Лабораторная работа №2
Гармонический анализ сигналов

Цель работы: приобретение практических навыков проведения временного и гармонического анализа периодических и непериодических сигналов.

Часть 1 - реализовать алгоритм гармонического анализа периодических сигналов в СКМ Mathcad.

Основные теоретические сведения

1. Тригонометрический ряд Фурье

Задана функция $u(t)$ на интервале $[t_1, t_2]$.

Предполагается, что $u(t)$ удовлетворяет условиям Дирихле на интервале $[t_1, t_2]$, а вне интервала периодически повторяется.

Энергия сигнала на интервале $[t_1, t_2]$

$$E = \int_{t_1}^{t_2} P_м(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} u^2(t)dt\,. \tag{1}$$

Средняя мощность на интервале $[t_1, t_2]$

$$P = \frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_2} u^2(t)dt, \quad T = t_2 - t_1. \tag{1.1}$$

Ряд Фурье для сигнала, заданного на произвольном интервале [0,T] будет иметь вид:

$$uf(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}[a_k\cos(\omega_0\cdot k\cdot t) + b_k\sin(\omega_0\cdot k\cdot t],\tag{2}$$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T}\cdot\int_0^T u(t)dt, \\ a_k &= \frac{2}{T}\cdot\int_0^T u(t)\cdot\cos(\omega_0\cdot k\cdot t)dt, \\ b_k &= \frac{2}{T}\cdot\int_0^T u(t)\cdot\sin(\omega_0\cdot k\cdot t)dt. \end{aligned}\tag{3}$$

a_0, a_k, b_k – коэффициенты ряда Фурье.

Для интервала [-T/2,T/2] формулы будут отличаться только пределами интегрирования.

2. Обобщенный ряд Фурье

Тригонометрический ряд Фурье может быть представлен в другом виде

$$uf(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos(k \cdot t + \varphi_k),$$
$$c_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \tag{4}$$
$$\varphi_k = -arctg \frac{b_k}{a_k}.$$

$\frac{a_0}{2}$ - постоянная составляющая

$c_k \cos(k \cdot t + \varphi_k)$ - набор гармоник

c_k, φ_k , - амплитуда и фаза k-ой гармоники

Представление сигнала в виде (4) называется спектральным разложением этого сигнала в базисе гармонических функций или гармоническим анализом сигнала.

3. Погрешность аппроксимации

возникает при замене (аппроксимации) одной функции другой. Среднеквадратическая абсолютная погрешность аппроксимации для функции, заданной на интервале [0,T], определяется выражением:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T (u(t) - uf(t))^2 dt}, \tag{5}$$

где *u(t)* – исходный сигнал;
uf(t) – функция, полученная при разложении в ряд Фурье.

Величина абсолютной погрешности не показательна, так как существенно зависит от диапазона исходного сигнала *u(t)*. Более показательной величиной является приведенная среднеквадратическая погрешность аппроксимации. Приведение осуществляется либо к среднему значению сигнала, либо к его диапазону ($u_{max} - u_{min}$):

$$\hat{\sigma} = \frac{\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T (u(t) - uf(t))^2 dt}}{u_{\max} - u_{\min}}. \tag{6}$$

Часто погрешность (6) выражается в процентах (0-100) %.

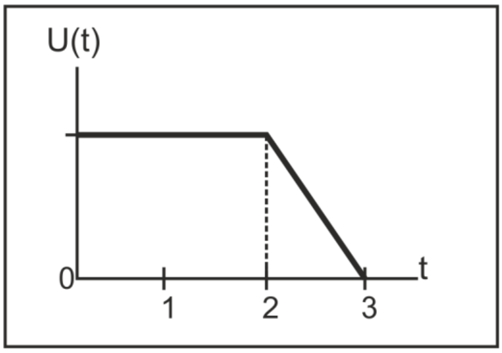
ЗАДАНИЕ К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ

По заданному в Приложении 1 варианту входного сигнала **u(t)** решить следующие задачи анализа входной информации:

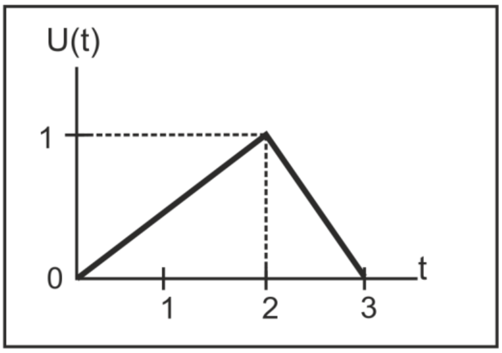
1. Провести математическое описание сигнала **u(t),** заданного графиком.
2. Определить среднюю мощность и энергию сигнала **u(t)** по его математическому описанию.
3. Аппроксимировать заданный сигнал **u(t)** тригонометрическим рядом Фурье, содержащем
   а) 3 члена разложения;
   б) 5 членов разложения;
   в) 10 членов разложения;
   г) с заданной точностью $\varepsilon = 10^{-6}$.(1, $t \in [t1, t2]$ 0.1. 0.0001)
4. Определить среднеквадратическую ошибку аппроксимации для каждого варианта 3.а) - 3.г).
5. Построить (в одних осях) графики приближения аппроксимирующей функции сигнала **u(t)** для разного числа членов разложения Фурье.
6. Построить график зависимости среднеквадратической ошибки от числа членов разложения сигнала **u(t)** в обобщенный ряд Фурье.
7. Определить амплитудный и фазовый спектры сигнала **u(t)** и построить их графики. При необходимости дополнить фазовый спектр предельными значениями (-π/2, π/2).
8. Повторить п.п.3-4 для обобщенного ряда Фурье.
9. Оценить разность среднеквадратических ошибок аппроксимации для тригонометрического и обобщенного ряда Фурье.

Приложение 1

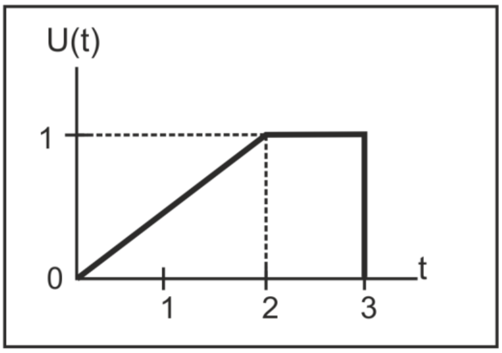
1



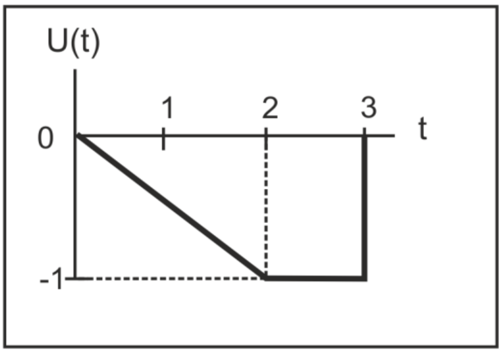
2



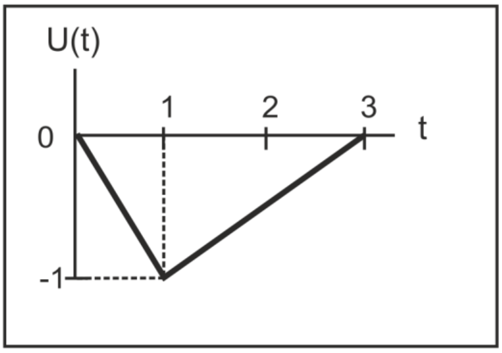
3



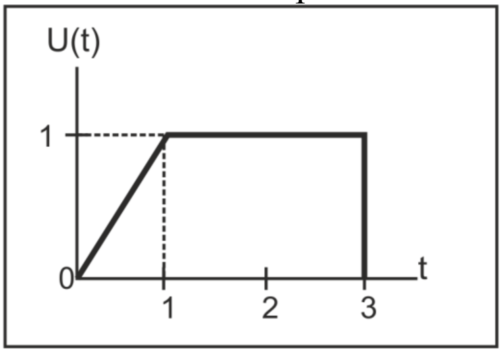
4



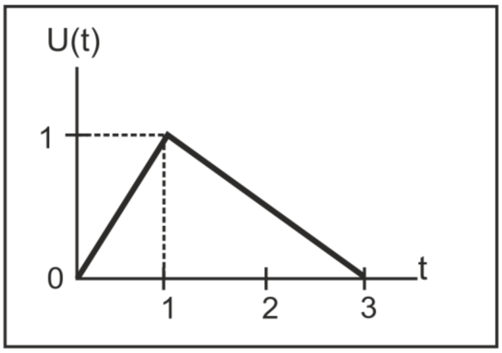
5



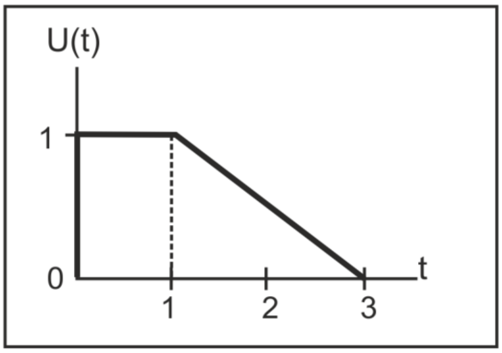
6



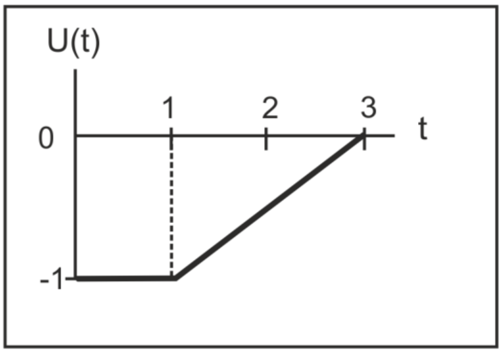
7



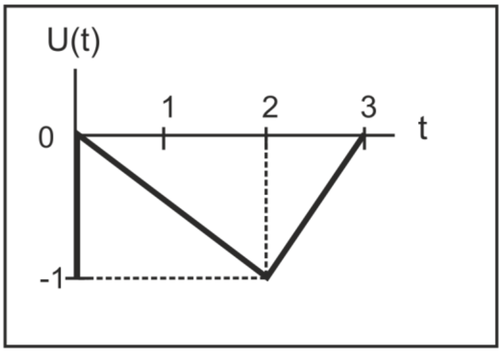
8



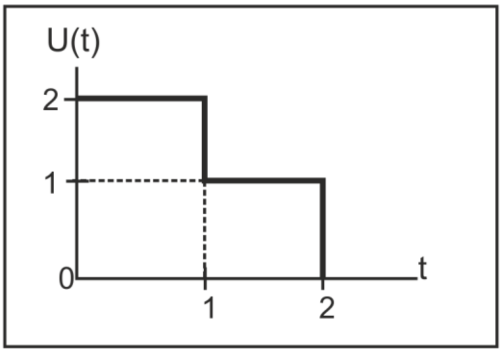
9



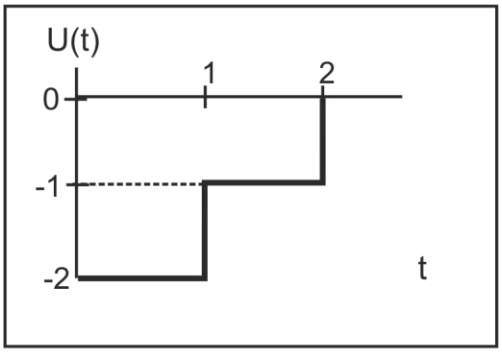
10



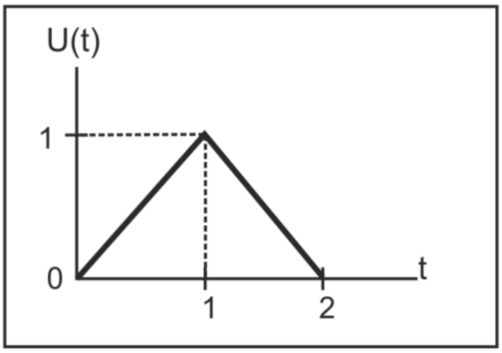
11



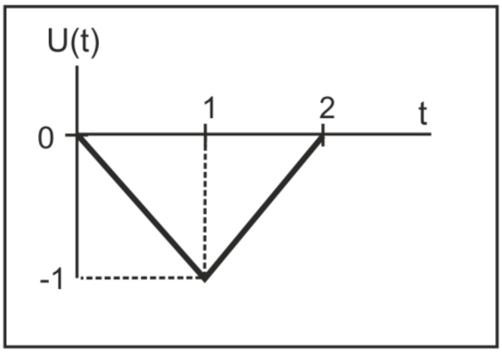
12



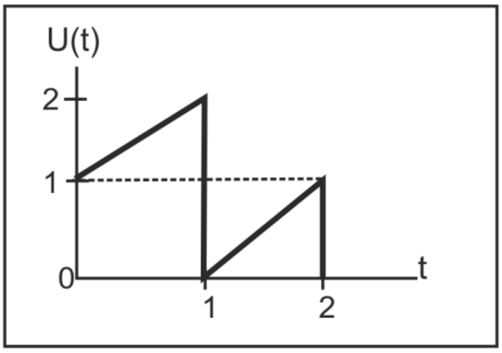
13



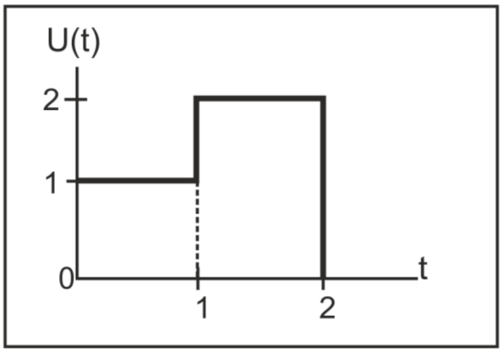
14



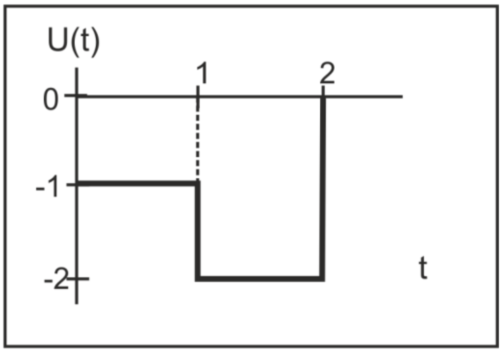
15



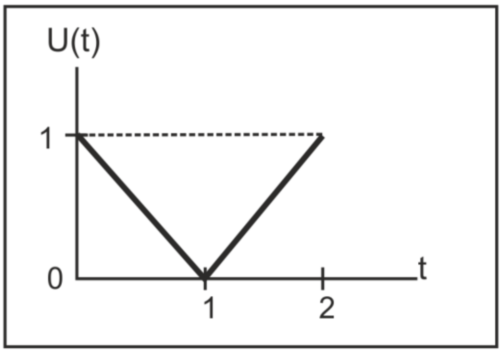
16



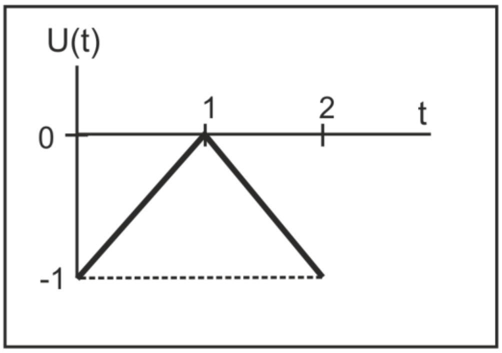
17



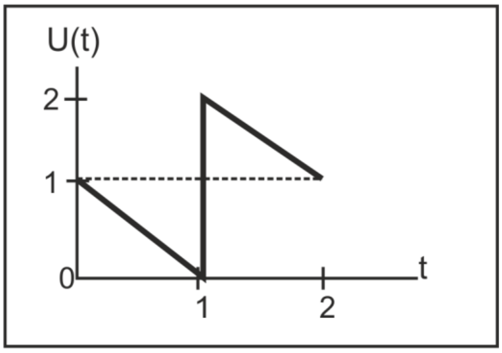
18



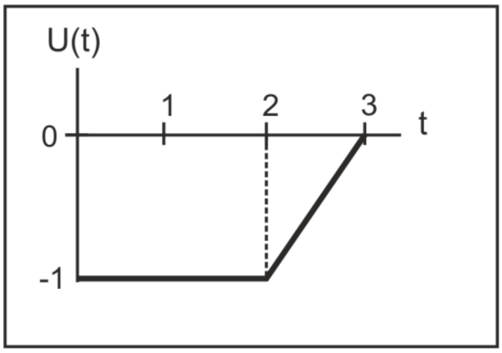
19



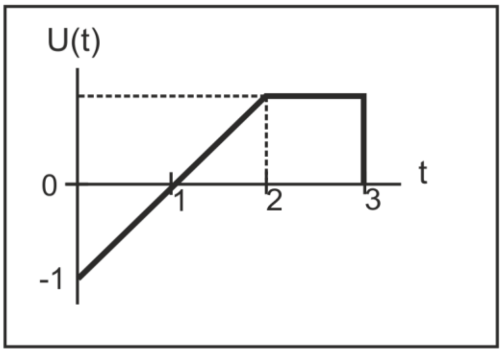
20



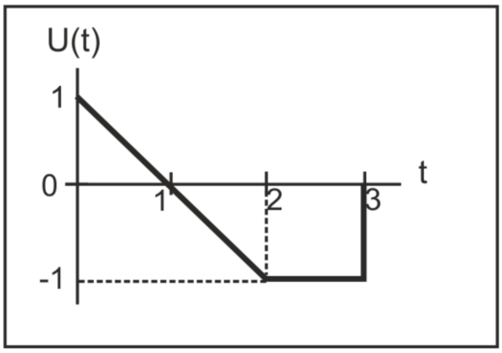
21



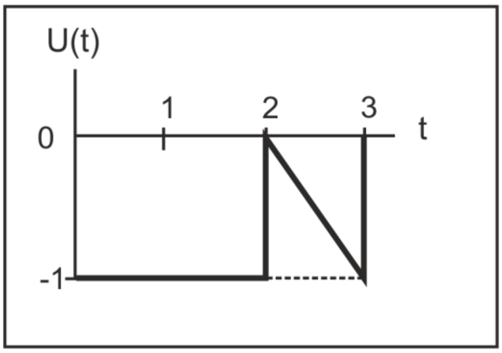
22



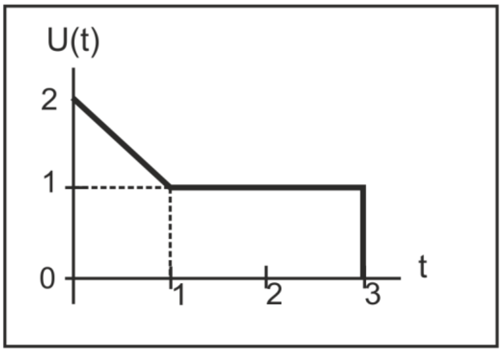
23



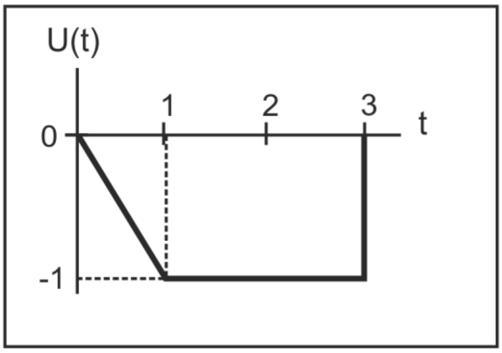
24



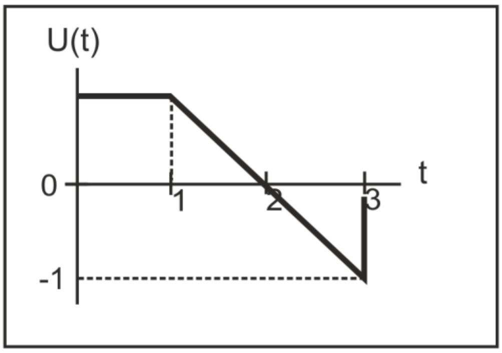
25



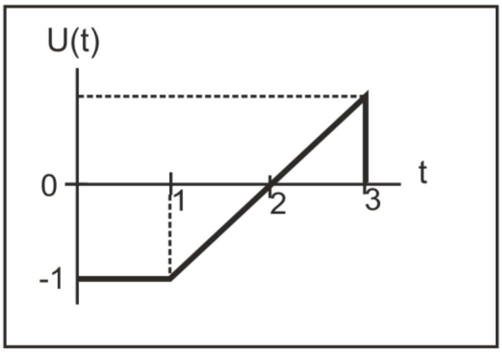
26



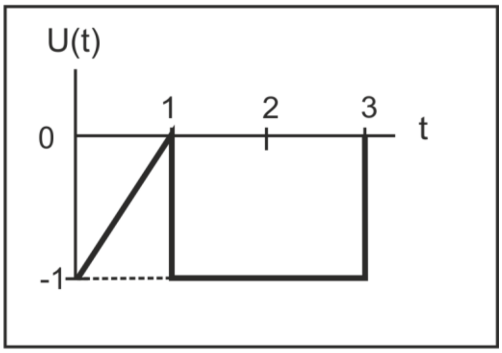
27



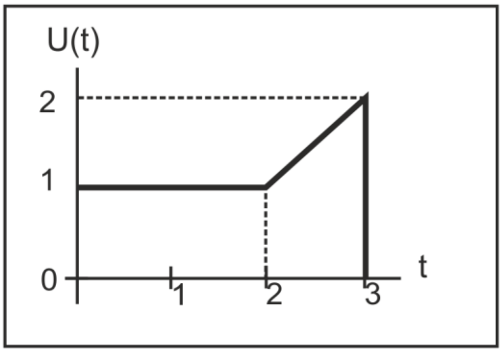
28



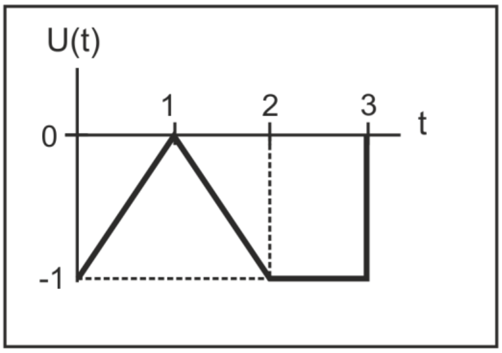
29



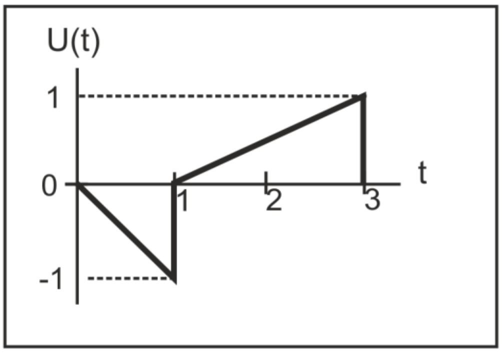
30



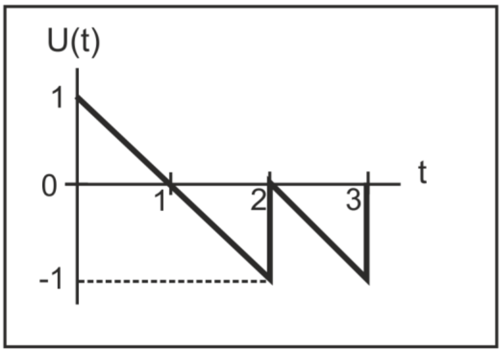
31



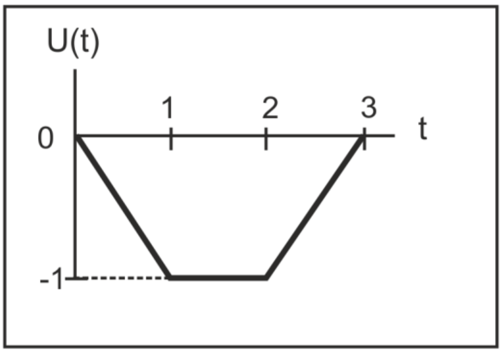
32



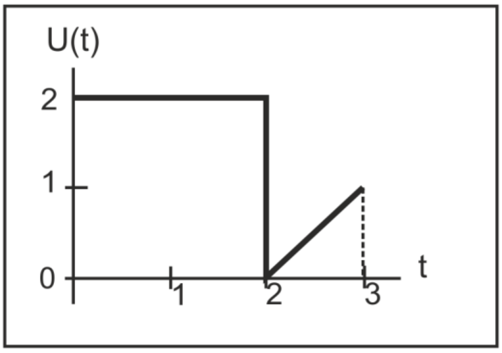
33



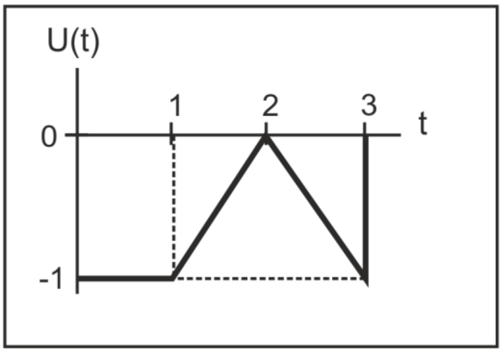
34



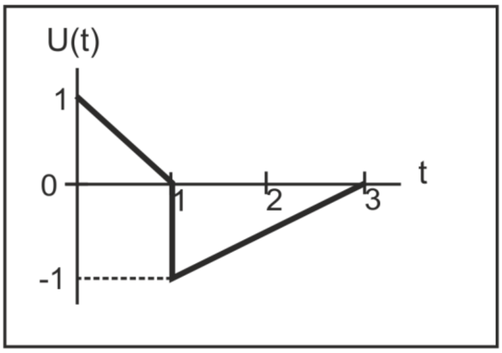
35



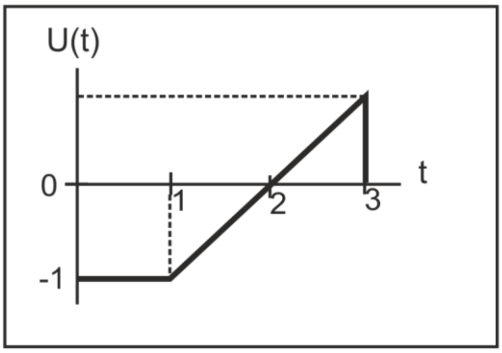
36



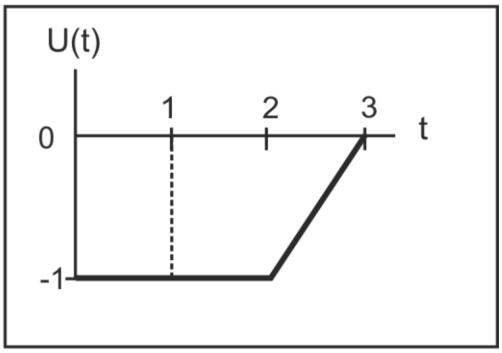
37



38



39



40