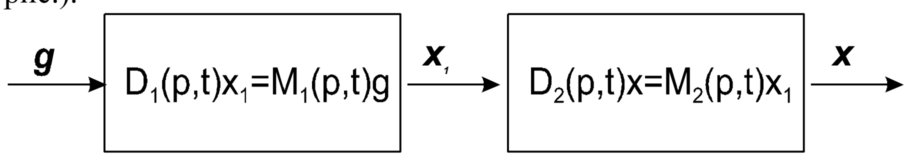
Непрерывно-детерминированные модели одномерных стационарных систем управления.

1). Составить дифференциальное уравнение для последовательного соединения звеньев, заданных далее дифференциальными уравнениями. Начальные условия (если иные не заданы в конкретном задании) во всех заданиях считать заданными в виде

$$x^{(n-1)}(t_0)=0,\ x_0^{(n-1)}=0,\ x^{(n-2)}(t_0)=0, x_0^{(n-2)}=0,\ x(t_0)=1.$$

Для составления дифференциального уравнения системы из последовательно соединенных звеньев воспользоваться методом уравнивающих операторов. Суть метода состоит в следующем.

Метод уравнивающих операторов для последовательного соединения звеньев (см. рис.).



Рассмотрим два последовательно соединенных звена, уравнения которых заданы в операторной форме:

$$\begin{aligned} &D_1(p,t)x_1(t)=M_1(p,t)g(t),\\ &D_2(p,t)x(t)=M_2(p,t)x_1(t). \end{aligned} \tag{1}$$

Чтобы найти дифференциальное уравнение, описывающее поведение системы, умножим первое уравнение на неизвестный пока оператор U_1, а второе умножим на оператор U_2:

$$\begin{aligned} &U_1 * D_1 x_1 = U_1 * M_1 g,\\ &U_2 * D_2 x = U_2 * M_2 x_1. \end{aligned} \tag{2}$$

Теперь выберем ***уравнивающие*** операторы U_1 и U_2 так, чтобы выполнялось равенство:

$$U_1 * D_1 = U_2 * M_2 \tag{3}$$

Тогда искомое уравнение последовательного соединения будет:

$$\begin{aligned} &U_2 * D_2 x = U_1 * M_1 g, \Rightarrow\\ &Dx = Mg, \qquad D(p,t)=U_2 * D_2, \quad M(p,t)=U_1 * M_1 \end{aligned} \tag{4}$$

Обозначим порядки операторов $D_1,\ D_2,\ M_1,\ M_2,\ U_1,\ U_2$ через $n_1,\ n_2,\ m_1,\ m_2,\ u_1,\ u_2$ соответственно. Чтобы выполнялось равенство (3) необходимо, во-первых, что были равны порядки операторов $U_1 * D_1$ и $U_2 * M_2$, то есть

$$u_1 + n_1 = u_2 + m_2 \tag{5}$$

Поэтому выберем $u_1,\ \ u_2$ так, что

$$u_1 = m_2, \quad u_2 = n_1 \tag{6}$$

Следовательно, операторы искомые операторы U_1 и U_2 можно представить в виде:

$$U_1(p,t)=\sum_{i=0}^{m_2}\alpha_i(t)p^i, \quad U_2(p,t)=\sum_{i=0}^{n_1}\beta_i(t)p^i \tag{7}$$

Заметим, что теперь в искомых операторах нам неизвестны только коэффициенты $\alpha_i(t),\ (i=0,1,2,...,m_2),\quad \beta_j(t)\ (j=0,1,2,...,n_1)$.

Теперь подставим выражения (7) и (6) в уравнение (3). Условием выполнения этого равенства будет равенство коэффициентов при одинаковых степенях оператора $p = \frac{d}{dt}$. Приравнивая на этом основании выражения для коэффициентов оператора $U_1 * D_1$, куда входят неизвестные коэффициенты $\alpha_i(t), (i = 0,1,2,...,m_2)$, и коэффициенты оператора $U_2 * M_2$, куда входят неизвестные коэффициенты $\beta_j(t)\ (j = 0,1,2,...,n_1)$, получим $m_2 + n_1 + 1$ уравнения для определения этих коэффициентов. Так как общее число неизвестных коэффициентов равно $m_2 + n_1 + 2$, а порядок полиномов $U_1 * D_1 = U_2 * M_2$ в равенстве (3) будет равен $m_2 + n_1 + 1$, то один из неизвестных коэффициентов может быть задан произвольно (ненулевая константа), например, $\alpha_{m_2}(t) = 1$.

При выполнении описанных действий надо соблюдать следующее правило перемножения операторов:

$$A_1 * A_2 = \sum_{j=0}^{a_1} \frac{d^j A_1}{dp^j} A_2 \frac{p^j}{j!} \quad , \tag{8}$$

a_1 *− порядок оператора* A_1, a_2 *− порядок опретора* A_2

Нельзя забывать, что при действии оператора *p* на функцию, записанную справа от него, и зависящую от аргумента *t*, производится дифференцирование: $p \cdot 1 = 0,\ \ p \cdot t = 1,\ p\cos t = -\sin t, ...$ Все коэффициенты следует записывать явно, чтобы избежать ошибок.

2). Для уравнений второго порядка найти постоянные времени и коэффициент демпфирования системы.

Найти решение уравнения, описывающего поведение системы в целом. Для решения дифференциального уравнения всей системы составить характеристическое уравнение и найти его корни, найти общее решение однородного уравнения и частное решение неоднородного уравнения.

Характеристическое уравнение для уравнения с постоянными коэффициентами

$$a_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + ... + a_0 x(t) = b_m \frac{d^m g(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{n-1} g(t)}{dt^{m-1}} + ... + b_0 g(t)$$

имеет вид:

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + ... + a_0 = 0\,.$$

Если все корни характеристического уравнения действительны и различны, то общее решение однородного уравнения имеет вид:

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + ... + c_n e^{\lambda_n t}\,.$$

Если среди корней характеристического уравнения есть действительный корень λ_j кратности ***k***, то ему в общем решении соответствует слагаемое вида:

$$x_j(t) = (b_1 + b_2 t + ... + b_k t^{k-1}) e^{\lambda_j t}\,,$$

где $b_1,\ b_2, ..., b_k$ - произвольные постоянные.

Если среди корней характеристического уравнения есть пара комплексных сопряженных корней $\alpha_j \pm i\beta_j$, то ей в общем решении соответствует слагаемое вида:

$$x_j(t) = (d_1 \cos\beta_j t + d_2 \sin\beta_j t) e^{\alpha_j t}\,,$$

где d_1, d_2 - произвольные постоянные.

Паре $\alpha_j \pm i\beta_j$ комплексно-сопряженных корней кратности ***k*** соответствует слагаемое вида:

$$x_j(t) = \left[(f_1 + f_2 t + ... + f_k t^{k-1})\cos\beta_j t + (h_1 + h_2 t + ... + h_k t^{k-1})\sin\beta_j t\right]e^{\alpha_j t},$$

где $f_1,\ f_2,...,f_k;\ h_1,\ h_2,...,h_k$ - произвольные постоянные.

Частное решение неоднородного уравнения находится методом подбора или методом вариации произвольных постоянных.

Если $g(t) = \left[R_q(t)\cos\beta t + P_l(t)\sin\beta t\right]e^{\alpha t}$,

где $R_q(t),\ P_l(t)$ - полиномы степени q,l соответственно, α, β - заданные числа, то частное решение ищется в виде:

$$x_н(t) = t^s\left[Q_m(t)\cos\beta t + T_m(t)\sin\beta t\right]e^{\alpha t},$$

где $m = \max(q,l)$, $Q_m(t),\ T_m(t)$ - полиномы степени m с неопределенными коэффициентами, а показатель степени определяется следующим образом:

s=0, если число (α+iβ) не совпадает ни с одним из корней характеристического многочлена;

s=k, если число (α+iβ) совпадает с корнем характеристического многочлена кратности k.

<u>Уравнения систем:</u>

4.2.1. $3\dfrac{dx_1}{dt} + x_1 = 2\dot{g},\quad 2\dfrac{dx}{dt} - x = 3x_1\quad, x(0) = 0,\quad \dfrac{dx}{dt}(0) = 1,\ \ t \geq 0,\qquad g(t) = e^{-t};$

4.2.2 $\dfrac{1}{2}\dfrac{dx_1}{dt} + x_1 = e^{-t},\ 3\dfrac{dx}{dt} + x = \dfrac{dx_1}{dt} - x_1,\ \ \dfrac{dx(0)}{dt} = 0, x(0) = 1,\ t \geq 0;$

4.2.3. $4\dfrac{dx_1}{dt} - x_1 = \sin(t),\ 4\dfrac{dx}{dt} + x = \dfrac{2}{3}\dfrac{dx_1}{dt} + 3x_1,\quad \dfrac{d^2x(0)}{dt^2} = 0,\ \dfrac{dx(0)}{dt} = 1, x(0) = 0;$

4.2.4. $\dfrac{1}{2}\dfrac{dx_1}{dt} + x_1 = e^{-t},\ 3\dfrac{dx}{dt} - x = \dfrac{dx_1}{dt},\ \ \dfrac{dx(0)}{dt} = 1,\ x(0) = 0;$

4.2.5. $3\dfrac{dx_1}{dt} + x_1 = \cos(t),\ 2\dfrac{dx}{dt} - 3x = 2\dfrac{dx_1}{dt},\ \dfrac{dx(0)}{dt} = 1,\ \ x(0) = 1;$

4.2.6. $\dfrac{3}{2}\dfrac{d^2x}{dt^2} - \dfrac{2}{3}\dfrac{dx}{dt} + 6x = \cos(t),\quad \dfrac{dx(0)}{dt} = 1,\ x(0) = 0;$

4.2.7. $8\dfrac{d^2x_1}{dt^2} + 12\dfrac{dx_1}{dt} - x_1 = e^{-t},\quad 8\dfrac{dx}{dt} - x = x_1;$

4.2.8. $3\dfrac{dx_1}{dt} - 2x_1 = 3\sin t,\ \dfrac{dx}{dt} + 2x = \dfrac{dx_1}{dt};$

4.2.9. $11\dfrac{dx_1}{dt} + 2x_1 = \dfrac{1}{3}\cos t,\ \ \dfrac{dx}{dt} - 3x = 2x_1,;$

4.2.10. $2\dfrac{dx_1}{dt} + 3x_1 = e^{-t},\ \ 2\dfrac{dx}{dt} + 3x = \dfrac{dx_1}{dt},\ \ x(0) = 1;$

4.2.11. $2\dfrac{dx_1}{dt} = e^{-0.5t},\ \ \dfrac{d^2x}{dt^2} + 3\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{d^2x_1}{dt^2} - x_1,\ \ x(0) = 2;$

4.2.12. $7\dfrac{dx_1}{dt} + 5x_1 = \cos t, 5\dfrac{dx}{dt} + x = 5x_1;$

4.2.13. $3\dfrac{dx_1}{dt} + x_1 == \sin(2t),\ 3\dfrac{dx}{dt} + x = \dfrac{dx_1}{dt} - 3x_1,\ \ \dfrac{dx(0)}{dt} = 1,\ x(0) = 0;$

4.2.14. $\frac{dx_1}{dt} - 3x_1 = \cos t,\ \frac{dx}{dt} - 3x = 2x_1;$

4.2.15. $x_1 = \sin \pi t,\ \frac{1}{2}\frac{dx}{dt} + x = \frac{dx_1}{dt} - x_1;$

4.2.16. $\frac{dx_1}{dt} = \sin 3t,\ \ 4\frac{dx}{dt} - x = 3\frac{dx_1}{dt} - x_1,\ x(0) = 2;$

4.2.17. $5x_1 = \cos(2t),\ 2\frac{dx}{dt} - 5x = 3\frac{dx_1}{dt} - 5x_1,\ \ \frac{dx(0)}{dt} = 1,\ x(0) = 0;$

4.2.18. $4x_1 = e^{-3t},\ 4\frac{dx}{dt} + x = 2\frac{dx_1}{dt} - x_1,\ \ \frac{dx(0)}{dt} = 1,\ x(0) = 0;$

4.2.19. $3\frac{dx_1}{dt} - 3x_1 = \cos t,\ 3x = -3x_1;$

4.2.20. $8\frac{dx_1}{dt} - 3x_1 = \sin t,\ \frac{dx}{dt} - 3x = \frac{dx_1}{dt},\ \ \ \frac{dx(0)}{dt} = 1,\ x(0) = 0;$

4.2.21. $\frac{dx_1}{dt} - 5x_1 = e^{-t},\ 7\frac{dx}{dt} - 5x = 5x_1,\ \ \ \frac{dx(0)}{dt} = 1,\ x(0) = 1;$

4.2.22. $\frac{1}{2}\frac{dx_1}{dt} + 2x_1 = \cos t,\ \frac{dx}{dt} + 2x = 2x_1,;$

4.2.23. $7x_1 = \sin t + \cos t,\ 7\frac{dx}{dt} + x = \frac{dx_1}{dt} - x_1,\ \frac{dx(0)}{dt} = 1,\ x(0) = 1;$

4.2.24. $\frac{1}{5}\frac{dx_1}{dt} - 2x_1 = \cos 2t,\ \frac{dx}{dt} - 2x = \frac{dx_1}{dt},\ \frac{dx(0)}{dt} = 1,\ x(0) = 1;$

4.2.25. $2\frac{dx_1}{dt} - x_1 = e^{-t}\sin t,\ 2\frac{dx}{dt} - x = \frac{dx_1}{dt};$