

Задачи для менеджеров

I

1. Руководитель группы из 35 человек, работающих на ковровой фабрике, в штате которой насчитывается 118 рабочих, узнает, что в следующий понедельник из этих 118 рабочих будут выбирать одного представителя. Представитель будет выбираться случайным образом, независимо от того, входит ли он в число подчиненных данного руководителя.

а) Найдите вероятность того, что представитель будет выбран из числа подчиненных данного руководителя.

б) Чему равна вероятность того, что представитель будет выбран из числа рабочих, не находящихся в подчинении этого руководителя?

2. Представьте себе, что вы отвечаете за составление графика работ строительства центра для проведения общественных мероприятий.

Во избежание больших затруднений необходимо, чтобы бетон был доставлен не позднее 27 июля, а финансирование организовано до 6 августа. На основе собственного опыта и анализа аналогичных ситуаций с применением субъективной оценки вероятности вы приписываете этим двум событиям соответственно вероятности 0,83 и 0,91. Предположим также, что вероятность выполнения одного из сроков или другого (или обоих) составляет 96%.

а) Найдите вероятность возникновения "больших затруднений".

б) Являются ли данные события несовместными? Откуда вам это известно?

в) Являются ли данные события независимыми? Откуда это известно?

3. Два структурных подразделения работают вместе над созданием спутника связи. Для того чтобы спутник был запущен вовремя, оба подразделения должны закончить работы в срок. Вы считаете, что вероятность окончания работ в срок составляет для каждого из подразделений 90%. Если предположить, что оба эти подразделения работают независимо (так, что соответствующие события оказываются независимыми), чему равна вероятность того, что запуск спутника будет отложен по причине невыполнения сроков?

4. Вероятность получения крупного заказа, который обсуждается в настоящее время, равна 0,4. Вероятность финансовых потерь в текущем квартале составляет 0,5.

а) Предположим, что названные события несовместны. Найдите вероятность получения заказа или потери денег.

б) Снова предположим, что рассматриваемые события несовместны. Исключает ли это возможность того, что заказ не будет получен и не удастся заработать денег?

в) Теперь предположим, что события "получение заказа" и "финансовые потери" независимы (поскольку заказ все равно не войдет в финансовую отчетность за данный квартал). Найдите вероятность получения заказа и финансовых потерь.

г) А теперь предположим, что вероятность получения заказа и финансовых потерь составляет 0,1. Являются ли события "получение заказа" и "финансовые потери" независимыми? Из чего это следует?

5. Ваша фирма классифицирует заказы по двум признакам: как крупные или мелкие в долларовом выражении и как легкие или тяжелые в отношении отгрузочного веса. В предыдущий период 28% заказов были крупными в долларовом выражении, 13% заказов были тяжелыми, а 10%

заказов были крупными в долларовом выражении и тяжелыми.

а) Постройте и заполните дерево вероятностей для данной ситуации, проведя первую ветвь для события "крупный в долларовом выражении".

б) Составьте таблицу совместных вероятностей для данной ситуации.

в) Постройте диаграмму Венна для данной ситуации.

г) Найдите вероятность того, что некоторый заказ оказывается крупным в долларовом выражении или тяжелым (или и тем и другим).

д) Найдите вероятность того, что некоторый заказ оказывается крупным в долларовом выражении, но не тяжелым.

е) Какой процент крупных в долларовом выражении заказов оказываются тяжелыми? Какой условной вероятностью это определяется?

ж) Какой процент тяжелых заказов является крупным в долларовом выражении? Какой условной вероятностью это определяется?

з) Являются ли события "крупный в долларовом выражении" и "тяжелый" несовместимыми? Из чего это следует?

и) Являются ли события "крупный в долларовом выражении" и "тяжелый" независимыми? Из чего это следует?

6. При решении вопроса о строительстве нового ресторана рассматриваются две возможности его размещения – в южной и в северной части города. Реально только одно из этих двух мест будет доступно для застройки. Если ресторан будет построен в северной части, вероятность его успешного функционирования в течение первого года равна 90%. Если же построить ресторан в южной части, вероятность успешной работы в первый год будет составлять только 65%. Оценка вероятности того, что ресторан можно будет построить в северной части, равна 40% .

а) Постройте дерево вероятностей для данной ситуации, проведя первую ветвь для события "размещение".

б) Найдите вероятность того, что работа ресторана в первый год будет успешной.

в) Найдите вероятность того, что ресторан будет построен в южной части города и его работа будет успешной.

г) Найдите вероятность того, что ресторан будет построен в южной части города при условии, что его работа будет успешной.

д) Найдите вероятность отсутствия успеха в работе ресторана при условии того, что он построен в северной части города.

7. Следующий год ожидается удачным с вероятностью 0,70. При условии того, что год удачный, с вероятностью 0,90 ожидается выплата дивидендов. Однако если год окажется неудачным, выплата дивидендов произойдет с вероятностью 0,20.

а) Постройте дерево вероятностей для данного случая, выбрав в качестве первой ветви наиболее подходящее событие.

б) Найдите вероятность того, что год удачный и дивиденды выплачиваются.

в) Найдите вероятность того, что дивиденды выплачиваются.

г) Найдите условную вероятность того, что год удачный при условии, что дивиденды выплачиваются.

8. Фирма рассматривает вопрос о выпуске новой зубной пасты. При обсуждении стратегии сделан вывод о том, что маркетинговое исследование будет удачным с вероятностью 0,65. Достигнуто также согласие по вопросу о том, что вероятность успешного выпуска товара на рынок составляет 0,40. При условии удачного маркетингового исследования вероятность успешного

выпуска товара на рынок равна 0,55.

- а) Постройте дерево вероятностей для данной ситуации.
- б) Найдите вероятность того, что маркетинговое исследование оказывается удачным и выпуск товара на рынок также оказывается успешным.
- в) При условии успешного выпуска товара на рынок найдите условную вероятность того, что маркетинговое исследование дало благоприятный результат.
- г) Найдите условную вероятность того, что выпуск товара на рынок оказывается успешным при условии отсутствия успеха в маркетинговом исследовании.
- д) Найдите условную вероятность того, что маркетинговое исследование дало благоприятный результат при условии провала выпуска товара на рынок.
- е) Являются ли два события, "успешное маркетинговое исследование" и "успешный выпуск товара на рынок", независимыми? Из чего это следует?

9. Магазин заинтересован в углублении знаний о модели поведения своих покупателей и ее связи с частотой посещений магазина. Вероятность того, что посещение магазина завершится покупкой, составляет 0,35. Вероятность того, что покупатель был в этом магазине в течение предыдущего месяца, равна 0,20. Из тех, кто ничего не купил, в последний месяц посещали магазин 12%.

- а) Постройте дерево вероятностей для данной ситуации.
- б) Найдите условную вероятность того, что посетитель совершит покупку при условии, что он был в магазине в течение прошлого месяца.
- в) Какой процент покупателей часто посещают магазин и делают покупки, если эту категорию покупателей составляют те, кто совершает покупку и был в магазине в течение прошлого месяца?

10. Представьте себе, что вы – руководитель группы по анализу проблем контроля качества. Предположим, что вероятность дефекта формы изделия составляет 0,03, вероятность дефекта покраски равна 0,06 и эти события независимы.

- а) Найдите вероятность наличия у изделия дефекта формы и дефекта покраски.
- б) Найдите вероятность наличия у изделия дефекта формы или дефекта покраски.
- в) Найдите вероятность того, что изделие не имеет дефектов (т.е. оба эти дефекта отсутствуют).

11. Для типичных посетителей данной торговой точки вероятность покупки бензина составляет 0,23, вероятность покупки бакалейных товаров равна 0,76, а условная вероятность покупки бакалейных товаров при условии покупки бензина равна 0,85.

- а) Найдите вероятность покупки типичным посетителем и бензина, и бакалейных товаров.
- б) Найдите вероятность того, что типичный посетитель совершает покупку либо бензина, либо бакалейных товаров.
- в) Найдите условную вероятность покупки бензина при условии покупки бакалейных товаров.
- г) Найдите условную вероятность покупки бакалейных товаров при условии, что бензин не покупается.
- д) Являются ли эти события (покупка бензина, покупка бакалейных товаров) несовместимыми?
- е) Являются ли эти два события независимыми?

12. Вам сообщили хорошие новости: опытный образец нового товара выпущен с опережением графика, и его функциональные качества выше, чем ожидалось. Что вы можете сказать о соотношении двух вероятностей: условной вероятности того, что этот товар будет иметь успех в случае хороших новостей и безусловной вероятности успеха?

13. Ваша компания рассылает заявки на участие в конкурсах для выполнения различных проектов. В тех случаях, когда вы заинтересованы выиграть конкурс (30% всех заявок) необходима большая работа по подготовке предложений; в других случаях можно ограничиться быстрыми расчетами и послать заявку, даже если вы считаете, что у этой заявки вероятность выиграть очень мала. Если в разработку заявки вкладывается много усилий, то с вероятностью 80% удастся заключить контракт на выполнение проекта. При подаче на рассмотрение результатов быстрых расчетов условная вероятность принятия заявки составляет только 10%.

- а) Постройте дерево вероятностей для данной ситуации.
- б) Чему равна вероятность того, что удастся добиться заключения контракта?
- в) Если удалось заключить контракт, чему равна условная вероятность того, что в заявку было вложено много труда?
- г) Если заключить контракт не удалось, чему равна условная вероятность того, что в заявку было вложено много труда?
- д) Являются ли два события, "запрошена информация" и "сделан заказ", независимыми? Из чего это следует?

14. В некоторой фирме 35% работников — штатные научные сотрудники, 26% — руководящие работники, а 9,1% относятся и к тем и к другим. Можно ли считать события "штатный научный сотрудник" и "руководящий работник" независимыми?

15. Отдел маркетинга некоторой фирмы провел исследование потенциальных потребителей и нашел, что (1) 27% из них читают торговое издание «Свои», (2) 18% покупали товары этой фирмы и (3) 63% тех, кто читает «Свои», никогда не покупали товары этой фирмы.

- а) Постройте дерево вероятностей для данной ситуации.
- б) Какой процент потенциальных потребителей не читают «Свои» и не покупали товары данной фирмы? (Эта группа отражает возможности расширения деятельности фирмы в будущем.)
- в) Найдите условную вероятность того, что некоторый потребитель читает «Свои» при условии, что он покупал товары этой фирмы. (Это показатель распространенности публикации среди потребителей товаров фирмы.)

16. На основе анализа данных за прошлый год было установлено, что 40% посетителей вашего магазина не бывали в нем ранее. В то время как некоторые пришли просто посмотреть, 30% посетителей что-либо купили. Однако среди тех, кто в магазине раньше не был, покупку совершили только 20%. Вы хотите использовать эти величины в качестве вероятностей для представления того, что происходит при каждом отдельном посещении магазина.

- а) Постройте дерево вероятностей для данной ситуации.
- б) Найдите вероятность того, что некоторый посетитель уже бывал в магазине раньше и совершит покупку.
- в) Чему равна вероятность того, что посетитель уже бывал в магазине при условии, что в это посещение он покупки не сделал?

17. Сотрудник фирмы, отвечающий на телефонные звонки, получает много обращений по разным вопросам. В 75% случаев лишь запрашивается информация, в то время как 15% звонков связаны с реальными заказами. Кроме того, в 10% обращений запрашивается информация и делается заказ.

- а) Чему равна условная вероятность того, что некоторый звонок приводит к получению заказа, если в этом же звонке еще и запрашивается информация? (Эти данные дают возможность оценить,

насколько важна для бизнеса обработка запросов на получение информации.)

б) Чему равна условная вероятность того, что некоторый звонок не связан с обращением за информацией, при условии, что в результате делается заказ? (Эти данные позволяют оценить долю заказов, которые было "легко" получить.)

в) Чему равна вероятность того, что в результате обращения делается заказ и не запрашивается информация? Дайте интерпретацию.

г) Почему ответы на вопросы пунктов б) и в) различаются?

18. Вы подали заявку на создание крупной коммуникационной сети. В соответствии с доступной информацией существует вероятность в 35%, что предпочтение будет отдано заявкам конкурентов. Если это произойдет, вы считаете, что все равно с вероятностью 10% вы сможете заключить контракт, найдя для этого существенную аргументацию. Однако в случае, если предпочтение будет отдано вашей заявке, существует вероятность в 5% , что вы потеряете контракт в результате действий конкурентов.

а) Постройте дерево вероятностей для данной ситуации.

б) Найдите вероятность того, что контракт удастся заключить.

в) Найдите вероятность того, что предпочтение будет отдано вашей заявке, и вы сможете заключить контракт.

г) Определите условную вероятность того, что предпочтение будет отдано вашей заявке при условии, что вы заключите контракт.

д) Являются ли события "вам не удалось заключить контракт" и "предпочтение отдано вашей заявке" несовместимыми? Почему?

19. Вероятность успешного выполнения некоторого проекта в Нью-Йорке равна 0,6, вероятность успешного выполнения этого проекта в Чикаго составляет 0,7, а вероятность того, что данный проект будет успешным на обоих рынках, оказывается равной 0,55. Найдите условную вероятность того, что проект будет успешно выполнен в Чикаго при условии, что он успешно выполнен в Нью-Йорке.

20. Проект, связанный с кофе эспрессо, будет выполняться успешно с вероятностью 0,80. Вы считаете, что при условии успешного выполнения этого проекта вероятность успешного выполнения проекта, связанного с травяным чаем, составляет 0,70. Однако если проект работы с кофе не будет успешным, проект по травяному чаю пойдет хорошо с вероятностью всего лишь 25%.

а) Постройте дерево вероятностей для данной ситуации.

б) Найдите вероятность успешного выполнения проекта работы с травяным чаем.

в) Найдите вероятность успешного выполнения обоих проектов.

г) Найдите условную вероятность успешного выполнения проекта работы с кофе при условии успешного выполнения проекта по чаю. Сравните полученное значение с безусловной вероятностью для этого же события и поясните результат.

Примеры решения задач I.

Возьмем задачу 8. Введем обозначения: A – событие «маркетинговое исследование будет удачным», B – событие «выпуск товара на рынок будет успешным». Запишем условие задачи в символьной форме: $P(A) = 0.65$, $P(B) = 0.4$, $P(B/A) = 0.55$.

а) Поскольку сначала проводится маркетинговое исследование, а потом товар выпускается на рынок, то первую ветвь дерева вероятностей проведем для события A (\bar{A}), вероятность противоположного события \bar{A} : $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.65 = 0.35$, условная вероятность противоположного события при

неизменном условии: $P(\bar{B}/A) = 1 - P(B/A) = 1 - 0.55 = 0.45$. Теперь мы можем заполнить всю верхнюю ветвь нашего дерева. В верхний кружок (1) мы попадаем с вероятностью $P(AB) = P(A)P(B/A) = 0.65 * 0.55 = 0.3575$, в кружок (2) – с вероятностью $P(A\bar{B}) = P(A)P(\bar{B}/A) = 0.65 * 0.45 = 0.2925$. Заметим, что условие $P(B) = 0.4$ мы еще не использовали. Обратите внимание, что $P(AB) + P(A\bar{B}) = 0.3575 + 0.2925 = 0.65 = P(A)$. Аналогично, должно выполняться равенство $P(AB) + P(\bar{A}B) = P(B)$, откуда мы можем найти вероятность попадания в кружок (3): $P(\bar{A}B) = P(B) - P(AB) = 0.4 - 0.3575 = 0.0425$. Вероятность попадания в нижний кружок (4) можно найти аналогично: $P(\bar{A}\bar{B}) = P(\bar{A}) - P(\bar{A}B) = 0.35 - 0.0425 = 0.3075$. Для контроля правильности наших вычислений проверим условие нормировки: $P(\bar{A}\bar{B}) + P(AB) + P(\bar{A}B) + P(A\bar{B}) = 0.3075 + 0.3575 + 0.0425 + 0.2925 = 1$. Выполнение условия нормировки позволяет нам надеяться (но не гарантирует!), что вычисления проведены верно!

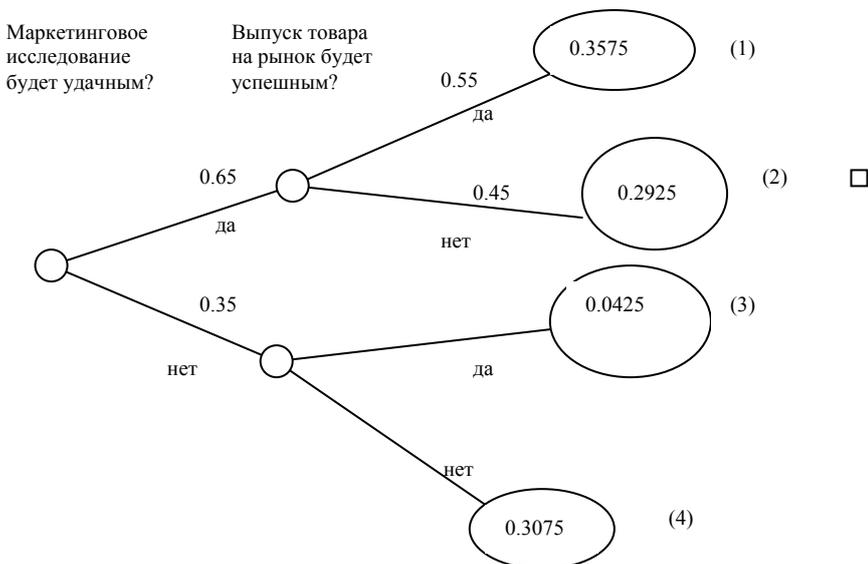
б) Нам надо найти $P(AB)$, что уже сделано в предыдущем пункте.

в) Нам надо найти условную вероятность $P(A/B)$. По формуле условной вероятности, используя результаты п. а), $P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{0.375}{0.4} = 0.9375$.

г) Нам надо найти условную вероятность $P(B/\bar{A})$. Аналогично предыдущему пункту $P(B/\bar{A}) = \frac{P(\bar{A}B)}{P(\bar{A})} = \frac{0.0425}{0.35} \approx 0.12$. Где эта вероятность должна стоять в дереве вероятностей?

д) Нам надо найти условную вероятность $P(A/\bar{B})$: $P(A/\bar{B}) = \frac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{0.2925}{0.6} = 0.4875$.

е) По определению независимости для независимых событий C и D должно выполняться равенство $P(CD) = P(C)P(D)$. Проверим выполнение этого условия для событий A и B : $P(AB) = 0.3575 \neq P(A)P(B) = 0.65 * 0.4 = 0.26$, следовательно, события A и B зависимы. Еще раз обратим внимание на то, что понятие вероятностной независимости, как правило, связано с причинной независимостью событий. Действительно, зачем было бы проводить маркетинговые исследования, если бы их результаты не были связаны с результатами продвижения товаров на рынок?



Возьмем задачу 17.

Введем обозначения: A – событие «запрашивается информация», B – событие «звонок связан с реальным заказом». Запишем условие задачи в символической форме: $P(\bar{A}B) = 0.75$, $P(B) = 0.15$, $P(AB) = 0.1$.

а) Нам надо найти условную вероятность $P(B/A)$. По определению условной вероятности:

$$P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)}. \quad \text{Найдем } P(A): \quad P(A) = P(A\Omega) = P(A(B + \bar{B})) = P(AB + A\bar{B}) = P(AB) + P(A\bar{B}) = 0.1 + 0.75 = 0.85. \quad \text{Здесь } \Omega \text{ обозначает пространство всех возможных исходов, которое всегда можно представить как сумму противоположных событий. Напомним, что знак «+» вместо знака «}\cup\text{» мы используем, чтобы подчеркнуть несовместность объединяемых событий (противоположные события, очевидно, несовместны). Далее, мы пользуемся свойствами дистрибутивности пересечения относительно объединения и аддитивности вероятности (запишите эти свойства в общем виде). Итак,}$$
$$P(B/A) = \frac{0.1}{0.85} \approx 0.118.$$

б) Нам надо найти условную вероятность $P(\bar{A}/B) = \frac{P(\bar{A}B)}{P(B)}$. Аналогично предыдущему пункту

(поменяв местами A и B) можно записать $P(B) = P(AB) + P(\bar{A}B)$, откуда $P(\bar{A}B) = P(B) - P(AB) = 0.15 - 0.1 = 0.05$. Итак, $P(\bar{A}/B) = \frac{0.05}{0.15} = \frac{1}{3}$.

в) Вероятность $P(\bar{A}B)$ найдена в предыдущем пункте. Эти данные позволяют оценить долю самых «приятных» звонков, т.е. звонков, которые без дополнительных усилий с вашей стороны приводят к получению заказа.

г) Если ответ на этот вопрос для вас не очевиден, то попробуйте внимательно подумать на эту тему. Полезно нарисовать дерево вероятностей для этой задачи.

II

21. На завтра запланировано проведение голосования по вопросу о профсоюзной забастовке. Похоже на то, что она может состояться. Предположим, что количество голосов, поданных за проведение забастовки, следует биномиальному распределению. Ожидается, что в голосовании примут участие 300 человек, а вероятность того, что каждый из них будет голосовать "за", составляет 0,53.

а) Найдите параметры биномиального распределения.

б) Найдите среднее и стандартное отклонение для количества тех, кто выскажется за проведение забастовки.

в) Найдите (приблизительно) вероятность того, что забастовка будет проведена (т.е. что большинство участников голосования выскажутся за ее проведение).

22. Снова вернемся к предыдущей задаче и найдем ответы на поставленные вопросы в предположении, что в голосовании примут участие 1000 человек. (Вероятность для каждого отдельного участника голосования остается прежней.)

23. Предположим, что в случае опроса всего населения Детройта 18,6% выразили бы готовность покупать ваш товар. Планируется проведение выборочного опроса 250 человек. Найдите (приблизительно) вероятность того, что полученное в результате выборочного опроса значение будет излишне оптимистичным, что определяется как готовность к покупке товара более чем 22,5% опрошенных.

24. Предположим, что 15% хранящегося на большом складе товара имеет дефекты. Вы выбрали

случайным образом 250 единиц товара для проведения детального исследования. Найдите (приблизительно) вероятность того, что дефекты имеются более чем в 20% образцов, попавших в данную выборку.

25. Планируется проведение опроса среди 350 потребителей, выбранных случайным образом из списка возможных клиентов. Цель опроса состоит в оценке этого списка и принятии решения о том, имеет ли смысл поручать агентам по продаже связываться со всеми, кто в него включен. В предположении, что 13% людей из всего списка дадут положительный ответ, вычислите (приблизительно) вероятности перечисленных ниже событий.

- а) Более 10% выбранных случайным образом потребителей дадут положительный ответ.
- б) Более 13% выбранных случайным образом потребителей дадут положительный ответ.
- в) Более 15% выбранных случайным образом потребителей дадут положительный ответ.
- г) От 10% до 15% выбранных случайным образом потребителей дадут положительный ответ.

26. Проведена пробная рассылка по почте каталога в адрес 1000 человек, выбранных случайным образом из базы данных, содержащей 12320 адресов. В случае поступления в течение двух недель заказов от 2,7% или более человек, включенных в пробную рассылку, планируется рассылка каталога по остальным 11320 адресам. Найдите (приблизительно) вероятность того, что массовая рассылка будет проведена в случае каждого из перечисленных ниже сценариев.

- а) Предположим, что в действительности в течение двух недель заказ поступил бы от 2% генеральной совокупности (т.е. всех включенных в базу данных людей).
- б) Предположим, что в действительности в течение двух недель заказ поступил бы от 3% генеральной совокупности.
- в) Предположим, что в действительности в течение двух недель заказ поступил бы от 4% генеральной совокупности.

27. В следующем месяце ожидается в среднем 1671 обращение по вопросу гарантийного ремонта, и истинное значение количества обращений имеет распределение Пуассона.

- а) Найдите стандартное отклонение для количества таких обращений.
- б) Найдите (приблизительно) вероятность того, что количество обращений по вопросу гарантийного ремонта превысит 1700.

28. Если завтрашний день будет обычным, в отдел работы с персоналом ожидается поступление по почте резюме от 175 претендентов на вакантные должности. Можно предположить, что все претенденты действуют независимо друг от друга.

- а) Каким распределением вероятности описывается количество резюме, поступающих в отдел работы с персоналом?
- б) Чему равно стандартное отклонение количества получаемых резюме?
- в) Найдите (приблизительно) вероятность того, что день будет спокойным и в отдел поступит только 160 или менее резюме.

29. В обычный день магазин по продаже одежды обслуживает в среднем 2,6 «особых» клиентов. Этим клиентам сразу отводят в специальную комнату, предлагают им специальное обслуживание, подают чай (или кофе) с печеньем, в эту же комнату приносят и одежду. Можно предположить, что количество таких покупателей, которые посетят магазин завтра, имеет распределение Пуассона.

- а) Найдите стандартное отклонение количества таких особых клиентов.
- б) Найдите вероятность того, что завтра таких посетителей не будет.
- в) Найдите вероятность того, что завтра магазин посетят ровно 4 «особых» клиента.

31. Для получения достаточного дохода, который позволит выплатить в этом году долги фирмы, необходимо заключить, по меньшей мере, два контракта. Обычно это не составляет больших проблем, поскольку в среднем фирма заключает 5,1 контракта в год. Можно предположить, что количество контрактов описывается распределением Пуассона.

- а) Найдите вероятность того, что доход будет достаточным для оплаты долговых обязательств фирмы в этом году.
- б) Найдите вероятность заключения трех контрактов.

31. Длительность промежутков времени между появлениями клиентов имеет экспоненциальное распределение. На данный момент среднее время между появлениями клиентов составляет 6,34 минуты.

а) С момента появления последнего клиента прошло три минуты. Найдите среднее время до появления следующего клиента.

б) С момента появления последнего клиента прошло десять минут. Найдите среднее время до появления следующего клиента.

32. В описанном в предыдущей задаче случае клиент появился только что.

а) Найдите вероятность того, что промежуток времени до появления следующего клиента окажется меньше трех минут.

б) Найдите вероятность того, что промежуток времени до появления следующего клиента окажется больше десяти минут.

в) Найдите вероятность того, что промежуток времени до появления следующего клиента составит от пяти до шести минут.

33. В соответствии со спецификациями срок службы кинескопа телевизора составляет 50000 часов. Предположим, что время до выхода кинескопа из строя подчиняется экспоненциальному распределению.

а) Симметрично ли это распределение?

б) Чему равно стандартное отклонение срока продолжительности службы кинескопа?

в) Кинескоп работал непрерывно в течение 8500 и все еще находится в рабочем состоянии. Чему равно ожидаемое время работы кинескопа с настоящего момента до выхода из строя? (При ответе на этот вопрос будьте очень внимательны.)

34. Для описанной в предыдущей задаче ситуации, в предположении соответствующего данному случаю распределения, дайте ответы на следующие вопросы.

а) Чему равна вероятность работы кинескопа в течение 100000 часов и более? (Этот промежуток времени превышает номинальное значение срока службы в два раза.)

б) Гарантия на кинескоп дается на 5000 часов работы. Какой процент кинескопов, как ожидается, выходит из строя в течение гарантийного периода?

35. Сравните "вероятность того, что результат находится в пределах одной величины стандартного отклонения от среднего значения" для экспоненциального и для нормального распределения.

Примеры решения задач II.

Возьмем задачу 29. Во-первых, не стоит пытаться решить эту задачу, не зная формулу, определяющую распределение Пуассона. Информацию о распределении Пуассона можно получить из а) конспекта лекций, б) Интернета (в частности, Википедии – хороший источник, рекомендую пользоваться English: http://en.wikipedia.org/wiki/Poisson_distribution), в) практически любого

учебника по теории вероятностей. Итак, распределение Пуассона: $P_k = P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, $k = 0, 1, 2, \dots$,

параметр λ имеет смысл среднего значения (математического ожидания) распределения

$$\left(M\xi = \sum_{k=0}^{\infty} kP_k = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda \right).$$

а) Выяснить смысл термина «стандартное отклонение» можно также в вышеуказанных источниках. Итак, стандартное отклонение (standard deviation) – это арифметическое значение квадратного

корня из дисперсии. А дисперсия распределения Пуассона, как известно (рекомендуется запомнить!), равняется также λ $\left(D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 P_k - \lambda^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} - \lambda^2 = \lambda \right)$. Уметь

считать «страшные» ряды необязательно, но знать формулы, задающие основные распределения, а также их основные числовые характеристики: среднее (mean) и дисперсию (variance) – обязательно! В данной задаче $\lambda = 2.6$. Ответ: $\sqrt{\lambda} = \sqrt{2.6} \approx 1.6$.

б) Нас интересует $P(\xi = 0) = \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} = e^{-2.6} \approx 0.074$. Напомним, что по определению $0! = 1$.

в) Нас интересует $P(\xi = 4) = \frac{2.6^4}{4!} e^{-2.6} \approx 0.14$.

Возьмем задачу 21. Прежде всего, выясним, что такое биномиальное распределение (см., например, http://en.wikipedia.org/wiki/Binomial_distribution). Итак, биномиальное распределение

$P_k = P(\xi = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$, где $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ – число сочетаний из n по k , $p + q = 1$, p –

вероятность «успеха» в схеме испытаний Бернулли (http://en.wikipedia.org/wiki/Bernoulli_trial).

а) В данном случае число испытаний (количество человек, принявших участие в голосовании) $n = 300$, «успехом» будем считать голосование "за" и, следовательно, $p = 0.53$, $q = 0.47$. Таким образом, все параметры распределения для данной задачи определены.

б) Среднее значение $M\xi = \sum_{k=0}^{\infty} k P_k = \sum_{k=0}^n k C_n^k p^k q^{n-k} = np = 300 * 0.53 = 159$, дисперсия

$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 P_k - (np)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 C_n^k p^k q^{n-k} - (np)^2 = npq = 300 * 0.53 * 0.47 = 74.73$,

стандартное отклонение равно $\sqrt{D\xi} = \sqrt{74.73} \approx 8.645$.

в) Нас интересует вероятность $P(300 \geq \xi > 150) = \sum_{k=151}^{300} P_k$. Считать по этой формуле весьма трудоемкое

занятие – сумма содержит 150 слагаемых, которые найти не так-то просто: попробуйте посчитать, например, $C_{300}^{151} = \frac{300!}{151!149!}$. Поскольку нам надо найти только приближенное значение вероятности

воспользуемся гауссовской (нормальной) аппроксимацией (http://en.wikipedia.org/wiki/Normal_distribution) биномиального распределения (n достаточно велико, а p близко к 0.5). Не забывайте, что для биномиального распределения возможна еще пуассоновская аппроксимация! В соответствии с интегральной предельной теоремой Муавра-Лапласа

$P(m_2 \geq \xi \geq m_1) = \sum_{k=m_1}^{m_2} P_k = \Phi\left(\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}\right)$, где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt$ – интеграл вероятностей

(функция Лапласа). Функция $\Phi(x)$ в элементарных функциях не выражается, это, так называемая, специальная функция. Ее значения табулированы, и их можно найти в таблицах, а также вычислить, например, в EXCEL при помощи функции НОРМСТРАСП (нормальное стандартное распределение) в разделе «Статистические функции». В данной задаче получаем

$P(300 \geq \xi \geq 150) = \Phi\left(\frac{300 - 159}{\sqrt{74.73}}\right) - \Phi\left(\frac{150 - 159}{\sqrt{74.73}}\right) \approx \Phi(16.31) - \Phi(-1.04) \approx 1 - 0.15 = 0.85$.

Часто используется также функция $erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$ – функция ошибок (error function)

(http://en.wikipedia.org/wiki/Error_function), $\Phi(x) = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right) \right]$.

$$P(300 \geq \xi \geq 150) = \frac{1}{2} \left(\operatorname{erf} \left(\frac{16.31}{\sqrt{2}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{-1.04}{\sqrt{2}} \right) \right) \approx \frac{1}{2} (\operatorname{erf}(11.533) - \operatorname{erf}(-0.7354)) \approx \frac{1}{2} (1 + 0.702) = 0.851$$

(функцию $\operatorname{erf}(\cdot)$ можно найти, например, в MATHCAD). Обратите внимание на нечетность функции ошибок, т.е. $\operatorname{erf}(-x) = -\operatorname{erf}(x)$, а также $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ (почему?).

Замечание. Вероятность $P(300 \geq \xi > 150) = \sum_{k=151}^{300} P_k = 1 - P(150 \geq \xi \geq 0) = 1 - \sum_{k=0}^{150} P_k$ можно посчитать в EXCEL при помощи функции БИНОМРАСП (биномиальное распределение). Однако будьте внимательны – в справке по этой функции написано, что «интегральная функция биномиального распределения есть вероятность того, что число успешных испытаний не менее значения аргумента «число успехов», но формула приведена для случая – число успешных испытаний не более значения аргумента «число успехов» $\left(\sum_{k=0}^x P_k, x - \text{число успехов} \right)$, и считается на самом деле по этой формуле.

Ситуации для анализа

Использование пилотного проекта для анализа возможного успеха выпуска товара на рынок

Допустим, что ваша фирма собирается выпустить на рынок новый товар, и на вас лежит ответственность за адекватное описание соответствующих возможностей высшему руководству. В данном случае возникают два основных вопроса: во-первых, следует ли вообще работать над данным проектом и, во-вторых, есть ли смысл сначала сделать вложение в пилотный проект: такой проект потребует меньших затрат и даст возможность получить некоторую информацию относительно того, велика ли вероятность успеха нового товара.

Для того чтобы собраться с мыслями, следует продумать сценарий, включив в него как пилотный проект, так и собственно выпуск продукции на рынок. Предположим, что при этом представляются разумными следующие значения вероятностей.

1. Вероятность того, что выпуск товара на рынок окажется успешным, составляет 0,60.
2. Вероятность успешного выполнения пилотного проекта равна 0,70. (Это значение несколько выше, поскольку в случае пилотного проекта рынок оказывается более восприимчивым.)
3. Вероятность того, что успешным окажется либо пилотный проект, либо выпуск товара на рынок (либо оба) составляет 0,75.

Для того чтобы принять решение о том, есть ли смысл делать пилотный проект, следует найти условные вероятности того, что выпуск товара на рынок будет успешным при условии: 1) достижения успеха в выполнении пилотного проекта, и 2) неудачи в выполнении пилотного проекта. Кроме того, для полноты картины понадобятся также 3) вероятность того, что успешными будут и выпуск товара на рынок, и выполнение пилотного проекта, а также 4) вероятность

провала обоих проектов.

Все перечисленные вероятности можно найти, творчески применив для этих целей основные формулы. Однако поиск правильной для данного конкретного случая комбинации формул может потребовать значительных затрат времени. Более простой путь вычисления необходимых значений вероятностей состоит в построении дерева вероятностей, которое и поможет найти ответы на поставленные вопросы.

Проверка сотрудников на употребление наркотиков

Ваша фирма собирается провести обязательную проверку всех сотрудников на предмет употребления ими наркотиков. Чтобы оценить требуемые затраты (необходимые для тестирования средства и возможные психологические проблемы) и ожидаемый выигрыш (повышение производительности труда), принято решение исследовать различные результаты на основе рассмотрения ситуации для одного работника.

Процедура тестирования не идеальна. Сотрудники лаборатории сообщили, что если человек употребляет наркотики, тест будет "положительным" с вероятностью 90%. Вместе с тем, если человек наркотики не употребляет, тест покажет "отрицательный" (т.е. "не положительный") результат в 95% случаев. На основании неофициального опроса некоторых рабочих можно ожидать, что примерно 8% всего персонала употребляют наркотики. Анализ вероятностей имеет в данном случае большое значение, поскольку позволяет трансформировать имеющуюся информацию в значительно более полезные для принятия решений вероятности.

Есть ли смысл проводить такую проверку? Дайте аргументированный ответ на основе подходящего вероятностного анализа.

Детективная история: кто же все-таки ответствен за увеличение количества дефектов в последнее время?

Тяжелый случай. Процент дефектной продукции в последнее время резко вырос, и на вас, с целью исправления ситуации, возложена задача по выявлению проблемы. Двое из трех отвечающих за работу производственной линии менеджеров (Иван, Петр и Степан) к вам уже заходили (как и некоторые из рабочих). Рассказали они любопытные вещи.

Кто-то обвиняет во всем Ивана, используя слова "безответственный" и "все еще изучает азы" и приводя в подтверждение своих слов примеры ведения работ. Кое-что из рассказанного – явное следствие конкуренции между сотрудниками, и это, безусловно, необходимо учитывать,

однако вопрос все же стоит рассмотреть. Иван же ссылается на то, что процент дефектов производства выше не в его смену и утверждает, что фактически у Петра выход бракованной продукции оказывается значительно выше. Свои слова Иван подкрепляет такими данными.

Процент дефектной продукции

Петр	14,35
Иван	7,84

Вскоре после этого появляется Петр (который, как известно, особым тактом не отличается) с криками, что Иван – (нецензурное определение) ... и ему верить нельзя. Несколько поостыв, Петр начинает что-то невнятно бормотать о том, что вышестоящие руководители дают ему сложные задания. Однако даже на прямой вопрос о проценте дефектных изделий четкий ответ от него получить не удастся. Ваши подозрения крепнут – похоже, проблема действительно где-то здесь. Однако вам известно и то, что Петр (если абстрагироваться от его манер) на хорошем счету у технических экспертов и не следует выдвигать против него обвинений, не рассмотрев сначала возможные пояснения и альтернативные варианты.

В такой ситуации, естественно, следует определить и выход дефектной продукции в смену Степана, а также результаты по двум типам продукции: для потребителей внутри страны и для иностранных клиентов (в последнем случае спецификации должны выдерживаться значительно точнее). Такие данные образуют более полный набор, который и представлен ниже для произведенной в последнее время продукции.

	С дефектам	Без дефектов
Внутреннее потр.		
Петр	3	293
Степан	12	307
Иван	131	2368
Экспорт		
Петр	255	1247
Степан	75	359
Иван	81	123

Вопросы для обсуждения

1. Прав ли Иван? А именно: подтверждается ли при использовании более полного набора данных утверждение о том, что у Ивана выход бракованной продукции ниже всего? Верны ли представленные Иваном процентные значения в целом (т.е. для всей продукции, как для внутреннего потребления, так и предназначенной на экспорт)?
2. Прав ли Петр? А именно: к какой части выпущенной в его смену продукции предъявляются повышенные требования? Какие выводы можно сделать при сравнении экспортной продукции, выпущенной в смену Петра, с экспортной продукцией двух других смен? (Примечание. Возможно, для этого будет полезно сравнить условные вероятности выпуска продукции с дефектами и без дефектов при условии руководства сменой определенным менеджером.)
3. Внимательно проанализируйте условные вероятности выпуска дефектной продукции в случае различных комбинаций менеджера и заказчика товара. Какие выводы можно сделать из этих данных?
4. Стали бы вы рекомендовать Петру начать поиск новой работы? Если нет, то каковы ваши предложения?