МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Национальный исследовательский Томский политехнический университет»

Юргинский технологический институт

Факультет экономики и менеджмента
Кафедра информационных систем

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЭКОНОМИКА

Часть 1. Лекционный курс

Учебное пособие

2016

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЭКОНОМИКА

Составитель М.Ю. Катаев
Юрга: ЮТИ ТПУ, 2016 (электр. ресурс) – 102с.

В пособии описаны основные понятия количественного анализа финансовых операций, а также методы оценки доходности коммерческих контрактов, инвестиционных проектов, безрисковых ценных бумаг и оптимального портфеля рисковых ценных бумаг.
Пособие подготовлено для студентов, обучающихся по направлению 09.03.03. «Прикладная математика» (бакалавриат)

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Основная цель науки о финансах состоит в изучении того, *как экономические агенты* (лица и учреждения) распределяют ограниченные ресурсы *во времени.* Акцент именно на *временном,* а не на других видах распределения, изучаемых в экономике (по регионам, отраслям, предприятиям), является отличительной чертой финансовой науки. Решения, принимаемые лицами по поводу временного распределения ресурсов, представляют собой *финансовые решения. С* точки зрения лица или лиц, принимающих такие решения, распределяемые ресурсы относятся либо *к расходам* (затратам), либо к *доходам* (поступлениям). Финансовые решения основываются на соизмерении стоимостей потоков расходов и доходов. В термине *поток* отражается временной характер распределения средств. Проблемы, касающиеся временного распределения ресурсов (в самом широком смысле), являются *финансовыми проблемами.*

Поскольку решение финансовых проблем подразумевает *соизмерение стоимостей затрат* (расходов) и *результатов* (доходов), то предполагается наличие некоторой общей меры для оценки стоимости (ценности) распределяемых ресурсов. На практике стоимость ресурсов (активов) измеряется в тех или иных *денежных единицах.* Но это только один аспект проблемы. Другой касается учета фактора *времени.* Если *проблема временного распределения* ресурсов — отличительная характеристика финансовых проблем, то финансовая теория должна давать средства для соизмерения ценностей, *относящихся к разным* моментам времени. Этот аспект проблемы имеет афористичное выражение «время — деньги». Рубль, доллар и т.д. сегодня и завтра имеют разные стоимости.

Кроме того, существует еще один чрезвычайно важный аспект. Во *всех реальных* финансовых проблемах, с которыми приходится сталкиваться на практике, присутствует *неопределенность,* касающаяся как величины *будущих* расходов и доходов, так и моментов времени, к которым они относятся. Именно тот факт, что финансовые проблемы связаны со временем, и обусловливает присущую им неопределенность. Говоря о неопределенности, имеем в виду, конечно, неопределенность *будущего,* а не прошлого. Неопределенность прошлого связана обычно (по крайней мере, в финансовых проблемах) с недостатком информации и в этом смысле, в принципе, устранима по мере накопления и уточнения данных, тогда как неопределенность будущего *принципиально* неустранима. Эта неопределенность, присущая финансовым проблемам, приводит к ситуации риска при их решении. *Любое решение* по поводу финансовых проблем в силу неопределенности *может* привести к результатам, отличающимся от *ожидаемых,* сколь бы тщательным и продуманным ни было это решение.

Финансовая теория разрабатывает понятия и методы для решения финансовых проблем. Как и любая другая теория, она строит *модели* реальных *финансовых процессов.* Поскольку такие основные элементы, как время, стоимость, риск, а также критерии для выбора желаемого распределения ресурсов получают количественное выражение, то эти модели по необходимости носят характер *математических моделей.* Большинство моделей, изучаемых в современной финансовой теории, имеют ярко выраженный математический характер. При этом математические средства, используемые для построения и анализа финансовых моделей, варьируются от элементарной алгебры до весьма сложных разделов случайных процессов, оптимального управления и др.

Хотя, как было сказано, неопределенность и риск — неотъемлемые характеристики финансовых проблем, в ряде случаев ими можно пренебречь либо в силу *стабильности* условий, в которых принимается решение, либо в идеализированных ситуациях, когда рассматриваемая модель в силу ее специфики игнорирует наличие тех или иных видов рисков. Финансовые модели такого рода называют моделями с *полной информацией,* детерминированными моделями и т.п. Изучение таких моделей важно по двум обстоятельствам.

Во-первых, в ряде случаев эти модели вполне пригодны для прямого использования. Это касается, например, большинства моделей классической финансовой математики, посвященной моделям простейших финансовых операций, таких как банковский депозит, вексельная сделка и т.п.

Во-вторых, одним из способов изучения моделей в условиях неопределенности является *моделирование*, т.е. анализ возможных будущих ситуаций или *сценариев.* Каждому сценарию соответствует некоторый, уже вполне определенный, будущий «ход событий». Анализ этого сценария осуществляется, естественно, в рамках детерминированной модели. Затем на основе проведенного анализа различных вариантов развития событий принимается *общее решение.*

Глава 1

Наращение и дисконтирование

1.1. Фактор времени в количественном анализе финансовых операций

Основными элементами финансовых моделей являются *время* и *деньги.* В сущности, *финансовые модели* в той или иной мере отражают *количественные соотношения* между *денежными суммами,* относящимися к *различным моментам времени.* Тот факт, что со временем *стоимость* или, лучше сказать, *ценность* (value) денег *изменяется,* сейчас, благодаря постоянной инфляции, очевиден каждому. Рубль сегодня и рубль завтра, через неделю, месяц, год — это разные вещи. Возможно, менее очевидно, по крайней мере для неэкономиста, что и при отсутствии инфляции фактор времени тем не менее влияет на ценность денег.

Допустим, что, обладая некоторой «свободной» суммой, вы решаете положить ее на срочный вклад в банк под определенный процент. Со временем сумма вашего счета в банке растет, и в конце срока при благоприятных условиях вы получаете большую сумму, нежели та, что положили вначале. Вместо депозита в банке вы могли бы купить акции или облигации какой-либо компании, которые также могут принести вам по прошествии некоторого времени определенный доход. Таким образом, и в этом случае сумма, инвестируемая вначале, превращается в большую сумму за некоторый промежуток времени. Конечно, вы можете ничего не предпринимать и просто хранить деньги дома или в сейфе в банке. В этом случае их сумма не изменится. Не изменится и реальная стоимость, если нет инфляции. В противном случае она, конечно, уменьшится. Однако, обладая, по крайней мере в принципе, возможностью инвестировать и не делая этого, с точки зрения экономиста, вы поступаете неразумно и несете *вполне реальный* в *экономическом смысле* убыток. Этот убыток носит название *вмененных издержек или упущенной выгоды.* Таким образом, наивная точка зрения отличается от экономической. Считая (в отсутствие инфляции) сумму денег, хранящуюся в сейфе, не теряющей стоимости, вы, с точки зрения экономиста, ошибаетесь. И в этом случае ценность денег со временем также изменяется.

Конечно, «экономический» подход предполагает наличие каких-либо механизмов по «управлению стоимостью» денег. В современном обществе он реализуется наличием инвестиционного, в частности финансового, рынка. Банки, страховые компании, инвестиционные фонды, брокерские фирмы предоставляют широкий спектр активов, покупка которых ведет (часто, но не всегда) к увеличению стоимости вложенного капитала. Накопление стоимости инвестированного капитала задает «процесс преобразования» стоимости денег во времени. Так, рубль, инвестированный сегодня, превращается в два рубля через несколько лет, с другой стороны, будущие суммы имеют с точки зрения текущего (сегодняшнего) момента меньшую стоимость, хотя бы потому, что для получения их в будущем достаточно инвестировать сегодня меньшую сумму.

Подытоживая, можно сформулировать общий финансовый принцип, определяющий влияние времени на стоимость денег:

одна и та же сумма денег в различные моменты времени имеет различную ценность. С другой стороны, по отношению к определенным условиям разные суммы денег в различные моменты времени могут быть равноценными в финансово-экономическом смысле.

Необходимость учёта фактора времени выражается в виде *принципа неравноценности* денег, относящихся к различным моментам времени. Неравноценность двух одинаковых денежных сумм определяется тем, что любая сумма денег может быть инвестирована и принести доход. Поступивший доход может быть реинвестирован и т. д.

Следствием принципа неравноценности является неправомерность суммирования денежных величин, относящихся к разным моментам времени при анализе финансовых операций.

Учёт фактора времени основан на фундаментальном в финансовом анализе *принципе дисконтирования платежей и потоков платежей*. Понятие дисконтирования, в свою очередь, связано с понятиями процентов и процентных ставок.

1.2. Проценты и процентные ставки

Будем использовать следующие обозначения:

$t = 0$ - момент предоставления денег в долг (настоящий момент времени);
T или n - срок долга;
P_0 – сумма, предоставленная в долг в момент времени $t = 0$;
S_T – сумма погашаемого долга в момент $t = T$;
i – процентная ставка (наращения);
d – учетная ставка;
I – проценты или процентные деньги.

Под процентными деньгами или процентами $I = (S_T - P_0)$ понимают абсолютную величину дохода от предоставления денег в долг в любой его форме, а именно: выдача денежных ссуд, продажа в кредит, помещение денег на сберегательный счёт, покупка облигаций и т. д.

При заключении финансового соглашения стороны договариваются о размере процентной ставки. В финансовой математике различают два вида ставок начисления процентов: процентная ставка и учетная ставка.

Под процентной ставкой i_T понимают отношение суммы процентных денег, выплачиваемых за фиксированный промежуток времени, к величине ссуды:

$$i_T = \frac{S_T - P_0}{P_0}$$

Здесь i_T определяется в виде десятичной дроби. Чтобы выразить ставку в процентах, необходимо умножить ее на 100.

Под учетной ставкой d_T понимают отношение суммы процентных денег, выплачиваемых за фиксированный промежуток времени, к величине погашаемого долга:

$$d_T = \frac{S_T - P_0}{S_T}$$

Рассмотрим простой пример. Пусть инвестор кладет в банк на год сумму 5000 руб. под 8% годовых. Это значит, что в конце года инвестор кроме вложенных денег получит добавочную сумму I, называемую процентами по вкладу, составляющую

$I = 5000 \cdot 0,08 = 400$ руб.

Интервал, относительно которого определяется процентная (учетная) ставка, называют *периодом начисления.* Это может быть год, полугодие, месяц, день и т. д. Заметим, что процент также является *интервальной* характеристикой, т.е. соотносится с периодом сделки.

Пример 1.1. Пусть в момент времени t_0 выдан кредит на сумму $P = 5000$ д.е. сроком на T =2 года, по истечении которых кредитор должен получить $S = 10000$ д.е.. Найти процентную ставку сделки.

Решение. $i_T = \dfrac{10000 - 5000}{5000} = 1$, т.е. $i_T = 100\%$.

Пример 1.2. Рассматривается кредитная сделка, состоящая в выдаче 2000 руб. на срок 3 года. Найти сумму погашения долга, если процентная ставка составляет 60%.

Решение. $S = 2000 \cdot (1 + 0,6) = 3200$.

Ставки i_T, d_T определенные выше, относятся ко всему периоду сделки. На практике наиболее часто используется другой вид процентной (учетной) ставки, относящийся к некоторому выбранному *базовому промежутку* времени — это обычно год. Выбор базового промежутка позволяет нормировать процентную (учетную) ставку сделки по формуле

$$i = \frac{i_T}{T}, \; d = \frac{d_T}{T}, \tag{1.1}$$

где T – период (срок) сделки, выраженный в единицах базового периода (год, месяц и т.д.). В дальнейшем мы будем оперировать именно с нормированной процентной ставкой.

Формулы (1.1) и (1.2) можно переписать в виде

$$i = \frac{S_1 - P_0}{P_0}, \tag{1.2}$$

$$d = \frac{S_1 - P_0}{S_1}. \tag{1.3}$$

Формулы (1.2), (1.3) означают существование двух принципов расчета процентов. Рассмотрим инвестирование суммы P_0 в момент $t=0$ на один период. Как следует из (1.2), в момент $t=1$, т.е. в конце периода, инвестору будет возвращена сумма $S_1 = P_0 + iP_0$. При этом сумма iP_0, выплачиваемая в момент $t=1$, это проценты $I = S_1 - P_0 = iP_0$ за время [0, 1] на заем величиной P_0 в момент $t=0$. Таким образом, проценты по ставке i начисляются на сумму первоначального долга P_0 в момент $t=1$.

Согласно (1.3), в обмен на возврат суммы S_1 в момент $t=1$ инвестор даст взаймы сумму $P_0 = S_1 - dS_1$. В этом случае проценты по ставке d начисляются в начальный момент времени $t=0$ на сумму погашаемого долга S_1. Сумма P_0 может рассматриваться как заем суммы S_1, возвращаемой через единицу времени, при котором проценты величиной dS_1 выплачиваются заранее, в момент $t=0$, и составляют доход кредитора $D = S_1 - P_0 = dS_1$ за время [0, 1].

Таким образом, проценты по ставке i начисляются в конце периода начисления процентов, а проценты по учетной ставке d – в начале периода начисления процентов.

Различают *простые и сложные* проценты. При начислении простых процентов базой для начисления служит начальная сумма на протяжении всего срока ссуды. При начислении сложных процентов базой служит сумма с начисленными в предыдущем периоде процентами.

В финансовом анализе процентная ставка применяется не только как инструмент наращения суммы долга, но и в более широком смысле, а именно, как универсальный показатель степени доходности любой финансовой операции.

1.3. Наращение по простым процентам

По определению, наращенная сумма – это первоначальная сумма с начисленными на эту сумму процентами. Введем следующие обозначения. Пусть

I – сумма процентов за весь срок;

n – общее количество периодов начисления (обычно в годах);

P – первоначальная сумма (здесь мы опускаем индекс «0»;

S – наращенная сумма (опускаем индекс «T»);

i – ставка процентов в виде десятичной дроби;

d – учетная ставка в виде десятичной дроби.

Тогда имеем

$$S = P + I.$$

При начислении простых процентов за базу принимается первоначальная сумма. Проценты начисляются n раз, поэтому $I = P \cdot n \cdot i$ и формула простых процентов запишется в виде

$$S = P \cdot (1 + n \cdot i). \tag{1.4}$$

Величина $(1 + n \cdot i)$ называется *множителем наращения* по простой процентной ставке, т.е. множитель наращения показывает накопленную к моменту n будущую стоимость 1 д.е., вложенной в момент $t=0$ на срок n.

Процесс увеличения суммы денег в связи с присоединением процентов к первоначальной сумме называется *наращением* или *ростом первоначальной суммы*.

Первоначальная сумма с начисленными на нее процентами называется *наращенной суммой.*

Простые проценты чаще всего используются, когда срок ссуды меньше одного года. Тогда $n = \frac{t}{K}$, где t – количество дней ссуды, а K – количество дней в году.

На практике используют обыкновенный или коммерческий процент, когда K =360 дней или точный процент – K *=365* (366) дней.

Пример 1.3 Пусть P =1000 руб., годовая ставка i =10%. Получим наращенные по простым процентам суммы.

1 год: 1000 + 0,1·1000 = 1100 руб.; 2 год: 1100 + 100 = 1200 руб; 3 год: 1200 + 100 = =1300 руб.

Переменные ставки

Предположим, что весь срок ссуды n разбит на s промежутков длительностью n_t, каждый, $n = \sum_{t=1}^{s} n_t$. В каждом промежутке действует ставка i_t. Тогда формула начисления простых процентов при переменной ставке будет иметь вид

$$S = P \cdot (1 + n_1 \cdot i_1 + n_2 \cdot i_2 + ... + n_s \cdot i_s)$$

или

$$S = P \cdot (1 + \sum_{t=1}^{s} n_t \cdot i_t) . \qquad (1.5)$$

Пример 1.4 Пусть P =1000 руб., ставка в первый год равна i_1 =10%, во второй год – i_2 =12%, в третий год – i_3 =15%. Получим наращенную за три года по простым процентам сумму.

1000 + 100 + 120 + 150 = 1370 руб.

Реинвестирование

Когда происходит реинвестирование наращенных на каждом промежутке средств, то за базу при начислении процентов на очередном промежутке принимается не первоначальная сумма, а наращенная сумма, полученная на предыдущем промежутке. С учетом этого формула начисления запишется так

$$S = P \cdot (1 + n_1 \cdot i_1) \cdot (1 + n_2 \cdot i_2) \cdot ... \cdot (1 + n_s \cdot i_s) .$$

Пример 1.5. Для данных примера 1.3. получим за три года сумму

1 год: 1000 + 100 = 1100 руб; 2 год: 1100 + 110 = 1210 руб; 3 год: 1210 + 121 = 1331 руб.

1.4. Сложные проценты

Начисление сложных годовых процентов (формула наращения)

В долгосрочных финансовых операциях для наращения первоначальной суммы применяют сложные проценты. При начислении сложных процентов за базу принимают не первоначальную сумму, а сумму, получившуюся после начисления процентов и присоединения их к сумме долга в предыдущих периодах.

Присоединение начисленных процентов к сумме, которая служила базой для их начисления, называют *капитализацией процентов.* Процесс капитализации происходит по следующей схеме:

1) $P + P \cdot i = P(1+i)$

2) $P(1+i) + P(1+i)i = P(1+i)^2$

3) $P(1+i)^2 + P(1+i)^2 \cdot i = P(1+i)^3$

....

В общем виде формула наращения по сложным процентам запишется так:

$$S = P(1+i)^n. \qquad (1.6)$$

Множитель $(1+i)^n$ называется множителем *наращения* по формуле сложных процентов.

Пример 1.5. Пусть P=1000, i = 10%, т.е. как доля i = 0,I. Следовательно, наращенные по сложным процентам суммы таковы:

1000,1000+0,1·1000=1000+100=1100, 1100+0,1·1100=1210, 1210+0,1·1210 = 1331,1 и т.д.

Пример 1.6. Годовая ставка сложных процентов равна 8%. Через сколько лет начальная сумма удвоится?

Решение. Надо решить неравенство: $(1+0.08)^n$ > 2. Логарифмируем по основанию натуральных логарифмов и получаем $n > \ln(2)/\ln(1.08)$.

Ответ: через 9 лет.

Кривые, изображенные на рис. 1.1, иллюстрируют процессы наращения по простым и сложным процентам в зависимости от срока. Из рисунка видно, что если срок $n < 1$, то множитель наращения по простым процентам $(1+n \cdot i) > (1+i)^n$, если $n > 1$, то $(1+n \cdot i) < (1+i)^n$.

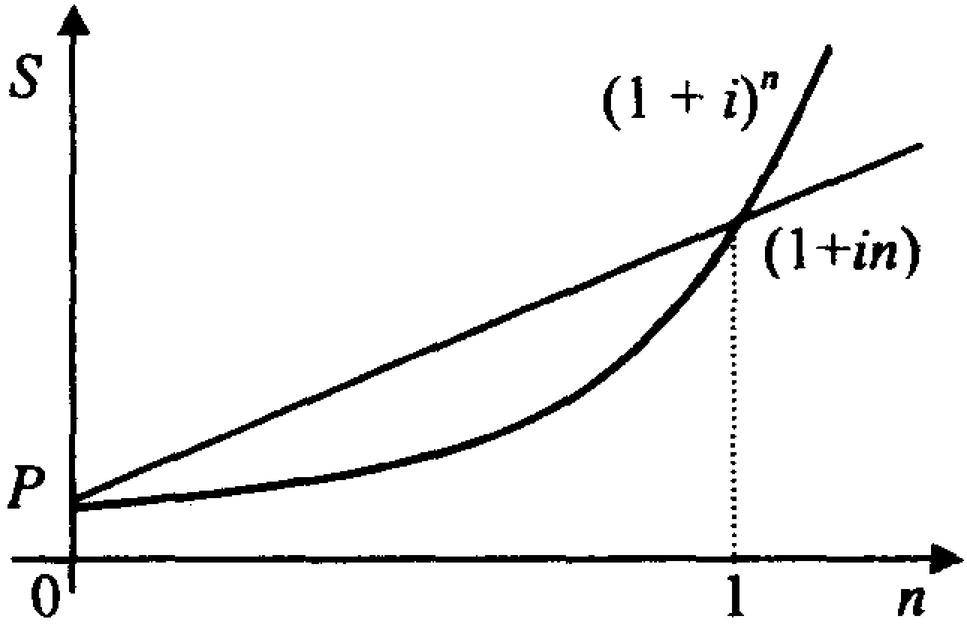


Рис 1.1. Зависимость наращенной суммы от срока долга

Меняющиеся во времени ставки

Пусть весь срок ссуды n разбит на интервалы длительностью n_t, $t = 1, 2, ..., s,\ n = \sum_{t=1}^{s} n_t$, и в каждом интервале начисление процентов производится по ставкам $i_1, i_2, ..., i_s$ соответственно. Тогда формула наращения по сложным процентам будет иметь вид

$$S = P(1+i_1)^{n_1}(1+i_2)^{n_2} \cdots (1+i_s)^{n_s}.$$

1.5. Номинальная и эффективная ставки процентов

Номинальная ставка

На практике часто при объявлении условий финансовой операции оговаривается годовая ставка процентов и указывается количество выплат процентов в год (например, может быть ежеквартальное начисление - четыре раза в год). В этом случае используют понятие *номинальной ставки,* обозначим ее символом j. Пусть количество выплат процентов в год равно m. Тогда начисление процентов осуществляется по ставке j/m, а общее количество интервалов выплат за n лет будет равно $m \cdot n$. Наращенная сумма определяется по формуле

$$S = P(1+\frac{j}{m})^{m \cdot n}. \qquad (1.7)$$

Таким образом, номинальная ставка - это годовая ставка процентов при начислении процентов m раз в год. Чем больше число m, тем быстрее идет процесс наращения первоначальной суммы.

Эффективная ставка

Для сравнения различных условий начисления процентов (при различных номинальных ставках и различном количестве начислений) используют понятие *эффективной ставки.* Эффективная ставка - это годовая ставка процентов, начисляемых один раз в год, которая дает тот же финансовый результат, что и m – разовое начисление в год с использованием номинальной ставки j. Таким образом, по определению, должно выполнятся равенство множителей наращения

$$(1+i) = (1+\frac{j}{m})^{m}, \qquad (1.8)$$

где i – эффективная ставка. Отсюда получаем

$$i = (1+\frac{j}{m})^{m} - 1. \qquad (1.9)$$

Замена в договоре номинальной ставки j при начислении процентов m раз в год на эффективную ставку по формуле (1.7) не меняет финансовых обязательств сторон.

При сравнении различных предлагаемых вариантов начисления процентов достаточно вычислить и сравнить эффективные ставки для каждого из них.

Пример 1.7. Банк начисляет проценты, исходя из номинальной ставки j =12% годовых. Вычислить эффективную ставку i, если проценты начисляются: а) ежедневно (m =365); б) ежемесячно (m =12); в) ежеквартально *(m =4).* Расчеты по формуле (1.7) дают следующие результаты: при ежедневном начислении i =0,1274; при ежемесячном i =0,1268; при ежеквартальном i =0,1255.

Если задана эффективная ставка i, то из формуле (1.6) можно определить номинальную ставку j, при количестве выплат m:

$$j = m \cdot ((1+i)^{1/m} - 1). \qquad (1.10)$$

Пример 1.8. Пусть эффективная годовая ставка i =12%. Определить номинальную ставку j если проценты начисляются: а) ежедневно (m =365); б) ежемесячно (m =12); в) ежеквартально *(m =4).*

Решение. По формуле (1.8) получим следующие результаты: при ежедневном начислении j =0,1133; при ежемесячном j =0,1139; при ежеквартальном j =0,1149.

1.6. Определение продолжительности ссуды и процентных ставок

Простая ставка

Рассмотрим следующие две задачи, возникающие в связи с понятием процентов и имеющих практический смысл.

Задача 1. Известны P, S, i. Определить срок n. Задача решается просто: из формулы (1.1) получим

$$n = \frac{S - P}{P \cdot i}. \tag{1.11}$$

Задача 2. Известны P, S, n. Определить i. Ставка равна

$$i = \frac{S - P}{P \cdot n}. \tag{1.12}$$

Пример 1.9. Годовая ставка простых процентов равна 12,5% . Через сколько лет начальная сумма удвоится?

Решение. Надо решить неравенство: (1+0,125 n)>2, т.е. 0,125n > 1. Получаем n >1/0,125.

Ответ: через 8 лет.

Сложная ставка

Задача 1. Известны значения P, S, i. Определить срок n. Срок находится из уравнения (1.3)

$$n = \frac{\ln(S/P)}{\ln(1+i)}. \tag{1.13}$$

Если используется номинальная ставка J с начислением процентов m раз в год, то аналогично получим из уравнения (1.4)

$$n = \frac{\ln(S/P)}{\ln(1+\frac{j}{m})^m}. \qquad (1.14)$$

Задача 2. Известны значения P, S, n. Определить ставку i. Решая уравнение (1.3) относительно i, получим

$$i = (S/P)^{1/n} - 1. \qquad (1.15)$$

При начислении процентов по номинальной ставке m раз в год имеем из уравнения (1.3)

$$j = m \cdot ((S/P)^{1/m \cdot n} - 1). \qquad (1.16)$$

1.7. Понятие дисконтирования

Дисконтирование по простым ставкам

Рассмотрим следующую задачу. По заданной сумме S, которую следует уплатить через время n, требуется определить первоначальную сумму P. В этом случае говорят, что сумма S *дисконтируется*.

Термин *дисконтирование* в широком смысле означает определение стоимости денежной суммы в данный момент времени при условии, что в будущем она составит величину S. Такой расчёт называется *приведением стоимостного показателя к заданному моменту времени*.

Величину P, найденную дисконтированием суммы S, называют *современной или приведённой величиной* S.

Это одно из важнейших понятий при моделировании и анализе финансовых операций, так как именно с помощью дисконтирования учитывается фактор времени. Решая задачу, получим

$$P = S\frac{1}{1+n \cdot i}. \qquad (1.17)$$

Данная формула называется формулой *математического дисконтирования* (в отличие от банковского дисконтирования или учета, которое здесь не рассматривается).

Величина $\frac{1}{1+n\cdot i}$ называется *дисконтным множителем*, разность $(S-P)$ — *дисконтом* суммы S.

Более подробно понятие дисконтирования будет рассмотрено в следующих разделах.

Дисконтирование по сложной ставке процентов

Найдем первоначальную сумму *P* по известной конечной сумме *S* с использованием сложной ставки.

Очевидно, что

$$P=\frac{S}{(1+i)^n}=S\cdot v^n, \tag{1.18}$$

где $v^n=\frac{1}{(1+i)^n}$ — дисконтный множитель (множитель дисконтирования).

Если проценты начисляются m раз в год с использованием номинальной ставки j, то

$$P=\frac{S}{(1+\frac{j}{m})^{m\cdot n}}=S\cdot w^{m\cdot n}, \tag{1.19}$$

где дисконтный множитель $w^{m\cdot n}=\frac{1}{(1+\frac{j}{m}i)^{m\cdot n}}$.

В финансовой и экономической литературе для современной величины *P* часто используют сокращенное обозначение - PV, от английского Present Value

Очевидно, математически данная задача решается элементарно, однако она имеет глубокий финансово-экономический смысл. Как уже отмечалось выше, с помощью дисконтирования определяется современная стоимость будущих денежных сумм. Платеж в сумме S через n лет равноценен сумме P, выплачиваемой в настоящий момент времени. При этом важнейшим является вопрос о выборе ставки процентов, по которой производится дисконтирование. Выбор этой ставки основывается на анализе состояния финансового рынка и от ее правильного выбора зависит точность оценки современной стоимости будущих денежных сумм.

Разность $S-P$ называется *дисконтом* суммы S, обозначим эту величину символом D. Из формулы (1.13) и (1.14) следует, что $D=S(1-v^n)$, если проценты начисляются один раз в год, и $D=S(1-w^{m\cdot n})$, если проценты начисляются m раз в год.

Покажем, что наращенная сумма на некоторый промежуточный момент времени $0<t<n$ равна современной величине платежа на тот же момент времени. Пусть S_t – наращенная сумма на момент времени t, а P_t – современная величина платежа на этот момент. Тогда очевидно, что

$$P_t=\frac{S}{(1+i)^{n-t}}=\frac{P(1+i)^n}{(1+i)^{n-t}}=P(1+i)^t=S_t\,.$$

1.8. Учет инфляции при наращении процентов

Существует множество различных способов учета инфляции при наращении сложных процентов. Рассмотрим один из них, основанный на применении формулы Фишера. Пусть h - ожидаемый годовой темп инфляции в виде ставки сложных процентов (мы не касаемся здесь методики определения этого показателя), i – ставка процентов без учета инфляции, r – реальная ставка с учетом инфляции. Тогда реальная ставка определяется из уравнения, которое называется уравнением Фишера:

$$1+r=\frac{1+i}{1+h}\,. \qquad (1.20)$$

Решая это уравнение относительно r, получим

$$r=\frac{i-h}{1+h}\,. \qquad (1.21)$$

Ставка без учета инфляции (которую называют также номинальной ставкой) $i=r+h+r\cdot h$. При малых значениях h используют приближенную формулу $i=r+h$, а для реальной ставки: $r=i-h$.

1.9. Непрерывное наращение и дисконтирование

(непрерывные проценты)

Непрерывные проценты применяются в количественном анализе финансовых операций, моделировании сложных производственных и хозяйственных объектов, при выборе инвестиционных решений и их обосновании. Это обусловлено тем, что многие экономические процессы непрерывны, и поэтому более адекватно применение непрерывных процентов. Модели с непрерывными процентами широко используются в современной финансовой математике при описании доходностей ценных бумаг. С помощью непрерывных процентов можно учесть сложные процессы наращения, часто изменяющиеся процентные ставки, что характерно для финансовых рынков. Непрерывные проценты используются при моделировании финансовых потоков. Несмотря на кажущуюся абстрактность этого понятия, непрерывные проценты используются и в практике финансовых компаний.

При непрерывном наращении процентов применяют особый вид процентной ставки, которая называется силой роста. Она характеризует относительный прирост наращенной суммы в бесконечно малом промежутке времени.

Постоянная сила роста

Рассмотрим формулу $S = P(1+\frac{j}{m})^{m\cdot n}$. Очевидно, что при непрерывном начислении процентов $m \to \infty$. Имеем

$$S = \lim_{m\to\infty} P(1+\frac{j}{m})^{m\cdot n} = P\lim_{m\to\infty}(1+\frac{j}{m})^{m\cdot n}.$$

Из математического анализа известно, что $\lim_{m\to\infty}(1+\frac{j}{m})^{m} = e^{j}$, где e – основание натурального логарифма. Учитывая это, получим

$$S = P\cdot e^{\delta\cdot n}. \qquad (1.22)$$

В данной формуле δ – сила роста - номинальная ставка при $m \to \infty$.

Если известна сила роста, то можно определить эквивалентную ей дискретную годовую ставку. По существу, это эффективная ставка, соответствующая данной непрерывной ставке. Приравнивая множители наращения по дискретной и непрерывной ставкам

$$(1+i) = e^{\delta}$$

получим

$$i = e^{\delta} - 1. \tag{1.23}$$

Если известна дискретная годовая ставка, то можно определить эквивалентную ей непрерывную ставку:

$$\delta = \ln(1+i). \tag{1.24}$$

Приведем пример реальной ситуации, в которой для привлечения вкладчиков применялись непрерывные проценты. В 1975 г. в США законы налагали ограничения на фиксированную годовую ставку выплат, но не налагали ограничений на количество периодов начислений в год. Ставка процентных выплат по займам и депозитам сроком от шести до десяти лет была ограничена уровнем 7,75% годовых. В целях привлечения вкладчиков некоторые финансовые учреждения объявили, что они будут выплачивать 7,75% годовых, но начислять проценты по полугодиям, что соответствовало эффективной ставке 7,9%. Это не являлось нарушением закона.

После этого другие учреждения предложили более выгодные условия, а именно, 7,75% годовых, но при ежеквартальном начислении процентов. Это соответствовало эффективной ставке 7,978%. Другие предложили при той же годовой ставке начислять проценты ежемесячно, что дало эффективную ставку 8,031%. Предел был достигнут, когда одна компания предложила начислять проценты непрерывно (ежедневно), что соответствовало эффективной ставке 8,06%.

Дисконтирование на основе непрерывных процентных ставок

Формула дисконтирования по непрерывной ставке имеет вид

$$P = S \cdot e^{-\delta \cdot n}. \tag{1.25}$$

Переменная сила роста

Пусть сила роста меняется во времени и принимает значения $\delta_1, \delta_2, ..., \delta_k$ в интервалах времени $n_1, n_2, ..., n_k$. Тогда за n_1 лет первоначальная сумма P станет равна $S_1 = P \cdot e^{\delta_1 \cdot n_1}$. Так как ставка сложная, за следующие n_2 лет первоначальная сумма вырастет до

$S_1 = S_1 e^{\delta_2 \cdot n_2} = P \cdot e^{\delta_1 \cdot n_1 + \delta_2 \cdot n_2}$. Продолжая рассуждения, получим, что наращенная сумма за весь срок будет равна

$$S = P \cdot e^{\sum_{t=1}^{k} \delta_t \cdot n_t}. \qquad (1.26)$$

Мы рассмотрели случай, когда сила роста изменяется во времени дискретно.

Предположим, что сила роста меняется непрерывно и описывается некоторой непрерывной функцией времени $\delta = \delta(t)$. Тогда наращенная сумма

$$S = P \cdot e^{\int_0^k \delta(t)dt}. \qquad (1.27)$$

Формула дисконтирования:

$$P = S \cdot e^{-\int_0^k \delta(t)dt}. \qquad (1.28)$$

1.10. Эквивалентность простых и сложных процентных ставок

Ставки являются эквивалентными, если в конкретной финансовой операции они приводят к одному и тому же финансовому результату .

Задача определения эквивалентных ставок возникает, например, при сравнении ставок, применяемых в различных сделках и соглашениях, определении эффективности кредитно-финансовых операций, безубыточной замене одного вида ставок другим или одного метода их начисления другим.

Для определения эквивалентных простых и сложных ставок необходимо приравнять соответствующие множители наращения

$$(1 + n \cdot i_n) = (1 + i)^n$$

где i_n – простая ставка, i – сложная. Из этого соотношения легко получаем

$$i_n = \frac{(1+i)^n - 1}{n}, \qquad (1.29)$$

$$i = (1 + n \cdot i_n)^{1/n} - 1. \qquad (1.30)$$

Если сложная ставка начисляется m раз в год, то также приравнивая множители наращения, получим

$$i_n = \frac{(1 + \frac{j}{m})^{m \cdot n} - 1}{n}, \qquad (1.31)$$

$$j = m((1 + n \cdot i_n)^{1/m \cdot n} - 1). \qquad (1.32)$$

Таким образом, замена в любой финансовой операции сложных ставок процентов эквивалентными им простыми по формулам (1.29), (1.31) или простой ставки эквивалентными ей сложными по формулам (1.30), (1.32) не изменяют конечного результата финансовой операции.

Пример 1.10. Какая сумма предпочтительнее при ставке 6%: $1000 сегодня или $2000 через 8 лет?

Решение. Найдем современную величину $2000 через 8 лет при ставке 6%: $A=2000 \cdot (1 + 0.06)^{-8} = 2000 \cdot 0.627 = 1254$.

Итак, $A=1254 > 1000$. Следовательно, надо предпочесть сумму $2000 через 8 лет.

1.11. Изменение условий контракта

Под изменением условий контракта мы будем понимать отдаление срока платежа или консолидирование платежей, то есть объединение нескольких обязательств в одно.

Изменение условий контракта осуществляется на основе принципа финансовой эквивалентности обязательств. Этот принцип гарантирует безубыточность изменений финансовых отношений для каждой из сторон. Эквивалентными считаются платежи, которые, будучи приведёнными по заданной процентной ставке к одному моменту времени, оказываются равными.

Общий метод решения подобных задач — составление уравнения эквивалентности. В этом уравнении сумма заменяемых платежей, приведённых к какому-то одному моменту, приравнивается сумме платежей по новому обязательству, приведённых к той же самой дате.

Консолидирование задолженностей

Пусть имеются платежи $S_1, S_2, ..., S_m$. Сроки платежей $n_1, n_2, ..., n_m$. Эти платежи объединяются в один платёж S_0 со сроком выплаты n_0. Возможны два варианта данной задачи:

1) задан срок консолидированного платежа n_0, необходимо определить его размер S_0;

2)известен размер платежа S_0, необходимо определить его срок n_0.

Сначала будем решать задачу, используя простую ставку.

В первом варианте удобнее привести все платежи к моменту n_0. Платежи, сроки которых меньше n_0, необходимо нарастить по формуле простых процентов. Платежи, у которых сроки больше n_o, необходимо дисконтировать. Пусть

S_j – размеры платежей, сроки которых $n_j < n_0$,

S_k – размеры платежей, сроки которых $n_k > n_0$,

$t_j = n_0 - n_j$ – время от момента выплаты j-го платежа со сроком $n_j < n_0$ до момента выплаты суммы S_0,

$t_k = n_k - n_0$ – время от момента выплаты k-го платежа со сроком $n_k > n_0$ до момента выплаты суммы S_0,

i – простая ставка процентов. Тогда

$$S_0 = \sum_j S_j (1 + t_j \cdot i) + \sum_k S_k (1 + t_k \cdot i)^{-1}. \qquad (1.33)$$

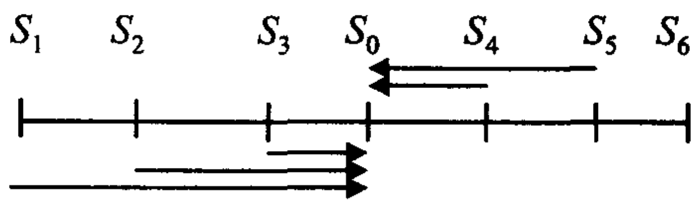


Рис 1.2. Процесс консолидирование задолженностей

Первый член в этом уравнении объединяет все платежи, сроки которых $n_j < n_0$, второй — сроки которых $n_k > n_0$.

Таким образом, просуммировав эти платежи, мы получили сумму S_0, которая в финансовом отношении эквивалентна всем распределённым во времени платежам. Важно отметить, что размер суммы S_0 и срок её выплаты взаимосвязаны.

Консолидирование по сложной ставке процентов приводит к соотношению

$$S_0 = \sum_j S_j (1+i)^{t_j} + \sum_k S_k (1+i)^{-t_k} \ . \qquad (1.34)$$

Рассмотрим второй вариант задачи, используя сначала простую ставку процентов. Здесь удобнее привести все платежи на начальную дату (момент времени, который принят за начало отсчета). Уравнение эквивалентности запишется в виде

$$S_0 (1 + n_0 \cdot i)^{-1} = \sum_t S_t (1 + n_t \cdot i)^{-1} \ .$$

Обозначим $\sum_t S_t (1 + n_t \cdot i)^{-1} = P_0$ – современную величину заменяемых платежей.

Решая это уравнение относительно n_0, получим

$$n_0 = \frac{1}{i}\left(\frac{S_0}{P_0} - 1\right). \qquad (1.35)$$

В данном случае задача не всегда имеет решение. Очевидно, решение существует, если $S_0 > P_0$, поскольку только в этом случае $n_0 > 0$.

Определим срок платежа на основе сложных ставок. Уравнение эквивалентности на основе сложной ставки процентов имеет вид

$$S_0 (1+i)^{-n_0} = \sum_t S_t (1+i)^{-n_t} \ .$$

Обозначим $Q = \sum_t S_t (1+i)^{-n_t}$ – сумму дисконтированных на начальную дату платежей.

Решая уравнение, получим

$$n_0 = \frac{\ln(S_0 / Q)}{\ln(1+i)}. \qquad (1.36)$$

Решение данной задачи тоже существует не всегда. Условие существования решения: $S_0 > Q$, так как только тогда $n_0 > 0$ (формально это следует из свойств логарифмической функции).

Общий случай изменения условий контракта

В общем случае несколько платежей могут заменяться также несколькими платежами. Пусть

S_q – платежи со сроками n_q, которые предусматриваются новыми условиями,

S_k – заменяемые платежи со сроками n_k.

Будем предполагать, что все платежи приводятся на начальный момент времени.

Уравнение эквивалентности для сложной ставки:

$$\sum_q S_q v^{n_q} = \sum_k S_k v^{n_k} \ . \qquad (1.37)$$

Данная задача не имеет однозначного решения и в некоторых случаях может быть решена только методом подбора.

1.12. Дисконтирование и наращение по учетной ставке

1.12.1. Коммерческий (банковский) учет

Сформулируем задачу банковского дисконтирования. По заданной сумме S, которая будет выплачена через n периодов, требуется определить сумму займа P в настоящий момент, при котором проценты за пользование ссудой выплачиваются заранее, в момент предоставления денег в долг $t = 0$. Для начисления и удержания процентов применяется учетная ставка d.

Простая ставка дисконтирования d

Имеем: $t = n$ – момент погашения суммы S_n. Согласно определению учетной ставки (1.3), сумма, которую необходимо выдать в долг в момент $t = n-1$, за единицу времени до погашения суммы S_n, есть

$$P_{n-1} = S_n - dS_n \, .$$

Тогда величина дисконта за последний, n–й период дисконтирования равна $D_n = dS_n$. Так как d - простая учетная ставка, то суммы дисконта за каждый период дисконтирования одинаковы и равны $D_n = D_{n-1} = ... = D_1 = dS_n$.

Величина дисконта за весь срок долга n составляет

$$D(n) = D_n + D_{n-1} + ... + D_1 = ndS_n \, .$$

По определению,

$$D(n) = S_n - P_0 \, .$$

Тогда

$$P_0 = S_n(1 - nd) \, . \qquad (1.38)$$

(1.38) – формула современной величины суммы S_n при банковском ее учете простыми дисконтами по ставке d в течение n периодов. Суммы D_n, $D_{n-1},...,D_1$ – дисконты за каждый период (единицу времени). Выражение (1.38) означает, что в обмен на выплату суммы S_n через время n кредитор даст взаймы сумму $S_n(1-nd)$ в начале этого срока. Заметим, что формула (1.38) справедлива, если срок долга n и учетная ставка d удовлетворяют условию $nd<1$. Дисконтирование по простой учетной ставке применяют, как правило, в случае краткосрочных сделок, когда $0<n\le 1$.

Пример 1.10. Вексель, погашаемый 1 января 2002 года, учтен за 10 месяцев до его погашения на сумму 180 д.е. Какова величина годовой учетной ставки, если ежемесячный дисконт составляет 2 д.е.?

Так как проценты удерживаются за каждый месяц, то за единицу измерения времени можно принять 1 месяц. Тогда в начале каждого месяца проценты начисляются по ежемесячной учетной ставке $d/12$ где d - годовая учетная ставка. Срок погашения векселя $n=10$ единиц времени. Сумма P_0 = 180 – приведенная (к моменту учета векселя t = 0) величина суммы S_n, погашаемой по векселю. Дисконты за каждый период (единицу времени) составляют $D_{10}=D_9=...=D_1$ = 2 = $\widehat{D}$. Следовательно, вексель учтен по простой учетной ставке. Размер дисконта за весь срок $D(n)=n\widehat{D}$. Так как $P_0=S_n-n\widehat{D}$, то сумма, погашаемая по векселю, S_n = 200 д.е. Поскольку $\widehat{D}=S_n\dfrac{d}{12}$, то годовая учетная ставка d = 0,12.

Сложная ставка дисконтирования d

Согласно определению сложной процентной ставки, базой для начисления процентов на каждом периоде является сумма, полученная на предыдущем периоде дисконтирования. Так как для начисления процентов применяется учетная ставка d, то проценты начисляются в начале каждого периода. Рассмотрим процесс дисконтирования суммы S_n по периодам, начиная с n-го. Такой порядок рассмотрения периодов означает, что n-й период дисконтирования является предыдущим по отношению к $(n-1)$- му, $(n-1)$ - й период является предыдущим по отношению к $(n-2)$-му и т. д.

Сумма, которую необходимо выдать в долг в момент $t=n-1$, т.е. за единицу времени до погашения суммы S_n, есть

$$P_{n-1}=S_n-D(1)=S_n-D_n.$$

P_{n-1} – приведенная к моменту $t=n-1$ величина суммы S_n; $D(1)$ – величина дисконта за один n – й, период, $D(1)=D_n=dS_n$. Так как P_{n-1} – это сумма, полученная на n - м периоде дисконтирования, то величина дисконта на (n – 1) - м периоде дисконтирования равна $D_{n-1}=dP_{n-1}$.

Сумма, которую необходимо выдать в долг в момент $t = n - 2$, за два периода до погашения суммы S_n, есть:

$$P_{n-2} = S_n - D(2) = S_n - D_n - D_{n-1} = P_{n-1} - D_{n-1}.$$

P_{n-2} - приведенная к моменту $t = n - 2$ величина суммы S_n; D (2) - величина дисконта за 2 периода, n - й и (n – 1) - й, т.е. $D(2) = D_n + D_{n-1}$. Так как P_{n-2} - это сумма, полученная на (n – 1) - м периоде дисконтирования, то величина дисконта на (n – 2) - м периоде составляет $D_{n-2} = dP_{n-2}$. И так далее.

Приведенная к моменту t = 0 величина суммы S_n – это сумма P_0, которую необходимо выдать в долг в момент t = 0 за n периодов до погашения суммы S_n:

$$P_0 = S_n - D(n),$$

где $D(n)$ - величина дисконта за весь срок долга. Найдем $D(n)$. Имеем:

$$D_n = dS_n,$$

$$D_{n-1} = dP_{n-1} = d(S_n - D_n) = dS_n - dD_n = D_n - dD_n = D_n(1-d),$$

$$D_{n-2} = dP_{n-2} = d(P_{n-1} - D_{n-1}) = dP_{n-1} - dD_{n-1} = D_{n-1} - dD_{n-1} = D_{n-1}(1-d),$$

……..

$$D_1 = dP_1 = d(P_2 - D_2) = dP_2 - dD_2 = D_2 - dD_2 = D_2(1-d).$$

Таким образом,

$$D_{n-1} = D_n(1-d),$$

$$D_{n-2} = D_{n-1}(1-d),$$

………

$$D_1 = D_2(1-d).$$

Следовательно, $D_n, D_{n-1}, ..., D_1$ – члены геометрической прогрессии с первым членом D_n и знаменателем (1 – d). Величина дисконта за весь срок долга n составляет

$$D(n) = D_n + D_{n-1} + ... + D_1.$$

По формуле суммы n членов геометрической прогрессии получаем

$$D(n) = D_n \frac{1-(1-d)^n}{1-(1-d)} = dS_n \frac{1-(1-d)^n}{1-(1-d)} = S_n\left(1-(1-d)^n\right).$$

Так как $P_0 = S_n - D(n)$, то

$$P_0 = S_n(1-d)^n. \tag{1.39}$$

(1.39) – формула современной величины суммы S_n при банковском ее учете сложными процентами по учетной ставке d в течение n периодов.

Пример 1.5. Государственная облигация учтена за пять лет до погашения. Какова сумма, погашаемая по облигации, если дисконты за последний и предпоследний годы до погашения составили соответственно 2000 и 1600 д.е. ?

Используем полученные соотношения для сложных дисконтов. Если единицей измерения времени является 1 год, то срок долга n = 5 лет, D_4 = 1600 д.е., D_5 = 2000 д.е., $D_4 = D_5(1-d)$, где d - годовая учетная ставка. Отсюда d = 0,2. Так как $D_5 = dS_5$, то погашаемая сумма S_5 = 10000 д.е.

Дисконтирование по номинальной учетной ставке

Если дисконтирование по сложной учетной ставке производится не один, а m раз в году, то годовую учетную ставку называют номинальной и обозначают через g.

Определение. Годовая учетная ставка g называется номинальной, если для дисконтирования в течение $1/m$ части года применяется сложная учетная ставка g/m.

Таким образом, если дисконтирование по сложной учетной ставке производится через равные промежутки времени m раз в году, то в начале каждого периода длиной $1/m$ начисляются и удерживаются проценты по ставке g/m. Если срок долга n лет, то nm – число периодов применения ставки g/m в сроке долга. Из формулы (1.39) получаем

$$P_0 = S_n(1-\frac{g}{m})^{nm}, \tag{1.40}$$

где m ≥ 1. Если m = 1, то $g = d$, т.е. номинальная учетная ставка совпадает с годовой учетной ставкой сложных процентов, применяемой раз в году. Формула (1.40) – формула учета суммы S_n при m-разовом дисконтировании в году по номинальной учетной ставке g в течение n лет.

Непрерывное дисконтирование по сложной учетной ставке

Непрерывное дисконтирование - это дисконтирование на бесконечно малых отрезках времени, т.е. при $\frac{1}{m} \to 0$ (или $m \to \infty$). Так как при непрерывном начислении процентов начало и конец периода начисления процентов совпадают, то номинальные процентные ставки j и g при $m \to \infty$ перестают различаться. Поэтому при $m \to \infty$ пользуются одной процентной ставкой – силой роста δ. Тогда при непрерывном дисконтировании справедлива формула (1.18):

$$P_0 = S_n \cdot e^{-\delta \cdot n}. \tag{1.41}$$

Пример 1.6. 10 тыс. д.е. должны быть возвращены через 5 лет. Сравнить современные величины этого долга при его дисконтировании по годовой номинальной учетной ставке 0,12 а) по полугодиям; б) ежеквартально; в) непрерывно.

Согласно условию, n = 5, S_5 = 10 000, а) m = 2, g = 0,12; б) m = 4, g = 0,12; в) $m \to \infty$, δ = 0,12. Из формул (1.40) и (1.41) получаем:

$P_0 = S_5(1 - \frac{g}{m})^{5m}$ для случаев а) и б) и $P_0 = S_5 \cdot e^{-5\delta}$ в случае в).

Отсюда современная величина суммы 10 тыс. д.е., срок погашения которой через 5 лет, при ее дисконтировании по годовой номинальной учетной ставке в зависимости от m составляет а) 5386,15 д.е.; б) 5437,94 д.е.; в) 5488,12 д.е. Как видим, с увеличением m современная стоимость суммы 10 000 д.е. увеличивается.

Итак, в зависимости от способа применения учетной ставки d имеем четыре метода дисконтирования суммы долга S_n по этой ставке: по простой (1.38),сложной (1.39), номинальной (1.40), по постоянной силе роста (1.41).

Переменная учетная ставка

Рассмотрим дискретные переменные процентные ставки. Пусть n – срок долга, $n = \sum_{j=1}^{k} n_j$, где n_j – период в сроке долга, когда применяется учетная ставка d_j, $j = 1, 2, ..., k$; k – количество периодов.

Формулы для современной величины суммы S_n при банковском ее учете по простой, сложной переменной учетной ставке имеют вид:

$$P_0 = S_n\left(1 - \sum_{j=1}^{k} n_j d_j\right), \tag{1.42}$$

$$P_0 = S_n(1 - d_k)^{n_k}(1 - d_{k-1})^{n_{k-1}} ....(1 - d_1)^{n_1} . \tag{1.43}$$

1.12.2. Наращение по учетной ставке

Если решается задача, обратная банковскому дисконтированию, то для нахождения суммы погашаемого долга пользуются учетной ставкой. Например, в этом возникает необходимость при определении суммы, которую надо проставить в векселе, если задана текущая сумма долга. Из формул (1.26), (1.27), (1.28), находим

$$S_n = \frac{P_0}{1 - nd}, \tag{1.44}$$

$$S_n = \frac{P_0}{(1 - d)^n}, \tag{1.45}$$

$$S_n = \frac{P_0}{(1-\frac{g}{m})^{nm}}. \tag{1.46}$$

При непрерывном наращении по сложной учетной ставке справедлива формула (1.29) (при $m \to \infty$ номинальные процентные ставки j и g перестают различаться).

Если учетная ставка переменная, то вместо формул (1.32), (1.33) получим

$$S_n = \frac{P_0}{1-\sum_{j=1}^{k} n_j d_j}, \tag{1.47}$$

$$S_n = \frac{P_0}{(1-d_k)^{n_k}(1-d_{k-1})^{n_{k-1}}....(1-d_1)^{n_1}}. \tag{1.48}$$

1.13. Сравнение методов наращения

Все рассмотренные методы наращения приведены в таблице.

Метод наращения	Формула	Множитель наращения
По простой процентной ставке i	$S_n = P_0(1+in)$	$1+in$
По сложной процентной ставке i	$S_n = P_0(1+i)^n$	$(1+i)^n$
По номинальной процентной ставке j	$S_n = P_0(1+\frac{j}{m})^{nm}$	$(1+\frac{j}{m})^{nm}$
По постоянной силе роста δ	$S_n = P_0 e^{\delta n}$	$e^{\delta n}$
По номинальной учетной ставке g	$S_n = \frac{P_0}{(1-\frac{g}{m})^{nm}}$	$\frac{1}{(1-\frac{g}{m})^{nm}}$
По сложной учетной ставке d	$S_n = \frac{P_0}{(1-d)^n}$	$\frac{1}{(1-d)^n}$
По простой учетной ставке d	$S_n = \frac{P_0}{1-nd}$	$\frac{1}{1-nd}$

Определение. Число, показывающее во сколько раз наращенная сумма долга больше первоначальной, называется множителем наращения (или множителем накопления).

Экономический смысл множителя наращения заключается в следующем. Если срок долга *n* единиц времени, то множитель наращения показывает накопленную к моменту n будущую стоимость 1 д.е., вложенной в момент $t = 0$ на срок n. Очевидно, что множитель наращения больше 1. Интенсивность процесса наращения определяется множителем наращения. Сравнивая эти множители для каждого значения срока n, считая равными процентные ставки, можно сравнить темпы наращения по различным ставкам.

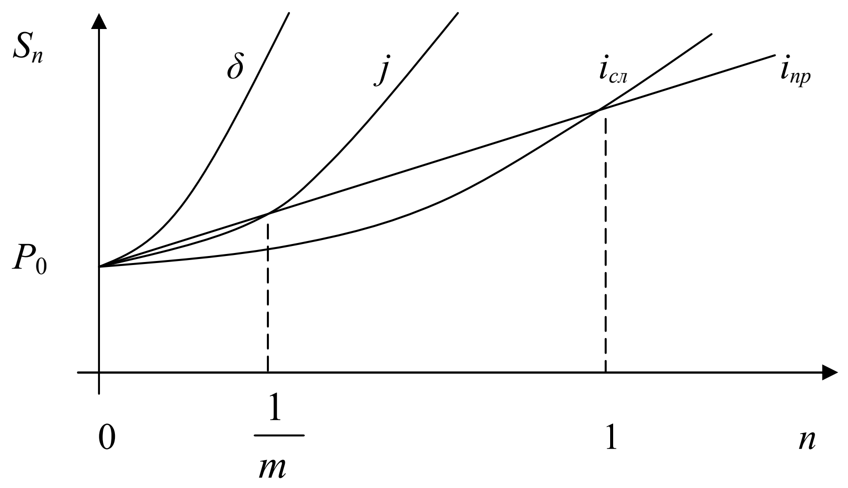


Рис.1.3. Темпы наращения по процентной ставке

На рис. 1.3. показаны кривые наращения, соответствующие четырем методам наращения суммы долга по ставке i.

1.14. Сравнение методов дисконтирования

Все полученные методы дисконтирования показаны в таблице.

Метод дисконтирования	Формула	Дисконтный множитель
По простой учетной ставке d	$P_0 = S_n(1-nd)$	$1-nd$
По сложной учетной ставке d	$P_0 = S_n(1-d)^n$	$(1-d)^n$
По номинальной учетной ставке g	$P_0 = S_n(1-\frac{g}{m})^{nm}$	$(1-\frac{g}{m})^{nm}$
По постоянной силе роста δ	$P_0 = S_n e^{-\delta n}$	$e^{-\delta n}$
По номинальной процентной ставке j	$P_0 = \frac{S_n}{(1+\frac{j}{m})^{nm}}$	$\frac{1}{(1+\frac{j}{m})^{nm}}$
По сложной процентной ставке i	$P_0 = \frac{S_n}{(1+i)^n}$	$\frac{1}{(1+i)^n}$

По простой процентной ставке i	$P_0 = \frac{S_n}{1+in}$	$\frac{1}{1+in}$

Определение. Число, показывающее какую долю от суммы погашаемого долга составляет его современная величина, называется дисконтным множителем.

Экономический смысл дисконтного множителя заключается в следующем. Если срок долга *n* единиц времени, то дисконтный множитель - это современная стоимость 1 д.е., подлежащей выплате через время n. Очевидно, что дисконтный множитель меньше 1. Интенсивность процесса дисконтирования определяется дисконтным множителем. Сравнивая эти множители для каждого значения срока *n*, считая равными процентные ставки за 1 времени, можно сравнить темпы дисконтирования по различным процентным ставкам.

На рис. 1.5. показаны дисконтные кривые, соответствующие четырем методам математического дисконтирования:

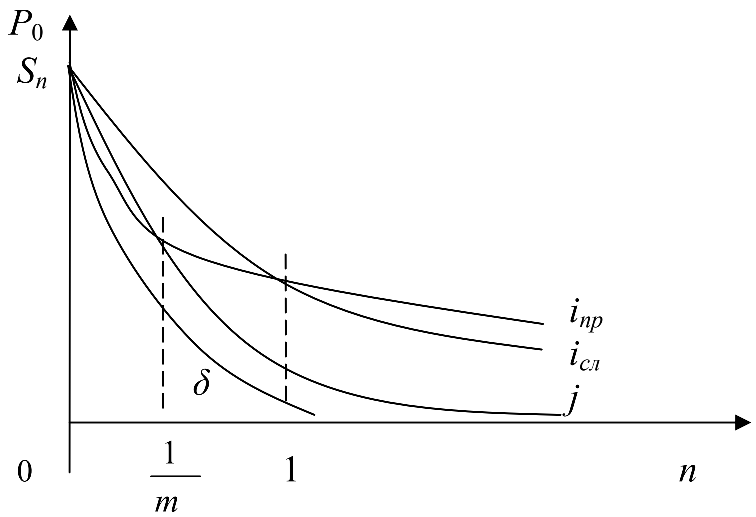


Рис. 1.4. Темпы дисконтирования по процентной ставке

Вопросы для самопроверки

1. Что понимают под процентами в финансовых операциях?
2. Что такое процентная ставка? Что называют нормированной процентной ставкой?
3. Что такое наращение?
4. Запишите формулу наращения по простым процентам с постоянной ставкой.
5. Запишите формулу наращения по простым процентам с переменной ставкой.
6. Запишите формулу наращения для сложных процентов с постоянной ставкой.
7. Запишите формулу наращения для сложных процентов с переменной ставкой

8. Что такое номинальная ставка и эффективная процентная ставка? Связь эффективной и номинальной ставки
9. Как определить продолжительность ссуды и процентной ставки для простых процентов?
10. Как определить срок и процентную ставку для сложных процентов, если известны первоначальная и наращенная сумма
11. Что такое дисконтирование? Запишите формулу дисконтирования по простым процентам
12. Что такое современная величина суммы S? Экономический смысл этого понятия.
13. Запишите формулу для современной величины при начислении процентов один раз в год и при начислении процентов m раз в год
14. Как осуществляется учет инфляции при наращении процентов?
15. Что такое сила роста? Запишите формулу непрерывного наращения и дисконтирования
16. Что значит эквивалентность простых и сложных ставок?
17. Что такое консолидирование задолженностей и как оно учитывается для простых и сложных процентов?
18. Как производится дисконтирование по простой учетной ставке?
19. Получите формулу дисконтирования для сложной учетной ставки.
20. Получите формулу дисконтирования для номинальной учетной ставки.
21. Как производится дисконтирование по непрерывной учетной ставке?
22. Как производится дисконтирование по переменной простой учетной ставке?
23. Как производится дисконтирование по переменной сложной учетной ставке?
24. Запишите формулу наращения по простой учетной ставке
25. Запишите формулу наращения по сложной учетной ставке
26. Запишите формулу наращения по номинальной учетной ставке
27. Запишите формулу наращения по непрерывной учетной ставке
28. Запишите формулу наращения по переменной простой учетной ставке
29. Запишите формулу наращения по переменной сложной учетной ставке

Глава 2

Потоки платежей, ренты

2.1. Основные определения

На практике финансовые операции, как правило, предусматривают распределённые во времени выплаты и поступления денежных сумм.

Потоком платежей будем называть последовательность (ряд) выплат и поступлений, приуроченных к разным моментам времени.

Поток платежей, все элементы которого - положительные величины, а временные интервалы между двумя последовательными платежами постоянны, называют *финансовой рентой* или *аннуитетом* вне зависимости от цели, назначения и происхождения этих платежей.

Финансовая рента описывается следующими параметрами:

1. Член ренты - величина каждого отдельного платежа.
2. Период ренты - временной интервал между платежами.
3. Срок ренты - время от начала ренты до конца её последнего периода.
4. Процентная ставка - это ставка, которая используется при наращении или дисконтировании платежей, из которых состоит рента.

Кроме того, могут быть дополнительные параметры: количество платежей в год, количество начислений процентов в год, моменты выплаты платежей (в начале или в конце периода ренты) и т. д.

Виды финансовых рент

Рента называется *годовой*, если ее период равен одному году.

Рента называется p – срочной, если ее период меньше года и количество платежей в год равно p.

Эти ренты относятся к *дискретным,* поскольку выплаты приурочены к дискретным моментам времени. Бывают ренты *непрерывные*, когда поток платежей описывается непрерывной функцией.

Ренты бывают постоянные и переменные. Рента называется постоянной, если все ее платежи одинаковы и не меняются во времени. Если размеры платежей зависят от времени, то это переменная рента.

Рента называется *ограниченной*, если количество платежей конечно, в противном случае рента называется *бесконечной* или *вечной*. Например, долгосрочное обязательство, когда срок финансовой операции продолжителен и заранее не оговаривается, представляет собой вечную ренту.

Ренты бывают *немедленные и отложенные (отсроченные)*. Срок немедленных рент начинается с момента заключения контракта. Если рента отложенная, то срок начала выплат отодвигается на какое-то время.

Если платежи осуществляются в конце периода, то такая рента называется *обычной* или *постнумерандо.* Если выплаты осуществляются в начале периода, то такая рента называется *пренумерандо*.

Обобщающие характеристики потоков платежей

Для анализа потоков платежей необходимо уметь рассчитывать их основные обобщающие характеристики. Таких характеристик две: наращенная сумма и современная величина ренты.

Наращенной суммой потока платежей называют сумму всех последовательных платежей с начисленными на них процентами к концу срока ренты.

Современной величиной потока платежей называют сумму всех платежей, дисконтированных на некоторый момент времени, совпадающий с началом потока платежей или упреждающий его.

Наращенную сумму определяют, например, чтобы знать общую сумму задолженности на какой-либо момент времени, итоговый объём инвестиций, накопленный на момент оценки денежный резерв и т. д.

Современная величина является важнейшим показателем при оценке финансовой эффективности коммерческих сделок, реальных и финансовых инвестиций и т. д.

Рассмотрим задачи определения наращенных сумм для различных видов рент постнумерандо.

2.2. Наращенная сумма годовой ренты

При выводе формул для наращенных сумм рент важно правильно установить момент поступления очередного платежа и определить срок (в годах), в течение которого на этот платеж будут начисляться проценты. После этого, чтобы определить размер платежа с начисленными на него процентами за этот срок, достаточно применить формулу начисления сложных процентов. Наиболее просто данная задача решается для годовой ренты с начислением процентов один раз в год. Такая рента называется обычной.

Пусть

S – наращенная сумма ренты;

R – размер отдельного платежа;

i – ставка процентов в виде десятичной дроби;

n –срок ренты в годах.

Рассмотрим процесс наращения платежей для ренты постнумерандо. Первый платеж в размере R поступает в конце первого периода, на него будут начислены проценты по ставке i за $(n-1)$ лет (столько времени остается от конца первого периода до конца срока), в результате в конце срока будет получена сумма $R(1+i)^{n-1}$. Второй платеж поступит в конце второго года и в конце срока будет получена сумма $R(1+i)^{n-2}$. Продолжая этот процесс, получим для платежа, поступившего в конце $(n-1)$-го года сумму к концу срока $R(1+i)$. Последний платеж поступит в конце n-го года, проценты на него не начисляются.

Для определения наращенной величины ренты S необходимо просуммировать получившийся ряд платежей., т.е. $S = R(1+i)^{n-1} + R(1+i)^{n-2} + \ldots + R(1+i) + R$ или

$$S = R\sum_{t=0}^{n-1}(1+i)^t . \tag{2.1}$$

Заметим, что этот ряд образует геометрическую прогрессию с первым членом R и знаменателем, равным $(1+i)$ и количеством членов n.

Напомним, что геометрическая прогрессия - это ряд, каждый член которого получается из предыдущего умножением на одно и то же число.

Формула для суммы n членов геометрической прогрессии имеет вид

$$S_n = a_1(q^n - 1)/(q-1) , \tag{2.2}$$

где a_1 – первый член прогрессии, q – знаменатель прогрессии.

Используя эту формулу, получим из (1.1) соотношение для вычисления наращенной суммы годовой ренты:

$$S = R\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)-1} = R\frac{(1+i)^n - 1}{i} . \tag{2.1a}$$

Величина

$$s(n,i) = \sum_{t=0}^{n-1}(1+i)^t = \frac{(1+i)^n - 1}{i} \tag{2.3}$$

называется *коэффициентом наращения годовой ренты*.

С использованием введенного обозначения выражение для наращенной суммы годовой ренты можно записать так:

$$S = Rs(n,i). \tag{2.4}$$

Если платежи поступают в начале периода, то коэффициент наращения ренты равен

$$s(n,i) = \sum_{t=1}^{n} (1+i)^t = (1+i) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}. \tag{2.6}$$

В случае простых процентов наращенная сумма платежей равна:

$$R \cdot [1 + (n-1) \cdot i] + R \cdot [1 + (n-2) \cdot i] + \ldots + R \cdot [1+i] + R$$

$$= R\big[n + i \cdot (1 + 2 + \ldots + (n-1))\big] = R\left[n + i\frac{n \cdot (n-1)}{2}\right] = R \cdot s(n,i),$$

где

$$s(n,i) = \left[n + i\frac{n \cdot (n-1)}{2}\right] \tag{2.7}$$

— коэффициентом наращения годовой ренты по ставке простых процентов.

Для ренты пренумерандо получим

$$s(n,i) = \left[n + i\frac{n \cdot (n+1)}{2}\right]. \tag{2.8}$$

2.3. Наращенная сумма годовой ренты с начислением процентов m раз в год

Пусть платежи поступают один раз в год в конце года (то есть интервал ренты равен одному году), а начисление процентов происходит m раз в год. В этом случае проценты начисляются по ставке j/m (см. п. 1.5), множитель наращения платежа на один год равен $(1 + j/m)^m$. Процесс формирования платежей вместе с начисленными на них процентами выглядит следующим образом.

Первый платеж в размере R поступает в конце первого периода, на него будут начислены проценты по ставке i за $(n-1)$ лет (столько времени остается от конца первого периода до конца срока), в результате в конце срока будет получена сумма $R(1 + j/m)^{m(n-1)}$.

Второй платеж поступит в конце второго года и в конце срока будет получена сумма $R(1 + j/m)^{m(n-2)}$. Продолжая этот процесс, получим для платежа, поступившего в конце $(n-1)$-го года сумму к концу срока $R(1+j/m)^m$. Последний платеж поступит в конце n-го года, проценты на него не начисляются.

Для определения наращенной величины S необходимо просуммировать получившийся ряд платежей., т.е.

$S = R(1+j/m)^{m(n-1)} + R(1+j/m)^{m(n-2)} + ... + R(1+j/m) + R$ или

$$S = R\sum_{t=0}^{n-1}(1+j/m)^{mt} . \tag{2.9}$$

Имеем геометрическую прогрессию с первым членом R и знаменателем прогрессии, равным $(1+\frac{j}{m})^m$, всего членов ряда n. Используя формулу (2.2) для суммы членов геометрической прогрессии, получим

$$S = R\frac{(1+\frac{j}{m})^{m\cdot n}-1}{(1+\frac{j}{m})^m-1} . \tag{2.9а}$$

Обозначим за коэффициент наращения величину

$$s(n, j/m) = \sum_{t=0}^{n-1}(1+\frac{j}{m})^{mt} = \frac{(1+\frac{j}{m})^{m\cdot n}-1}{(1+\frac{j}{m})^m-1} . \tag{2.10}$$

Тогда наращенная сумма

$$S = Rs(n, j/m) . \tag{2.11}$$

Для ренты пренумерандо коэффициент наращения ренты равен

$$s(n, j/m) = \sum_{t=1}^{n}(1+\frac{j}{m})^{mt} = (1+\frac{j}{m})^m\frac{(1+\frac{j}{m})^{m\cdot n}-1}{(1+\frac{j}{m})^m-1} . \tag{2.12}$$

2.4. Наращенная сумма p – срочной ренты

Пусть платежи поступают p раз в год равными суммами, проценты начисляются один раз в год в конце года $(m=1)$.

Если R – годовая сумма, то отдельный платеж равен R/p. Поскольку в год поступает p платежей, то интервал между платежами будет равен $1/p$ лет. Первый платеж поступит в момент времени $1/p$.

Рассуждая аналогичным образом, для наращенной величины ренты получим

$$S = \frac{R}{p}\sum_{t=0}^{np-1}(1+i)^{t(1/p)}. \qquad (2.13)$$

Имеем геометрическую прогрессию, первый член которой равен R/p, знаменатель $(1+i)^{1/p}$, всего членов ряда $n \cdot p$.

Используя формулу для суммы членов геометрической прогрессии (2.2), получим

$$S = \frac{R}{p}\frac{((1+i)^{1/p})^{np}-1}{(1+i)^{1/p}-1} = R \cdot s(p,n,i), \qquad (2.13а)$$

где $s_{n,i}^{(p)}$ – коэффициент наращения p*-срочной* ренты с начислением процентов один раз в год, равный

$$s(p,n,i) = \frac{1}{p}\sum_{t=0}^{np-1}(1+i)^{t(1/p)} = \frac{(1+i)^n-1}{((1+i)^{1/p}-1)}. \qquad (2.14)$$

Если платежи поступают в начале периода, то для коэффициента наращения p-срочной ренты пренумерандо получим

$$s(p,n,i) = \frac{1}{p}\sum_{t=1}^{np}(1+i)^{t(1/p)} = (1+i)^{1/p}\frac{(1+i)^n-1}{p\cdot((1+i)^{1/p}-1)}. \qquad (2.15)$$

2.5. Наращенная сумма p – срочной ренты при $p \neq m,\ m \neq 1$

Параметры такой ренты: p платежей в год и m раз в год начисление процентов по номинальной ставке j. Рента с такими условиями называется *общей*.

Принцип получения формулы для наращенной суммы аналогичен вышеприведенным случаям.

Первый платеж равен R/p, момент поступления этого платежа (момент времени от начала срока ренты) равен $1/p$ и в конце срока ренты этот платеж даст сумму с процентами

$$\frac{R}{p}(1+\frac{j}{m})^{(n-\frac{1}{p})m}.$$

Второй платеж с начисленными на него процентами будет равен

$$\frac{R}{p}(1+\frac{j}{m})^{(n-\frac{2}{p})m}$$

Предпоследний платеж даст сумму

$$\frac{R}{p}(1+\frac{j}{m})^{(n-\frac{np-1}{p})m}=\frac{R}{p}(1+\frac{j}{m})^{\frac{m}{p}}.$$

На последний платеж проценты не начисляются и он будет равен R/p. Просуммируем члены полученного ряда, используя формулу (2.21) для суммы членов геометрической прогрессии со следующими параметрами:

первый член прогрессии равен $\frac{R}{p}$, знаменатель $(1+\frac{j}{m})^{\frac{m}{p}}$, количество членов прогрессии np. Получим

$$S=\frac{R}{p}\sum_{t=0}^{np-1}(1+\frac{j}{m})^{t(m/p)}=R\frac{(1+\frac{j}{m})^{mn}-1}{p((1+\frac{j}{m})^{\frac{m}{p}}-1)}. \qquad (2.16)$$

Обозначим

$$s(p,n,j/m)=\frac{1}{p}\sum_{t=0}^{np-1}(1+\frac{j}{m})^{t(m/p)}=\frac{(1+\frac{j}{m})^{mn}-1}{p((1+\frac{j}{m})^{\frac{m}{p}}-1)} \qquad (2.17)$$

– коэффициент наращения p – срочной ренты при начислении процентов m раз в год. Тогда формула для наращенной суммы примет вид

$$S=Rs(p,n,j/m). \qquad (2.16a)$$

Проводя аналогичные рассуждения, получим для коэффициента наращения ренты пренумерандо выражение

$$s(p,n,j/m)=\frac{1}{p}\sum_{t=1}^{np}(1+\frac{j}{m})^{t(m/p)}=(1+\frac{j}{m})^{\frac{m}{p}}\frac{(1+\frac{j}{m})^{mn}-1}{p((1+\frac{j}{m})^{\frac{m}{p}}-1)}. \qquad (2.18)$$

2.6. Современная величина обычной ренты

Современная величина ренты является важнейшей характеристикой потока платежей, которая определяет стоимость будущего денежного потока на настоящий момент времени. Эта характеристика служит основой для многих методов финансового анализа. По определению, современная величина - это сумма всех дисконтированных членов потока платежей на начальный или предшествующий ему момент времени. Иногда вместо термина *современная величина* используют термины *приведенная* или *капитализированная* сумма платежей. При определении современной величины потока платежей важно правильно установить период времени от начала потока (момента времени, на который производится оценка) до момента поступления платежа (в годах). После этого можно применять формулы дисконтирования. Обозначим v – множитель дисконтирования, $v=\frac{1}{1+i}$, где i – годовая ставка.

Процесс дисконтирования выглядит следующим образом. Первый платеж размером R поступает в конце в конце первого года, его современная величина на начало срока равна Rv. Второй платеж поступает в конце второго года, его современная величина равна Rv^2. Продолжая этот процесс, получим для последнего платежа, который должен поступить в конце срока, его современную величину Rv^n.

Чтобы получить современную величину потока, просуммируем все члены получившегося ряда. Очевидно, имеем геометрическую прогрессию с характеристиками: первый член прогрессии равен Rv; знаменатель прогрессии – v; количество членов прогрессии – n.

В результате имеем

$$A=R\sum_{t=1}^{n} v^t = R\sum_{t=1}^{n}\frac{1}{(1+i)^t}. \qquad (2.19)$$

Величина

$$a(n,i)=\sum_{t=1}^{n}\frac{1}{(1+i)^t}=\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \qquad (2.20)$$

называется *коэффициентом приведения годовой ренты*. Выражение (2.20) получено с учетом формулы (2.2).

Диаграмма на рис.2.4 иллюстрирует процесс формирования потока дисконтированных платежей на начало срока ренты. Показатели степеней – периоды времени в годах от начала ренты до момента поступления платежа.

Если платежи поступают в начале периода, то коэффициент приведения ренты равен

$$a(n,i)=\sum_{t=0}^{n-1}\frac{1}{(1+i)^t}=(1+i)\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}. \qquad (2.21)$$

С учетом этого выражение для современной величины примет вид

$$A = Ra(n,i)\,. \qquad (2.19а)$$

В случае простых процентов мы должны просуммировать поток

$$\frac{R}{1+i} + \frac{R}{1+2\cdot i} + \ldots + \frac{R}{1+n\cdot i} = R\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+i\cdot k}$$

или

$$A = R\cdot a(n,i)\,, \qquad (2.19б)$$

где

$$a(n,i) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+i\cdot k} \qquad (2.22)$$

— коэффициентом приведения годовой ренты по ставке простых процентов.

2.7. Современная величина годовой ренты с начислением процентов m раз в год

В полученную формулу для современной величины годовой ренты вместо множителя дисконтирования $(1+i)^{-1}$ подставим множитель $(1+\frac{j}{m})^{-m}$. Получим

$$A = R\frac{1-(1+j/m)^{-mn}}{(1+j/m)^{m}-1}\,. \qquad (2.23)$$

Обозначим

$$a(n,j/m) = \sum_{t=1}^{n}\frac{1}{(1+j/m)^{mt}} = \frac{1-(1+j/m)^{-mn}}{(1+j/m)^{m}-1}\,, \qquad (2.24)$$

тогда

$$A = Ra(n,j/m)\,. \qquad (2.23а)$$

Для ренты пренумерандо коэффициент приведения равен

$$a(n,j/m) = \sum_{t=0}^{n-1}\frac{1}{(1+j/m)^{mt}} = (1+j/m)^{m}\frac{1-(1+j/m)^{-mn}}{(1+j/m)^{m}-1}\,. \qquad (2.25)$$

2.8. Современная величина p – срочной ренты ($m=1$)

Интервал между платежами у такой ренты равен $1/p$, размер платежа R/p. Рассмотрим порядок формирования дисконтированных платежей.

Современная величина первого платежа равна $\frac{R}{p}v^{1/p}$, второго платежа – $\frac{R}{p}v^{2/p}$ и т.д., последнего платежа – $\frac{R}{p}v^{n/p}$.

Имеем геометрическую прогрессию с количеством членов, равным np, первый член прогрессии равен $\frac{R}{p}v^{1/p}$, знаменатель прогрессии – $v^{1/p}$. Используя формулу (2.2) для суммы членов геометрической прогрессии, получим

$$A=\frac{R}{p}\frac{v^{\frac{1}{p}}(v^{\frac{1}{p}np}-1)}{v^{\frac{1}{p}}-1}=\frac{R}{p}\frac{(v^n-1)}{(1-\frac{1}{v^{1/p}})}=R\frac{1-(1+i)^{-n}}{p((1+i)^{1/p}-1)}. \qquad (2.26)$$

Обозначим

$$a(p,n,i)=\frac{1}{p}\sum_{t=1}^{np-1}\frac{1}{(1+i)^{t/p}}=\frac{1-(1+i)^{-n}}{p((1+i)^{1/p}-1)} \qquad (2.27)$$

– коэффициент приведения p – срочной ренты.

Тогда формула для расчета современной величины p – срочной ренты будет иметь вид

$$A=Ra(p,n,i). \qquad (2.26а)$$

Для ренты пренумерандо имеем

$$a(p,n,i)=\frac{1}{p}\sum_{t=0}^{np}\frac{1}{(1+i)^{t/p}}=(1+i)^{1/p}\frac{1-(1+i)^{-n}}{p((1+i)^{1/p}-1)}. \qquad (2.28)$$

2.9. Современная величина p – срочной ренты при $m\neq 1,\ p\neq m$

В данном случае коэффициент дисконтирования $v=\frac{1}{1+j/m}$. Далее первый дисконтированный платеж равен $\frac{R}{p}v^{m/p}$, второй дисконтированный платеж равен $\frac{R}{p}v^{2m/p}$, предпоследний дисконтированный платёж равен $\frac{R}{p}v^{\frac{(np-1}{p}m}$ и, наконец, последний платёж равен $\frac{R}{p}v^{mn}$. Напомним, что показатель степени у множителя дисконтирования – это интервал времени (измеряемый в годах) от начала ренты до момента поступления платежа с учетом m – разового в год начисления процентов. Имеем геометрическую прогрессию с количеством членов np, первым членом $\frac{R}{p}v^{m/p}$ и знаменателем прогрессии $v^{m/p}$. Сумма членов этой прогрессии

$$A = \frac{R}{p}\frac{v^{m/p}(v^{mn}-1)}{v^{m/p}-1} = \frac{R}{p}\cdot\frac{1-(1+j/m)^{-mn}}{(1+j/m)^{m/p}-1}. \qquad (2.29)$$

Обозначим

$$a(p,n,j/m) = \frac{1}{p}\sum_{t=1}^{np}\frac{1}{(1+j/m)^{t(m/p)}} = \frac{1-(1+j/m)^{-mn}}{p((1+j/m)^{m/p}-1)} \qquad (2.30)$$

– коэффициент приведения общей ренты.

Тогда окончательно формула для современной величины данной ренты примет вид

$$A = Ra(p,n,j/m). \qquad (2.29а)$$

На практике количество начислений процентов и выплат (или поступлений) часто совпадает, то есть $p = m$. Тогда

$$a(p,n,j/m) = \frac{1}{p}\frac{1-(1+j/m)^{-mn}}{j/m}. \qquad (2.31)$$

Для ренты пренумерандо вместо (2.30) получим

$$a(p,n,j/m) = \frac{1}{p}\sum_{t=0}^{np-1}\frac{1}{(1+j/m)^{t(m/p)}} = (1+j/m)^{m/p}\frac{1-(1+j/m)^{-mn}}{p((1+j/m)^{m/p}-1)}. \qquad (2.32)$$

2.10. Соотношение между наращенной и современной величинами ренты

Пусть A – современная величина годовой ренты на начало срока с начислением процентов один раз в год, S – наращенная сумма этой ренты. Тогда можно показать, что $A(1+i)^n = S$, то есть начисление процентов на сумму A за n периодов даёт наращенную сумму ренты. Действительно

$$A(1+i)^n = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i)^n = R\frac{(1+i)^{+n}-1}{i} = Rs(n,i) = S.$$

Кроме этого, очевидно, имеем еще ряд соотношений:

$$Sv^n = A \text{, где } v = \frac{1}{1+i},$$

$$a_{n,i}(1+i)^n = s(n,i)\text{, } s(n,i)v^n = a(n,i)\text{.} \tag{2.31}$$

2.11. Определение параметров финансовых рент

В данном разделе рассмотрим несколько задач, возникающих в связи с понятием ренты.

1. Определение размера платежа (члена) ренты.
2. Определение срока ренты.
3. Определение ставки процентов.

Чтобы не перегружать изложение громоздкими выкладками и формулами, рассмотрим наиболее простой вид рент, а именно, годовую ренту с начислением процентов один раз в год. Для других видов рент решения получаются аналогично.

Определение размера платежа

Очевидно, что если задана наращенная сумма, то

$$R = \frac{S}{s(n,i)}. \tag{2.32}$$

Если же задана современная величина ренты, то

$$R = \frac{A}{a(n,i)}. \tag{2.33}$$

Определение срока ренты

Если известна наращенная сумма S, то срок n определяется из решения уравнения:

$$R\frac{(1+i)^n - 1}{i} = S$$

После простых преобразований будем иметь

$$(1+i)^n = \frac{S}{R}i + 1$$

Логарифмируя правую и левую части и выражая из получившегося соотношения n, получим

$$n = \frac{\ln(1 + \frac{S}{R} i)}{\ln(1 + i)}. \qquad (2.34)$$

Если известна приведённая величина ренты, аналогично получаем

$$n = -\frac{\ln(1 - \frac{A}{R} i)}{\ln(1 + i)}. \qquad (2.35)$$

Определение ставки процентов

Расчётная величина ставки имеет важное значение в финансовом и экономическом анализе при выяснении доходности финансовых и коммерческих операций.

Если известна наращенная сумма, то для определения ставки необходимо решить уравнение относительно неизвестной величины i

$$S = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}. \qquad (2.36)$$

Если известна современная величина ренты, то решаем уравнение

$$A = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}. \qquad (2.37)$$

Имеем нелинейные уравнения, точное решение которых (в виде расчетной формулы для i) получить невозможно. Данные уравнения допускают только приближенное решение с использованием специальных численных методов , например метода Ньютона, который легко реализуется с помощью табличных процессоров типа Microsoft Excel.

2.12. Конверсии рент

Конвертировать ренту означает изменить условия финансового соглашения, предусматривающего выплату этой ренты .

Простые виды конверсии

К простым видам конверсии относятся:

1 . Выкуп ренты – замена ренты единовременным платежом. Из принципа финансовой эквивалентности следует, что при этом вместо ренты выплачивается современная ее величина.

2. Рассрочка платежей – замена единовременного платежа рентой.

В этом случае современную величину ренты нужно приравнять к величине заменяемого платежа и определить либо размер платежа такой ренты при заданном сроке, либо, если известен размер платежа, определить срок ренты. Данные задачи сводятся к задачам определения параметров ренты, которые рассматривались ранее (см. п. 2.11).

Сложные конверсии

К сложным конверсиям относится замена одной ренты другой, что означает изменение параметров ренты. Из условия финансовой эквивалентности следует, что при такой замене современные величины этих рент должны быть равны.

Другими словами, если $A1$ - современная величина заменяемой ренты, $A2$ - современная величина заменяющей ренты на тот же момент времени, то должно соблюдаться условие: $A1 = A2$.

Примеры конверсии

1. Замена немедленной ренты на отсроченную.

Пусть имеется годовая немедленная рента с параметрами R_1, n_1, i. Эта рента заменяется на отсроченную на t лет ренту со сроком n_2 и ставкой i. Данная задача сводится к определению размера платежа R_2 второй ренты. Из условия финансовой эквивалентности имеем уравнение

$$R_1 a(n_1, i) = R_2 a(n_2, i) v^t, \tag{2.38}$$

где v – множитель дисконтирования по ставке i, из которого получаем

$$R_2 = R_1 \left(\frac{a(n_1, i)}{a(n_2, i)} \right) (1+i)^t.$$

Если проценты начисляются m раз в год, то задача решается аналогично.

Предположим далее, что $R_1 = R_2$, а поскольку рента отсроченная, то изменяется ее срок, который и нужно определить. Решая уравнение эквивалентности (2.44) относительно n_2, получим

$$n_2 = \frac{-\ln\left\{1 - \left[1 - (1+i)^{-n_1}\right](1+i)^t\right\}}{\ln(1+i)}.$$

2. Изменение продолжительности и срочности ренты.

Рассмотрим обычную годовую ренту с параметрами R_1, n_1, i. Эта рента заменяется другой, у которой параметры R_2, n_2, i

Предположим, что платеж R_2 известен, необходимо определить срок n_2. Приравнивая современные величины рент, получим уравнение

$$R_1 a(n_1, i) = R_2 a(n_1, i),$$

из которого находим срок второй ренты n_2. Эта задача решается аналогично задаче определения срока годовой ренты (см. п. 2.11). Если срок известен, то из этого же уравнения можно определить R_2.

Рассмотрим данную задачу, если изменяется срочность ренты. Пусть p–срочная рента с параметрами p_1, R_1, n_1, i_1 заменяется на p-срочную ренту с параметрами p_2, R_2, n_2, i_2. Необходимо определить параметр второй ренты - размер платежа R_2. Из условия равенства современных величин потоков платежей имеем

$$R_1 a(p_1, n_1, i) = R_2 a(p_2, n_2, i),$$

откуда легко определяется R_2. Если R_2 известно, то, решая это уравнение, можно определить n_2.

3. Объединение рент.

Предположим, что k годовых рент с начислением процентов один раз в год, параметры которых известны, заменяются одной годовой рентой. Пусть A - современная величина заменяющей ренты; $A_q,\ q = 1, 2, ...k$ – современные величины заменяемых рент. Тогда условие финансовой эквивалентности запишется так:

$$A = \sum_{q=1}^{k} A_q .$$

Если моменты начала рент не совпадают, то современные величины этих рент определяют на момент начала самой ранней ренты. При объединении рент возникают две задачи:

1) определить размер платежа заменяющей ренты, если задан ее срок;

2) определить срок заменяющей ренты при заданных остальных параметрах.

Поскольку современная величина заменяющей ренты известна, обе эти задачи сводятся к соответствующим задачам определения параметров годовой ренты.

Вопросы для самопроверки

1. Что такое финансовая рента? Какими параметрами она описывается?
2. Перечислите виды финансовых рент
3. Дайте определение наращенной суммы и современной величины потока платежей
4. Выведите формулу для наращенной суммы потока платежей
5. Выведите формулу для наращенной суммы потока платежей при начислении процентов m раз в год
6. Выведите формулу для наращенной суммы p - срочной ренты
7. Выведите формулу для наращенной суммы p - срочной ренты при начислении процентов m раз в год
8. Выведите формулу для современной величины потока платежей
9. Выведите формулу для современной величины потока платежей при начислении процентов m раз в год
10. Выведите формулу для современной величины p - срочной ренты
11. Выведите формулу для современной величины p - срочной ренты при начислении процентов m раз в год
12. Запишите связь между коэффициентом наращения и приведения ренты
13. Как определить размер платежа, срок ренты и размер процентной ставки?
14. Запишите формулу для наращенной величины дискретной ренты с непрерывным начислением процентов
15. Запишите формулу для современной величины дискретной ренты с непрерывным начислением процентов
16. Запишите формулу для наращенной величины непрерывной ренты с дискретным начислением процентов
17. Как произвести замену немедленной ренты на отсроченную?
18. Как произвести замену одной годовой ренты на другую?

Глава 3

Доходность финансовой операции

Финансовой называется операция, начало и конец которой имеют денежную оценку – $P(0)$ и $S(T)$ соответственно, а цель проведения которой заключается в максимизации разности $S(T)-P(0)$ или другого подобного показателя. Важнейшей характеристикой операции является ее доходность.

В определении под $P(0)$ понимают реально вложенные средства в момент t = 0, под $S(T)$ – реально вырученные денежные средства в результате операции, срок которой T единиц времени. Эффект от вложения естественно измерять в виде процентной ставки наращения, которую в этом случае называют доходностью.

3.1. Абсолютная и среднегодовая доходности операций

Различают два вида доходности финансовой операции – абсолютную и среднегодовую.

Абсолютная доходность d (доходность за весь срок) операции определяется из уравнения $P(0)(1+d)=S(T)$ или $d=(S(T)-P(0)/P(0)=S(T)/P(0)-1$. Величина $S(T)/P(0)$ *называется коэффициентом* или *множителем наращения.* Ясно, что $S(T)/P(0)=1+d$.

Среднегодовая доходность r финансовой операции – это ставка простых или сложных процентов, с помощью которой измеряют эффективность финансовой операции.

Согласно определению, среднегодовая доходность финансовой операции – это положительное число r, удовлетворяющее равенству:

$$P(0)(1+r\cdot T)=S(T) \tag{3.1}$$

или

$$P(0)(1+r)^T=S(T)\,. \tag{3.2}$$

Из (3.1) и (3.2) найдем связь между d и r:

$1+r\cdot T=1+d$ (для простой ставки) и

$(1+r)^T=1+d$ (для сложной ставки).

Таким образом, финансовой операции ставится в соответствие эквивалентная операция наращения суммы $P(0)$ по ставке r в течение времени T . Такой подход позволяет сравнить полученное значение доходности с доходностями по альтернативным вложениям средств.

3.2. Учет налогов и инфляции

Налоги и инфляция заметно влияют на эффективность финансовой операции. Рассмотрим учет налогов. Налог начисляется, как правило, на проценты, получаемые при размещении денежной суммы в рост. Предположим, на сумму P_0 в течение времени n начислялись проценты по ставке i, g - ставка налога на проценты. Тогда величина процентов

$$I(n) = S_n - P_0 ,$$

а сумма налога $G_n = g \cdot I(n)$. Наращенная сумма после выплаты налога составляет

$$S(n) = S_n - G_n .$$

Так как $S(n) < S_n$, то учет налогов фактически сокращает ставку наращения. Итак,

$$S(n) = S_n - G_n = S_n - g \cdot I(n) = S_n - g \cdot (S_n - P_0) = S_n(1-g) + gP_0$$

Если i - простая процентная ставка, то $S_n = P_0(1 + i \cdot n)$. Тогда

$$S(n) = P_0(1 + i \cdot (1-g)n) .$$

Видим, что фактически наращение производится по ставке $i(1-g) < i$.

Если i – сложная процентная ставка, то $S_n = P_0(1+i)^n$. Тогда

$$S(n) = P_0\left((1+i)^n(1-g) + g\right).$$

Пример 3.1. При выдаче кредита на 2 года под годовую сложную процентную ставку 0,08 кредитор удерживает комиссионные в размере 0,5% от суммы кредита. Ставка налога на проценты 10%. Какова доходность операции для кредитора?

Если P_0 - сумма кредита, а S_n - сумма погашаемого долга, то $S_n = P_0(1+i)^n$, где i = 0,08 , n = 2. Сумма комиссионных cP_0, где c = 0,005. Тогда сумма, фактически выданная в долг, составит $P(0) = P_0(1-c)$. После выплаты налога у кредитора останется $S(n) = P_0\left((1+i)^n(1-g) + g\right)$, где g = 0,1 - ставка налога. Уравнение доходности имеет вид $S(n) = P(0)(1+r)^n$. Разрешая это уравнение относительно r, получим

$$r = \left(\frac{S(n)}{P(0)}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 = \left(\frac{(1+i)^n(1-g) + g}{1-c}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 = 0,07496.$$

Заметим, что без учета налога (g = 0) доходность операции составила бы 0,08271.

Инфляция – обесценение денег, проявляющееся в росте цен на товары и услуги, что влечет за собой снижение покупательной способности денег.

Инфляцию характеризуют два количественных показателя – индекс цен и темп инфляции. Предположим, выбрана единица времени. Рассмотрим отрезок времени $[0,n]$, длина которого t единиц времени от начального момента t = 0.

Индекс цен за время $[0,n]$- число

$$J(n)=\frac{K(n)}{K(0)},$$

показывающее во сколько раз выросла стоимость потребительской корзины за период времени $[0,n]$.

Темп инфляции за время $[0,n]$ - число

$$H(n)=\frac{K(n)-K(0)}{K(0)},$$

показывающее на сколько процентов выросла стоимость потребительской корзины за период времени $[0,n]$. Так как $H(n)=\frac{K(n)}{K(0)}-1$, то соотношения между темпом инфляции и индексом цен имеют вид:

$$H(n)=J(n)-1 \tag{3.3}$$

и

$$J(n)=1+H(n) \tag{3.4}$$

для любого периода времени $[0,n]$.

Пусть $[0,nt]=\bigcup_{k=1}^{m}[t_{k-1},t_k]$, где $[0,t_1]$, … , $[t_{m-1},t_m]$ - отрезки времени в сроке $[0,n]$ ($t_0=0,\ t_m=n$), длины которых $t_1,(t_2-t_1),...,(t_m-t_{m-1})$ единиц времени. $j(0,t_1),...,j(t_{n-1},t_n)$ и $h(0,t_1),...,h(t_{n-1},t_n)$ – индексы цен и темпы инфляции за периоды $j(0,t_1),...,j(t_{n-1},t_n)$ соответственно. Согласно (3.4),

$$j(t_{k-1},t_k)=1+h(t_{k-1},t_k),\quad k=1,2,...,n.$$

где $h(t_{k-1},t_k)$ - темп инфляции за период $[t_{k-1},t_k]$. Индекс цен $j(t_{k-1},t_k)$ за период $[t_{k-1},t_k]$ показывает, во сколько раз увеличились цены за этот период по отношению к уровню цен предыдущего периода.

Пусть j_k и h_k - индекс цен и темп инфляции за 1 единицу времени на временном отрезке $[t_{k-1},t_k]$. Тогда

$$j_k=1+h_k,\qquad k=1,2,...,m,$$

а индекс цен за $[t_{k-1},t_k]$ равен

$$j(t_{k-1,}t_k)=j_k^{(t_k-t_{k-1})}=(1+h_k)^{(t_k-t_{k-1})},\quad k=1,2,...,m.$$

Согласно определению индекса цен, имеем

$$J(n)=j_1^{t_1}\cdot j_2^{(t_2-t_1)}\cdots j_m^{(t_m-t_{m-1})}.$$

Тогда

$$J(n) = (1+h_1)^{t_1} \cdot (1+h_2)^{(t_2-t_1)} \cdots (1+h_m)^{(t_m-t_{m-1})}, \tag{3.5}$$

$$1 + H(n) = (1+h_1)^{t_1} \cdot (1+h_2)^{(t_2-t_1)} \cdots (1+h_m)^{(t_m-t_{m-1})}. \tag{3.6}$$

Если $h_1 = h_2 = ... = h_n = h$, то

$$J(n) = (1+h)^n \tag{3.7}$$

$$1 + H(n) = (1+h)^n \; . \tag{3.8}$$

Здесь h - темп инфляции за 1 единицу времени на временном отрезке $[0,n]$, $J(n)$ и $H(n)$ - индекс цен и темп инфляции за период времени $[0,n]$.

Предположим, за n единиц времени получена наращенная сумма вклада S_n. Индекс цен за период $[0,n]$ вырос до значения $J(n)$. Тогда реальная сумма вклада вследствие снижения покупательной способности денег составит

$$S(n) = \frac{S_n}{J(n)}.$$

Индекс цен $J(n)$ рассчитывается по одной из приведенных выше формул (3.5) или (3.7) в зависимости от исходных данных. Так как $J(n) > 1$, то $S(n) < S_n$, что означает фактическое снижение ставки наращения.

Пример 2.2. Ожидаемый годовой темп инфляции первых двух лет вклада составляет 3%, а следующих трех - 4%. Какую минимальную годовую ставку сложных процентов должен предложить банк клиенту, чтобы реальная годовая доходность вклада была не меньше 8% ?

Здесь $t = 0$ - момент размещения вклада, 1 год - единица измерения времени, срок вклада n = 5 лет. h_1 = 0,03 и h_2 = 0,04 – среднегодовые темпы инфляции на временных отрезках [0,2], [2,5]. Для доходности по вкладу r должно быть выполнено условие: $r \geq 0.08$. Пусть i - годовая сложная процентная ставка, под которую размещена сумма P_0. Тогда наращенная сумма вклада через n лет $S_n = P_0(1+i)^n$. С учетом инфляции реальная сумма вклада составит $S(n) = \dfrac{S_n}{J(n)}$, где индекс цен согласно (3.8) равен $J(t) = (1+h_1)^2 \cdot (1+h_2)^3$. Уравнение доходности имеет вид: $S(n) = P(0)(1+r)^n$. Разрешая это уравнение относительно r и учитывая требуемое условие для доходности, получим:

$$r = \frac{1+i}{(1+h_1)^{\frac{2}{5}}(1+h_2)^{\frac{3}{5}}} - 1 \geq 0,08.$$

Отсюда $i \geq$0,11887. Значит, минимальная процентная ставка размещения вклада составляет 0,11887 против 0,08 без учета инфляции.

3.3. Поток платежей и его доходность

Пусть $\{R_k, t_k\}$ – поток платежей, в нем t_k – моменты времени, R_k – платежи. Будем говорить, что рассматриваемый поток имеет современную величину A при уровне доходности j, если $\sum_k R_k/(1+j)^{t_k} = A$. Если поток есть годовая рента с годовым платежом R и длительностью n, то рента имеет современную величину A при уровне доходности j, если $R \cdot a_{n,j} = A$. Фиксируем A, тогда при увеличении R доходность ренты увеличивается. Можно сказать и по-другому: для увеличения доходности ренты надо увеличить годовой платеж.

Все эти соображения особенно хорошо видны на примере вечной ренты, поскольку для нее $A = R/j$, или, по-другому: доходность вечной ренты есть $j = R/A$. Важно отметить, что определенная таким образом доходность потока платежей не зависит от ставки процента, а зависит только от величины и моментов самих платежей, в силу чего ее называют *часто внутренней доходностью потока платежей.*

Более точно внутренняя доходность потока платежей есть такая его доходность в только что определенном смысле, при которой современная величина этого потока равна нулю (такая характеристика имеется не у всякого потока платежей). Равенство $A = 0$ возможно только тогда, когда в потоке платежей имеются отрицательные величины.

Пример 3.1. Вексель учтен по ставке i=10% за 160 дней до его оплаты (временная годовая база равна 360 дням). При выполнении операции учета с владельца векселя удержаны комиссионные в размере 0,5% от номинала векселя. Найти доходность операции.

Решение. При расчете доходности векселя его номинал часто не играет роли. Абсолютная доходность операции без учета комиссионных:

$$d = \frac{S}{P} - 1 = \frac{N}{N(1 - i \cdot m)} - 1,$$

где S, P — конечная и начальная стоимость векселя; N – номинал векселя; $m = 160/360$. Подставим исходные данные, получим: d = 0.046, т.е. d = 4.6%.

С учетом комиссионных абсолютная доходность равна:

$$d = \frac{S}{P} - 1 = \frac{N}{N(1 - i \cdot m - 0.005)} - 1 = 5.2\%$$

Эффективность операции (относительная доходность), т.е. доходность в процентах годовых,

$(1{,}046)^{360/160}$ – 1 = 0,106, т.е. 10,6% —, без учета комиссионных,
$(1{,}052)^{360/160}$ – 1 = 0,1208, т.е. 12,08% — с учетом комиссионных.

3.4. Мгновенная доходность

Пусть в момент t капитал равен $K(t)$, а через небольшое время Δt капитал равен $K(t+\Delta t)$, тогда средняя доходность d на отрезке $[t, t+\Delta t]$ в процентах годовых (в долях) равна

$$K(t+\Delta t)/K(t) = (1+d)^{\Delta t},$$

при малом Δt величина $(1+d)^{\Delta t}$ с точностью до бесконечно малых 2-го порядка равна $1+d\cdot\Delta t$. Устремляя Δt к нулю, получаем

$$d = \lim_{\Delta t\to 0}[K(t+\Delta t)-K(t)]/[K(t)\cdot\Delta t] = K'(t)/K(t) = [\ln K(t)]'.$$

Итак, мгновенная доходность есть производная по времени натурального логарифма капитала или, как говорят, логарифмическая производная.

В частности, при постоянной мгновенной доходности *d* капитал растет во времени по экспоненте: $K(t) = K(0)\cdot e^{d\cdot t}$.

Пример 3.2. Капитал растет во времени с постоянной скоростью v, т.е. $K(t) = K_0(1+vt)$. Найти мгновенную доходность в произвольный момент времени.

Решение. Обозначим искомую мгновенную доходность $d(t)$, тогда $d(t) = K'(t)/K(t) = K_0 v/K_0(1+vt) = v/(1+vt)$.

Итак, доходность со временем уменьшается. Это и понятно – приращение капитала за единицу времени постоянно и равно $K_0 v$, а сам капитал растет.

Вопросы для самопроверки

1. Что такое финансовая операция? Какие виды доходностей финансовой операции существуют и как они определяются?
2. Как определяется темп инфляции и индекс цен? Как влияют на доходность операции налоги и инфляция?
3. Как определяется доходность потока платежей?

Глава 4

Кредитные расчеты

Заем, кредит, ссуда — древнейшие финансовые операции. По-латыни «creditum» означает «ссуда»; в слове «кредит» ударение на втором слоге («кредит» с ударением на первом слоге — это правая часть бухгалтерских проводок).

Все три слова — «заем», «кредит», «ссуда» — означают одно и то же - предоставление денег или товаров в долг на условиях возвратности и, как правило, с уплатой процентов. Тот, кто выдает деньги или товары в кредит, называется кредитор, кто берет - заемщик (или дебитор). Условия выдачи и погашения кредитов (займов, ссуд) весьма разнообразны. Здесь рассмотрены лишь самые простые и наиболее распространенные способы погашения займов.

4.1. Показатель полной доходности финансово-кредитной операции

Доходы от финансово-кредитных операций и различных коммерческих сделок могут иметь разную форму, а именно, это могут быть:

- проценты от выданных ссуд,
- комиссионные,
- доходы от облигаций и других ценных бумаг и т. д.

Как правило, в одной и той же операции предусматривается несколько источников дохода: ссуда приносит кредитору проценты и комиссионные, владелец облигации кроме процентов по облигации получает разницу между выкупной ценой облигации и ценой её приобретения.

В связи с этим возникает проблема измерения эффективности (доходности) операции с учётом всех источников дохода. Обобщённая характеристика доходности должна быть универсальной и применимой к любым видам финансовых операций.

Степень финансовой эффективности подобных операций обычно измеряется в виде годовой ставки сложных процентов. Данную ставку как показатель эффективности (полной доходности, т.е. доходности с учетом всех предусмотренных в операции источников дохода) получают, исходя из общего принципа, а именно: все дисконтированные по искомой ставке доходы (капитализированная величина доходов), предусмотренные в данной операции, приравниваются к приведенным по той же ставке и на тот же момент времени расходам. Из полученного уравнения определяют искомую ставку. Для ссудной операции это означает равенство дебетовой суммы кредита, то есть кредит за вычетом комиссионных, сумме дисконтированных поступлений. Чем выше ставка, тем больше эффективность операции.

Данная процентная ставка непосредственно в контрактах не фигурирует и в зависимости от вида операции носит различные наименования: в ссудных операциях применяют термин *эффективная процентная ставка*, в анализе доходности облигаций - *доходность на момент погашения*, в анализе производственных инвестиций аналогичный показатель называется *внутренней нормой доходности* (внутренняя норма процента).

Основой для расчета полной доходности финансовой операции является соотношение, которое называется *балансом финансово-кредитной операции*.

4.2. Баланс финансово-кредитной операции

Необходимым условием любой финансово-кредитной операции является сбалансированность вложений и отдачи. Рассмотрим понятие баланса финансово-кредитной операции.

Пусть выдан кредит в размере K_0 на. срок T, ставка по кредиту равна i. Пусть на протяжении этого срока в счёт погашения задолженности производятся два платежа, размеры которых R_1 и R_2, а в конце срока выплачивается окончательная сумма R_3. Весь срок разбит на три периода длительностью t_1, t_2, t_3. За период времени t_1 задолженность возрастет до величины D_1, (поскольку на сумму кредита начисляются проценты). По истечении этого времени в счет погашения кредита выплачивается сумма R_1 и размер задолженности становится равным K_1. Далее, за время t_2 сумма K_1 возрастет до величины D_2. По истечении промежутка времени t_2 вносится очередная сумма R_2, размер задолженности уменьшается и становится равным сумме K_2. Наконец, за время t_3 размер задолженности возрастает до величины D_3 и по окончании этого промежутка времени, в момент времени *T*, выплачивается сумма R_3. Для сбалансированной операции размер платежа R_3 должен быть таким, чтобы задолженность была погашена. На рис. 4. 1 описанный процесс изображен в виде графика, который называют *контуром финансово-кредитной операции*.

Сбалансированная операция должна иметь замкнутый контур.

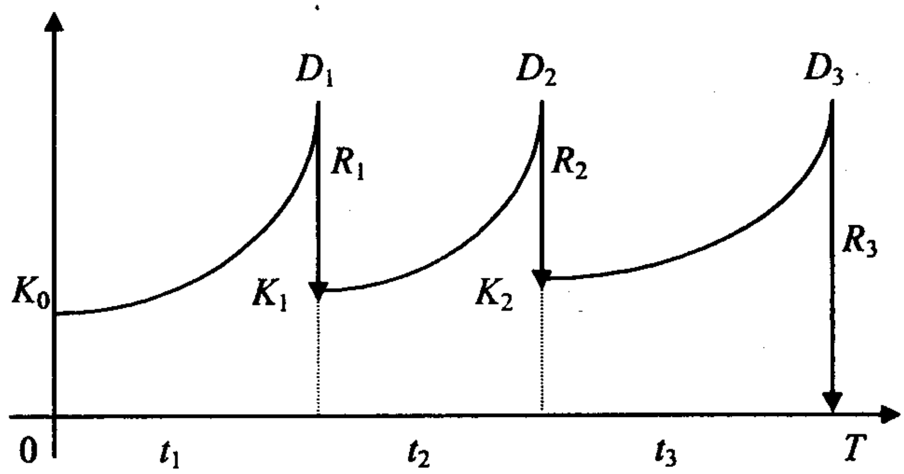


Рис. 4.1. Контур финансово-кредитной операции

Математически процесс погашения задолженности можно описать уравнениями:

$$K_1 = K_0 q^{t_1} - R_1,\ K_2 = K_1 q^{t_2} - R_2,$$

$$K_2 q^{t_3} - R_3 = 0, \tag{4.1}$$

где $q = (1+i)$ – множитель наращения по сложной ставке.

Последнее уравнение называется балансовым и описывает условие сбалансированности операции.

Определим K_2 через K_0 и подставим результат в балансовое уравнение (4.1). Получим

$$K_2 = (K_0 q^{t_1} - R_1) q^{t_2} - R_2,$$

$$[(K_0 q^{t_1} - R_1) q^{t_2} - R_2] q^{t_3} - R_3 = 0,$$

$$K_0 q^T - (R_1 q^{t_2 + t_3} + R_2 q^{t_3} + R_3) = 0, \tag{4.2}$$

Где $T = \sum_i t_i$.

Из последнего уравнения видно, что финансово-кредитная операция может быть условно разделена на два встречных процесса:

1) наращение первоначальной задолженности за весь период времени;

2) наращение погашающих платежей за срок от момента платежа до конца операции.

Это уравнение можно преобразовать, умножив его на дисконтный множитель

$$v^T = \left(\frac{1}{1+i}\right)^T.$$

В результате получим

$$K_0 - (R_1 v^{t_1} + R_2 v^{t_1+t_2} + R_3 v^T) = 0. \tag{4.3}$$

Таким образом, сумма современных величин погашающих платежей на момент выдачи кредита при полной сбалансированности равна сумме кредита.

Для общего случая n погашающих платежей балансовое уравнение получается аналогично и имеет вид

$$K_0 q^T - \sum_{j=1}^{n} R_j q^{T_j} = 0, \tag{4.4}$$

где $T_j = \sum_{r=j+1}^{n} t_r$ – время от момента платежа R_j до конца срока.

На основе балансовых уравнений можно измерить доходность финансово-кредитной операции. Для этого нужно составить балансовое уравнение, в котором наращение или дисконтирование производится по неизвестной ставке, характеризующей полную доходность, а затем решить получившееся уравнение относительно искомой ставки.

4.3. Определение полной доходности ссудных операций с удержанием комиссионных

Показателем доходности ссудной операции без учёта комиссионных является годовая ставка сложных процентов, эквивалентная процентной ставке, используемой в данной операции. За открытие кредита и другие услуги кредитор часто взимает комиссионные и это заметно повышает доходность операции для него, так как сумма, фактически выданная, сокращается.

Пусть ссуда в сумме D выдана на срок n. При её выдаче удерживаются комиссионные в размере G. То есть, фактически выданная ссуда равна $(D-G)$. Сделка предусматривает начисление простых процентов по ставке i. Ставку полной доходности обозначим i_e. При определении доходности данной операции в виде годовой ставки сложных процентов мы исходим из того, что наращение величины

$(D-G)$ по этой ставке должно дать тот же результат, что и наращение величины D по ставке простых процентов i.

Балансовое уравнение для этой операции имеет вид (см. рис. 4.2)

$$(D-G)(1+i_e)^n = D(1+n\cdot i). \quad (4.5)$$

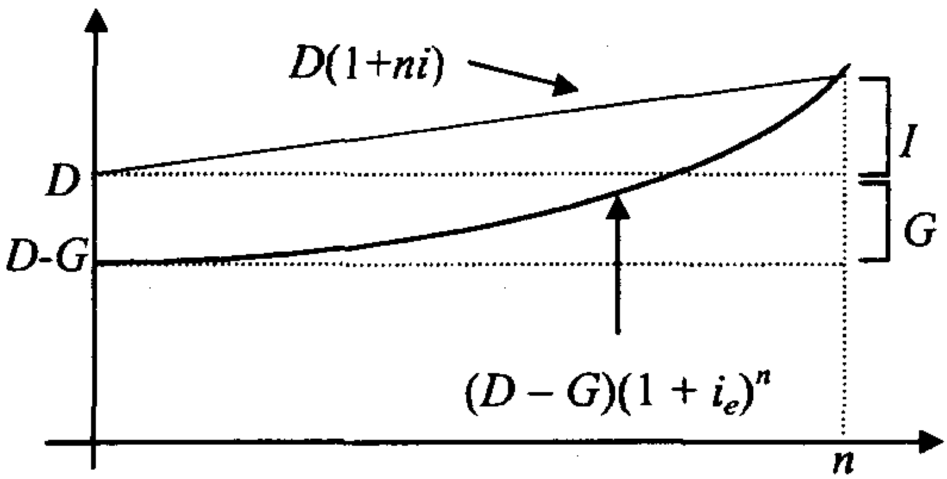


Рис 4.2. Графическая иллюстрация балансового уравнения

Чем больше размер комиссионных, тем больше эффективная ставка (ставка полной доходности). Рис. 3.2 графически иллюстрирует данное уравнение.

Пусть $G = D\cdot g$, где g – процент комиссионных. Тогда, решая уравнение (4.1) относительно i_e получим

$$i_e = \left(\frac{1+n\cdot i}{1-g}\right)^{1/n} - 1. \quad (4.6)$$

Если сделка предусматривает начисление сложных процентов, то балансовое уравнение примет вид

$$(D-G)(1+i_e)^n = D(1+i)^n, \quad (4.7)$$

откуда следует выражение для эффективной ставки

$$i_e = \frac{1+i}{(1-g)^{1/n}} - 1. \quad (4.8)$$

Эффективная ставка i_e непосредственно не фигурирует в условиях операции, она полностью определяется ставкой процента по кредиту и величиной комиссионных.

Ссуды с периодической выплатой процентов

Если комиссионные не выплачиваются, то доходность такой операции равна ставке сложных процентов, эквивалентной любой применяемой в данной сделке ставке.

Предположим, что предусмотрены комиссионные. Пусть ссуда D погашается через n лет, а проценты по простой ставке i выплачиваются регулярно один раз в конце года. Тогда размер выплачиваемых процентов равен $D \cdot i$. С учётом комиссионных сумма ссуды равна $D(1-g)$. Запишем балансовое уравнение:

$$D(1-g)-(D \cdot i \cdot a(n,i_e)+Dv^n)=0, \tag{4.10}$$

где $v=\dfrac{1}{1+i_e}$; $a(n,i_e)=\dfrac{1-(1+i_e)^{-n}}{i_e}$ – коэффициент приведения годовой ренты.

Это уравнение эквивалентно следующему:

$$f(i_e)=v^n+i \cdot a(n,i_e)-(1-g)=0. \tag{4.11}$$

Имеем нелинейное уравнение, которое необходимо решить относительно переменной i_e – ставки полной доходности. Точное решение данного уравнения в виде расчетной формулы для i_e получить невозможно. Искомую ставку можно определить приближенно, используя какой-либо численный метод.

Если проценты по кредиту выплачиваются p раз в год, то уравнение для определения доходности операции будет иметь вид

$$f(i_e)=v^n+i \cdot a(p,n,i_e)-(1-g)=0, \tag{4.11a}$$

где $a(p,n,i_e)=\dfrac{1-(1+i_e)^{-n}}{p((1+i_e)^{1/p}-1)}$ – коэффициент приведения p – срочной ренты.

Ссуды с периодическими расходами

Пусть по ссуде периодически выплачиваются проценты и погашается основной долг, причем сумма расходов постоянна. Предполагаем, что платежи производятся один раз в конце года. Пусть R - ежегодная сумма по обслуживанию долга.

Если долг равен D, то из условия сбалансированности операции получим

$$D=Ra(n,i),$$

где i – сложная ставка процента по кредиту. Отсюда

$$R = \frac{D}{a(n,i)}. \qquad (4.12)$$

Если комиссионные не выплачиваются, то эффективность такой операции в виде сложной годовой ставки процентов совпадает со ставкой по кредиту i. Если комиссионные выплачиваются, то заемщик на самом деле получает сумму, равную $D(1-g)$. Тогда балансовое уравнение будет иметь вид

$$D(1-g) - Ra(n,i_e) = 0, \qquad (4.13)$$

или

$$f(i_e) = a(n,i_e) - a(n,i)(1-g) = 0.$$

Искомую ставку i_e можно определить, используя численные методы.

Если погасительные платежи осуществляются p раз в год, то в данном уравнении коэффициент приведения годовой ренты $a(n,i)$, необходимо заменить на коэффициент приведения p-срочной ренты $a(p,n,i)$.

Погашение ссуды нерегулярным потоком платежей

До сих пор мы предполагали, что задолженность погашается равными платежами. Рассмотрим случай, когда задолженность погашается путем выплаты нерегулярного потока платежей: $R_1, R_2, ..., R_n$.

Балансовое уравнение в этом случае записывается так:

$$f(i_e) = D(1-g) - \sum_{j=1}^{n} R_j v^j = 0, \qquad (4.14)$$

где $v = \dfrac{1}{1+i_e}$ - множитель дисконтирования по ставке полной доходности операции.

Величина последнего взноса R_n в данном случае зависит от размеров предыдущих платежей и должна определяться из условия сбалансированности финансовой операции (последний платеж должен погашать задолженность), то есть

$$R_n = Dq^n - \sum_{j=1}^{n-1} R_j q^{T_j} = 0, \qquad (4.15)$$

где T_j – срок от выплаты j-го платежа до конца сделки, $q = 1+i$ – множитель наращения с использованием ставки по кредиту i.

4.4. Метод сравнения и анализа коммерческих контрактов

В коммерческой практике часто бывают ситуации, когда один и тот же товар можно купить у разных поставщиков, каждый из которых предлагает свои условия продажи (цена, условия кредитования, оплаты сделки и т.д.). Поскольку как моменты выплаты денежных сумм, так и их размеры, как правило, для разных вариантов контрактов не совпадают, то эти условия часто бывают непосредственно не сопоставимы. Для обоснованного выбора наиболее выгодного варианта покупатель должен иметь некоторую аналитическую процедуру, позволяющую определять сопоставимые показатели стоимости контрактов, учитывающие все предусмотренные в контрактах условия.

Мы рассмотрим классический подход, основанный на сравнении современных величин всех платежей, предусматриваемых контрактами. Платежи приводятся к одному моменту времени, как правило, к началу срока действия соглашения. Вариант с наименьшей современной величиной с финансовой точки зрения считается предпочтительным для покупателя, при приемлемости всех прочих условий.

При расчете современных величин для сравнения контрактов центральным моментов является выбор уровня ставки процентов, по которой производится дисконтирование. Эту ставку называют *ставкой сравнения*. Чем выше эта ставка, тем более отдаленные платежи оказывают меньшее влияние на современную величину затрат. Таким образом, для инвесторов увеличение ставки сравнения делает предпочтительными контракты с более длительными сроками погашения задолженностей. Рассчитанные по принятой ставке сравнения показатели являются условными, однако установленный таким образом рейтинг контрактов оказывается устойчивым.

Рассмотрим сначала задачу, где конкурентными являются условия погашения задолженности. Пусть цена товара остается постоянной во всех вариантах. В общем случае ставки по кредиту могут быть разными. Чем больше срок кредита, тем больше ставка, поскольку необходимо компенсировать уменьшение стоимости более отдаленных платежей. Каждый вариант контракта оговаривает следующие основные условия погашения задолженности:

1) авансовые платежи, их размер и моменты выплаты;

2) продолжительность и условия выплаты процентов в льготном периоде, если он предусмотрен (в льготном периоде основной долг не погашается, а выплачиваются только проценты по основному долгу);

3) срок погашения задолженности;

4) метод погашения задолженности.

Задача состоит в том, чтобы выписать уравнения для расчета современных величин потоков платежей, предусматриваемых в конкурирующих контрактах. Поскольку в реальной практике может встретиться множество различных вариантов контрактов, то невозможно записать одну единственную формулу, пригодную для всех случаев. Поэтому рассмотрим несколько наиболее характерных вариантов.

Пример 4.1. Судостроительная фирма предлагает уплатить за стоимость заказа 8 млн. долларов. Предлагается два варианта оплаты:

1) 5% при заключении контракта, 5% при спуске судна на воду через 6 месяцев и далее в течение 5 лет равные расходы по обслуживанию долга, то есть остаток долга погашается в течение 5 лет равными суммами.
Льготный период в данном варианте не предусмотрен.

2) 5% при заключении контракта, 10% при спуске судна на воду через 6 месяцев, предусмотрен льготный период, который начинается после выплаты второго авансового платежа и равен шести месяцам. В льготном периоде выплата процентов, начисленных по сложной ставке, предусматривается в конце этого периода. После окончания льготного периода погашение задолженности происходит в течение 8 лет равными платежами.

Процент за кредит в обоих вариантах i = 10%.

Примем ставку сравнения q = 15%. Это ставка, по которой производится дисконтирование всех платежей, предусмотренных контрактом.
Запишем уравнение для современной величины платежей по первому контракту. В нем предусмотрено два авансовых платежа Q_1 и Q_2, причем второй платеж выплачивается в момент времени t = 0,5 года от начала действия контракта. Следовательно, его необходимо дисконтировать, умножив на множитель v^t, где $v = 1/(1+q)$ - множитель дисконтирования по ставке q. Процесс погашения остатка задолженности $D_1 = P - (Q_1 + Q_2)$ начинается с момента выплаты второго авансового платежа. Учитывая, что платежи поступают один раз в год в конце года, поток погашающих долг платежей можно рассматривать как постоянную годовую отложенную на t лет ренту с параметрами R_1, n_1, современная величина которой определяется с использованием ставки, равной ставке сравнения q. Здесь n_1 – период времени, в течение которого погашается основной долг для первого варианта (n_1=5) Необходимо определить приведенную величину этой ренты на начальный момент времени. Со-

временная величина ренты на момент выплаты второго авансового платежа равна $R_1 a(n_1, q)$, а на начальный момент времени $R_1 a(n_1, q) v^t$. Размер отдельного погашающего платежа рассчитывается по формуле $R_1 = D_1 / a(n_1, i)$. Обратим внимание, что при расчете R_1, используется ставка по кредиту i.

Таким образом, математически процесс погашения задолженности (современная величина расходов) для первого варианта описывается уравнением

$$A_1 = Q_1 + Q_2 v^t + R_1 a(n_1, q) v^t. \qquad (4.16)$$

Рассмотрим второй вариант. В этом варианте предусмотрен льготный период. Следовательно, в уравнении для современной величины платежей необходимо учесть проценты, выплачиваемые в конце этого периода. Пусть L – продолжительность льготного периода, $D_2 = P - (Q_3 + Q_4)$, здесь Q_3, Q_4 – авансовые платежи. Тогда сумма процентов в льготном периоде равна $D_2[(1+i)^L - 1]$. Чтобы привести этот платеж к нулевому моменту, его необходимо умножить на множитель дисконтирования v^{t+L}. Погашение основного долга начинается после окончания льготного периода. Поток погашающих долг платежей - отложенная на $t+L$ лет рента. Современная величина дисконтированных на начальный момент погашающих платежей равна $R_2 a(n_2, q) v^{t+L}$, где $R_2 = D_2 / a(n_2, i)$. Уравнение для определения современной величины платежей по второму варианту формируется, как в первом варианте и имеет вид

$$A_2 = Q_3 + Q_4 v^t + D[(1+i)^L - 1] v^{t+L} + R_2 a(n_2, q) v^{t+L}, \qquad (4.17)$$

здесь n_2 – период времени, в течение которого погашается основной долг для второго варианта (n_2 =8).

Проведя вычисления, получим: A_1 = \$ 6 710 000, A_2 = \$ 6 382 000.

Таким образом, согласно описанному методу, второй вариант оказался выгоднее, поскольку $A_2 < A_1$.

Получившиеся суммы условны и используются только для установления рейтинга контрактов. Можно показать, что если современная величина платежей по одному из сравниваемых контрактов больше, чем по другому, то такое же соотношение сохраняется и для других значений ставки сравнения, в случае, если они превышают наибольшую из ставок сравниваемых контрактов или если ставки сравнения меньше наименьшей из этих ставок. Другими словами, если для каких-либо двух контрактов

$A_2 < A_1$, причем в первом контракте ставка по кредиту i_1, а во втором i_2, $i_1 > i_2$ при некоторой ставке сравнения q, то это же соотношение между A_2 и A_1 сохранится для всех других значений q, таких, что $q > i_1$ или для всех значений $q < i_2$.

Рассмотрим еще один типичный вариант контракта. Пусть условия контракта следующие: аванс в сумме Q выплачивается один раз в начале сделки, предусматривается разовая поставка товара спустя период времени t от момента заключения контракта, предусмотрен льготный период продолжительностью L, который начинается с момента поставки товара, погашение долга осуществляется равными выплатами, причем процесс погашения начинается с момента окончания льготного периода, проценты в льготном периоде выплачиваются периодически один раз в конце года, общий срок контракта $n + t + L$ лет.

Учитывая все эти условия, запишем уравнение, определяющее современную величину платежей по контракту:

$$A = Q + (P - Q)(\frac{a(n,q)}{a(n,i)}v^{t+L} + i \cdot a(L,q)v^t)\,. \qquad (4.18)$$

В данном уравнении сумма ежегодных процентных платежей в льготном периоде равна $(P - Q)i$. Поскольку проценты выплачиваются периодически начиная с момента поставки товара, поток этих платежей можно рассматривать как отложенную на t лет годовую ренту с параметрами R, i, L, q. Размер погашающих платежей равен $R = (P - Q)/a(n,i)$. Поток этих платежей - отложенная на $t + L$ лет годовая рента.

4.5. Планирование погашения долгосрочной задолженности

Расходы по обслуживанию долга

Определении периодических расходов, связанных с займом, называют *обслуживанием долга*. Разовую сумму по обслуживанию долга называют *срочной уплатой*. Срочные уплаты включают:

- текущие процентные платежи;
- средства, предназначенные для погашения (амортизации) основного долга (тела кредита).

Методы определения размера срочных уплат зависят от условий займа. Эти условия предусматривают срок, продолжительность льготного периода (при его наличии), уровень процентной ставки, метод погашения и уплаты процентов и основной суммы долга.

Обычно проценты выплачиваются на протяжении всего срока займа периодически. Иногда они начисляются и присоединяются к основной сумме долга. Основная сумма чаще всего погашается частями, причём размеры платежей по погашению (срочная уплата) могут быть одинаковы или могут изменяться.

В льготном периоде основная сумма долга не погашается, проценты могут выплачиваться периодическими платежами или в конце периода одним платежом, или вообще не выплачиваться, а присоединяться к основной сумме долга.

Пусть D - сумма задолженности, I - проценты по займу, L - продолжительность льготного периода, R - годовые расходы по погашению основной суммы долга, g - ставка процентов по условиям займа, Y - срочная уплата.

В периоде, когда погашается основная сумма долга, срочная уплата состоит из двух элементов: $Y = R + I$. В льготном периоде $Y = I$.

Методы расчёта существенно зависят от вида займа. Основной признак классификации займов - метод погашения займа. Различают следующие виды займов:

1. Займы без обязательного погашения («вечные облигации») - заёмщик обязуется выплачивать кредитору в определённые сроки доход в виде фиксированного процента, занятая сумма не возвращается. Заёмщик оставляет за собой право выкупить или погасить все выпущенные долговые обязательства в любое время.

2. Займы с обязательным погашением в один срок. Заёмщик возвращает занятую сумму в оговоренный срок и выплачивает проценты периодически или в конце срока.

3. Займы с обязательным погашением в несколько сроков. Заёмщик возвращает занятую сумму по частям и регулярно выплачивает доход от займа в виде процентов.

Формирование фонда

Для обеспечения возврата долга обычно создаётся погасительный фонд. Иногда это оговаривается в договоре выдачи займа. Фонд формируется из последовательных взносов, на которые начисляются проценты (например, счёт в банке). Понятно, это имеет смысл, если у заемщика есть возможность получать на деньги погасительного фонда большие проценты, чем те, под которые он взял заем. Возможны различные варианты формирования фонда и выплаты долга. Мы рассмотрим три схемы формирования погасительного фонда:

1. Основной долг погашается из фонда в конце срока разовым платежом. Сумма взносов в фонд с процентами на них должна быть равна долгу на момент его уплаты. Проценты по долгу выплачиваются не из фонда.

2. Условия финансового обязательства вместо периодической выплаты процентов предусматривают их присоединение к сумме основного долга.

3. Фонд формируется таким образом, чтобы обеспечить периодическую выплату процентов по долгу (из фонда) и в конце срока возврат основного долга.

Рассмотрим первую схему. Пусть накопление средств в фонде производится путём регулярных ежегодных взносов, размер которых равен R, и на эти взносы начисляются проценты по ставке i. Одновременно происходит выплата процентов, начисляемых на долг по ставке g (проценты выплачиваются не из фонда). Тогда срочная уплата $Y = Dg + R$, где Dg - проценты по долгу, R - платежи в фонд.

Фонд должен быть накоплен за n лет. Платежи в фонд представляют собой ренту с параметрами R, n, i. *Зная* размер долга, легко определить разовый взнос в фонд:

$$R = \frac{D}{s(n,i)},$$

где $s(n,i)$ – коэффициент наращения годовой ренты, равный

$$s(n,i) = \frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

С учетом этого, срочная уплата

$$Y = D\left(g + \frac{1}{s(n,i)}\right). \tag{4.19}$$

Во второй схеме условия финансового обязательства предусматривают присоединение процентов к сумме основного долга, поэтому взносы в фонд к концу срока должны обеспечить накопление суммы $D(1+g)^n$. В этом случае срочная уплата равна

$$Y = \frac{D(1+g)^n}{s(n,i)}, \tag{4.20}$$

Ставка i характеризует скорость роста погасительного фонда, а ставка g – сумму выплачиваемых за заём процентов.

Рассмотрим третью схему формирования фонда. Пусть кредит погашается следующим образом:

- в начале каждого года вносятся равные суммы R в погасительный фонд;

- проценты по кредиту начинают погашаться после первого начисления процентов на взносы в фонд;

- кредитору проценты выплачиваются из фонда;

в конце срока выплачивается основной долг плюс проценты за последний год по кредиту.

Особенностью данной задачи является то, что: а) взносы в фонд осуществляются не в конце года, как мы предполагали ранее, а в начале; б) проценты по кредиту выплачиваются периодически из фонда.

Рассмотрим процесс формирования фонда (см. рис. 4.3). Первая выплата в фонд в сумме R осуществляется в момент взятия кредита. На сумму R начисляются проценты за n лет (n - общий срок кредита) по сложной ставке i. В конце срока эта сумма будет равна $R(1+i)^n$. В начале второго года в фонд вносится сумма R и выплачиваются

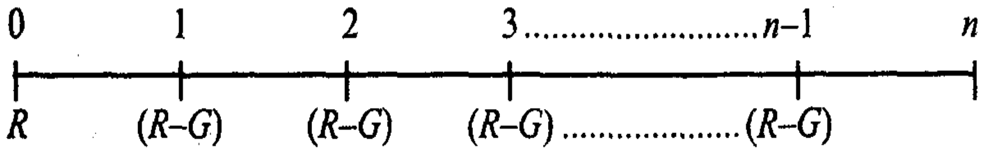


Рис 4.3. Процесс формирования погасительного фонда по схеме №3.

из фонда проценты по долгу G. Таким образом, фактически в фонд вносится сумма $(R-G)$. На неё будут начисляться проценты в течение $(n-1)$ лет, к концу срока получим сумму $(R-G)(1+i)^{n-1}$. В начале третьего года вносим в фонд сумму R и одновременно берём из фонда сумму G. На этот взнос (за вычетом процентов по долгу) будут начисляться проценты в течение ($n-2$) лет. В результате к концу срока получим сумму $(R-G)(1+i)^{n-2}$. Последний взнос в фонд осуществляется в момент времени $(n-1)$ и он вместе с начисленными процентами (с учетом изъятия из фонда суммы процентов по долгу) даст сумму $(R-G)(1+i)$. В конце срока необходимо обеспечить выплату суммы, размер которой равен $(D+G)$ (основной долг плюс проценты по долгу за последний год).

Составим балансовое уравнение. В нем все взносы в фонд за вычетом процентов по долгу, с учётом начисления на них процентов в фонде, приравниваем к сумме долга плюс проценты за последний год. Имеем

$$R(1+i)^n+(R-G)(1+i)^{n-1}+...+(R-G)(1+i)^2+(R-G)(1+i)=D+G.$$

Из этого уравнения необходимо определить размер взносов в фонд R.

После несложных преобразований балансовое уравнение можно записать в виде

$$R\sum_{k=1}^{n}(1+i)^k - G\sum_{k=0}^{n-1}(1+i)^k = D.$$

Заметим, что $\sum_{k=0}^{n-1}(1+i)^k$ – множитель наращения годовой ренты, который можно записать так: $\frac{(1+i)^n-1}{i} = s(n,i)$. Кроме того, имеем

$$\sum_{k=1}^{n}(1+i)^k = (1+i)\sum_{k=0}^{n-1}(1+i)^k .$$

С учётом этих соотношений балансовое уравнение запишется следующим образом:

$$R\frac{(1+i)((1+i)^n-1)}{i} - G\frac{(1+i)^n-1}{i} = D.$$

Решая его, определим величину взноса в фонд:

$$R = \frac{D}{(1+i)s(n,i)} + \frac{G}{1+i}. \qquad (4.21)$$

Как видно из полученного соотношения, взнос в фонд формируется из двух составляющих: первое слагаемое - это сумма, которая обеспечивает выплату основного долга (заметим, что здесь присутствует множитель ($1+i$), который отражает тот факт, что выплаты в фонд осуществляются в начале года); второе слагаемое - это сумма, которая обеспечивает периодическое погашение процентов по долгу платежами из фонда.

Погашение долга в рассрочку равными платежами

Один из способов погашения долга в рассрочку - погашение равными суммами.

Пусть заём D погашается в течение n лет равными платежами. Тогда сумма, ежегодно идущая на погашение долга, равна d, где $d = D/n$. Помимо погашения основного долга должник выплачивает проценты на *остаток* долга. Будем предполагать, что проценты выплачиваются один раз в конце года по ставке g. Тогда первая уплата процентов в конце первого года равна Dg. В конце второго года сумма процентов равна $(D-d)g$. В конце третьего года – $(D-2d)g$ и так далее.

Платежи по срочным уплатам формируются следующим образом:
Первая уплата равна $Y_1 = d + Dg$, вторая уплата – $Y_2 = d + (D-d)g$, третья уплата – $Y_3 = d + (D-2d)g$ и т.д.

Срочная уплата на произвольный момент времени t равна:

$$Y_t = d + D_t g, \tag{4.22}$$

где D_t – остаток долга на начало года t $(t = 1,2,...,n)$, определяемый следующим рекуррентным соотношением:

$$D_{t+1} = D_t - d = D - td, \; D_1 = D. \tag{4.23}$$

Погашение долга в рассрочку равными срочными уплатами

На протяжении всего срока погашения регулярно выплачивается постоянная срочная уплата, часть её идёт в счет погашение основного долга, а часть - в погашение процентов за заём. Величина основного долга убывает после каждой выплаты. Однако в связи с уменьшением выплат по процентам с течением времени увеличиваются суммы, идущие на погашение основного долга. Такой способ называют *прогрессивным погашением*. Срочная уплата

$$Y = D_t g + d_t = const. \tag{4.24}$$

Периодически выплачиваемые суммы Y можно рассматривать как постоянную годовую ренту, член которой определяется по формуле:

$$Y = \frac{D_1}{a(n,g)}. \tag{4.25}$$

Определим структуру срочной уплаты, то есть ту ее часть, которая идёт на погашение основного долга, и часть, которая идет на погашение процентов.

Размер первого погасительного платежа $d_1 = Y - D_1 g$.

Из формулы (3.25) следует, что $D_1 = Ya(n,g)$, поэтому

$$d_1 = Y - D_1 g = Y(1 - g \cdot a(n,g)) = Yv^n, \tag{4.26}$$

где $v = \dfrac{1}{1+g}$.

Далее

$d_2 = Y - D_2 g = Y - (D_1 - d_1)g$ (здесь учтено, что $D_2 = D_1 - d_1$) или

$$d_2 = Yv^n + Yv^n g = Yv^{n-1} = d_1(1+g). \quad (4.27)$$

Для платежа в момент времени t имеем $d_t = Yv^{n-(t-1)}$, или

$$d_t = d_1(1+g)^{t-1}. \quad (4.28)$$

Таким образом, можно выписать следующую систему соотношений.

Размер погасительного платежа в году t:

$$d_t = Y - D_t g = d_{t-1}(1+g),\ t = 1,2,...,n, \quad (4.29)$$

$$d_1 = Y - D_1 g = Yv^n = D_1 v^n / a(n,g) = D_1 / s(n,g). \quad (4.30)$$

Остаток долга на начало года $t+1$:

$$D_{t+1} = D_t - d_t = D_t(1+g) - Y. \quad (4.31)$$

Сумма погашенного долга на начало года $t+1$:

$$W_t = \sum_{k=0}^{t-1} d_1(1+g)^k = d_1 s(t,g), \quad (4.32)$$

где $s(t,g)$ - коэффициент наращения годовой ренты, срок которой равен t лет.

Если погасительные платежи и проценты выплачиваются p раз в год, то данная задача решается аналогично, только применяются соответствующие формулы для p–срочных рент.

Вопросы для самопроверки

1. Какая характеристика используется для оценки доходности финансово - кредитной операции?
2. Что такое баланс кредитной операции? Запишите уравнения баланса.
3. Как определить полную доходность финансово кредитной операции без удержания комиссионных?
4. Как определить полную доходность ссудной операции с удержания комиссионных?
5. Как определить полную доходность ссудной операции с периодической выплатой процентов?

6. Как определить полную доходность ссудной операции с периодическими Расходами?
7. Как определить полную доходность ссудной операции с нерегулярным потоком платежей?
8. В чем состоит суть метода сравнения различных контрактов на основе капитализации платежей?
9. Как классифицируются займы по способу их погашения?
10. Назовите основные способы формирования погасительного фонда
11. Как формируется погасительный фонд для погашения основного долга из фонда в конце срока разовым платежом, а проценты по долгу выплачиваются не из фонда?
12. Как формируется погасительный фонд для погашения основного долга и процентов в конце срока разовым платежом?
13. Как формируется погасительный фонд для погашения основного долга в конце срока разовым платежом и обеспечить периодическую выплату процентов по долгу (из фонда)?
14. Как погашается долг в рассрочку равными платежами?
15. Как погашается долг в рассрочку равными уплатами?

Глава 5

Анализ реальных инвестиций

5.1. Введение

Задача анализа и оценки финансовой эффективности инвестиционных проектов с целью отбора наиболее эффективного проекта является одной из основных в управлении финансами.

В широком смысле термин "инвестировать" означает любое вложение денежных средств с целью получения доходов в будущем. Различают два вида инвестиций - реальные и финансовые.

Реальные инвестиции (real investments) означают инвестиции в какой-либо тип материальных активов, таких, как земля, оборудование, заводы.

Финансовые инвестиции (financial investments) — это контракты, зафиксированные на бумаге, такие, как обыкновенные акции и облигации.

В развитых экономиках большая часть инвестиций относится к финансовым инвестициям.

Основным объектом математического моделирования и анализа в данном случае является поток платежей, а именно, суммы распределённых во времени денежных расходов и поступлений, предполагаемых в результате реализации инвестиционного проекта. При этом важную роль играют два фактора, которые связаны с инвестиционным процессом — время и риск. Например, при инвестировании в ценные бумаги с фиксированным доходом (облигации) важнейшим фактором будет время, при инвестировании в рискованные ценные бумаги (обыкновенные акции) существенными являются и время, и риск.

С финансовой точки зрения инвестиционный проект объединяет два противоположных процесса:

вложения денежных средств (с целью создания производственного объекта, накопления капитала и т. д.);

последовательное получение дохода.

Эти процессы могут протекать последовательно, с разрывом между ними или без, на некоторых отрезках времени параллельно (в этом случае отдача от инвестиций начинается до полного завершения вложений). Оба этих процесса могут иметь разное распределение во времени.

Анализ инвестиций заключается в основном в оценивании и сравнении эффективности альтернативных инвестиционных проектов. Оценка эффективности осуществляется с помощью расчёта системы показателей. Методы оценки эффективности проектов, которые рассматриваются в данной главе, основаны на фундаментальном в финансовом анализе принципе дисконтирования потоков платежей, а именно, на приведении инвестиционных расходов и доходов к одному моменту времени (обычно на начало реализации проекта). При этом наиболее важным моментом является выбор уровня ставки процентов, по которой производится дисконтирование. В анализе реальных инвестиций эту ставку называют ставкой сравнения.

Рассмотрим это понятие более подробно на примере [2].

Пусть фирма - производитель бытовой техники – задумывает приобрести роботизированный комплекс для окраски поверхности изделий стоимостью в $1000 000. Принимая во внимание заработную плату оператора, обслуживающего комплекс, заработную плату рабочих, которых он должен заменить, а также расходы на эксплуатацию комплекса, фирма оценивает экономию от внедрения в $120 000 в год.

Вопрос: стоит ли тратить S1000 000 сегодня, чтобы каждый год экономить $120000, но в будущем?

Ответ на этот вопрос зависит от альтернативной стоимости получения $1000000 этой фирмой. Если фирме для этого приобретения придётся брать ссуду, то альтернативная стоимость будет отражать норму процента, взимаемого кредитором.

Если планируется истратить собственные денежные средства, то альтернативная стоимость определяется доходом, который это предприятие могло бы получить, используя $1000000 на альтернативные (возможно, более прибыльные) цели. Например, если бы фирма приобрела облигации, то альтернативная стоимость вложения капитала в новый комплекс была бы равна рыночной норме процента прибыли на эти ценные бумаги.

Можно сказать, что независимо от характера средств, то есть заёмные они или собственные, их альтернативная стоимость соответствует преобладающей на рынке норме процента. В рыночной экономике не существует единой нормы процента, имеется целое семейство процентных ставок (например, ставки по краткосрочным и долгосрочным ссудам, ставки по облигациям разных видов и т. д.). Эту рыночную ставку нужно рассматривать как некоторую условную величину, отражающую характерную норму процента из всего её многообразия, существующего на финансовых рынках.

Предположим, что норма процента равна 10% годовых. Это означает, что какимлибо способом фирма может получить $ 100000 в год, вложив свои средства в размере $1000000, которые предназначались для покупки комплекса. Поскольку это меньше чем $120000, то данный инвестиционный проект заслуживает внимания. А если норма процента равна 13% годовых, тогда фирма может получить $ 130000 в год и вложения роботизированный комплекс становятся невыгодны.

Из данного примера можно сделать следующий вывод: эффективность инвестиций и, следовательно, активность инвесторов зависят от преобладающей на рынке нормы процента. Чем ниже норма процента, тем выше уровень инвестиционных расходов, выгодных инвестору.

Выбор конкретной ставки должен осуществляться на основе экономического анализа, производимого инвестором. Чем выше ставка, тем в большей мере отражается фактор времени - более отдалённые платежи оказывают меньшее влияние на современную величину потока платежей. Размеры современных величин доходов от вложений являются условными характеристиками, поскольку в существенной мере зависят от принятой для будущего ставки сравнения - рыночной нормы процента.

Как было отмечено выше, важным фактором при анализе инвестиций является учёт риска. В инвестиционном процессе риск проявляется в виде возможного уменьшения реальной отдачи от вложений по сравнению с ожидаемой. Оценка эффективности проекта зависит от правильного выбора процентной ставки, по которой производится капитализация платежей. В качестве рекомендации по учёту риска предлагается вводить поправку к уровню процентной ставки, то есть добавлять некоторую рисковую премию.

В данной теме рассматриваются методы моделирования и анализа инвестиционных процессов, связанных с реальными инвестициями. В последующих темах описаны модели и методы анализа финансовых инвестиций.

В финансовом анализе реальных инвестиций применяют четыре основных показателя:

1) чистый приведённый доход;
2) внутренняя норма доходности;
3) срок окупаемости;
4) индекс рентабельности.

5.2. Чистый приведенный доход

Для данного показателя в финансовой литературе широко используется следующее сокращенное обозначение: NPV от английского термина Net Present Value.

NPV используется в практике крупных и средних предприятий. Допущения, принимаемые при определении NPV:

- потоки денежных средств на весь период реализации проекта известны;

- определена оценка процентной рыночной ставки для будущего (на весь период реализации проекта).

Чистый приведенный доход (NPV) - это разность дисконтированных по ставке сравнения на один момент времени (обычно на начало реализации проекта) потоков доходов и вложений.

Эта величина характеризует абсолютный результат инвестиционной деятельности. Рассмотрим последовательно модели различных наиболее характерных вариантов инвестиционных процессов, на основе которых рассчитывается NPV, начиная с простейших.

1. Пусть инвестиции осуществляются одним платежом в начальный момент времени. Отдача от инвестиций поступает один раз в год в конце года в течение n лет. Обозначим K - размер инвестиций, R - размер ежегодного дохода, W - чистый приведенный доход. Таким образом, очевидно, поток доходов можно рассматривать как годовую ренту. Тогда, в соответствии с определением, чистый приведенный доход

$$W = R\frac{1-(1+q)^{-n}}{q} - K, \tag{5.1}$$

где q - ставка сравнения, первое слагаемое - современная величина потока доходов.

Правило принятия решения на основе NPV состоит в следующем: если $W > 0$, то проект принимается к рассмотрению. Если $W = 0$, то доходы только окупают вложения и прибыли не приносят. Если $W < 0$ меньше нуля, то проект убыточен. При анализе нескольких альтернативных проектов, при прочих равных условиях предпочтение отдается проекту с наибольшим NPV.

2. Пусть вложения и поступления - равномерные дискретные потоки платежей, поступающих один раз в конце года. Процесс отдачи начинается сразу после завершения вложений.

Обозначим n_1 – продолжительность периода вложений (в годах), n_2 - продолжительность периода отдачи от вложений, K - размер ежегодных вложений, R - размер ежегодных поступлений..

Потоки доходов и расходов дисконтируем на начальный момент времени. Расходы представляют собой годовую ренту со сроком n_1,. Следовательно, приведенная величина расходов равна $Ka(n_1, q)$. Доходы – отложенная на n_1 год годовая рента, все платежи которой нужно привести на нулевой момент времени. Современная величина такой ренты определяется по формуле $Ra(n_2, q)v^{n_1}$, где v - множитель дисконтирования по ставке q. Таким образом, уравнение для определения NPV в этом случае будет иметь вид

$$W = Ra(n_2, q)v^{n_1} - Ka(n_1, q). \tag{5.2}$$

Замечание. Если процессы вложений и отдачи описываются p-срочными рентами (параметры p у них могут быть разными), то, очевидно, в данном уравнении необходимо использовать коэффициенты приведения соответствующих p-срочных рент.

3. Предположим, что инвестиционные затраты и доходы разделяются на два неравномерных потока платежей, причем процесс отдачи от инвестиций начинается сразу после окончания вложений и все платежи поступают в конце года. Пусть R_j – размеры доходов в году j $\left(j = 1, 2, ..., n_2\right)$, K_t - инвестиционные расходы в году t $(t = 1, 2, ..., n_1)$. Сумма дисконтированных вложений определяется по формуле для современной величины переменного потока платежей (см. п.2.12) и равна $\sum_{t=1}^{n_1} K_t v^t$. Рассмотрим отдельный платеж R_j. Дисконтируем его на момент начала инвестиционного проекта. Очевидно, дисконтированная величина этого платежа равна $v^{n_1} R_j v^j$. Сумма дисконтированных платежей R_j даст современную величину потока доходов $v^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} R_j v^j$. Уравнение для NPV имеет вид

$$W = v^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} R_j v^j - \sum_{t=1}^{n_1} K_t v^t. \tag{5.3}$$

Мы предполагали, что процесс отдачи начинается сразу после окончания вложений. Если отдача начинается спустя n лет после начала осуществления проекта и $n > n_1$, то в данной формуле вместо множителя v^{n_1} необходимо использовать множитель v^n.

4. Предположим, что процессы вложения и отдачи задаются в виде единого неравномерного потока платежей, поступающих один раз в конце года. Это означает, что процессы вложения и получения доходов могут протекать как последовательно, так и параллельно.

Обозначим R_t - размер отдельного платежа. Тогда чистый приведенный доход определится по формуле

$$W = \sum_t R_t v^t, \ t = 1,2,...,n_1 + n_2, \tag{5.4}$$

где $n_1 + n_2$ – полный срок осуществления проекта. В этой формуле платежи R_t, соответствующие вложениям, берутся со знаком «минус». На практике для более надежных выводов рекомендуется величину чистого приведенного дохода определять для различных значений ставки сравнения q. На рис. 5.1. показана зависимость чистого приведенного дохода W от ставки сравнения q для случая, когда вложения осуществляются единым платежом в начале срока, а поступления – равномерный поток платежей. При $q = q_{in}$ чистый приведенный доход равен нулю $W = 0$.

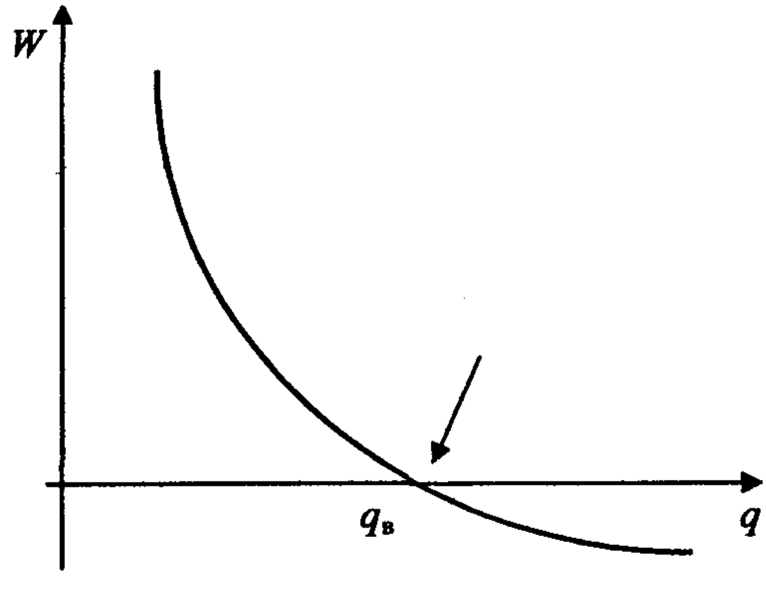


Рис. 5.1. Зависимость чистого приведенного дохода от ставки сравнения q.

5.3. Внутренняя норма доходности

Для данного показателя в финансовой литературе часто используют сокращенное обозначение IRR (от английского термина Internal Rate of Return).

Под IRR понимают расчетную ставку процента, при которой капитализация получаемого дохода дает сумму, равную приведенным инвестициям, и, следовательно, инвестиции окупаются.

Экономический смысл данного показателя заключается в том, что в случае, если вложения предшествуют потоку доходов, он дает предельное значение нормы дисконтирования, при которой проект еще остается выгодным.

Другими словами, если проект финансируется только за счёт привлечённых средств, то значение IRR показывает верхнюю границу допустимого уровня банковской процентной ставки, превышение которой делает проект убыточным. Обозначим q_{in} - внутреннюю норму доходности. Если кредит получен по ставке i, то разность $(q_{in}-i)$ характеризует эффективность инвестиционной деятельности. Если $(q_{in}-i)$=0, то доход только окупает инвестиции, если $q_{in}<i$, то инвестиции убыточны. При сравнении различных проектов выбираем тот, у которого этот показатель выше. Рассмотрим метод расчета IRR.

Для первой модели инвестиционного процесса (см. выражение (5.1)) внутренняя норма доходности q_{in} определяется как корень уравнения

$$R\frac{1-(1+q_{in})^{-n}}{q_{in}}-K=0, \tag{5.5}$$

где n – срок реализации проекта.

Для второй и третьей моделей инвестиционного процесса показатель q_{in} определяется из уравнений

$$R\frac{1-(1+q_{in})^{-n_2}}{q_{in}}\cdot\frac{1}{(1+q_{in})^{n_1}}-K\frac{1-(1+q_{in})^{-n_1}}{q_{in}}=0, \tag{5.6}$$

$$\frac{1}{(1+q_{in})^{n_1}}\sum_{j=1}^{n_2}R_j\frac{1}{(1+q_{in})^{j_1}}-\sum_{t=1}^{n_1}K_t\frac{1}{(1+q_{in})^{t}}=0. \tag{5.7}$$

Если инвестиции и отдача от них задаются в виде единого потока платежей, то тогда q_{in} определяется как наименьший положительный корень уравнения:

$$\sum_{t=1}^{n}R_t\frac{1}{(1+q_{in})^{t}}=0. \tag{5.8}$$

Если вложения предшествуют процессу отдачи, уравнение (5.8) имеет единственное положительное решение, и расчет показателя IRR имеет смысл. Если вложения чередуются с отдачей, то однозначного решения не существует. В этом случае необходимо применение другой методики расчета, основанной на непрерывных процентах.

Решить уравнения (5.6) – (5.8) можно только численно.

5.4. Срок окупаемости

Под сроком окупаемости понимают продолжительность периода, в течение которого сумма доходов, дисконтированных на момент завершения инвестиций, становится равной сумме инвестиций, приведённых к тому же моменту времени. Дисконтирование осуществляется по ставке сравнения. Подчеркнем, что при определении срока окупаемости, в отличие от других показателей, все платежи приводятся на момент завершения инвестиций (или, что то же самое, на момент начала периода отдачи).

Рассмотрим способы определения этого показателя, начиная с наиболее простой модели инвестиций, соответствующей первому варианту из раздела 5.2. В этом случае срок окупаемости можно определить из уравнения

$$R\frac{1-(1+q)^{-n_{ок}}}{q}=K\,. \qquad (5.9)$$

Решая это уравнение относительно переменной $n_{ок}$, получим

$$n_{ок}=-\frac{\ln(1-\frac{K}{R}q)}{\ln(1+q)}\,. \qquad (5.10)$$

Из этой формулы видно, что не всякий уровень дохода приводит к окупаемости инвестиций. Срок окупаемости будет конечной величиной, если $R>qK$ (формально это следует из свойств логарифмической функции).

Рассмотрим, как определяется срок окупаемости $n_{ок}$ для второй и третьей модели инвестиционного процесса.

Пусть K_0 - приведённая к началу периода отдачи величина инвестиций, то есть $K_0=\sum_{t=1}^{n_1}K_t(1+q)^t$ - наращенная сумма всех платежей, которые составляют вложения). Пусть доходы - произвольный поток поступлений. Тогда срок окупаемости $n_{ок}$ определяется суммированием доходов, дисконтированных по ставке q до тех пор, пока не получим сумму, равную объёму инвестиций. Алгоритм определения $n_{ок}$ состоит в следующем. Последовательно определяем величины $S_m = \sum_{t=1}^{m} R_t \frac{1}{(1+q)^t}$ для $m = 1, 2, ..., n_2$ (здесь n_2 - продолжительность периода отдачи от вложений). Как только при некотором значении m выполнятся неравенства $S_m < K_0 < S_{m+1}$, то полагаем, что $n_{ок} = m + \Delta$, где m - целое число лет, Δ - доля года, которая приближенно оценивается по формуле

$$\Delta \approx \frac{K_0 - S_m}{R_{m+1} v^{m+1}}, \tag{5.11}$$

где $v^{m+1} = \frac{1}{(1+q)^{m+1}}$.

Основной недостаток показателя $n_{ок}$ как меры эффективности инвестиций заключается в том, что он не учитывает весь период осуществления проекта и на него не влияет отдача, которая лежит за пределами этого срока. Поэтому рекомендуется этот показатель использовать только как ограничение при принятии решения. Инвестор определяет для себя некоторое критическое значение срока окупаемости $n_{кр}$, которое еще удовлетворяет его, и если срок окупаемости анализируемого проекта $n_{ок} > n_{кр}$, то проект заведомо не принимается. Только после этого сравнение проектов осуществляется по остальным показателям.

5.5. Индекс рентабельности

Индекс рентабельности показывает, сколько денежных единиц современной стоимости будущего денежного потока доходов приходится на одну денежную единицу приведенных инвестиций.

Предположим, что инвестиционные расходы и доходы - переменные потоки платежей, поступающих один раз в конце года. Тогда индекс рентабельности определяется по формуле

$$U = \frac{v^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} R_j v^j}{\sum_{t=1}^{n_1} K_t v^t}.$$

Здесь в числителе - современная величина потока доходов на момент начала инвестиционного проекта, в знаменателе - инвестиционные расходы, дисконтированные на этот же момент времени.

Если $U > 1$, то проект принимается к рассмотрению; если $U = 1$, то проект не приносит прибыли, а только окупается; при $U < 1$ проект нерентабелен. Из нескольких проектов выбирается тот, у которого индекс рентабельности наибольший. Очевидно, применение этого показателя корректно, если инвестиции и доходы идут последовательно.

Недостаток всех показателей. Все рассмотренные показатели предполагают известными используемые при их расчете параметры будущих расходов и доходов, их размеры и время выплат или поступлений. В реальной ситуации эти величины можно определить и спрогнозировать только приблизительно. Кроме того, результат расчета этих показателей эффективности, за исключением внутренней нормы доходности, существенно зависит от выбора ставки сравнения. Ставка оценивается субъективно финансовым аналитиком и, следовательно, все расчеты с использованием этой ставки также носят условный характер. В связи с этим для уменьшения неопределенности при принятии решений, основанных на расчете рассмотренных показателей, рекомендуется использовать сценарный подход. Он заключается в следующем. Сначала получают оценки показателей эффективности для некоторого базового сценария. В этом сценарии используются наиболее вероятные условия функционирования данного инвестиционного проекта. Затем аналогичные оценки получают для наихудшего варианта (пессимистичного) и для наилучшего (оптимистичного).

5.6. Модель инвестиций в человеческий капитал

В данном разделе на основе применения рассмотренного выше подхода к анализу инвестиций мы попытаемся ответить на вопрос: стоит ли образование того, чтобы платить за него из своего кармана, и сколько стоит платить.

Рассмотрим модель инвестиций в человеческий капитал. Модель будем строить при следующих предположениях.

1. Труд образованного и профессионально подготовленного человека производительнее, чем необученного. Следовательно, вложения в образование создают так называемый человеческий капитал, который в дальнейшем должен окупаться и приносить прибыль.

2. Люди как потребители заинтересованы в максимизации доходов всей жизни в целом, а не отдельного периода.

3. Существует прямая зависимость между образовательным уровнем работника и его потенциальными заработками.

4. Люди принимают решение о вложении в свое образование на основе сопоставления связанных с этим затрат и выгод.

Выгоды образования состоят в ожидаемых будущих более высоких доходах.

Затраты имеют две формы:

а)явные затраты на курс обучения;

б)скрытые затраты, а именно, упущенные в течение обучения заработки.

Выгоды и затраты относятся к разным периодам времени, и поэтому каждый человек, принимая решение об образовании, должен сравнить сегодняшнюю ценность ожидаемых выгод с сегодняшней ценностью ожидаемых затрат.

Рассмотрим индивида, который решает вопрос: получать ли ему дополнительное образование еще в течение одного года. Обозначим C - затраты на образование в течение дополнительного года (плата за обучение плюс упущенные заработки). Эту величину необходимо сравнить с ожидаемыми выгодами более высоких заработков, предоставляемых рынком труда. Пусть B_t - ожидаемый дополнительный годовой заработок в году t, g - рыночная норма процента, N - продолжительность предстоящей трудовой жизни данного индивида. Тогда приведенная величина выгод определяется как

$$P = \sum_{t=1}^{N} \frac{B_t}{(1+g)^t}.$$

Разность $(P - C)$ — чистый приведенный доход от образования.

Если $(P - C)$ > 0, то с финансовой точки зрения имеет смысл поучиться еще год. Очевидно, чем меньше C *и* g*, а* также чем выше доходы и больше N*,* тем выгоднее вкладывать деньги в образование.

Пусть зарплата индивида 48000 в год. Если он проучится еще один год, заплатив за курс обучения 20000, то его зарплата возрастет. Определим, на какую величину должна возрасти его зарплата, чтобы было выгодно вкладывать деньги в образование. Примем значение рыночной ставки g = 15%. Затраты на обучение

$$C = 48000 + 20000 = 68000.$$

После обучения зарплата увеличится на B денежных единиц в год (предполагаем, что это постоянная величина на протяжении всей оставшейся жизни). Определим величину B. Используя формулу для современной величины годовой ренты, получим уравнение

$$C = B\left[\frac{1-(1+0{,}15)^{-N}}{0{,}15}\right],$$

из которого легко определить значение B. Пусть $N = 40$, тогда $B = 10200$. Это означает, что обучение будет выгодным с финансовой точки зрения, если будущие доходы индивидуума возрастут не меньше, чем на 10200. Если $N = 5$. то расчеты дадут следующий результат: $B = 20300$.

Вопросы для самопроверки

1. Что такое реальные и финансовые инвестиции?
2. Какие наиболее важные факторы связаны с инвестиционным процессом?
3. В чем заключается анализ инвестиций?
4. Назовите четыре основных показателя, применяемых в финансовом анализе реальных инвестиций.
5. Что такое чистый приведенный доход? Запишите модель чистого приведенного дохода для случая, когда вложения осуществляются один раз, а доходы поступают ежегодно в конце года.
6. Запишите модель чистого приведенного дохода для случая, когда вложения и поступления — равномерные дискретные потоки платежей, поступающих один раз в конце года. Процесс отдачи начинается сразу после завершения вложений.
7. Запишите модель чистого приведенного дохода для случая, когда инвестиционные затраты и доходы разделяются на два неравномерных потока платежей, причем процесс отдачи от инвестиций начинается сразу после окончания вложений и все платежи поступают в конце года.
8. Запишите модель чистого приведенного дохода для случая, когда процессы вложения и отдачи задаются в виде единого неравномерного потока платежей, поступающих один раз в конце года.
9. Что такое внутренняя норма доходности и как она определяется?
10. Что такое срок окупаемости и как он определяется?
11. Что такое индекс рентабельности и как он определяется?

12. Назовите недостатки основных показателей, применяемых в финансовом анализе реальных инвестиций.

Литература

1. Домбровский В.В. Методы количественного анализа финансовых операций. – Томск: ТГУ, 1998. – 104с.
2. Мицель А.А. Математическая экономика. Лабораторный практикум. – Томск: Изд-во НТЛ, 2006. – 184 с.
3. Малыхин В.И. Финансовая математика. – М.:ЮНИТИ-ДАНА, 2000. – 247с.
4. Четыркин Е.М. Методы финансовых и коммерческих расчетов. – М.: Дело ЛТД, 1995. –
5. Попова Н.В. Математические методы финансового анализа. Часть 1. Финансовый анализ в условиях определенности / http://ecsocman.edu.ru/db/msg/110004

ПРИЛОЖЕНИЕ

Примеры решения типовых задач в пакете Mathcad

Задание 1. В банк помещен депозит в размере A = 5000 руб. По этому депозиту в первом году будет начислено i_1 = 10% , во втором - i_2 = 12%, в третьем - i_3 = 15%, в четвертом и пятом -$i_4 = i_5$ = 16% годовых. Сколько будет на счету в конце пятого года? Сколько надо было бы поместить на счет при постоянной процентной ставке i = 13%, чтобы обеспечить ту же сумму. Расчеты провести для простой и сложной процентной ставки.

Решение. Формула наращения по схеме сложных и простых процентов для переменной ставки имеет вид

а) $S = A(1+i_1)^{n_1} \cdot (1+i_2)^{n_2} \cdot (1+i_3)^{n_3} \cdot (1+i_4)^{n_4}$,

б) $S = A(1+\sum_{k=1}^{4} n_k i_k)$.

где n_i — i-ый период начисления процентов ($n_1 = n_2 = n_3 = 1$, $n_4 = 2$, $n = \sum_{i=1}^{4} n_i = 5$).

Вводим исходные данные

$$A := 5000 \qquad i := \begin{pmatrix} 10\% \\ 12\% \\ 15\% \\ 16\% \end{pmatrix} \qquad n := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad i1 := 13\% \qquad n1 := 5$$

Решение MathCAD для простой ставки

$$S := A \cdot \left(1 + \sum_{k=1}^{4} i_k \cdot n_k\right) \qquad S = 8.45 \times 10^3$$

$P := 1$

Given

$S = P \cdot (1 + i1 \cdot n1)$

$P := \mathrm{Find}(P) \qquad P = 5.121212 \times 10^3$

Решение MathCAD для сложной ставки

$$S1 := A \cdot \prod_{k=1}^{4} \left(1 + i_k\right)^{n_k} \qquad S1 = 9.53223 \times 10^3$$

$P1 := 1$

Given

$S1 = P1 \cdot (1 + i1 \cdot n1)$

$P1 := \mathrm{Find}(P1) \qquad P1 = 5.777109 \times 10^3$

Ответ: в конце 5-го года на счету будет 8450 руб. либо 9352 руб., если начисление процентов проводится по схеме простых процентов либо по схеме сложных процентов. Для получения суммы 8450 руб. в конце пятого года при ставке i = 13% необходимо в начале периода поместить депозит в размере 5121 руб. (по схеме простых процентов) либо 5 173 руб. руб. (по схеме сложных процентов) для получения суммы 9352 руб..

Задача 2. Вычислить размер платежа n - годичной ссуды покупки квартиры за A рублей с годовой ставкой i процентов и начальным взносом q процентов. Сделать расчет для ежемесячных выплат.

Расчет провести для следующих данных: n = 20 лет; A = 1 400 000 руб.; i = 18%; q

= 30%.
Расчеты выполнить для сложной процентной ставки.

Решение. Сумма, которую нужно выплатить по ссуде, равна $A - q \cdot A = A \cdot (1 - q)$. Рассчитаем ежегодный платеж R выплаты ссуды из уравнения
$A \cdot (1-q) = R \cdot \dfrac{1-(1+j/m)^{-n \cdot m}}{(1+j/m)^{m/p}-1} = R \cdot a(p,n,j/m)$, отсюда $R = \dfrac{A \cdot (1-q)}{a(p,n,j/m)}$. Здесь p = 12 (количество платежей в год), m = 12 (количество начислений процентов в год).

Вводим исходные данные.

$A := 1400000 \qquad j := 18\% \qquad q := 30\% \qquad n1 := 20$

$p := 12 \qquad m := 12$

Решение MathCAD

$$a := \frac{1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-n1 \cdot m}}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1} \qquad a = 64.795732$$

$$R := \frac{A \cdot (1 - q)}{a} \qquad R = 1.512445 \times 10^{4}$$

Ответ. Ежемесячные выплаты составят 15 124, 45 руб.

Задача 3. Семья хочет накопить \$12000 на машину, вкладывая в банк \$1000 ежегодно. Годовая ставка процента в банке 7%. Как долго ей придется копить?
Решение. Для решения данной задачи используем формулу наращенной величины ренты.

$$.S = R \cdot (1+i)\frac{((1+i)^{n}-1)}{i}$$

Отсюда:

$$n=\frac{\ln(\frac{S\cdot i}{R(1+i)}+1)}{\ln(1+i)}$$

Запишем исходные данные:

$S := 12000 \qquad R := 1000 \qquad i1 := 7\%$

Решение MathCAD

$$n1 := \frac{\ln\left[1+\frac{S\cdot i1}{R\cdot(1+i1)}\right]}{\ln(1+i1)} \qquad n1 = 8.564235$$

$$S1 := R\cdot(1+i1)\cdot\frac{(1+i1)^9-1}{i1} \qquad S1 = 1.281645\times 10^4$$

Ответ. Семье придется копить 9 лет. К концу 9-го года на счету будет 12816,5 руб.

Задача 4. Заем взят под i_1=16% годовых, выплачивать осталось ежеквартально по 500 д.е. (R_1=500 д.е.) в течение n=2 лет. Из-за изменения ситуации в стране процентная ставка снизилась до i_2=6% годовых. В банке согласились с необходимостью пересчета ежеквартальных выплат. Каков должен быть новый размер выплаты? Расчеты провести для сложной процентной ставки.

Решение. Для решения этой задачи необходимо записать современную величину невыплаченной суммы по ставке i_1=16% и приравнять современной величине потока платежей по ставке i_2=6%.

Имеем $R_1\frac{1-(1+i_1/m)^{-n\cdot m}}{(1+i_1/m)^{m/p}-1}=R_2\frac{1-(1+i_2/m)^{-n\cdot m}}{(1+i_2/m)^{m/p}-1}$, где m = 4 (количество начислений процентов в год), p = 4 (количество платежей в год). Из этого уравнения находим размер платежа R_2.

Исходные данные для MathCAD.

$R1 := 500 \qquad n := 2 \qquad m := 4 \qquad p := 4$

$i1 := 16\% \qquad i2 := 6\%$

Решение MathCAD

$R2 := 1$

Given

$$R1 \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{i1}{m}\right)^{-n \cdot m}}{\left(1 + \frac{i1}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1} = R2 \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{i2}{m}\right)^{-n \cdot m}}{\left(1 + \frac{i2}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}$$

$R2 := \mathrm{Find}(R2) \qquad R2 = 449.693578$

Ответ. Размер новой выплаты составит 449,7 руб.

Задача 5. Необходимо учесть долговое обязательство на сумму 50 000 д.е. за 4 года до погашения. Банк для учета обязательства применяет сложную процентную ставку 5 % годовых. Проценты могут начисляться 1, 2 или 4 раза в год. Указать условия договора, по которому это обязательство может быть учтено.

Решение. В данной задаче необходимо найти современную величину суммы S, которая через 4 года составит 50 000 д.е. в зависимости от количества начисления процентов в год. Расчет проводим по формуле $P = \dfrac{S}{(1 + j/m)^{n \cdot m}}$, где j - годовая ставка, m - количество начислений процентов в год.

Исходные данные

$S := 50000 \qquad i1 := 5\%$

$n1 := 4$

Решение MathCAD

$$P1(m1) := \frac{S}{\left(1 + \frac{i1}{m1}\right)^{n1 \cdot m1}}$$

$P1(1) = 4.113512 \times 10^{4}$

$P1(2) = 4.103733 \times 10^{4}$

$P1(4) = 4.098732 \times 10^{4}$

Ответ. Обязательство будет учтено на сумму 41 135 д.е. при начислении процентов один раз в год, на сумму 41037 д.е. – при начислении процентов два раза в год, на сумму 41987 д.е. – при начислении процентов четыре раза в год.

Задача 6. Как изменяется срок окупаемости проекта при изменении величины инвестиций, годовых доходов, ставки процента? Построить графики и дать объяснение.

Решение. Рассмотрим следующую модель инвестиционного проекта. Инвестиции в проект в размере K осуществляются единовременным платежом в начале срока, доход R поступает регулярно один раз в год в течении n лет, процентная ставка равна j . Срок окупаемости в этом случае рассчитывается по формуле

$$n = -\frac{\ln(1 - \frac{K \cdot j}{R})}{\ln(1 + j)} \ .$$

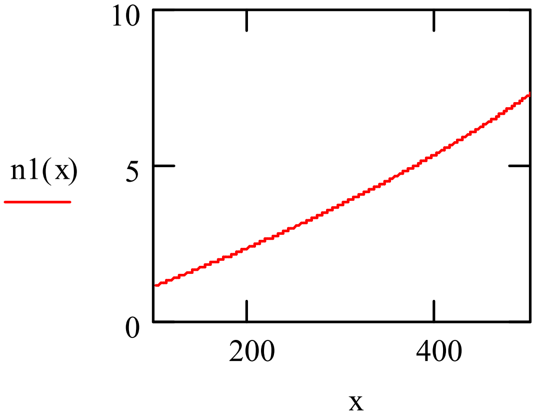
Исходные данные

$K := 500 \qquad R := 100 \qquad j := 10\%$

Решение MathCAD

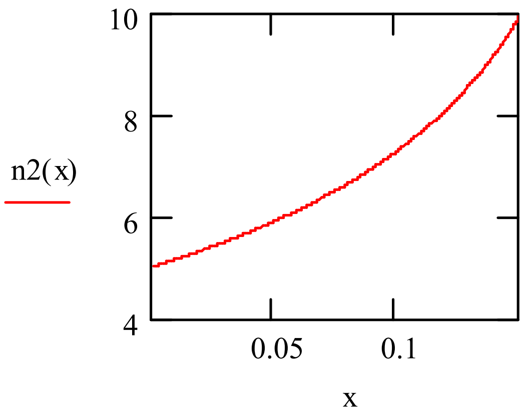
Зависимость срока окупаемости от размера инвестиций

$$n1(x) := \frac{-\ln\left(1 - \frac{x \cdot j}{R}\right)}{\ln(1 + j)}$$



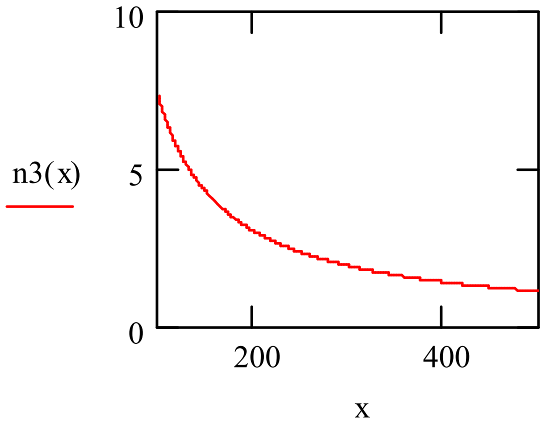
Зависимость срока окупаемости от ставки

$$n2(x) := \frac{-\ln\left(1 - \frac{x \cdot K}{R}\right)}{\ln(1 + x)}$$



Зависимость срока окупаемости от величины дохода

$$n3(x) := \frac{-\ln\left(1 - \frac{j \cdot K}{x}\right)}{\ln(1 + j)}$$



Ответ. Срок окупаемости с ростом объема инвестиций увеличивается, так как для окупаемости инвестиций требуется большее время получения дохода от проекта.

С ростом процентной ставки срок окупаемости растет. С экономической точки зрения это можно объяснить следующим образом. Если для инвестиций берется ссуда в банке под процентную ставку j, то с ростом ставки растут проценты по ссуде, и, следовательно, растет долг заемщика. Поэтому требуется большее время получения дохода от проекта для погашения ссуды.

С ростом дохода от проекта срок окупаемости уменьшается

Задача 7. Проверьте план погашения основного долга равными годовыми уплатами, если величина займа D составляет 600 д.е., а процентная ставка i – 8%.

Уплаты	168.0	158.4	148.8	139.2	129.6
Годы	1	2	3	4	5

Решение. Величина займа D = 600 д.е. погашается равными долями в течении 5 лет. Проценты по долгу выплачиваются каждый год на остаток долга.

Таким образом, размер срочной уплаты в году с номером t равен

$Y_t = d + (D - (t-1)d) \cdot i$, где $d = D/n$, n – срок долга.

Исходные данные

$D := 600 \qquad n1 := 5 \qquad j := 0.08$

Решение MathCAD

$$d := \frac{D}{n1} \qquad d = 120$$

$$t := 1..n1$$

$$Y_t := d + [D - (t-1) \cdot d] \cdot j$$

$$Y = \begin{pmatrix} 168 \\ 158.4 \\ 148.8 \\ 139.2 \\ 129.6 \end{pmatrix}$$

Ответ. План погашения долга составлен верно.

Задача 8. Проверьте расчеты. Для инвестиционного проекта длительностью 6 лет с планируемыми годовыми доходами 400 д.е. и годовой ставкой 10% с найдены необходимые инвестиции — 1742 д.е.

Решение. Здесь рассматривается инвестиционный проект заданной длительности, с которой совпадает срок окупаемости. Проект должен обеспечивать заданный годовой доход.

В общем виде решение задачи таково: пусть R, n, i — размер последующего годового дохода (предполагается, что доходы от инвестиций начинают поступать после окончания вложений), длительность проекта и ставка процента. Какие нужны для обеспечения этого минимальные инвестиции?

Очевидно, что необходимые инвестиции есть $K = R\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$. Это значит, что чистый приведенный доход проекта равен 0, а внутренняя доходность совпадает со ставкой процента.

На основе этих заключений выполним компьютерные расчеты.

Запишем исходные данные:

$$R := 400 \qquad n1 := 6 \qquad j := 0.1$$

Решение MathCAD

$$K := R \cdot \frac{1-(1+j)^{-n1}}{j} \qquad K = 1.742104 \times 10^3$$

Ответ: Величина необходимых инвестиций составит 1742 д.е., т.е. расчеты проекта верны.

Задача 9. Некто получил наследство в виде солидного банковского счета K и теперь его «проедает», беря каждый год со счета в банке определенную сумму R и тратя ее в течение года. По сути, это «перевернутый» инвестиционный процесс. Что здесь является инвестициями, сроком окупаемости, внутренней нормой доходности, чистым приведенным доходом. Какие меры должен принять наследник при увеличении темпов инфляции? Расчеты выполнить для следующих исходных данных: K = 30 000 д.е., R =10 000 д.е., ставка i =10%.

Решение. В данном случае мы имеем "перевернутый" инвестиционный проект. В качестве инвестиций выступает счет в банке K, на который банк начисляет проценты по ставке i. В качестве доходов от инвестиций мы имеем сумму R, которую снимает наследник ежегодно в банке. Поэтому срок окупаемости такого «проекта» будет равен сроку, за который наследник снимет всю сумму в банке. Внутренняя норма доходности – это предельная ставка процента, при которой за определенный срок наследник снимет всю сумму в банке.

Итак, срок окупаемости n, т.е. срок в течение которого наследник снимет всю сумму, определится из уравнения $K = R \cdot \dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$, где i – ставка банковского процента. Отсюда получим $n = \dfrac{-\ln(1-i\cdot\frac{K}{R})}{\ln(1+i)}$. Внутренняя норма доходности «проекта» определяется из того же уравнения, в котором срок n задан и нужно определить i. Если срок "проекта" равен сроку окупаемости, то внутренняя норма доходности совпадает с банковской процентной ставкой, а чистый приведенный доход будет равен нулю.

Исходные данные

$$K := 30000 \qquad R := 10000 \qquad j := 0.1$$

Решение MathCAD

$$no := \frac{-\ln\left(1 - \frac{K \cdot j}{R}\right)}{\ln(1 + j)} \qquad no = 3.742254$$

т.е. наследник проест свое наследство за 4 года, причем в последний 4 год он получит сумму меньшую, чем 10000 д.е. Найдем эту сумму.

$$R \cdot \frac{1-(1+j)^{-4}}{j} = 3.169865 \times 10^{4}$$

Отсюда получим 31699 – 30000 = 1699 д.е. Таким образом, в последний год наследник получит не 10000 д.е., а на 1699 д.е. меньше, т.е. 10000 – 1699 = 8301 д.е.

Найдем внутреннюю норму доходности «проекта».

$$q := 0.001$$

$$f(q) := \left[R \cdot \frac{1-(1+q)^{-no}}{q} \right] - K$$

$$\mathrm{root}(f(q), q) = 0.1$$

Таким образом, внутренняя норма доходности совпадает со ставкой процента банка.

Если ставка процента будет больше 10%, например, 13%, то чистый приведенный доход будет равен

$$j := 13\%$$

$$W := \left[R \cdot \frac{1-(1+j)^{-no}}{j} \right] - K$$

$$W = -1.76511 \times 10^{3}$$

В инвестиционном проекте это значило бы, что проект убыточен, а в данном «перевернутом проекте» это означает, что у наследника на счету останется еще 1765 д.е.

Задача 10. Найдите курс облигации без погашения с периодической — раз в год — выплатой процентов при q = *8%* , i = *5%* . Вычислите доходность такой облигации, если ее курс равен K =120.

Решение. Выплаты по такой облигации можно рассматривать как вечную ренту.

Курс облигации по определению равен

$K = \frac{P}{N}100$, где P – рыночная цена облигации (цена покупки), N – номинал облигации. Рыночная цена облигации облигации без погашения с периодической выплатой процентов равна $P = \dfrac{N \cdot q}{i}$, где q – купонная ставка. Таким образом, курс равен $K = \dfrac{q}{i}100$. Доходность облигации равна $j = \dfrac{q}{K}100$.

Исходные данные

$$q := 0.08 \qquad j := 0.05 \qquad K1 := 120$$

Решение MathCAD

$$K := 100 \cdot \frac{q}{j} \qquad K = 160$$

$$j1 := 100 \cdot \frac{q}{K1} \qquad j1 = 0.066667$$

Ответ. Курс облигации при при q = 8% , i = 5% равен 160, доходность облигации при курсе 120 равна 6,67%.

Задача 11. Рассматривается 8% купонная облигация номиналом 1000 д.е., по которой обещают производить купонные выплаты дважды в году в течение 3-х лет. Безрисковые процентные ставки одинаковы для всех сроков и равны 10% годовых. Вычислить дюрацию и показатель выпуклости облигации.

Решение. Дюрация – это средняя продолжительность платежей. Дюрация облигации характеризует меру процентного риска облигации – чем больше дюрация, тем больше процентный риск облигации. Показатель выпуклости облигации – это вспомогательная характеристика. Показатель выпуклости облигации можно интерпретировать как показатель того, насколько точно дюрация облигации оценивает величину процентного риска облигации.

Дюрация D и показатель выпуклости C облигации рассчитываются по следующим формулам

$$D = \frac{1}{P}\sum_{k=1}^{m} t_k \frac{R_k}{(1+i)^{t_k}}, \quad C = \frac{1}{P}\sum_{k=1}^{m} t_k (t_k + 1)\frac{R_k}{(1+i)^{t_k}},$$

где $P = \sum\limits_{k=1}^{m} \dfrac{R_k}{(1+i)^{t_k}}$ – рыночная цена облигации; R_k – размер платежа в момент времени t_k; i – безрисковая процентная ставка; $m = n \cdot p$ – количество платежей по облигации до срока гашения облигации (здесь n – срок долга, p – количество платежей в год). Размер k-го платежа равен $R_k = \dfrac{N \cdot q}{p}$, где N – номинал облигации.

Исходные данные

$n1 := 3 \qquad p := 2 \qquad q := 8\%$

$N := 1000 \qquad j := 10\%$

Решение MathCAD

$n2 := n1 \cdot p$

$k := 1..\, n1 \cdot p$

$t_k := \frac{k}{p} \qquad R_k := N \cdot \frac{q}{p} \qquad R_{n2} := R_{n2} + N$

$$P := \sum_{k=1}^{n2} \frac{R_k}{(1+j)^{t_k}} \qquad D := \frac{\sum_{k=1}^{n2} \frac{t_k \cdot R_k}{(1+j)^{t_k}}}{P} \qquad C := \frac{\sum_{k=1}^{n2} \frac{t_k\left(t_k + 1\right) \cdot R_k}{(1+j)^{t_k}}}{P}$$

$D = 2.718466 \qquad C = 10.555657$

Ответ. Дюрация облигации равна 2,718 года, показатель выпуклости равен 10,555.

Задача 12. Рассчитать оптимальный портфель Марковица минимального риска для трех ценных бумаг с доходностями и рисками: (4,10); (10,40); (40,80); нижняя граница доходности портфеля m_p задана равной 15.

Решение. Портфель Марковица минимального риска формируется по следующей схеме.

Необходимо определить доли вложений x_j $(j = 1, 2, ..., n)$ в рисковые ценные бумаги, минимизирующие вариацию (риск) портфеля

$$V_p = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} V_{ij} x_i x_j$$

при условии, что обеспечивается заданное значение m_p ожидаемой эффективности портфеля

$$\sum_{j=1}^{n} m_j x_j \ge m_p .$$

Кроме того, должны быть выполнены дополнительные ограничения вида

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1,\ x_j \ge 0$$

при всех $j = 1, 2, ..., n$.

Здесь V_{ij} – элементы матрицы ковариации доходностей рисковых ценных бумаг ($i,\ j = 1, 2, ..., n$); n – количество видов ценных бумаг; m_j – доходность j-ой ценной бумаги.

Исходные данные

$$mp := 15 \qquad m1 := 3$$

$$m2 := \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 40 \end{pmatrix} \qquad r := \begin{pmatrix} 10 \\ 40 \\ 80 \end{pmatrix}$$

Решение MathCAD

$$Vp(x) := \left(r1_1\right)^2 \cdot x_1 + \left(r1_2\right)^2 \cdot x_2 + \left(r1_3\right)^2 \cdot x_3$$

$$x_3 := 0$$

Given

$$m2_1 \cdot x_1 + m2_2 \cdot x_2 + m2_3 \cdot x_3 \geq mp$$

$$\sum_{k=1}^{m1} x_k = 1$$

$$x \geq 0$$

$$x1 := \text{Minimize}(Vp, x) \qquad x1 = \begin{pmatrix} 0.694444 \\ 0 \\ 0.305556 \end{pmatrix}$$

$$m2^T \cdot x1 = (15)$$

$$Vp(x1) = 2.025 \times 10^3$$

$$\sqrt{Vp(x1)} = 45$$

Ответ. Доли бумаг в портфеле составляют (0,69;0;0,31), риск портфеля равен 45.