Тема работы № 3.

Дискретно-детерминированные модели: численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

1.1. Решить численными методами (Эйлера и Рунге-Кутта) обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка.
1.2. Выполнить исследование сходимости решения при уменьшении шага интегрирования. По результатам расчета с разными шагами оценить вид зависимости погрешности от шага (линейный, квадратичный или другой).
1.3. Оформить краткий письменный отчет, в котором кратко описать поставленную задачу, метод решения, результаты расчета и выводы о достоинствах и недостатках использованного метода. В тех случаях, когда предложенное для численного решения уравнение имеет относительно простое аналитическое решение (точное), сравнить точное и приближенное решения.
1.4. Для расчетов и оформления отчета использовать любую программу.

В отчете обязательно привести таблицу результатов, содержащую значения независимой переменной *x*, значение искомой функции *y(x)*, значения производной *y'(x)*, в точках $x_i = x_0 + i\Delta x,\ \ i = 0,1,2,...,N$, а также построить график этой функции. Если для получения точного решения требуется выполнять расчеты при больших N, то в отчете можно ограничиться тем, что привести выборку, содержащую 10-20 значений (либо первые значения, либо выбрать каждое второе, третье и т.п.).

Начинать расчеты рекомендуется со значений N=5÷10.

Каждый студент выполняет индивидуальное задание, решая дифференциальное уравнение, номер которого совпадает с номером студента в списке группы. Третья цифра в перечне заданий - номер уравнения.

Интервал моделирования [A,B], если он частично или полностью не задан явно в списке уравнений, каждый студент в группе определяет по формуле:

$$A = \frac{1}{25}\frac{600 + 53000 + \mathrm{Nc}}{1000}$$

$$B = \frac{600 + 53000 + \mathrm{Nc}}{1000},$$ Nc – номер студента в списке.

Решить уравнения численным методом:

4.2.1. $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{0.5}{1+0.1x}\frac{dy}{dx}=\sin x,\ y(0)=0,\ \ \frac{dy}{dx}(0)=1, x\in[0,\pi]$;

4.2.2 $\frac{d^2y}{dx^2}=y+e^x,\ y(0)=1,\ \ \frac{dy}{dx}(0)=1, x\in[0,3]$;

4.2.3. $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{1+0.2x}y=x,\ y(0)=0,\ \ \frac{dy}{dx}(0)=1, x\in[0,2]$;

4.2.4. $\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{1}{1-0.2x}y=e^{-x},\ y(0)=0.5,\ \ \frac{dy(0)}{dx}=1,\ x\in[0,2]$;

4.2.5. $\frac{d^2y}{dx^2}-(3+0.2x)\frac{dy}{dx}+y=0,\ y(0)=1,\ \ \frac{dy}{dx}(0)=1, x\in[0,\pi]$;

4.2.6. $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{2}{(2-0.2x)}\frac{dy}{dx}+y=0,\ y(0)=1,\ \ \frac{dy}{dx}(0)=1, x\in[0,3]$;

4.2.7. $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}=\frac{x}{y^2},\ y(0)=1,\ \ \frac{dy(0)}{dx}=1,\ x\in[0,1]$;

4.2.8. $2\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}+2y=(1+x)\cos x,\ y(0)=\frac{1}{2},\ \ \frac{dy}{dx}(0)=\frac{1}{2}, x\in[0,\pi]$;

4.2.9. $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}+(1+0.3x)2y=4x,\ y(0)=-2,\ \ \frac{dy(0)}{dx}=1,\ \ x\in[0,1]$;

4.2.10. $\frac{d^2y}{dx^2}+(1+0.25x)\frac{dy}{dx}+y=\cos x,\ y(0)=\frac{3}{2},\ \ \frac{dy(0)}{dx}=1,\ \ \ x\in[0,\pi]$;

4.2.11. $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}=y^2+x,\ y(0)=0,\ \ \frac{dy}{dx}(0)=1, x\in[0,0.5]$;

4.2.12. $3\frac{d^2y}{dx^2}+(10-x)\frac{dy}{dx}+y=0,\ y(0)=0,\ \ \frac{dy}{dx}(0)=1, x\in[0,1]$;

4.2.13. $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1-0.1x}{1+0.1x}y+0.2y^2=0,\ y(0)=1,\ \ \frac{dy}{dx}(0)=0, x\in[0,2]$;

4.2.14. $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1-0.5x}{1+0.5x}y=0,\ y(0)=1,\ \ \frac{dy}{dx}(0)=0, x\in[0,2]$;

4.2.15. $10\frac{d^2y}{dx^2}-5\frac{dy}{dx}+10y=0,\ y(1)=0,\ \ \frac{dy}{dx}(1)=3, x\in[1,3]$;

4.2.16. $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}+0.92y=0,\ y(0)=1,\ \ \frac{dy}{dx}(0)=0, x\in[0,3]$;

4.2.17. $\frac{d^2y}{dx^2}+y^2=1,\ y(0)=0,\ \ \frac{dy}{dx}(0)=0, x\in[0,\pi]$;

4.2.18. $\frac{d^2y}{dx^2}-y=x,\ y(0)=1,\ \ \frac{dy}{dx}(0)=0, x\in[0,\pi]$;

4.2.19. $\frac{d^2y}{dx^2}=x-2,\ y(2)=1,\ \ \frac{dy}{dx}(2)=-3,\ x\in[2,5]$;

4.2.20. $\frac{d^2y}{dx^2}=1+x^2,\ y(0)=-2,\ \ \frac{dy}{dx}(0)=0, x\in[0,5]$;

Методические указания**.**

Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений (см. кн.: Я.Б. Зельдович, А.Д. Мышкис. Элементы прикладной математики. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит-ры. !972. – 592 с.

Метод Эйлера и метод с пересчетом легко обобщается для решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений более высокого порядка. Рассмотрим на интервале моделирования [A,B] обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$a\frac{d^2y}{dx^2}+b\frac{dy}{dx}+cy=\varphi(x,y),\quad x\in[\mathrm{x}_0=\mathrm{A},\mathrm{B}],\quad \mathrm{L}=\mathrm{B}-\mathrm{A}=\mathrm{B}-\mathrm{x}_0 \qquad (1)$$

и заданные граничные условия

$$y'(x_0)=y'_0\ ;\ y(x_0)=y_0. \qquad (2)$$

Уравнение (1) представим в виде:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{a}\varphi(x,y)-\frac{c}{a}y-\frac{b}{a}\frac{dy}{dx},\quad x\in[\mathrm{x}_0=\mathrm{A},\mathrm{B}],\quad \mathrm{L}=\mathrm{B}-\mathrm{A}=\mathrm{B}-\mathrm{x}_0 \qquad (3)$$

Теперь введем следующие обозначения:

$$\frac{dy}{dx}=z=f(x,y,z),\qquad \frac{1}{a}\varphi(x,y)-\frac{c}{a}y-\frac{b}{a}\frac{dy}{dx}=\frac{1}{a}\varphi(x,y)-\frac{c}{a}y-\frac{b}{a}z=\varphi(x,y,z) \quad (4)$$

С учетом введенных новых переменных уравнение (1) эквивалентно следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned}&\frac{dy}{dx}=f(x,y,z),\\&\frac{dz}{dx}=\varphi(x,y,z),\end{aligned} \qquad (5)$$

с начальными условиями

$$z(x_0)=z_0=y'_0\ ;\ y(x_0)=y_0. \qquad (6)$$

Разобьем промежуток интегрирования на N равных частей, как показано на рис. Пр4.1, и введем шаг интегрирования

$$\Delta x=\frac{L}{N}, \qquad (7)$$

который будем считать достаточно малой величиной.

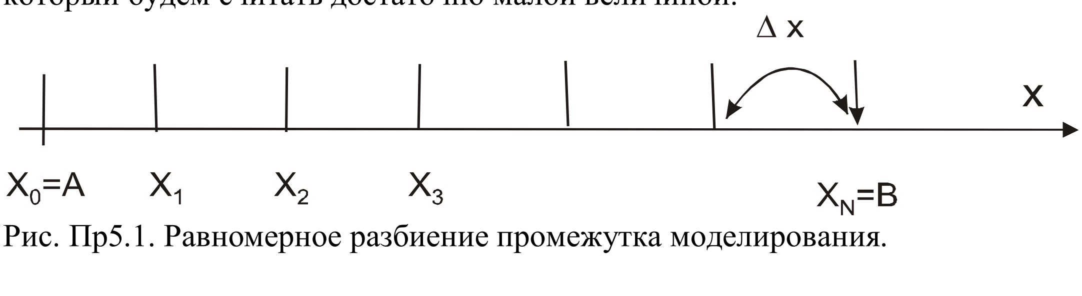

Рис. Пр5.1. Равномерное разбиение промежутка моделирования.

Подставим известные значения x_0, $y(x_0)=y_0$, $z(x_0)=z_0$ в правую часть уравнений (5), таким образом, найдем значение производной в точке x_0:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}=f(x_0,y_0,z_0),\quad \left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=x_0}=\varphi(x_0,y_0,z_0) \qquad (8)$$

Теперь найдем в первом приближении значения функций $y(x_1)=y(x_0+\Delta x)$, $z(x_1)=z(x_0+\Delta x)$ в следующей точке x_1:

$$y_1^{(1)}(x_0+\Delta x) = y(x_0) + \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}\Delta x = y_0 + f_0^{(0)}(x_0, y_0, z_0)\Delta x,$$
$$z_1^{(1)}(x_0+\Delta x) = z(x_0) + \left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=x_0}\Delta x = z_0 + \varphi_0^{(0)}(x_0, y_0, z_0)\Delta x. \qquad (9)$$

Найдем производные на конце промежутка, используя первое приближение, а также средние значения производных на этом промежутке:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0+\Delta x} = f_1^{(1)}(x_0+\Delta x, y_1^{(1)}, z_1^{(1)}), \quad \left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=x_0+\Delta x} = \varphi_1^{(1)}(x_0+\Delta x, y_1^{(1)}, z_1^{(1)}),$$
$$\bar{f}_1 = \frac{1}{2}\left(f_1^{(0)}(x_0, y_0, z_0) + f_1^{(1)}(x_0+\Delta x, y_1^{(1)}, z_1^{(1)})\right), \qquad (10)$$
$$\overline{\varphi}_1 = \frac{1}{2}\left(\varphi_1^{(0)}(x_0, y_0, z_0) + \varphi_1^{(1)}(x_0+\Delta x, y_1^{(1)}, z_1^{(1)})\right).$$

.

Теперь найдем второе приближение, которое принимаем в качестве окончательного решения для следующей точки $x_1 = x_0 + \Delta x$:

$$y_1^{(2)}(x_0+\Delta x) = y_1 = y_0 + \bar{f}_1\Delta x,$$
$$z_1^{(2)}(x_0+\Delta x) = z_1 = z_0 + \overline{\varphi}_1\Delta x. \qquad (11)$$

Обобщая полученные формулы, получаем:

$$y_i = y_{i-1} + \bar{f}_i\Delta x,$$
$$z_i = z_{i-1} + \overline{\varphi}_i\Delta x, \quad i = 1,2,\ldots,N. \qquad (12)$$