МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Утверждаю
Проректор-директор ЭНИН ТПУ
_______________Боровиков Ю.С.
«___»__________________2012 г.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК СЛУЧАЙНОГО СИГНАЛА ПО АНАЛИТИЧЕСКОМУ ВЫРАЖЕНИЮ ПЛОТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ В ОДНОКОНТУРНОЙ АСР

Методические указания для выполнения практических работ по дисциплине «Диагностика и надежность автоматизированных систем» для студентов направления 140100 – ТЕПЛОЭНЕРГЕТИКА И ТЕПЛОТЕХНИКА

Томск 2012

УДК 681.516:621.391 (076.5)

ББК 32.965.9 я 73

К 772

Кравченко Е.В.

Исследование статистических характеристик надежности одноконтурной автоматической системы регулирования. Методические указания для выполнения практических работ по дисциплине «Диагностика и надежность автоматизированных систем» для студентов направления 140100 – ТЕПЛОЭНЕРГЕТИКА И ТЕПЛОТЕХНИКА. / Е.В. Кравченко. – Томск: Издательство Томского политехнического института, 2012. – 12с.

УДК 681.516:621.391 (076.5)

ББК 32.965.9 я 73

Методические указания рассмотрены и рекомендованы методическим семинаром кафедры автоматизации теплоэнергетических процессов Энергетического института №12 от «26» июня 2012

Заведующий кафедрой АТП,

канд. техн. наук, доцент ____________________Озерова И.П.

Рецензент профессор физико-математических наук, заведующий кафедрой теоретической и промышленной теплотехники ЭНИН Кузнецов Г.В.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК СЛУЧАЙНОГО СИГНАЛА ПО АНАЛИТИЧЕСКОМУ ВЫРАЖЕНИЮ ПЛОТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ В ОДНОКОНТУРНОЙ АСР

Цель работы: определение характеристик выходного сигнала в одноконтурной автоматической системе регулирования (АСР).

Задачи работы:

- определения характера случайной величины сигнала;
- нахождение характеристик сигнала в одноконтурной АСР по аналитическому выражению плотности распределения случайной величины.
- построение графика плотности распределения.

Объект исследования: одноконтурная система автоматического регулирования.

КРАТКОЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Плотность распределения случайной величины

Пусть имеется непрерывная случайная величина X с функцией распределения F(x), которую мы предположим непрерывной и дифференцируемой. Вычислим вероятность попадания этой случайной величины на участках от x до x+Δx (т.е. приращение функции распределения на этом участке):

$$P(x<X<x+\Delta x)=F(x+\Delta x)-F(x)$$

Рассмотрим отношение этой вероятности к длине участка, т.е. среднюю вероятность, приходящуюся на единицу длины на этом участке и будем приближать Δx к нулю. В пределе получим производную от функции распределения:

$$\underbrace{\lim}_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} = F'(x)$$

Введем обозначение: f(x)=F'(x)

Функция f(x) – производная функции распределения, характеризует плотность, с которой распределяются значения случайной величины в данной точке. Эта функция называется плотностью вероятности или плотностью распределения непрерывной случайной величины X. Иногда функцию f(x) называют также «дифференциальной функцией распределения» или «дифференциальным знаком распределения» величины X. Графически f(x) имеет следующий вид (рис.1):

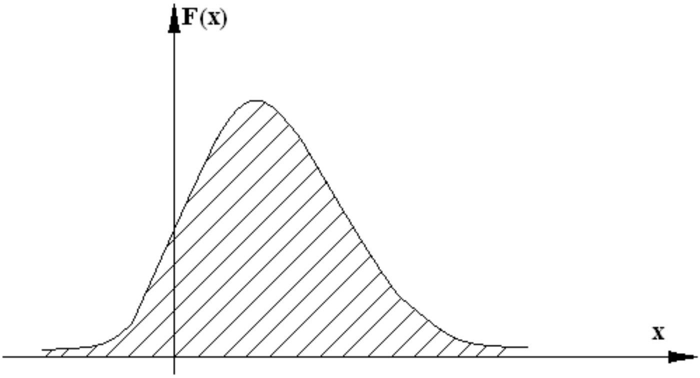

Рисунок 1. Плотность распределения случайной величины

Кривая, изображающая плотность распределения случайной величины, называется кривой распределения.

Плотность распределения, так же и функция распределения, есть одна из форм закона распределения. В противоположность функции распределения эта форма не является универсальной, она существует только для непрерывных случайных величин.

Рассмотрим непрерывную случайную величину X с плотностью распределения f(x) и элементарный участок dx, примыкающей к точке X (рис.2). Вероятность попадания случайной величины X на этот элементарный участок равна $f(x)\cdot dx$. Величина $f(x)\cdot dx$ – называется элементом вероятности. Геометрически это есть площадь элементарного прямоугольника, опирающегося на отрезок dx.

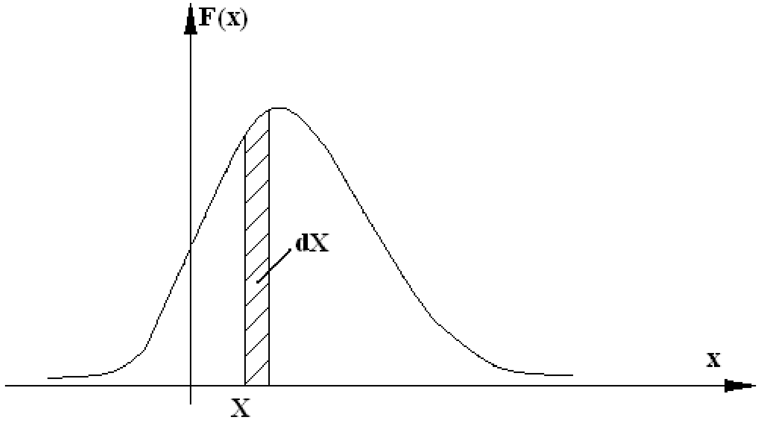

Рисунок 2

Найдем вероятность попадания величины X на отрезок от α до β через плотность распределения.

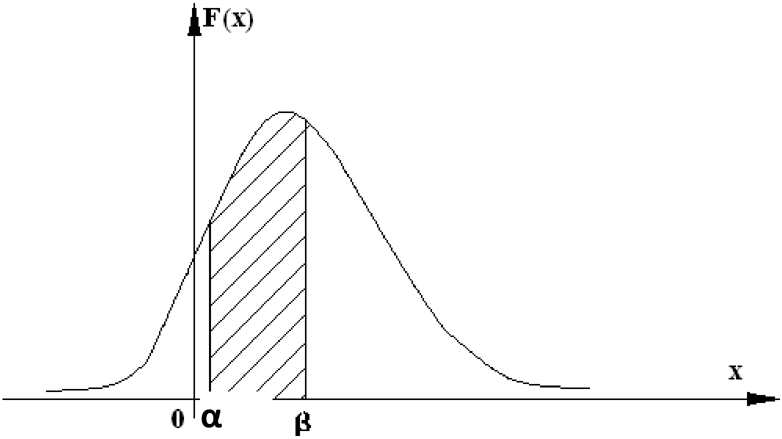

Рисунок 3

Очевидно она равна сумме элементов вероятности на всем этом участке, т.е. интегралу:

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \cdot dx$$

Геометрически это означает, что вероятность попадания величины X на участок (α; β) равна площади кривой распределения, опирающейся на этот участок.

Выразим функцию распределения через плотность распределения. По определению:

$F(x) = P(X < x) = P(-\infty < X < x)$, откуда

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx.$$

Геометрически F(x) есть не что иное, как площадь кривой распределения, лежащая левее точки X.

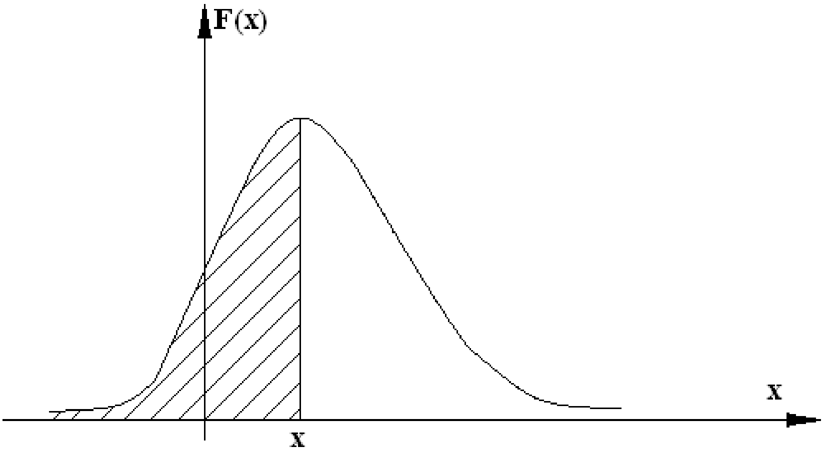

Рисунок 4

Свойства плотности распределения

1. Плотность распределения есть неотрицательная функция:

$$f(x) \geq 0$$

2. Интеграл в бесконечных пределах от плотности распределения равен единице:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

Геометрически эти свойства означают, что:

1) Вся кривая распределения лежит не ниже оси абсцисс
2) Полная площадь, ограниченная кривой распределения и осью абсцисс, равна единице.

<u>Пример 1</u>

Функция распределения непрерывной случайной величины X задана выражением

$$\mathrm{F(x)} = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le 0 \\ \mathrm{ax}^2, & \text{при } 0 < x \le 1 \\ 1, & \text{при } x > 1 \end{cases}$$

Найти:

а) Коэффициент a

б) Плотность распределения f(x)

в) Вероятность попадания величины X на участок от 0,25 до 0,5

Решение:

а) Так как функция распределения величины X непрерывна, то при $x = 1 \;\; ax^2 = 1$ откуда $a = 1$

б) Плотность распределения величины X выражается формулой

$$\mathrm{F(x)} = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le 0 \\ \mathrm{2x}, & \text{при } 0 < x \le 1 \\ 1, & \text{при } x > 1 \end{cases}$$

в) Вероятность попадания

$$P(0.25 < x < 0.5) = F(0.5) - F(0.25) = 0.5^2 - 0.25^2 = 0.18$$

<u>Пример 2</u>

Случайная величина X подчинена закону распределения с плотностью $f(x) = a\cos x$ при $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$

$$f(x) = 0 \text{ при } x < -\frac{\pi}{2} \text{ и } x > \frac{\pi}{2}$$

Найти:

а) Коэффициент а

б) Построить график плотности распределения

в) Найти функцию распределения F(x) и построить ее график

г) Определить вероятность попадания на участок от 0 до $\frac{\pi}{4}$

Решение:

а) Для определения коэффициента а воспользуемся свойством плотности распределения

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a\cos dx = 2a = 1$ откуда $a = \frac{1}{2}$

б) График плотности распределения:

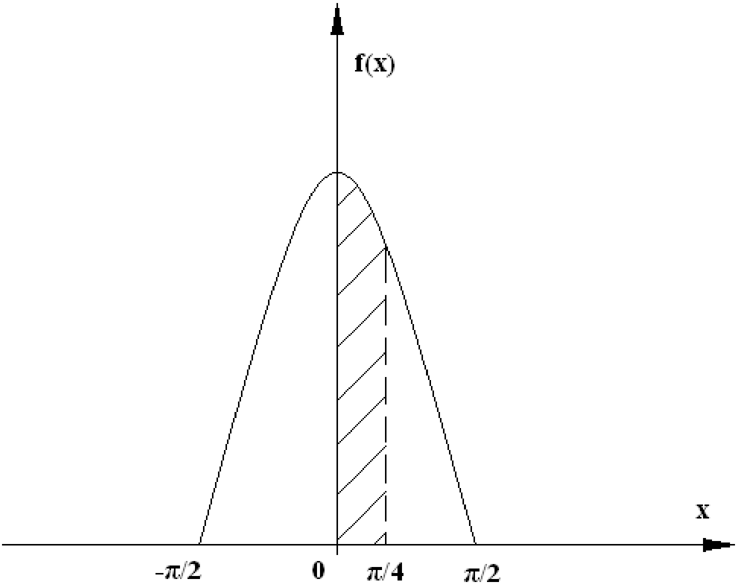

Рисунок 5

в) По формуле $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$ получаем выражение функции распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < -\frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{2}(\sin x + 1), & \text{при } -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \\ 1, & \text{при } x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

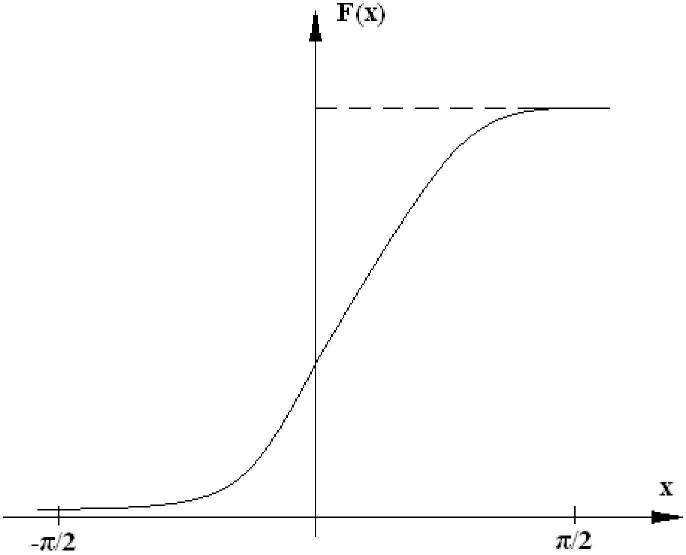

Рисунок 6

г) Вероятность попадания величины X на заданный отрезок

$$P\left(0 < x < \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}(\sin\frac{\pi}{4} + 1) - \frac{1}{2}(\sin 0 + 1) = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Методические указание к работе

Автоматические системы регулирования широко применяются при автоматизации технологических процессов на различных объектах. Структурная схема АСР приведена на рисунке 8. Система регулирования состоит из управляющего устройства, регулирующего органа и объекта регулирования.

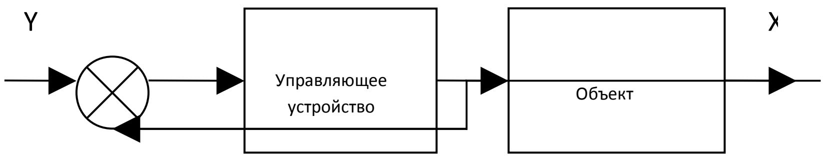

Рисунок 8 Структурная схема АСР

Выходная величина зависит от входного значения и сигнала поступающего от регулирующего органа. Вероятность появления в замкнутой системе помех приблизительно равна единицы. Поэтому возникает задача определения статистических характеристик одноконтурной автоматической системы регулирования.

Задания для практической работы

Дано:

- аналитическое выражение плотности распределения случайной величины;
- распределение случайной величины.

Требуется:

- определить характер случайной величины;
- определить плотность распределения случайной величины;
- построить график для функции и плотности распределения случайной величины.

Варианты заданий

Вариант	Задание	Распределение случайной величины
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	1	2
6	1	3
7	1	4
8	2	1
9	2	3
10	2	4
11	3	1
12	3	2
13	3	4
14	4	1
15	4	2
16	4	3
17	5	1
18	5	2
19	5	3
20	5	4
21	6	1
22	6	2
23	6	3
24	6	4
25	7	1
26	7	2
27	7	3
28	7	4

Задания

Задание №1

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \cos x$$

Задание №2

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \sin x$$

Задание №3

$$f(x) = a \cdot x^2$$

Задание №4

$$f(x) = a \cdot x^3$$

Задание №5

$$f(x) = (a - 2) \cdot x^2$$

Задание №6

$$f(x) = -x^3$$

Задание №7

$$f(x) = x^2 + 1 + x$$

Распределение случайной величины

1	2	3	4
$(0, \pi)$	$(-\pi, \pi)$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \pi\right)$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

В отчете представить:

- значения плотности распределения случайной величины;
- графики для функции и плотности распределения случайной величины выходного сигнала одноконтурной АСР.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ястребенецкий М. А., Иванова Г. М. Надежность АСУ ТП. Учебное пособие для вузов. – М.: Энергоатомиздат, 1989. – 264 с.

2. Андык В.С. Теория автоматического управления. Учебное пособие. – Томск: Издательство Томского политехнического института, 2005. – 108с.