

Задачи 2

(СВ – случайная величина)

1. Имеется 6 ключей, из которых только один подходит к замку. Найти закон распределения СВ X , равной числу проб при открывании замка, если испробованный ключ в последующих пробах не участвует.
2. Вероятность того, что стрелок попадет в мишень при одном выстреле, равна 0,9. Стрелку выдаются патроны до тех пор, пока он не промахнется. Требуется: а) составить закон распределения дискретной случайной величины X – числа патронов, выданных стрелку; б) найти наименьшее число выданных стрелку патронов.
3. НСВ задана функцией плотности $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < -\frac{\pi}{2} \text{ или } x > 0, \\ \cos x & \text{при } -\frac{\pi}{2} < x < 0. \end{cases}$$

- а) Найти функцию распределения СВ X : $F(x)$.
 - б) Построить графики $F(x)$ и $f(x)$.
 - в) Найти вероятность попадания СВ X в интервал $(-\pi/3; -\pi/4)$.
4. Дана функция распределения:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Найти: функцию плотности $f(x)$, $M(X)$, $\sigma(X)$, $D(X)$.

5. Из двух орудий поочередно ведется стрельба по цели до первого попадания одним из орудий. Вероятность попадания в цель первым орудием равна 0,4 вторым - 0,6. Начинает стрельбу первое орудие. Составить законы распределения дискретных случайных величин X и Y – числа израсходованных снарядов соответственно первым и вторым орудием.
6. Производится три независимых испытания, в каждом из которых вероятность появления события A равна 0,4. Составить закон распределения дискретной случайной величины X – числа появлений события A в указанных испытаниях. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение X .
7. В партии из 10 деталей имеется 8 стандартных. Из этой партии наудачу взято 2 детали. Найти закон распределения случайной величины X , равный числу стандартных деталей в выборке.
8. НСВ задана функцией распределения $F(x)$:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ (1/\pi)(x - 0,5\sin 2x) & \text{при } 0 < x \leq \pi, \\ 1 & \text{при } x > \pi. \end{cases}$$

- а) Найти плотность вероятности СВ X — $f(x)$.
 б) Построить графики $f(x)$, $F(x)$.
 в) Найти вероятность попадания СВ X в $(0; \pi/2)$.
9. Найти: $M(X)$ НСВ X , распределенной равномерно в интервале $(2;8)$; функцию распределения $F(x)$ и функцию плотности вероятности $f(x)$; вероятность попадания НСВ X в интервал $(3; 6)$.
10. Устройство состоит из 1000 элементов, работающих независимо один от другого. Вероятность отказа любого элемента в течение времени T равна 0,001. Найти вероятность того, что за время T откажут ровно X элементов. Определить закон распределения СВ X и её числовые характеристики.
11. В коробке 7 карандашей, из которых 4 красных. Из этой коробки наудачу извлекается 3 карандаша.
 а) Найти закон распределения случайной величины X равной числу красных карандашей в выборке.
 б) Найти вероятность события: $0 < X \leq 2$.
12. Станок-автомат штампует детали. Вероятность того, что изготовленная деталь окажется бракованной, равна 0,001. Найти вероятность того, что среди 250 деталей окажется ровно X бракованных. Определить закон распределения СВ X и её числовые характеристики.
13. Устройство состоит из большего числа независимо работающих элементов с одинаковой (очень малой) вероятностью отказа каждого элемента за время T . Найти среднее число отказавших за время T элементов, если вероятность того, что за это время не откажет хотя бы один элемент, равна 0,99 (распределение Пуассона).
14. НСВ на всей числовой оси OX задана функцией распределения:
 $F(x) = (1/2) + (1/\pi) \operatorname{arctg}(x)$.
 Найти вероятность, что в результате двух испытаний случайная величина примет значение, заключенное в интервале $(0;1)$.
15. Дана функция плотности непрерывной СВ X :
- $$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq \pi/6, \\ C \sin 3x & \text{при } \pi/6 < x \leq \pi/3, \\ 0 & \text{при } x > \pi/3. \end{cases}$$
- Найти: постоянную C , функцию распределения $F(x)$.
16. Из 25 контрольных работ, среди которых 5 оценены на «отлично» наугад извлекаются 3 работы. Найти закон распределения ДСВ X , если X — число работ оцененных на «отлично» среди извлеченных. Построить многоугольник распределения. Чему равна вероятность события $X > 0$?
17. Найти среднее число λ бракованных изделий в партии изделий, если вероятность того, что в этой партии содержится хотя бы одно бракованное изделие, равна 0,95. Предполагается, что число бракованных изделий в рассматриваемой партии распределено по закону Пуассона.

18. В урне 5 белых и 20 черных шаров. Вынули 3 шара. Случайная величина X — число вынутых белых шаров. Построить ряд распределения величины X .

19. Дискретная СВ задана законом распределения:

x_i	3	4	7	10
p_i	0,2	0,1	0,4	0,3

Найти функцию распределения и построить ее график.

20. Дана функция плотности непрерывной случайной величины X :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 1, \\ C(x^2 - x) & \text{при } 1 < x \leq 2, \\ 0 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Найти: постоянную C , функцию распределения $F(x)$. Вероятность попадания СВ X в интервал $(1/2; 3/2)$.

21. С вероятностью попадания 0,9 охотник стреляет по дичи до первого попадания, но успевает сделать не более 4-х выстрелов. ДСВ X — число промахов:

а) Найти закон распределения X .

б) Найти вероятность событий: $X < 2$, $X \leq 3$, $1 < X \leq 3$.

22. Бросают три монеты. Требуется: а) задать случайную величину X , равную числу выпавших "решеток"; б) построить ряд распределения.

23. НСВ X имеет плотность вероятности (закон Коши):

$$f(x) = C/(1+x^2).$$

Найти: а) постоянную C ;

б) функцию распределения $F(x)$;

в) вероятность попадания в интервал $-1 < X < 1$;

г) построить графики $f(x)$, $F(X)$.

24. Найти $M(X)$ и $\sigma(X)$ НСВ, имеющей плотность вероятности:

$$f(x) = 1/(3\sqrt{2\pi}) \exp(-(x+2)^2/18)$$

Указать интервал, симметричный относительно $M(X)$ в который попадает случайная величина x с вероятностью $p = 0,9973$.

25. Построить ряд распределения числа попаданий мячом в корзину при четырёх бросках, если вероятность попадания равна 0,7.

26. Два стрелка делают по одному выстрелу в мишень. Вероятность попадания для первого стрелка при одном выстреле 0,5, для второго 0,4. ДСВ X — число попаданий в мишень.

а) Найти закон распределения X .

б) Найти вероятность $X \geq 1$.

27. Из партии в 20 изделий, среди которых имеются 4 бракованных, выбраны случайным образом 3 изделия для проверки их качества. Построить ряд распределения случайного числа X бракованных изделий, содержащихся в выборке.

28. НСВ X задана функцией распределения $F(x)$:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x_0^3}{x^3} & \text{при } x \geq x_0 \ (x_0 > 0), \\ 0 & \text{при } x < x_0. \end{cases}$$

а) Найти плотность вероятности СВ X — $f(x)$.

б) Построить графики $f(x)$, $F(x)$.

в) Найти вероятность попадания НСВ в интервал $(0,1)$.

29. $M(X)$ и $\sigma(X)$ нормального распределённой СВ X соответственно равны 10 и 2. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале $(12,14)$.

30. Случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 2, \\ (x-2)^2 & \text{при } 2 < x \leq 3, \\ 1 & \text{при } x \geq 3. \end{cases}$$

а) Найти плотность вероятности СВ X — $f(x)$.

б) Построить графики $f(x)$, $F(x)$.

в) Найти вероятность попадания НСВ в интервал $(1; 2.5)$.

31. Три стрелка независимо друг от друга сделали по одному выстрелу по мишени. Вероятность попадания для первого стрелка 0,9, для второго 0,8, для третьего — 0,7. Найти закон распределения величины X — числа попадания в мишень. Чему равна вероятность не менее двух попаданий?

32. Случайная величина X распределена равномерно в интервале $(0, \pi)$. Найти закон распределения случайной величины $Y = \cos X$.

33. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[1, 3]$. Найти плотность вероятности случайной величины $Y = X^2$.

34. Функция плотности НСВ X задана на всей числовой оси OX :

$$f(x) = 4C / (1+x^2)$$

Найти постоянный параметр C .

35. НСВ X задана функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -2, \\ 0,5 + (1/\pi)\arcsin(x/2) & \text{при } -2 < x \leq 2, \\ 1 & \text{при } x \geq 2. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате трех независимых испытаний X примет значение в интервале $(-1;1)$.

36. В первой урне 5 шаров — 2 белых и 3 черных. Во второй 3 шара — 1 белый и 2 черных. Из первой урны наудачу переложили во вторую 2 шара, после чего, из второй в первую переложили 1 шар. Найти закон распределения случайной величины X — числа белых шаров в первой урне. Какова вероятность того, что число белых шаров не больше, чем первоначально? Построить многоугольник распределения.

37. Случайную величину X умножили на k . Как от этого изменяются ее характеристики: 1) математическое ожидание; 2) дисперсия; 3) среднее квадратическое отклонение; 4) второй начальный момент?

38. Функция распределения случайной величины X задана формулой

$$F(x) = A + B \operatorname{arctg} x \quad (-\infty < x \leq +\infty).$$

Найти: а) постоянные A и B ;

б) плотность вероятности $f(x)$;

в) вероятность того, что величина X попадет в отрезок $[-1; 1]$.

39. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2, \\ 0,5x - 1, & 2 < x \leq 4, \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение:

а) меньше 2, б) меньше 3, в) не меньше 3, г) не меньше 5.

40. Дана функция распределения НСВ X :

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \sin 2x, & 0 < x \leq \pi/4, \\ 1, & x > \pi/4. \end{cases}$$

Найти функцию плотности и вероятность попадания СВ на интервал $(\pi/16; \pi/8)$.

41. Вероятность изготовления стандартной детали – 0,98. Для контроля наудачу взято 100 деталей. Найти закон распределения СВ X , равный числу нестандартных деталей в выборке. Найти вероятность событий:

а) в выборке 2 стандартных детали;

б) в выборке более 2 стандартных деталей.

42. Найти $M(X)$ числа лотерейных билетов, на которые выпадут выигрыши, если приобретено 50 билетов, причем вероятность выигрыша равна 0,01.

43. НСВ задана функцией плотности:

$$f(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{c^2 - x^2}} \quad \text{в интервале } (-c; c),$$

вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти вероятность попадания СВ X в интервал $(-c/2; c/2)$ и функцию распределения $F(x)$.

44. НСВ X распределена нормально с математическим ожиданием $m = 10$.

Вероятность попадания СВ X в интервал $(10; 20)$ равна 0,3. Чему равна вероятность попадания НСВ X в интервал $(0; 10)$?

45. Производятся 20 независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления успеха равна 0,2. Найти дисперсию числа появления успеха в этих испытаниях.

46. ДСВ X – число мальчиков в семьях с 5-тью детьми. Предполагают равновероятное рождение мальчика и девочки. Найти закон распределения.

Найти вероятность событий:

а) в семье 2-3 мальчика,

б) не более 3-х мальчиков,

- в) более 1 мальчика.
47. При 10 000 бросании монеты "герб" выпал 6400 раз. Следует ли считать, что монета несимметрична?
48. Устройство состоит из 10 независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента за время t равна 0,01, Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что абсолютная величина разности между числом отказавших элементов и средним числом (математическим ожиданием) отказов за время t окажется меньше двух.
49. НСВ задана функцией плотности:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{при } x \geq 0, \\ 0 & \text{при } x < 0, \end{cases}$$

где $\lambda > 0$.

Найти вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (2;3).

50. Случайная величина X задана функцией плотности:

$$f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$$

(распределение Лапласа). Найти математическое ожидание величины X .

Задачи 51 – 70. Случайные величины X и Y заданы законами распределений. Определить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайных величин X и Y . Составить законы распределений случайных величин $Z = X+Y$, $V=XY$. Построить многоугольник распределения вероятностей случайной величины Z . Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $W=2X-4Y$.

51	x_i	-1	3	4
	p_i	0,2	p_2	0,6

	y_j	2	5
	q_j	0,4	0,6

52	x_i	2	7	9
	p_i	p_1	0,3	0,2

	y_j	0	1
	q_j	0,7	0,3

53	x_i	4	6	9
	p_i	0,1	0,5	p_3

	y_j	3	5
	q_j	0,4	0,6

54	x_i	1	2	5
	p_i	p_1	0,1	0,8

	y_j	1	3
	q_j	0,4	0,6

55	x_i	-2	4		y_j	0	5	10
	p_i	0,4	0,6		q_j	0,3	q_2	0,3
56	x_i	0	5	10	y_j	-2	4	
	p_i	0,3	0,1	p_3	q_j	0,3	0,7	
57	x_i	-2	0	3	y_j	4	6	
	p_i	p_1	0,5	0,2	q_j	0,5	0,5	
58	x_i	-5	0	10	y_j	1	6	
	p_i	0,2	0,2	0,6	q_j	q_1	0,4	
59	x_i	-1	2	4	y_j	-3	1	
	p_i	0,4	0,2	p_3	q_j	0,4	0,6	
60	x_i	4	7	10	y_j	1	5	
	p_i	0,3	0,2	p_3	q_j	0,1	0,9	
61	x_i	-4	-2	1	y_j	0	4	
	p_i	0,1	0,6	0,3	q_j	q_1	0,2	
62	x_i	-10	-6	-1	y_j	-1	2	
	p_i	0,4	p_2	0,2	q_j	0,2	0,8	
63	x_i	-1	0	3	y_j	2	4	
	p_i	0,6	0,2	0,2	q_j	q_1	0,2	
64	x_i	-2	-1	1	y_j	4	5	
	p_i	0,3	0,2	p_3	q_j	0,2	0,8	
65	x_i	3	7	10	y_j	-4	4	
	p_i	p_1	0,1	0,6	q_j	0,3	0,7	
66	x_i	-6	-2	-1	y_j	1	4	
	p_i	0,2	p_2	0,2	q_j	0,2	0,8	
67	x_i	2	5		y_j	-1	3	7
	p_i	0,4	p_2		q_j	0,1	0,3	0,6
68	x_i	0	10	20	y_j	-2	-1	
	p_i	0,4	p_2	0,4	q_j	0,3	0,7	

69	x_i	-10	0	5
	p_i	0,3	0,4	0,3

y_j	1	4
q_j	0,8	q_2

70	x_i	-2	1
	p_i	0,1	p_2

y_j	-6	-1	2
q_j	0,2	0,3	0,5

В задачах 71 – 90 непрерывная случайная величина задана функцией распределения $F(x)$. Найти: а) вероятность попадания случайной величины X в интервал $(a; b)$; б) функцию плотности вероятностей $f(x)$; в) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X ; г) построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

$$71. F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ \frac{x^2}{\pi^2} & \text{при } 0 < x \leq \pi, \\ 1 & \text{при } x > \pi. \end{cases}$$

$$a = 1, \quad b = 2.$$

$$72. F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ \frac{64}{81}x^2 & \text{при } 0 < x \leq \frac{9}{8}, \\ 1 & \text{при } x > \frac{9}{8}. \end{cases}$$

$$a = 0,5, \quad b = 0,9.$$

$$73. F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 2, \\ (x-2)^2 & \text{при } 2 < x \leq 3, \\ 1 & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

$$a = 2,5, \quad b = 3.$$

74.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 1, \\ \frac{1}{6}(x^2 - x) & \text{при } 1 < x \leq 3, \\ 1 & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

$$a = 1, \quad b = 2.$$

75.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -\frac{\pi}{2}, \\ 0,5 \cdot (\sin x + 1) & \text{при } -\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 1 & \text{при } x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

$$a = 0, \quad b = \frac{\pi}{6}.$$

$$76. F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ \frac{16}{25}x^2 & \text{при } 0 < x \leq \frac{5}{4}, \\ 1 & \text{при } x > \frac{5}{4}. \end{cases}$$

$$a = 0,5, \quad b = 1.$$

$$77. F(x) = \begin{cases} e^x & \text{при } x \leq 0, \\ 1 & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

$$a = -2, \quad b = 0.$$

$$78. F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 1, \\ \ln x & \text{при } 1 < x \leq e, \\ 1 & \text{при } x > e. \end{cases}$$

$$a = 2, \quad b = e.$$

$$79. F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 100, \\ 1 - \left(\frac{100}{x}\right)^3 & \text{при } x > 100. \end{cases}$$

$a = 110, \quad \sigma = 120.$

$$81. F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ \frac{x^2}{e^2} & \text{при } 0 < x \leq e, \\ 1 & \text{при } x > e. \end{cases}$$

$a = 1, \quad \sigma = 2.$

$$83. F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ \frac{x^4}{16} & \text{при } 0 < x \leq 2, \\ 1 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

$a = 1, \quad \sigma = 1,5.$

85.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -2, \\ \frac{(x+2)^3}{216} & \text{при } -2 < x \leq 4, \\ 1 & \text{при } x > 4. \end{cases}$$

$a = -1, \quad \sigma = 3.$

$$87. F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ \frac{64}{49}x^2 & \text{при } 0 < x \leq \frac{7}{8}, \\ 1 & \text{при } x > \frac{7}{8}. \end{cases}$$

$a = 0,5, \quad \sigma = 1.$

$$89. F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 1, \\ \frac{x^3 - x^2}{48} & \text{при } 1 < x \leq 4, \\ 1 & \text{при } x > 4. \end{cases}$$

$a = 2, \quad \sigma = 3.$

$$80. F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ 1 - e^{-2x} & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

$a = 0, \quad \sigma = 2.$

82.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 3, \\ \frac{x^4 - 81}{175} & \text{при } 3 < x \leq 4, \\ 1 & \text{при } x > 4 \end{cases}$$

$a = 3,2, \quad \sigma = 3,5.$

$$84. F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 1, \\ \frac{(x-1)^2}{25} & \text{при } 1 < x \leq 6, \\ 1 & \text{при } x > 6. \end{cases}$$

$a = 2, \quad \sigma = 4.$

$$86. F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 1, \\ \frac{x^3 - x}{60} & \text{при } 1 < x \leq 4, \\ 1 & \text{при } x > 4. \end{cases}$$

$a = 1, \quad \sigma = 2.$

88.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -2, \\ \frac{x^3 + 8}{16} & \text{при } -2 < x \leq 2, \\ 1 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

$a = -1, \quad \sigma = 1.$

90.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq \sqrt{2}, \\ \frac{x^6 - x^4 - 4}{96} & \text{при } \sqrt{2} < x \leq \sqrt{5}, \\ 1 & \text{при } x > \sqrt{5}. \end{cases}$$

$a = 1,5, \quad \sigma = 2.$

91. Дана плотность распределения $p(x)$ случайной величины X . Найти параметр c , математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, функцию распределения случайной величины X , вероятность выполнения неравенства $x_1 < X < x_2$.

$$\text{a) } p(x) = \begin{cases} \frac{1}{c-a}, & x \in [a, b], \\ 0, & x \notin [a, b]; \end{cases}$$

$$\text{б) } p(x) = \begin{cases} a, & x \in [c, b], \\ 0, & x \notin [c, b]; \end{cases}$$

$$\text{в) } p(x) = \begin{cases} c, & x \in [a, b], \\ 0, & x \notin [a, b]; \end{cases}$$

$$\text{г) } p(x) = \begin{cases} a, & x \in \left[\frac{b-c}{2}, \frac{b+c}{2}\right], \\ 0, & x \notin \left[\frac{b-c}{2}, \frac{b+c}{2}\right]. \end{cases}$$