$h := \frac{|E_g|}{K + 4} \quad \text{- шаг} \quad U_{dj} := \text{round}(j \cdot h)$$

Находим гармоники тока:

$$I_{gr1j} := k_1 \cdot \frac{U_{dj}}{\omega} + 3 \cdot k_3 \cdot \frac{(U_{dj})^3}{2 \cdot \omega^3} \quad I_{gr3j} := -k_3 \cdot \frac{(U_{dj})^3}{2 \cdot \omega^3}$$

Вычисляем действующие значения тока:

$$I_{dj} := \sqrt{(I_{gr1j})^2 + (I_{gr3j})^2}$$

Вычисляем коэффициент гармоник:

$$k_{grj} := \left| \frac{I_{gr3j}}{I_{gr1j}} \right|$$

Сводная таблица данных 4

$$St4 := \text{stack}(U_d^T, I_{gr1}^T, I_{gr3}^T, I_d^T, k_{gr}^T)$$

$$St4 = \begin{pmatrix} 0 & 19 & 39 & 58 & 77 & 96 & 116 & 135 \\ 0 & -0 & 0.02 & 0.09 & 0.22 & 0.44 & 0.79 & 1.25 \\ 0 & -0 & -0.01 & -0.03 & -0.08 & -0.15 & -0.27 & -0.43 \\ 0 & 0 & 0.02 & 0.09 & 0.23 & 0.47 & 0.83 & 1.32 \\ 0 & 1.77 & 0.46 & 0.38 & 0.36 & 0.35 & 0.34 & 0.34 \end{pmatrix}$$

5. Строим ВАХ $U_L(IL)$, ВАХ $U_{\Sigma}(IL)$ и ФАХ $\varphi_{\Sigma}(IL)$:

5.1. $U_L(IL) := \text{linterp}(I_d, U_d, IL)$

5.2. Заполняем таблицу 5

$$U_j := Z_g \cdot I_{dj} + U_{dj} \cdot e^{i \cdot 90 \cdot \text{deg}}$$

$$U_{ej} := |U_j| \quad \varphi_{ej-1} := \frac{\arg(U_j)}{\text{deg}}$$

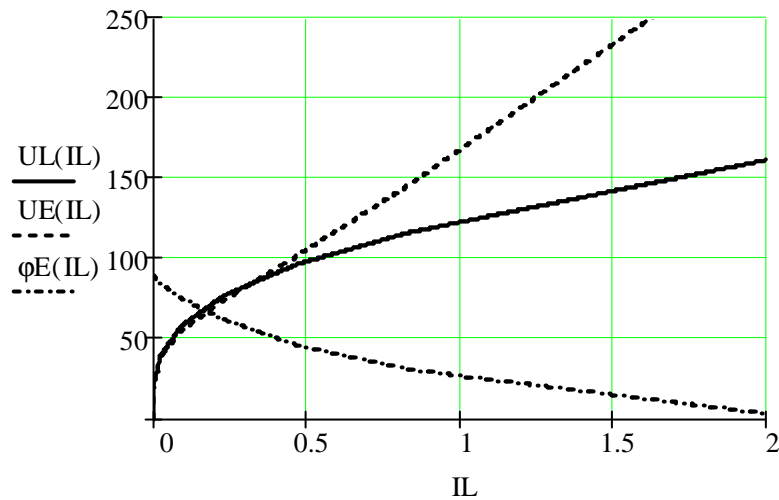
$$iL_{j-1} := I_{dj} \quad uL_{j-1} := U_{dj} \quad uE_{j-1} := U_{ej}$$

$$St5 := \text{stack}(iL^T, uL^T, uE^T, \varphi_e^T)$$

$$St5 = \begin{pmatrix} 0 & 0.02 & 0.09 & 0.23 & 0.47 & 0.83 & 1.32 \\ 19 & 39 & 58 & 77 & 96 & 116 & 135 \\ 18.93 & 37.95 & 55.12 & 74.15 & 100.81 & 145.33 & 209.95 \\ 89.38 & 84.45 & 75.03 & 61.7 & 46.17 & 30.78 & 19.16 \end{pmatrix}$$

$$UE(IL) := \text{linterp}(Id, Ue, IL)$$

$$\varphi E(IL) := \text{linterp}(iL, \varphi e, IL)$$



По известной E_g находим:

а) ток I_L :

$$IL := 0.1$$

Giver

$$UE(IL) - |E_g| = 0$$

$$IL1 := \text{Find}(IL) \quad IL1 = 1.34$$

б) напряжение U_L :

$$UL(IL1) = 135.64$$

в) фазу напряжения U_L :

$$\varphi E(IL1) = 18.76$$

г) фазу тока I_L :

$$\beta := \frac{\arg(E_g)}{\text{deg}} - \varphi E(IL1)$$

$$\underline{I_L} := IL1 \cdot e^{i\beta \cdot \text{deg}} \quad IL = 1.2 + 0.59i$$

$$\arg(IL) = 26.24 \text{deg}$$

$$|IL| = 1.34$$

$$\underline{U_L} := UL(IL1) \cdot e^{i(\beta+90) \cdot \text{deg}}$$

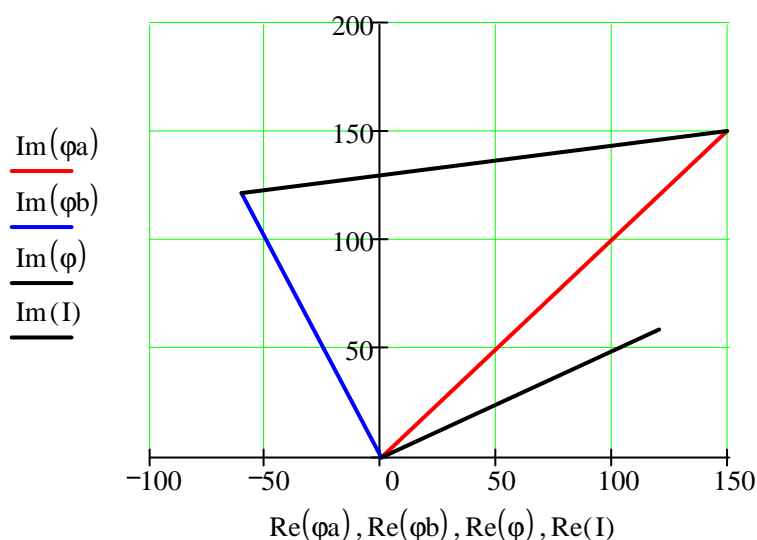
$$UL = -59.97 + 121.67i$$

$$|UL| = 135.64 \quad \arg(UL) = 116.24 \text{deg}$$

Строим векторную диаграмму:

$$U_g := \Pi_L \cdot Z_g$$

$$\varphi_a := \begin{pmatrix} 0 \\ E_g \end{pmatrix} \quad \varphi_b := \begin{pmatrix} 0 \\ UL \end{pmatrix} \quad \varphi := \begin{pmatrix} E_g \\ UL \end{pmatrix} \quad I := \begin{pmatrix} 0 \\ \Pi_L \end{pmatrix} \cdot 100$$



Определяем потребляемую цепью активную мощность:

$$P := |E_g| \cdot |\Pi_L| \cdot \cos(\arg(E_g) - \arg(\Pi_L)) \quad P = 268.89$$

По известной величине напряжения уточняем значения гармоник тока:

$$|UL| = 135.64$$

$$I_{gr1} := k_1 \cdot \frac{|UL|}{\omega} + 3 \cdot k_3 \cdot \frac{(|UL|)^3}{2 \cdot \omega^3} \quad I_{gr3} := -k_3 \cdot \frac{(|UL|)^3}{2 \cdot \omega^3}$$

$$I_{gr1} = 1.27$$

$$I_{gr3} = -0.43$$

Вычисляем действующие значения тока:

$$\Pi_L := \sqrt{I_{gr1}^2 + I_{gr3}^2} \quad \Pi_L = 1.34$$

Вычисляем коэффициент гармоник:

$$k_{gr} := \left| \frac{I_{gr3}}{I_{gr1}} \right| \quad k_{gr} = 0.34$$

Пример 3
Методические указания к заданию № 6
«Расчет длинных линий в установившемся и переходном режимах»

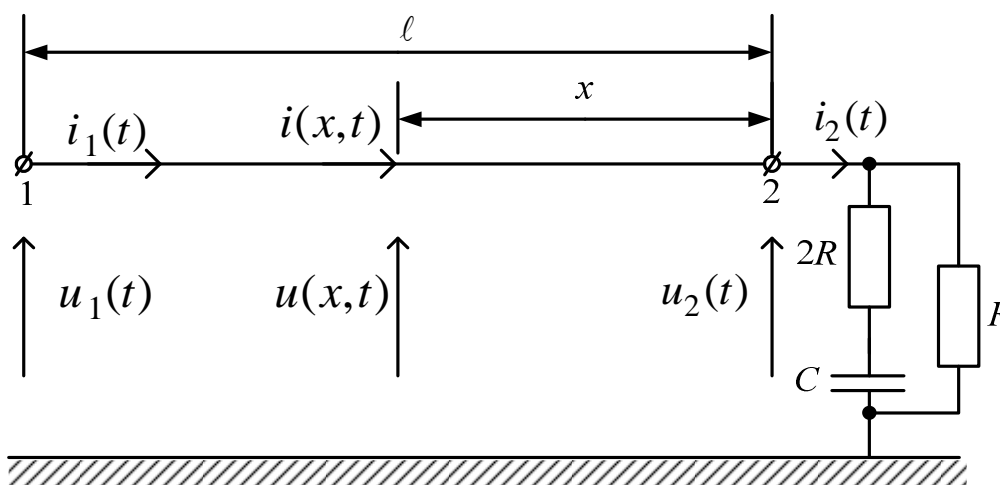


Рис. 232

Дано:

$$R_0 = 0,12 \frac{\text{Ом}}{\text{км}}; \quad L_0 = 10^{-3} \frac{\text{Гн}}{\text{км}};$$

$$G_0 = 10^{-6} \frac{\text{См}}{\text{км}}; \quad C_0 = 1,11 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Ф}}{\text{км}};$$

$$U_2 = 330 \text{ кВ}; \quad \psi_{U_2} = 45^\circ; \quad \ell = 1500 \text{ км};$$

$$R = 600 \text{ Ом}; \quad C = 2,654 \text{ мкФ}; \quad \omega = 314 \frac{1}{\text{с}}.$$

1. В установившемся режиме при заданном фазном напряжении $u_2(t) = \sqrt{2} \cdot U_2 \sin(\omega t + \psi_2) = \sqrt{2} \cdot 330 \cdot 10^3 \sin(314t + 45^\circ)$, В, в конце линии определяем следующие величины:

1.1. Волновое сопротивление:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_B &= \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}} = \sqrt{\frac{0,12 + j314 \cdot 10^{-3}}{10^{-6} + j314 \cdot 1,11 \cdot 10^{-8}}} = \\ &= 304,195 - j13,032 = 304,474 e^{-j2,45^\circ}, \text{ Ом.} \end{aligned}$$

1.2. Постоянная распространения:

$$\begin{aligned} \underline{\gamma} &= \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)} = \\ &= \sqrt{(0,12 + j314 \cdot 10^{-3})(10^{-6} + j314 \cdot 1,11 \cdot 10^{-8})} = \\ &= 3,496 \cdot 10^{-4} + j1,047 \cdot 10^{-3} = \alpha + j\beta, \quad \frac{1}{\text{км}}, \end{aligned}$$

где $\alpha = 3,496 \cdot 10^{-4} \frac{1}{\text{км}}$ – коэффициент затухания;

$\beta = 1,047 \cdot 10^{-3} \frac{\text{рад}}{\text{км}} \approx 1,047 \cdot 10^{-3} \frac{180}{\pi} = 0,06 \frac{\text{град}}{\text{км}}$ – коэффициент фазы.

1.3. Фазовая скорость:

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{314}{1,047 \cdot 10^{-3}} = 2,999 \cdot 10^5 \frac{\text{км}}{\text{с}}.$$

1.4. Длина волны:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{6,28}{1,047 \cdot 10^{-3}} = 5998 \text{ км}.$$

1.5. Комплексное сопротивление нагрузки при

$$\begin{aligned} X_C &= \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{314 \cdot 2,654 \cdot 10^{-6}} = 1200, \text{ Ом}; \\ Z_H &= \frac{R(2R - jX_C)}{R + (2R - jX_C)} = \frac{600(1200 - j1200)}{1800 - j1200} = \\ &= 461,538 - j92,308 = 470e^{-j11,31^\circ} \text{ Ом}. \end{aligned}$$

1.6. Комплекс действующего значения тока в нагрузке:

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_2}{Z_H} = \frac{U_2 e^{j\psi_{u_2}}}{Z_H} = \frac{330 \cdot 10^3 e^{j45^\circ}}{470,679 e^{-j11,31^\circ}} = 701,11 e^{j56,31^\circ}, \text{ А}.$$

1.7. Постоянные интегрирования:

$$\dot{A}_1 = \frac{\dot{U}_2 + \underline{Z}_B \dot{I}_2}{2} = \frac{330 \cdot 10^3 e^{j45^\circ} + 304,474 e^{-j2,45^\circ} \cdot 701,11 e^{j56,31^\circ}}{2} =$$

$$= 179,6 \cdot 10^3 + j202,9 \cdot 10^3 = 271 \cdot 10^3 e^{j48,48^\circ}, \text{ В};$$

$$\dot{A}_2 = \frac{\dot{U}_2 - \underline{Z}_B \dot{I}_2}{2} = 53,72 \cdot 10^3 + j30,48 \cdot 10^3 = 61,76 \cdot 10^3 e^{j29,6^\circ}, \text{ В}.$$

1.8. Комплексы действующих значений напряжения и тока в начале линии при $x = \ell = 1500 \text{ км}$:

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= \dot{A}_1 e^{\gamma \ell} + \dot{A}_2 e^{-\gamma \ell} = 271 \cdot 10^3 e^{j48,48^\circ} e^{(3,496 \cdot 10^{-4} + j1,047 \cdot 10^{-3})1500} + \\ &+ 61,76 \cdot 10^3 e^{j29,6^\circ} e^{-(3,496 \cdot 10^{-4} + j1,047 \cdot 10^{-3})1500} = \\ &= 271 \cdot 10^3 e^{j48,48^\circ} e^{0,5244} e^{j90^\circ} + 61,76 \cdot 10^3 e^{j29,6^\circ} e^{-0,5244} e^{-j90^\circ} = \\ &= -324,7 \cdot 10^3 + j271,7 \cdot 10^3 = 423,4 \cdot 10^3 e^{j140^\circ}, \text{ В.} \end{aligned}$$

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{A}_1}{\underline{Z}_B} e^{\gamma \ell} - \frac{\dot{A}_2}{\underline{Z}_B} e^{-\gamma \ell} = -1231 + j1049 = 1618 e^{j139,5^\circ}, \text{ А.}$$

1.9. Активные мощности:

- в конце линии

$$\begin{aligned} P_2 &= U_2 I_2 \cos(j\psi_{u_2} - j\psi_{I_2}) = \\ &= 330 \cdot 10^3 \cdot 701,11 \cos(45^\circ - 56,31^\circ) = 2,269 \cdot 10^8 \text{ Вт} = 226,9 \text{ МВт}; \end{aligned}$$

- в начале линии

$$\begin{aligned} P_1 &= U_1 I_1 \cos(j\psi_{u_1} - j\psi_{I_1}) = \\ &= 423,4 \cdot 10^3 \cdot 1618 \cos(140^\circ - 139,5^\circ) = 684,8 \text{ МВт}, \end{aligned}$$

1.10. Эффективность передачи энергии по линии

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{226,9}{684,8} = 0,33.$$

1.11. Изменяя координату x от 0 до $\ell = 1500$ км по уравнениям

$$\begin{cases} \dot{U}(x) = \dot{A}_1 e^{\gamma x} + \dot{A}_2 e^{-\gamma x}; \\ \dot{I}(x) = \frac{\dot{A}_1}{\underline{Z}_B} e^{\gamma x} - \frac{\dot{A}_2}{\underline{Z}_B} e^{-\gamma x} \end{cases}$$

рассчитываем с использованием программы MathCAD действующие значения напряжения $\dot{U}(x)$ и тока $\dot{I}(x)$, а также активную мощность $P(x) = U(x)I(x)\cos(\psi_U - \psi_I)$. Результаты расчётов заносим в таблицу.

Таблица 1

| x , км | 0 | 300 | 600 | 900 | 1200 | 1500 |
|--------------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $U(x)$, кВ | 330 | 336 | 337,1 | 346 | 373,6 | 423,4 |
| $I(x)$, А | 701,11 | 895,9 | 1112 | 1313 | 1482 | 1618 |
| $P(x)$, МВт | 226,9 | 283,1 | 353,6 | 441,6 | 550,7 | 684,8 |

По данным таблицы строим совмещённые графики $U(x)$, $I(x)$ и $P(x)$.

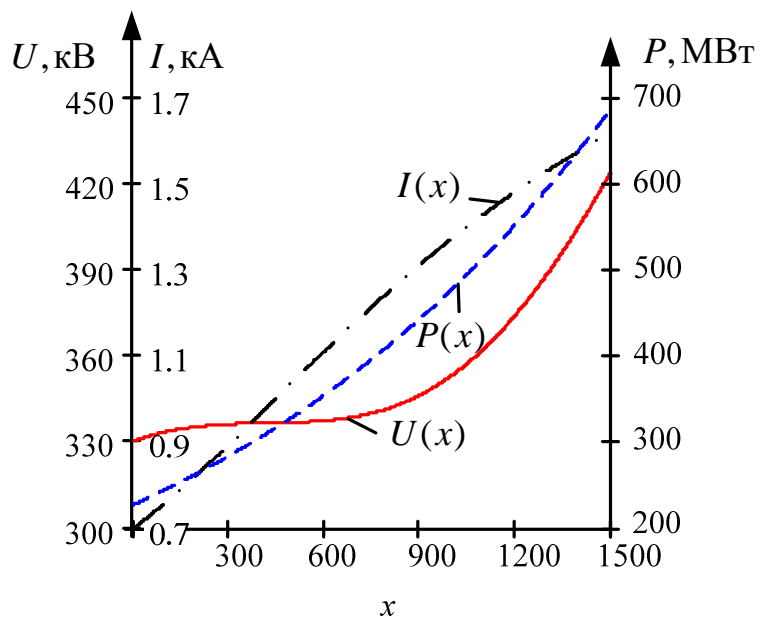


Рис. 233

Ниже приводится расчет программой MathCAD.

Исходные данные:

ORIGIN := 1

| | | | |
|----------------------------|-------------------------------|--|--|
| $R_0 := 0.06$ | $\frac{\text{Ом}}{\text{км}}$ | $U_2 := 330 \cdot 10^3 \cdot e^{60j \cdot \text{deg}}$ | В |
| $L_0 := 1.4 \cdot 10^{-3}$ | $\frac{\text{Гн}}{\text{км}}$ | $\omega := 314$ | $g(x) := \sqrt{2} \cdot x \cdot \sin(\arg(x))$ |
| $G_0 := 0.8 \cdot 10^{-6}$ | $\frac{\text{См}}{\text{км}}$ | $R := 900$ | Ом |
| $C_0 := 0.8 \cdot 10^{-8}$ | $\frac{\text{Ф}}{\text{км}}$ | $L := 1500$ | Гн |
| | | $C := 3.53 \cdot 10^{-6}$ | Ф |
| | | | $h(z) := \begin{cases} x_{1,1} \leftarrow \text{Re}(z) \\ x_{1,2} \leftarrow \text{Im}(z) \\ x_{2,1} \leftarrow z \\ x_{2,2} \leftarrow \frac{\arg(z)}{\text{deg}} \\ x \end{cases}$ |

1. Установившийся режим в линии

1.1. Волновое сопротивление z (Ом):

$$Z_B := \sqrt{\frac{R_0 + j \cdot \omega \cdot L_0}{G_0 + j \cdot \omega \cdot C_0}} \quad h(Z_B) = \begin{pmatrix} 408.709 & 35.373 \\ 410.237 & 4.947 \end{pmatrix} \quad \text{Ом}$$

1.2. Постоянная распространения γ (1/км):

$$\gamma := \sqrt{(R_0 + j \cdot \omega \cdot L_0) \cdot (G_0 + j \cdot \omega \cdot C_0)}$$

$$\gamma = 2.381 \times 10^{-4} + 1.055i \times 10^{-3} \quad \frac{1}{\text{км}}$$

Коэффициент затухания α (Нп/км) и коэффициент фазы β (рад/км):

$$\alpha := \text{Re}(\gamma) \quad \beta := \text{Im}(\gamma)$$

$$\alpha = 2.381 \times 10^{-4} \quad \frac{\text{Нп}}{\text{км}} \quad \beta = 1.055 \times 10^{-3} \quad \frac{\text{рад}}{\text{км}}$$

1.3. Фазовая скорость v (км/с):

$$v := \frac{\omega}{\beta} \quad v = 2.976 \times 10^5$$

1.4. Длина волны λ (км):

$$\lambda := \frac{2 \cdot \pi}{\beta} \quad \lambda = 5.956 \times 10^3$$

1.5. Комплексное сопротивление нагрузки (Ом):

$$Z_H := \frac{R \cdot (2 \cdot R - i \cdot x_c)}{R + 2 \cdot R - i \cdot x_c} \quad h(Z_H) = \begin{pmatrix} 630.131 & -90.175 \\ 636.551 & -8.144 \end{pmatrix} \quad \text{Ом}$$

1.6. Комплекс действующего значения тока в нагрузке (А):

$$I_2 := \frac{U_2}{Z_H} \quad h(I_2) = \begin{pmatrix} 192.995 & 481.156 \\ 518.419 & 68.144 \end{pmatrix} \quad \text{А} \quad x_c := \frac{1}{\omega \cdot c}$$

1.7. Постоянные интегрирования (В):

$$A_1 := \frac{U_2 + Z_B \cdot I_2}{2} \quad h(A_1) = \begin{pmatrix} 1.134 \times 10^5 & 2.446 \times 10^5 \\ 2.697 \times 10^5 & 65.124 \end{pmatrix}$$

$$A_2 := \frac{U_2 - Z_B \cdot I_2}{2} \quad h(A_2) = \begin{pmatrix} 5.157 \times 10^4 & 4.115 \times 10^4 \\ 6.598 \times 10^4 & 38.591 \end{pmatrix}$$

1.8. Комплексы действующих значений напряжения и тока в начале линии:

$$I(x) := \frac{A_1}{Z_B} \cdot e^{\gamma \cdot x} - \frac{A_2}{Z_B} \cdot e^{-\gamma \cdot x}$$

$$U(L) = -3.231 \times 10^5 + 1.216i \times 10^5 \quad |U(L)| = 3.453 \times 10^5 \quad \text{В}$$

$$U(x) := A_1 \cdot e^{\gamma \cdot x} + A_2 \cdot e^{-\gamma \cdot x}$$

$$I(L) = -881.7 + 552.068i \quad |I(L)| = 1.04 \times 10^3 \quad \text{А}$$

в конце линии:

$$U(0) = 1.65 \times 10^5 + 2.858i \times 10^5 \quad |U(0)| = 3.3 \times 10^5 \quad \text{В}$$

$$I(0) = 192.995 + 481.156i \quad |I(0)| = 518.419 \quad \text{А}$$

1.9. Активные мощности (Вт)

в начале линии:

$$P(x) := \text{Re}(U(x) \cdot \overline{I(x)}) \quad P(L) = 3.521 \times 10^8 \quad \text{Вт}$$

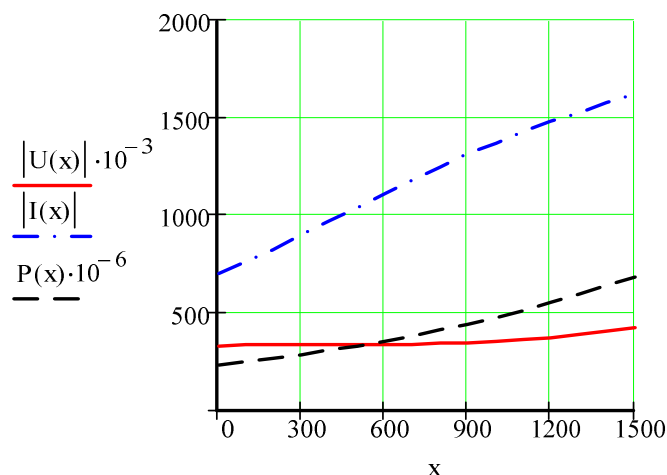
в конце линии

$$P(0) = 1.694 \times 10^8 \quad \text{Вт}$$

1.10. Эффективность передачи энергии по линии:

$$\eta := \frac{P(0)}{P(L)} \quad \eta = 0.481$$

$$x := 0..L$$



2. В переходном режиме для линии без потерь ($R_0 \approx 0$; $G_0 \approx 0$), при подключении к источнику постоянного напряжения $U_0 = \sqrt{2} \cdot U_1 \sin(\psi_1) = \sqrt{2} \cdot 423,4 \cdot 10^3 \sin(140^\circ) = 384,9$ кВ, определяем следующие величины:

2.1. Волновое сопротивление:

$$Z_B = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = \sqrt{\frac{10^{-3}}{1,11 \cdot 10^{-8}}} = 300 \text{ Ом.}$$

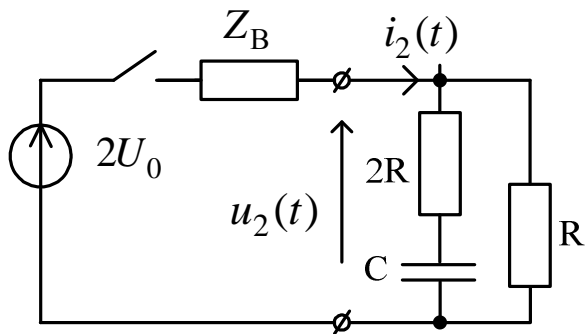
2.2. Фазовая скорость:

$$v = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} = \frac{1}{\sqrt{10^{-3} \cdot 1,11 \cdot 10^{-8}}} = 3 \cdot 10^5 \frac{\text{км}}{\text{с}}.$$

2.3. Падающие волны напряжения и тока:

$$U_{\text{пад}} = U_0 = 384,9 \text{ кВ}; \quad I_{\text{пад}} = \frac{U_0}{Z_B} = 1,283 \text{ кА.}$$

2.4. Напряжение $u(t)$ и ток $i_2(t)$ в нагрузке, воспользовавшись, например, классическим методом (цепь первого порядка):

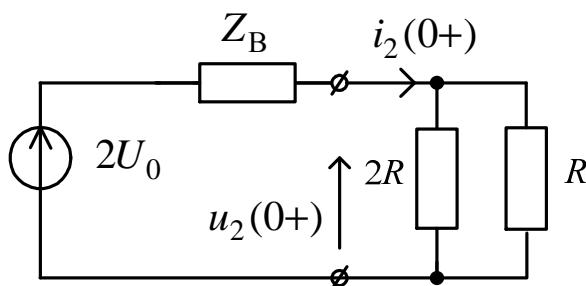


$$\begin{cases} i_2(t) = i_{2\text{пр}} + Ae^{pt}; \\ u_2(t) = u_{2\text{пр}} + Be^{pt}. \end{cases}$$

Рис. 234

2.4.1. Определяем независимые начальные условия (ННУ) при $t = 0 - u_C(0-) = 0$.

2.4.2. Зависимые начальные условия (ЗНУ) при $t = 0+$ (схема после коммутации ключа), когда $u_C(0-) = u_C(0+) = 0$:

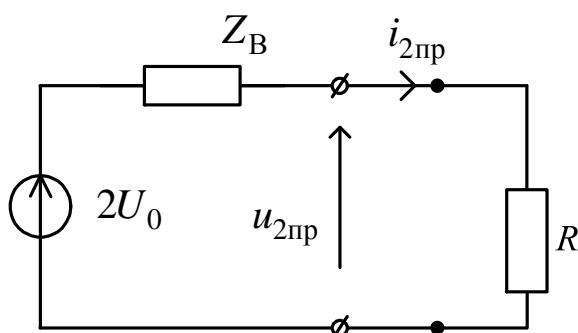


$$i_2(0+) = \frac{2U_0}{Z_B + \frac{2R \cdot R}{2R + R}} = 1,1 \text{ кА};$$

$$u_2(0+) = i_2(0+) \frac{2R \cdot R}{2R + R} = 440 \text{ кВ.}$$

Рис. 225

2.4.3. Определяем принуждённую составляющую при $t = \infty$: схема после коммутации, установившийся режим, постоянный источник, C – разрыв, L – коротка;



$$i_{2\text{пр}} = \frac{2U_0}{Z_B + R} = 0,855 \text{ кА},$$

причём

$$u_{2\text{пр}} = i_{2\text{пр}} R = 513,2 \text{ кВ.}$$

Рис. 226

2.4.4. Определяем корень характеристического уравнения p .

Используем метод сопротивления цепи после коммута-

ции: $\left(C \rightarrow \frac{1}{Cp}; L \rightarrow Lp \right)$, причём $R_E = 0$;

$$z(p) = \frac{1}{pC} + 2R + \frac{RZ_B}{R + Z_B} = 0 \Rightarrow p = -\frac{1}{\left(2R + \frac{RZ_B}{R + Z_B}\right)C} = -269 \frac{1}{c}.$$

2.4.5. Постоянные интегрирования:

$$A = i_2(0+) - i_{2пр} = 0,245 \text{ кА};$$

$$B = u_2(0+) - u_{2пр} = -73,2 \text{ кВ}.$$

2.4.6. Окончательный результат:

$$i_2(t) = i_{2пр} + Ae^{pt} = 0,855 + 0,245e^{-269t}, \text{ кА};$$

$$u_2(t) = u_{2пр} + Be^{pt} = 513,2 - 73,2e^{-269t}, \text{ кВ}.$$

2.5. Отраженные от конца линии волны напряжения:

$$u_{отр}(t) = u_2(t) - U_{пад} = 128,3 - 73,2e^{-269t}, \text{ кВ};$$

$$i_{отр} = -\frac{u_{отр}(t)}{Z_B} = -0,428 + 0,244e^{-269t}, \text{ кА}.$$

2.6. Рассчитываем распределение напряжения и тока вдоль линии для момента времени $t_0 = \frac{3l}{2v} = 7,5 \cdot 10^{-3} \text{ с}$, после подключения источника, когда отражённые от конца линии волны напряжения и тока достигли середины линии.

Для этого заполняем таблицу 2.

Таблица 2

| Точка | А Середина линии | Б | В | Г нагрузка |
|-----------------------|-------------------------|---|---|--|
| $t, \text{ с}$ | $t_A = 0$ | $t_B = \frac{(l/2)}{3v} =$ $= 0,833 \cdot 10^{-3}$ | $t_B = \frac{2(l/2)}{3v} =$ $= 1,66 \cdot 10^{-3}$ | $t_B = \frac{(l/2)}{v} =$ $= 2,5 \cdot 10^{-3}$ |
| $u_{отр}, \text{ кВ}$ | $u_{отр}(t_A) = 55,1$ | $u_{отр}(t_B) = 69,795$ | $u_{отр}(t_B) = 81,464$ | $u_{отр}(t_\Gamma) = 90,936$ |
| $i_{отр}, \text{ кА}$ | $i_{отр}(t_A) = -0,184$ | $i_{отр}(t_B) = -0,233$ | $i_{отр}(t_B) = -0,272$ | $i_{отр}(t_\Gamma) = -0,303$ |
| $u(x, t), \text{ кВ}$ | $u(t_A) = 440$ | $u(t_B) = 454,7$ | $u(t_B) = 466,36$ | $u(t_\Gamma) = 475,84$ |
| $i(x, t), \text{ кА}$ | $i(t_A) = 1,1$ | $i(t_B) = 1,051$ | $i(t_B) = 1,012$ | $i(t_\Gamma) = 0,98$ |

Расчёт ведётся следующим образом:

$$u_2(t_B) = 513,2 - 73,2e^{-269 \cdot 0,833 \cdot 10^{-3}} = 454,7 \text{ кВ.}$$

Далее строим графики для $t = t_0$.

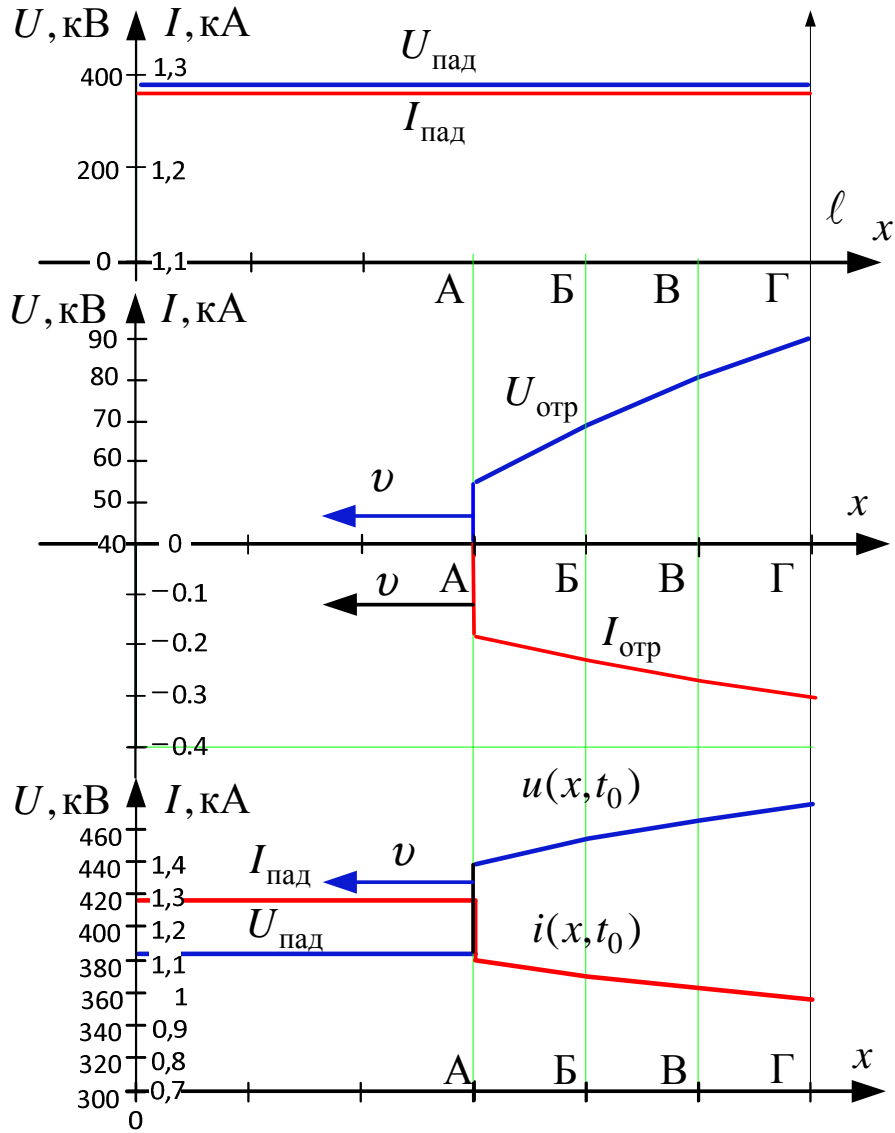


Рис. 227

Ниже приводится расчет программой MathCAD.

2. Переходный режим в линии без потерь

$$U_0 := \left| |U(L)| \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\arg(U(L))) \right| \quad U_0 = 1.72 \times 10^5$$

2.1. Волновое сопротивление z (Ом):

Документ Mathcad ;
$$z = \sqrt{L_0 / C_0}$$

2.2. Фазовая скорость v (км/с):

$$v := \frac{1}{\sqrt{L_0 \cdot C_0}} \quad v = 2.988 \times 10^5$$

$$t_0 := \frac{3 \cdot L}{2 \cdot v} \quad t_0 = 7.53 \times 10^{-3}$$

2.3. Падающие волны напряжения и тока:

$$U_{\text{пад}} := U_0 \quad I_{\text{пад}} := \frac{U_{\text{пад}}}{Z_B} \quad I_{\text{пад}} = 411.138$$

2.4. Определим U_2 и I_2 классическим методом:

2.4.1. Начальные условия:

$$I_0 := \frac{2 \cdot U_0}{Z_B + \frac{2}{3} \cdot R} \quad U_{20} := I_0 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot R \right)$$

$$I_0 = 337.791 \quad U_{20} = 2.027 \times 10^5$$

2.4.2. Определяем принуждённые составляющие

$$I_{\text{пр}} := \frac{2 \cdot U_0}{Z_B + R} \quad I_{\text{пр}} = 260.923$$

$$U_{2\text{пр}} := I_{\text{пр}} \cdot R \quad U_{2\text{пр}} = 2.348 \times 10^5$$

2.4.3. Определяем корень характеристического уравнения:

$$p := \frac{1}{s \cdot p} + 2 \cdot R + \frac{R \cdot Z_B}{R + Z_B} \quad \text{solve, } p \rightarrow -135.83044575447326522$$

$$p = -135.83$$

2.4.4. Постоянные интегрирования

$$A := I_0 - I_{\text{пр}} \quad B := U_{20} - U_{2\text{пр}}$$

2.4.5. Ток и напряжение в нагрузке:

$$I_2(t) := I_{\text{пр}} + A \cdot e^{p \cdot t}$$

$$U_2(t) := U_{2\text{пр}} + B \cdot e^{p \cdot t}$$

2.5. Определяем отраженные волны:

$$U_{отр}(t) := U2(t) - U_{пад} \quad I_{отр}(t) := \frac{-U_{отр}(t)}{Z_B}$$

2.6. Совмещенные графики зависимостей распределения вдоль линии волн тока $i(x, t_0)$ и напряжения $u(x, t_0)$, соответствующих моменту времени t_0 после подключения источника, когда отраженные от конца линии волны напряжения и тока достигли середины линии.

$$\text{ORIGIN} := 0$$

$$x_0 := V \cdot t_0$$

$$N := 3$$

$$n := 0..N$$

$$\delta L := (x_0 - L) \cdot \frac{1}{N}$$

$$L1_n := L + \delta L \cdot n$$

$$t_n := \frac{3 \cdot L}{2 \cdot V} - \frac{L1_n}{V}$$

$$l_k :=$$

$$k := 0..1$$

$$L1_n =$$

| |
|----------------------|
| 1.5·10 ³ |
| 1.75·10 ³ |
| 2·10 ³ |
| 2.25·10 ³ |

$$t_n =$$

| |
|------------------------|
| 2.51·10 ⁻³ |
| 1.673·10 ⁻³ |
| 8.367·10 ⁻⁴ |
| 0 |

| |
|---------------------|
| 0 |
| 2L - x ₀ |

$$U_{отр}(t_n) =$$

| |
|-----------------------|
| 3.997·10 ⁴ |
| 3.722·10 ⁴ |
| 3.414·10 ⁴ |
| 3.068·10 ⁴ |

$$I_{отр}(t_n) =$$

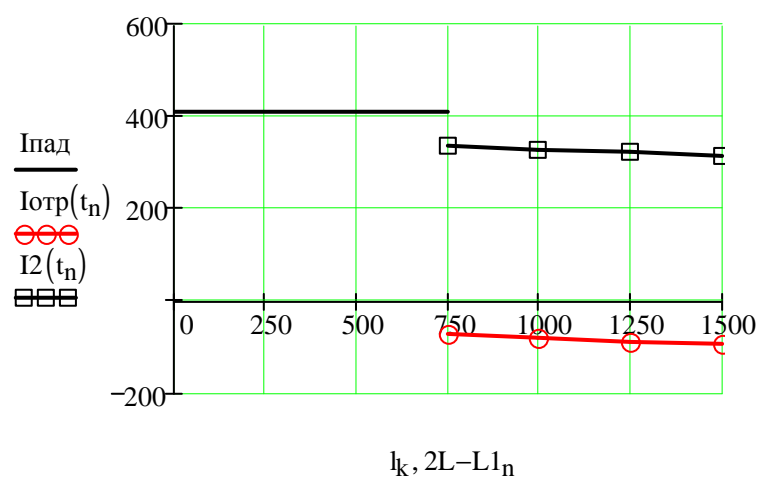
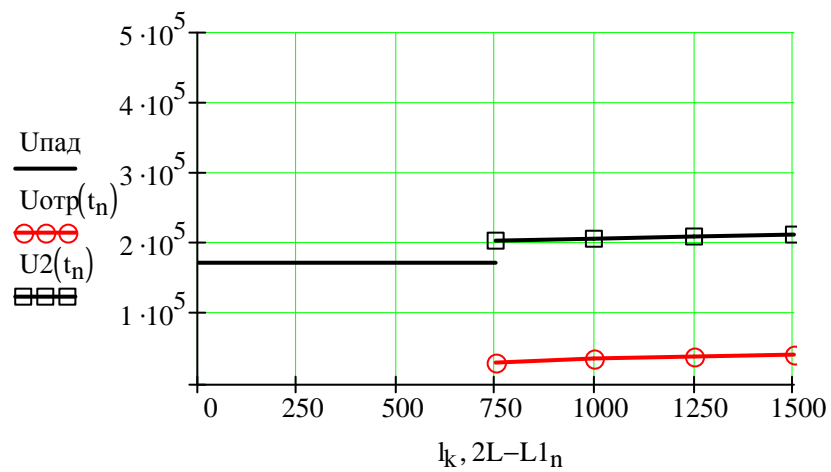
| |
|---------|
| -95.554 |
| -88.975 |
| -81.604 |
| -73.347 |

$$U2(t_n) =$$

| |
|-----------------------|
| 2.12·10 ⁵ |
| 2.092·10 ⁵ |
| 2.061·10 ⁵ |
| 2.027·10 ⁵ |

$$I2(t_n) =$$

| |
|---------|
| 315.584 |
| 322.163 |
| 329.533 |
| 337.791 |



ЛИТЕРАТУРА

Обязательная

1. Теоретические основы электротехники. Т. 1: учебник для вузов / К.С. Демирчян, Л.Р. Нейман, Н.В. Коровкин. – 5-е изд. – СПб.: Питер, 2009. – 512 с.
2. Теоретические основы электротехники. Т. 2: учебник для вузов / К.С. Демирчян, Л.Р. Нейман, Н.В. Коровкин. – 5-е изд. – СПб.: Питер, 2009. – 432 с.
3. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи: учебник для бакалавров / Л.А. Бессонов. – 11-е изд., перераб. и доп. – М.: Юрайт, 2012. – 701 с.
4. Основы теории цепей / Г.В. Зевеке [и др.]. – М.: Энергоатомиздат, 1989. – 528 с.

Дополнительная

5. Теоретические основы электротехники: учеб. пособие / Р.Н. Сметанина, Г.В. Носов, Ю.Н. Исаев; Томский политехнический университет (ТПУ), Институт дистанционного образования (ИДО). – 3-е изд., испр. – Томск: Изд-во ТПУ, 2009. – 88 с.
6. Теоретические основы электротехники: учеб. пособие для вузов: в 2 ч. / В.Д. Эськов, А.В. Каталевская; Национальный исследовательский Томский политехнический университет (ТПУ). – Томск: Изд-во ТПУ, 2011. Ч. 1. – 2011. – 165 с.

Учебное издание

НОСОВ Геннадий Васильевич
КОЛЧАНОВА Вероника Андреевна
КУЛЕШОВА Елена Олеговна

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ ЧАСТЬ 2

Учебное пособие

Научный редактор
доктор технических наук, профессор
Ю.П. Усов

Редактор Н. Т. Синельникова

Верстка Л.А. Егорова

Подписано к печати Формат 60×84/16.

Бумага «Снегурочка». Печать Хероx.


Усл. печ.л. 11,97. Уч.-изд.л.10,84.

Заказ . Тираж экз.



Национальный исследовательский
Томский политехнический университет
Система менеджмента качества
Издательства Томского политехнического университета сертифицирована
NATIONAL QUALITY ASSURANCE по стандарту BS EN ISO 9001:2008



ИЗДАТЕЛЬСТВО  тпу. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30
Тел./факс: 8(3822)56-35-35, www.tpu.ru