А.А. Мицель

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЭКОНОМИКА

Часть 2. Лабораторный практикум

Учебное пособие

ЮРГА 2016

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Юргинский технологический институт
Национального исследовательского Томского политехнического университета

Кафедра информационных систем

М.Ю. Катаев

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЭКОНОМИКА

Часть 2. Лабораторный практикум

Учебное пособие

2016

УДК 330.4(076.5)

Катаев М.Ю. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЭКОНОМИКА. ЧАСТЬ 2.
Лабораторный практикум
ТОМСК: Изд. Томский политехнический университет, 2016. – 71 с.

В пособии приводится описание 5 лабораторных работ по основным разделам математической экономики – наращение и дисконтирование платежей, потоки платежей, кредитные расчеты, инвестиционные процессы, доходность финансовой операции, облигации, оптимальный портфель. К каждой работе дается краткая теория, приводится описание задач и варианты заданий. На каждую тему приводится в среднем по 10 задач.
Пособие подготовлено для студентов, обучающихся по специальности 09.03.03 "прикладная информатика», профиль «прикладная информатика в экономике".

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Основная цель математической экономики как науки состоит в изучении того, как экономические агенты (лица и учреждения) распределяют ограниченные ресурсы во времени. Акцент именно на временном, а не на других видах распределения, изучаемых в экономике (по регионам, отраслям, предприятиям), является отличительной чертой математической экономики. Решения, принимаемые лицами по поводу временного распределения ресурсов, представляют собой финансовые решения. С точки зрения лица, принимающего такие решения, распределяемые ресурсы относятся либо к расходам (затратам), либо к доходам (поступлениям). Финансовые решения основываются на соизмерении стоимостей потоков расходов и доходов. В термине поток отражается временной характер распределения средств. Проблемы, касающиеся временного распределения ресурсов (в самом широком смысле), являются финансовыми проблемами.

Математическая экономика разрабатывает понятия и методы для решения финансовых проблем. Как и любая другая теория, она строит модели реальных финансовых процессов. Поскольку такие основные элементы, как время, стоимость, риск, а также критерии для выбора желаемого распределения ресурсов получают количественное выражение, то эти модели по необходимости носят характер математических моделей. Большинство моделей, изучаемых в современной финансовой теории, имеют ярко выраженный математический характер.

Целью изучения данной дисциплины является усвоение теоретических знаний и приобретение навыков применения методов количественного анализа финансовых операций: наращение и дисконтирование; потоки платежей, ренты; инвестиционные процессы; ценные бумаги; портфель ценных бумаг.

В пособии описаны 5 лабораторных работ по курсу "Математическая экономика". Вычисления проводятся с помощью математического пакета MathCAD. По каждой лабораторной работе составляется отчет. Отчет должен состоять из титульного листа установленной формы, задания и основной части. Основная часть содержит, как правило, следующие разделы: краткая теория, результаты счета и экономическая интерпретация. Примеры выполнения лабораторных работ даны в приложении.

Лабораторная работа № 1

Наращение и дисконтирование

1.1. Наращение простых процентов

Основные термины — единичный промежуток начисления и ставка процента. Ставку процента обозначаем за i. Фиксируем какую - нибудь сумму P_0. При наращении простых процентов по ставке i каждая следующая сумма больше предыдущей на долю i от начальной суммы P_0, т.е. на iP_0. К концу единичного промежутка начисления сумма P_0 возрастет на iP_0 и станет $S_1 = P_0 + iP_0 = P_0(1+i)$, к концу 2-го промежутка начисления эта сумма возрастет еще на iP_0 и станет $S_2 = P_1 + iP_0 = P_0(1+2i)$ и т.д. К концу n-го промежутка начисления наращенная сумма станет $S_n = P_0(1+n \cdot i)$. Таким образом, последовательность наращенных сумм $P_0, S_1, S_2, ..., S_n$ есть арифметическая прогрессия с начальным членом P_0 и разностью iP_0. Величина $(1+n \cdot i)$ называется множителем наращения по простым процентам, а $S_n = P_0(1+n \cdot i)$ – наращенной суммой по схеме простых процентов.

1.2. Наращение сложных процентов

При наращении сложных процентов по ставке i каждая следующая сумма возрастает на долю i от предыдущей. Таким образом, к концу единичного промежутка начисления сумма P_0 возрастет на долю i и станет $S_1 = P_0 + iP = P_0(1+i)$, к концу 2-го промежутка начисления эта сумма возрастет еще на долю i от P_1 и станет $S_2 = P_1 + iP_1 = P_0(1+i) + iP_0(1+i) = P_0(1+i)^2$ и т.д. К концу n-го промежутка начисления наращенная сумма станет $S_n = P_0(1+i)^n$. Таким образом, последовательность наращенных сумм $P_0, S_1, S_2, ..., S_n$ есть геометрическая прогрессия с начальным членом P_0 и знаменателем прогрессии $(1+i)$. Множитель $(1+i)^n$ называется множителем наращения по схеме сложных процентов, а величина $S_n = P_0(1+i)^n$ называется наращенной суммой сложных процентов.

1.3. Номинальная и эффективная ставки процентов

Номинальная ставка. На практике часто при объявлении условий финансовой операции оговаривается годовая ставка процентов и указывается количество выплат процентов в год (например, может быть ежеквартальное начисление - четыре раза в год). В этом случае используют понятие **номинальной ставки,** обозначим ее символом j. Пусть количество выплат процентов в год равно m. Тогда начисление процентов осуществляется по ставке j/m, а общее количество интервалов выплат за n лет будет равно $m \cdot n$. Наращенная сумма определяется по формуле

$$S = P_0(1+\frac{j}{m})^{m\cdot n}.$$

Таким образом, номинальная ставка - это годовая ставка процентов при начислении процентов m раз в год.

Эффективная ставка – это годовая ставка процентов, начисляемых один раз в год, которая дает тот же финансовый результат, что и m – разовое начисление в год с использованием номинальной ставки j. Таким образом, по определению, должно выполняться равенство множителей наращения

$$(1+i) = (1+\frac{j}{m})^{m},$$

где i – эффективная ставка. Отсюда получаем

$$i = (1+\frac{j}{m})^{m} - 1.$$

Замена в договоре номинальной ставки j при начислении процентов m раз в год на эффективную ставку по формуле не меняет финансовых обязательств сторон.

1.4. Дисконтирование по простой и сложной ставке процентов

Зная сумму S, которая может быть получена через n лет при начислении процентов по годовой ставке i, определить первоначальную сумму P.

Для сложной ставки процентов получим

$$P = \frac{S}{(1+i)^n} = S\cdot v^n,$$

где $v^n = \dfrac{1}{(1+i)^n}$ — дисконтный множитель (множитель дисконтирования).

Если проценты начисляются m раз в год с использованием номинальной ставки j, то

$$P = \frac{S}{(1+\frac{j}{m})^{m\cdot n}} = S\cdot w^{m\cdot n},$$

где дисконтный множитель $w^{m\cdot n} = \dfrac{1}{(1+\frac{j}{m}i)^{m\cdot n}}$.

Величина P называется **современной** или **приведенной** величиной суммы S. Дисконтирование имеет следующий экономический смысл. Платеж в сумме S через n лет равноценен сумме P, выплачиваемой в настоящий момент времени.

Разность $S-P$ называется **дисконтом** суммы S, обозначим эту величину символом D. Из предыдущих формул следует, что $D=S(1-v^n)$, если проценты начисляются один раз в год, и $D=S(1-w^{m\cdot n})$, если проценты начисляются m раз в год.

Для простой ставки процентов имеем $P=\frac{S}{(1+i\cdot n)}$. Дисконтный множитель равен $v=\frac{1}{(1+i\cdot n)}$.

1.5. Дисконтирование и наращение по учетной ставке

Сформулируем задачу банковского дисконтирования. По заданной сумме S, которая будет выплачена через n периодов, требуется определить сумму займа P в настоящий момент, при котором проценты за пользование ссудой выплачиваются заранее, в момент предоставления денег в долг $t=0$. Для начисления и удержания процентов применяется учетная ставка d.

1) Простая ставка дисконтирования d.

Имеем: $t=n$ – момент погашения суммы S_n. Современная величина суммы S_n равна при банковском учете по простой ставке d равна

$$P_0=S_n(1-d\cdot n).$$

Это выражение означает, что в обмен на выплату суммы S_n через время n кредитор даст взаймы сумму $S_n(1-d\cdot n)$ в начале этого срока. Формула справедлива, если срок долга n и учетная ставка d удовлетворяют условию $n\cdot d<1$. Дисконтирование по простой учетной ставке применяют, как правило, в случае краткосрочных сделок, когда $0<n\leq 1$.

Наращенная сумма равна $S_n=\frac{P_0}{(1-d\cdot n)}$.

2) Дисконтирование по сложной учетной ставке дает следующее выражение для современной величины: $P_0=S_n(1-d)^n$. Выражение для наращенной величины S_n имеет вид $S_n=\frac{P_0}{(1-d)^n}$.

При начислении процентов m раз в год по годовой ставке g формулы для современной величины и наращенной суммы приобретают вид:

$$P_0=S_n(1-\frac{g}{m})^{nm},\ S_n=\frac{P_0}{(1-\frac{g}{m})^{nm}}.$$

1.6. Влияние инфляции на ставку процента

Говорят, что инфляция (или темп инфляции) составляет долю α в год, если один и тот же набор товаров стоит в конце года в (1+α) раз больше, чем в начале этого года. Можно также сказать, что в (1+α) раз уменьшилась покупательная способность одной денежной единицы.

Ясно, что инфляция уменьшает реальную ставку процента. Это будет уже ставка процента с учетом инфляции. Действительно, одна денежная единица возрастает за год в (1+i) раз из-за наращения процентов, но ее покупательная способность уменьшается в (1+α) раз из-за инфляции. Таким образом, ее реальная ценность — покупательная способность — станет (1+i)/(1+α), а годовая реальная ставка есть $r = \dfrac{1+i}{1+\alpha} - 1 = \dfrac{i-\alpha}{1+\alpha}$. Видно, что при малой инфляции (когда α мало) реальная процентная ставка меньше номинальной приблизительно на величину инфляции. Для того чтобы номинальная ставка i обеспечивала наращение реальной ценности денежных сумм на долю r в год при годовой инфляции α, темп инфляции должен удовлетворять уравнению: (i - α)/(1 + α) = r, откуда $i = \alpha + r(1+\alpha)$.

1.7. Варианты заданий

1. В банк помещен депозит в размере A = 5000 руб. По этому депозиту в первом году будет начислено i_1 = 10% , во втором - i_2 = 12%, в третьем - i_3= 15%, в четвертом и пятом -$i_4 = i_5$ = 16% годовых. Сколько будет на счету в конце пятого года? Сколько надо было бы поместить на счет при постоянной процентной ставке i = 13%, чтобы обеспечить ту же сумму. Расчеты провести для простой и сложной процентной ставки.

Решить аналогичную задачу, взяв данные из таблицы 1.1.

Таблица 1.1

Вариант	A, руб.	i_1, %	i_2, %	i_3, %	i_4, %	i_5, %	i, %
1	1000	3	4	5	6	7	5
2	2000	4	6	7	8	9	7
3	3000	5	6	7	9	10	9
4	4000	6	7	8	8	9	6
5	5000	7	7	8	8	10	7
6	6000	8	9	10	11	12	11
7	7000	9	9	10	11	12	9
8	8000	10	10	11	12	10	5
9	9000	11	12	13	14	15	4
10	10000	12	13	14	15	16	6
11	11000	13	14	15	16	16	8
12	11500	10,5	11,5	12,5	13,6	14,7	9
13	12000	14	15	15	16	17	9
14	12500	14	15	15	16	17	9,5
15	13000	12,5	13,5	14,5	15,5	16,5	10

2. У вас просят в долг P = 10000 руб. и обещают возвращать по

A = 2000 руб. в течение N=6 лет. У вас есть другой способ использования этих денег: положить их в банк под 7% годовых и каждый год снимать по A = 2000 руб. Какая финансовая операция будет более выгодна для вас? Расчеты провести для простой и сложной процентной ставки.

Решить аналогичную задачу, взяв данные из таблицы 1.2.

Таблица 1.2

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
N, лет	7	8	9	10	11	7	8	9	10	11	3	7	5	6	4
P, тыс.руб.	170	200	220	300	350	210	250	310	320	360	10	10	160	240	200
A, тыс.руб.	32	31	33	45	41	32	37	48	35	41	4,0	1,6	20	25	30

3. У вас есть возможность инвестировать проект стоимостью A = 10000 руб. Через год будет возвращено P_1 = 2000 руб., через два года - P_2 = 4000 руб., через три года - P_3 = 7000 руб. Альтернативный вариант - положить деньги в банк под i процентов годовых. При какой годовой процентной ставке выгоднее вложить деньги в инвестиционный проект? Расчеты провести для простой и сложной процентной ставки.

Решить аналогичную задачу, взяв данные из таблицы 1.3.

Таблица 1.3

Вариант	N, лет	A, руб.	P_1, руб.	P_2, руб.	P_3, руб.	P_4, руб.	P_5, руб.
1	3	17000	5000	7000	8000		
2	4	20000	6000	6000	9000	7000	
3	5	22000	5000	8000	8000	7000	5000
4	3	30000	5000	10000	18000		
5	4	35000	5000	9000	10000	18000	
6	5	21000	4000	5000	8000	10000	11000
7	3	25000	8000	9000	10000		
8	4	31000	9000	10000	10000	15000	
9	5	32000	8000	10000	10000	10000	11000
10	3	36000	10000	15000	21000		
11	4	26000	7000	10000	11000	10000	
12	5	40000	8000	12000	15000	15000	16000
13	5	35000	8000	9000	0	20000	10000

14	4	20000	0	10000	10000	10000	
15	5	45000	10000	10000	20000	0	10000

4. При какой ставке сложных процентов за 9 лет сумма увеличится в k раз, если k = 2?

Решить аналогичную задачу, взяв данные из таблицы 1.4.

Таблица 1.4

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
k	1,5	2	2,5	3	3	3,4	3,5	3,7	4	4,4	4,5	4,8	5	5,5	5,8
n, лет	9	10	12	12	15	15	16	16	17	18	18	18	20	20	20

5. В день рождения внука бабушка положила в банк сумму A = $3000 под 3% годовых. Какой будет сумма к семнадцатилетию внука? Расчеты провести для простой и сложной процентной ставки.

Решить аналогичную задачу, взяв данные из таблицы 1.5.

Таблица 1.5

Вариант	A, $	n, лет	i, %
1	3100	17	3
2	3200	17	3
3	3300	18	3,5
4	3400	18	3,5
5	3500	19	4
6	3600	19	4
7	3700	20	4,5
8	3800	20	4,5
9	1900	21	5
10	5000	22	5
11	2100	22	5,5
12	5200	23	5,5
13	5300	24	5,5
14	5400	25	6
15	5500	25	6

6 Какую ставку должен назначить банк, чтобы при годовой инфляции h = 12% реальная ставка оказалась равной 6%?

Решить аналогичную задачу, взяв данные из таблицы 1.6.

Таблица 1.6

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
h, %	9	10	10	10	11	11	11	12	12	13	13	13	14	14	14
r, %	4	4	5	6	4	5	6	5	7	5	6	7	7	8	9

7. По договору зафиксирован платеж через 3 года в размере 1000д.е. Через год процентная ставка увеличилась. Кому это выгодно: тому, кому будут платить, или тому, кто будет платить?

8. На вклад начисляются сложные проценты по годовой ставке 8 % . Проценты за 6-й год вклада (N_1 =6) составили I_6 =117,546 д.е. Какова величина процентов за 3-й (N_2 =3) и 8-й (N_3 =8) годы вклада? Какова сумма вклада к концу N_3 =8-го года?

Решить аналогичную задачу, взяв данные из таблицы 1.7.
Таблица 1.7.

Вариант	i ,%	I_6 , д.е.	N_1 , лет	N_2 , лет	N_3 , лет
1	8,8	134,161	6	3	8
2	8,5	127,811	6	3	8
3	7	98,179	6	3	8
4	7,5	107,672	6	3	8
5	6	80,294	6	3	8
6	6,5	89,055	6	3	8
7	5,5	71,883	6	3	8
8	9	138,476	6	4	9
9	9,5	149,552	6	4	8
10	10	161,051	6	2	8
11	7,7	111,575	6	4	7
12	6,7	92,661	6	3	9
13	9,8	156,401	6	4	9
14	8,4	125,726	6	4	8
15	7,1	100,047	6	3	7

9. Сравнить темпы наращения суммы долга по простым процентным ставкам i и d , полагая их равными. Результат сравнения показать на рисунке в виде кривых наращения. Покажите на рисунке величину дохода кредитора, считая заданным срок долга. Для каждой из процентных ставок i и d сделать расчеты суммы погашаемого долга в следующей кредитной операции: ссуда в A =10 тыс. д.е. выдана под ставку i =12 % годовых с ежемесячным начислением простых процентов. Рассчитать суммарный доход кредитора как функцию времени и ежемесячный доход. Максимальный срок долга взять 18 месяцев. Сравнить для ставок i и d доход кредитора за каждый месяц и весь срок долга. Соответствуют ли результаты расчетов построенным кривым? Какой можно сделать вывод?

Решить аналогичную задачу, взяв данные из таблицы 2.8.

Таблица 2.8

Вариант	A , тыс. д.е.	i , %
1	10	10
2	10,5	11
3	11	9
4	11,5	10
5	12	12
6	12,5	12,5
7	13	13
8	13,5	12

9	14	11
10	14,5	11,5
11	15	10,5
12	15,5	10
13	16	11
14	16,5	12
15	17	14

10. Сравнить скорости дисконтирования по простым ставкам i и d. Нарисовать дисконтные кривые. На рисунке показать величину дисконта, считая заданным срок долга. Сравнить результаты учета векселя с суммой гашения N=300 тыс. д.е. методами математического и банковского дисконтирования простыми процентами под i=6 % годовых. На какую сумму был бы учтен вексель каждым из методов за различные сроки до погашения. Рассчитать суммарный доход кредитора как функцию времени и ежемесячный доход. Максимальный срок долга взять 18 месяцев. Соответствуют ли результаты расчетов построенным кривым?

Решить аналогичную задачу, взяв данные из таблицы 2.9.

Таблица 2.9

Вариант	N, тыс.д.е.	i,%
1	300	7
2	310	6
3	320	7,5
4	330	7,5
5	340	6
6	350	6,5
7	360	5.5
8	370	9
9	380	9,5
10	390	10
11	400	6
12	410	7
13	420	8
14	430	9
15	440	10

Лабораторная работа № 2

Потоки платежей. Ренты.

2.1. Основные определения

Поток платежей — это последовательность величин самих платежей (со знаками) и моментов времени, когда они осуществлены.

Платеж со знаком плюс, который может быть опущен, — это поступление, платежи со знаком минус представляют собой выплаты.

Поток называется конечным или бесконечным в зависимости от количества платежей в нем.

Пусть $Q = \{R_k, t_k\}$ — поток платежей, в нем t_k — моменты времени, R_k — платежи. Кроме того, предполагается, что известна ставка процента i, обычно неизменная в течение всего потока.

Современной величиной потока платежей называется сумма платежей потока, дисконтированных к начальному моменту времени $A = \sum_{k=1}^{n} \frac{R_k}{(1+i)^{t_k}}$.

Наращенной величиной потока платежей называется сумма платежей потока, наращенных к конечному моменту времени $S = \sum_{k=1}^{n} R_k \cdot (1+i)^{t_k}$.

Пример. Пусть поток есть $Q = \{(-2000,1);\ (1000,2);\ (2000,3)\}$.

Найдем характеристики этого потока при ставке процента i = 10%.

Сначала найдем современную величину потока:

$A = -2000 \cdot (1+0.1)^{-1} + 1000 \cdot (1+0.1)^{-2} + 2000 \cdot (1+0.1)^{-3} = 510.8$.

Теперь можно наращенную величину потока: $S = A \cdot (1+i)^3 = 679.8$. ◊

Поток положительных платежей с постоянными промежутками между ними называется рентой. Часто сами платежи также являются одинаковыми. Далее рассматриваются только ренты с одинаковыми платежами. Рента называется **годовой,** если ее период равен одному году. Рента называется p– срочной, если ее период меньше года и количество платежей в год равно p. Ренты бывают **немедленные и отложенные (отсроченные).** Срок немедленных рент начинается с момента заключения контракта. Если рента отложенная, то срок начала выплат отодвигается на какое-то время.

Если платежи осуществляются в конце периода, то такая рента называется **обычной** или **постнумерандо.** Если выплаты осуществляются в начале периода, то такая рента называется **пренумерандо.**

2.2. Наращенная и современная величины ренты

Наращенная величина S годовой ренты определяется по формуле

$$S = R \cdot s_{n,i},$$

где R – размер платежа, $s_{n,i}$ – коэффициент наращения ренты, определяемый следующими соотношениями:

- для ренты постнумерандо при начислении процентов по сложной ставке

$$s_{n,i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i};$$

- для ренты пренумерандо при начислении процентов по сложной ставке

$$s_{n,i} = (1+i)\frac{(1+i)^n - 1}{i};$$

- для ренты постнумерандо при начислении процентов по простой ставке

$$s_{n,i} = \left[n + i\frac{n \cdot (n-1)}{2}\right];$$

- для ренты пренумерандо при начислении процентов по простой ставке

$$s_{n,i} = \left[n + i\frac{n \cdot (n+1)}{2}\right],$$

где n – срок ренты, i – процентная ставка.

Для p-срочной ренты постнумерандо при начислении процентов по номинальной ставке j коэффициент наращения определяется соотношением

$$s^{(p)}_{n,j/m} = \frac{(1+\frac{j}{m})^{mn} - 1}{p\left[(1+\frac{j}{m})^{\frac{m}{p}} - 1\right]},$$

а для ренты пренумерандо – $s^{(p)}_{n,j/m} = (1+\frac{j}{m})^{\frac{m}{p}} \dfrac{(1+\frac{j}{m})^{mn} - 1}{p\left[(1+\frac{j}{m})^{\frac{m}{p}} - 1\right]}$. Здесь m – количество начислений процентов в год.

Для современной величины A имеем следующее соотношение:

$$A = R \cdot a_{n,i},$$

где коэффициент приведения $a_{n,i}$ определяется формулами:

- для ренты постнумерандо при начислении процентов по сложной ставке

$a_{n,i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$. При $n \to \infty$ получим современную величину вечной ренты $A = \frac{R}{i}$.

- для ренты преумерандо при начислении процентов по сложной ставке

$$a_{n,i} = (1+i)\frac{1-(1+i)^{-n}}{i};$$

- для ренты постнумерандо при начислении процентов по простой ставке

$$a_{n,i} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+i \cdot k};$$

- для ренты пренумерандо при начислении процентов по простой ставке

$$a_{n,i} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+i \cdot k},$$

Для p-срочной ренты постнумерандо и пренумерандо при начислении процентов по номинальной ставке j коэффициент приведения рассчитывается по формулам

$$a_{n,j/m}^{(p)} = \frac{1-(1+\frac{j}{m})^{-mn}}{p\left[(1+\frac{j}{m})^{\frac{m}{p}} - 1\right]}, \qquad a_{n,j/m}^{(p)} = (1+\frac{j}{m})^{\frac{m}{p}} \frac{1-(1+\frac{j}{m})^{-mn}}{p\left[(1+\frac{j}{m})^{\frac{m}{p}} - 1\right]}.$$

Пример. Бизнесмен арендовал виллу за $10 000 в год. Какова выкупная цена аренды при годовой ставке процента 5%?

Решение. Эта выкупная цена есть современная величина всех будущих арендных платежей и равна $A = R/i = 10000/0.05$ = 200 000 долл. Между прочим, это в точности годовые процентные деньги, которые стал бы получать арендодатель с $200 000, помещенных в банк под упомянутую процентную ставку.

2.3. Варианты заданий

1. Вычислить размер платежа n - годичной ссуды покупки квартиры за A рублей с годовой ставкой i процентов и начальным взносом q процентов. Сделать расчет для ежемесячных и ежегодных выплат.

Расчет провести для следующих данных: n = 20 лет; A = 1 400 000 руб.; i = 18%; q = 30%.

Расчеты выполнить для сложной процентной ставки.

Решить аналогичную задачу, взяв данные из таблицы 2.1.

Таблица 2.1.

Вариант	n, лет	A, руб.	i, %	q, %
1	15	1 300 000	15	10
2	15	1 350 000	13	15
3	15	1 400 000	17	10
4	20	1 450 000	18	10
5	20	1 500 000	20	15
6	20	2 300 000	17	15
7	25	2 400 000	18	10
8	25	2 500 000	10	30
9	25	2 600 000	16	20
10	30	3 600 000	19	30
11	25	4 000 000	15	20
12	20	4 500 000	14	15
13	25	5 000 000	15	20
14	30	5 500 000	10	20
15	25	6 000 000	10	20

2. Семья хочет через n = 6 лет купить дачу за $20 000. Какую сумму (одинаковую) ей нужно каждый год из этих 6 лет добавлять на свой счет в банке, чтобы накопить $120 000, если годовая ставка процента в банке 10%?
Расчеты выполнить для сложной процентной ставки.

Решить аналогичную задачу, взяв данные из таблицы 2.2.

Таблица 2.2

Вариант	n, лет	S,$	i, %
1	4	8 000	6
2	4	10 000	5
3	4	12 000	5
4	5	10 000	4
5	5	15 000	5
6	5	16 000	6
7	4	15 000	5
8	5	18 000	4
9	5	20 000	5
10	4	25 000	6
11	3	20 000	7
12	3	24 000	8
13	4	30 000	9
14	4	35 000	10
15	4	40 000	11

3. На банковский счет писателя издательство перечисляет суммы R руб. p раз в год, на которые банк начисляет сложные проценты по годовой ставке i % m раз в год. Сколько будет на счете через n лет?

Расчет провести для следующих данных: p = 2; R = 2000 руб..; m=2; i = 7%; n=4 года.

Решить аналогичную задачу, взяв данные из таблицы 2.3

Таблица 2.3.

Вариант	p	R, руб.	m	i, %	n, лет
1	2	1000	1	5	4
2	1	1100	2	6	5
3	2	1200	2	5	5
4	3	1500	2	7	7
5	2	1800	3	8	3
6	4	2000	4	7	5
7	4	2100	2	6	3
8	2	2200	4	5	4
9	4	2500	3	8	6
10	3	3000	4	9	5
11	2	2500	4	10	4
12	4	1500	2	11	3
14	6	2000	2	12	4
15	4	2500	2	10	2

4. В ходе судебного заседания выяснилось, что г. N недоплачивал налогов R=1000 руб. ежемесячно. Налоговая инспекция хочет взыскать недоплаченные за последние n=2 года налоги вместе с процентами (i=3% ежемесячно). Какую сумму должен заплатить г. N? Расчеты провести сложной процентной ставки.

Решить аналогичную задачу, взяв данные из таблицы 2.4.

Таблица 2.4.

Вариант	R, руб.	i, %	n, лет
1	500	1	5
2	600	1	4
3	700	1	3
4	800	2	2
5	900	2	5
6	1 100	3	4
7	1 200	2	3
8	1 300	1	2
9	1 400	2	4
10	1 500	3	3
11	1 000	2	4
12	1 100	2	4
13	1 000	1	3
14	1 200	2	5
15	1 300	1	6

5. Определить процентную ставку для n - летнего займа в A рублей с ежегодной выплатой в R рублей.

Решить задачу для следующих исходных данных: n = 10 лет, A = 100 000 руб., R = 16 981 руб. Расчеты провести сложной процентной ставки.

Решить аналогичную задачу, взяв данные из таблицы 2.5.

Таблица 2.5

Вариант	A, руб.	R, руб.	n, лет
1	50 000	8850	10
2	60 000	11 660	8
3	70 000	12 150	9
4	80 000	14 730	9
5	90 000	19 100	7
6	100 000	14 700	11
7	110 000	15 360	12
8	120 000	15 600	13
9	130 000	22 570	9
10	140 000	27 210	8
11	140 000	30 000	8
12	135 000	30 000	9
13	150 000	30 000	10
14	140 000	25 000	10
15	100 000	20 000	10

6. Сын в банке имел на счете A=500 000 руб., на которые ежемесячно начислялись i=0,8%. Сын уехал в десятилетнюю командировку за границу, доверив отцу за n=10 лет истратить весь его счет. Сколько будет получать в месяц отец? Расчеты провести для сложной процентной ставки.

Решить аналогичную задачу, взяв данные из таблицы 2.6.

Таблица 2.6.

Вариант	A, руб.	i, %	n, лет
1	300 000	1	5
2	350 000	0,9	5
3	380 000	0,8	6
4	400 000	0,7	6
5	450 000	0,7	7
6	470 000	0,8	7
7	500 000	0,9	8
8	550 000	1	9
9	600 000	0,6	10
10	700 000	0,5	12
11	800 000	1	13
12	900 000	1	14
13	950 000	1	14
14	800 000	1	15
15	700 000	1	10

7. Покупатель предложил два варианта расчетов при покупке дачи: 1) R_1=$5000 немедленно и затем по R_2=$1000 в течение n=5 лет; 2) R_3=$8000 немедленно и по R_4=$300 в течение n=6 лет. Какой вариант выгоднее при годовой ставке процента: а) i_1=8% , б) i_2= 3% . Расчеты провести для сложной процентной ставки.

Примечание. Расчеты выполняются для ставки i_1 для двух вариантов и для ставки i_2 для двух вариантов.

Решить аналогичную задачу, взяв данные из таблицы 2.7.

Таблица 2.7.

Вариант	R_1,$	R_2,$	R_3,$	R_4,$	n, лет
1	3000	800	6000	100	3
2	3500	1100	6500	400	3
3	4000	1200	7000	500	4
4	4300	1500	7300	800	4
5	5000	1300	8000	600	4
6	5500	1400	8500	700	5
7	6000	750	9000	50	5
8	6500	1000	9500	300	6
9	7000	1100	10000	400	6
10	8000	2000	11 000	1300	4
11	7500	1000	10500	300	4
12	8500	1100	11500	400	5
13	9000	1200	12000	500	6
14	9500	1300	12500	600	5
15	9050	1400	12050	700	4

8. Рассмотрим годовую ренту при n = 10 лет, i = 10%. Что более увеличит наращенную величину ренты: увеличение длительности на 1 год (Δn=1 год) или увеличение процентной ставки на 1% (Δi=1%)? Расчеты провести сложной процентной ставки.

Решить аналогичную задачу, взяв данные из таблицы 2.8.

Таблица 2.8.

Вариант	n, лет	i, %	Δn, лет	Δi, %
1	7	7	2	2
2	8	8	2	2
3	9	9	2	2
4	10	10	2	2
5	11	11	2	2
6	12	12	1	1
7	13	13	1	1
8	14	14	1	1
9	15	15	1	1

10	16	16	1	1
11	10	15	2	2
12	11	14	2	2
13	12	13	2	2
14	14	12	2	2
15	15	11	2	2

9.. Каким должен быть платеж конечной годовой ренты длительностью n =8 лет, чтобы ее современная величина была A =16 000 руб. при ставке i =10%? Расчеты провести для сложной процентной ставки.

Решить аналогичную задачу, взяв данные из таблицы 2.9.

Таблица 2.9.

Вариант	A, руб.	n, лет	i, %
1	10 000	5	10
2	11 000	6	8
3	12 000	7	9
4	13 000	8	11
5	15 000	9	12
6	18 000	10	11
7	20 000	6	9
8	22 000	7	9
9	25 000	9	12
10	30 000	11	13
11	28 000	12	12
12	40 000	13	10
13	45 000	14	15
14	30 000	12	15
15	35 000	14	14

10. Провести детальный анализ ренты длительностью 4 года, годовым платежом R = 1000 д.е. и переменной процентной ставкой: i_2 =5% во 2-м году, i_3 =8% — в 3-м, i_4 =10% — в 4-м году. Определить современную величину этой ренты. Расчеты провести для простой и сложной процентной ставки.

Решить аналогичную задачу, взяв данные из таблицы 2.10.

Таблица 2.10

Вариант	R, д.е.	i_2, %	i_3, %	i_4, %
1	500	4	6	10
2	800	5	7	12
3	900	3	7	9
4	1100	5	8	13
5	1200	4	7	10
6	1300	5	8	11
7	1400	6	8	10
8	1500	4	7	9

9	1600	4	6	8
10	1650	3	5	8
11	1700	3	5	8
12	1700	3	5	9
13	1750	4	5	8
14	1800	3	5	10
15	1850	3	5	8

Лабораторная работа № 3

Доходность финансовой операции

Финансовой называется операция, начало и конец которой имеют денежную оценку – P_0 и S_n соответственно, а цель проведения которой заключается в максимизации разности $S_n - P_0$. Важнейшей характеристикой операции является ее доходность.

В определении под P_0 понимают реально вложенные средства в момент t = 0, под S_n – реально вырученные денежные средства в результате операции, срок которой n единиц времени. Эффект от вложения естественно измерять в виде процентной ставки наращения, которую в этом случае называют доходностью.

3.1. Различные виды доходности операций

Абсолютная доходность d за весь срок операции определяется из уравнения $P_0(1+d) = S_n$ или $d = (S_n - P_0)/P_0 = S_n / P_0 - 1$. Величина S_n / P_0 называется коэффициентом или множителем наращения. Ясно, что $S_n / P_0 = 1 + d$.

Средняя доходность r финансовой операции (доходность за единицу времени) – это ставка простых или сложных процентов, с помощью которой измеряют эффективность финансовой операции.

Согласно определению, доходность финансовой операции за единицу времени - это положительное число r , удовлетворяющее равенству:

$$P_0(1 + r \cdot n) = S_n$$

или

$$P_0(1+r)^n = S_n .$$

Из этих выражений найдем связь между d и r : $1 + r \cdot n = 1 + d$ (для простой ставки) и $(1+r)^n = 1 + d$ (для сложной ставки). Если время измеряется в годах, то r - среднегодовая доходность операции.

Таким образом, финансовой операции ставится в соответствие эквивалентная операция наращения суммы P_0 по ставке r в течение времени n .

3.2. Учет налогов

Налоги и инфляция заметно влияют на эффективность финансовой операции. Рассмотрим учет налогов. Налог начисляется, как правило, на проценты, получаемые при размещении денежной суммы в рост. Предположим, на сумму P_0 в течение времени n начислялись проценты по ставке i , g - ставка налога на проценты. Тогда величина процентов

$$I(n) = S_n - P_0 ,$$

а сумма налога $G_n = g \cdot I(n)$. Наращенная сумма после выплаты налога составляет

$$S(n) = S_n - G_n = S_n - g \cdot I(n) = S_n - g \cdot (S_n - P_0) = S_n(1-g) + gP_0 .$$

Если i - простая процентная ставка, то $S_n = P_0(1 + i \cdot n)$. Тогда

$$S(n) = P_0(1 + i \cdot (1-g)n) .$$

Видим, что фактически наращение производится по ставке $i(1-g)<i$.

Если i – сложная процентная ставка, то $S_n = P_0(1+i)^n$. Тогда

$$S(n) = P_0\left((1+i)^n(1-g)+g\right).$$

Пример. При выдаче кредита на 2 года под годовую сложную процентную ставку 0,08 кредитор удерживает комиссионные в размере 0,5% от суммы кредита. Ставка налога на проценты 10%. Какова доходность операции для кредитора?

Если P_0 - сумма кредита, а S_n - сумма погашаемого долга, то $S_n = P_0(1+i)^n$, где i = 0,08 , n = 2. Сумма комиссионных cP_0, где c = 0,005. Тогда сумма, фактически выданная в долг, составит $P(0) = P_0(1-c)$. После выплаты налога у кредитора останется $S(n) = P_0\left((1+i)^n(1-g)+g\right)$, где g = 0,1 - ставка налога. Уравнение доходности имеет вид $S(n) = P(0)(1+r)^n$. Разрешая это уравнение относительно r, получим

$$r = \left(\frac{S(n)}{P(0)}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 = \left(\frac{(1+i)^n(1-g)+g}{1-c}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 = 0,07496.$$

Заметим, что без учета налога (g = 0) доходность операции составила бы 0,08271.

3.3. Учет инфляции

Инфляция – обесценение денег, проявляющееся в росте цен на товары и услуги, что влечет за собой снижение покупательной способности денег.

Предположим, что за n единиц времени получена наращенная сумма вклада S_n. Индекс цен за период $[0,n]$ вырос до значения $J(n)$. Тогда реальная сумма вклада вследствие снижения покупательной способности денег составит

$$S(n) = \frac{S_n}{J(n)},$$

где $J(n) = (1+h_1)^{(t_1-t_0)} \cdot (1+h_2)^{(t_2-t_1)} \cdots (1+h_n)^{(t_n-t_{n-1})}$ – индекс цен на интервале $[0,n]$; $[0,t_1]$, … , $[t_{n-1},t_n]$ - отрезки времени в сроке $[0,n]$ ($t_0 = 0,\ t_n = n$), длины которых $(t_1-t_0),(t_2-t_1),...,(t_n-t_{n-1})$ единиц времени; h_i ($i=1,...,n$) – темп инфляции на отрезке $[t_{i-1},t_i]$ (измеряется в процентах).

Так как $J(n)>1$, то $S(n)<S_n$, что означает фактическое снижение ставки наращения.

Пример. Ожидаемый годовой темп инфляции первых двух лет вклада составляет 3%, а следующих трех - 4%. Какую минимальную годовую ставку сложных процентов должен предложить банк клиенту, чтобы реальная годовая доходность вклада была не меньше 8% ?

Здесь $t=0$ - момент размещения вклада, 1 год - единица измерения времени, срок вклада n = 5 лет. h_1 = 0,03 и h_2 = 0,04 – среднегодовые темпы инфляции на временных отрезках [0,2], [2,5]. Для доходности по вкладу r должно быть выполнено условие: $r \ge 0.08$. Пусть i - годовая сложная процентная ставка, под которую размещена сумма P_0. Тогда наращенная сумма вклада через n лет $S_n = P_0(1+i)^n$. С учетом инфляции реальная сумма вклада составит $S(n) = \frac{S_n}{J(n)}$, где индекс цен согласно равен $J(t) = (1+h_1)^2 \cdot (1+h_2)^3$. Уравнение доходности имеет вид: $S(n) = P(0)(1+r)^n$. Разрешая это уравнение относительно r и учитывая требуемое условие для доходности, получим:

$$r = \frac{1+i}{(1+h_1)^{\frac{2}{5}}(1+h_2)^{\frac{3}{5}}} - 1 \geq 0,08.$$

Отсюда $i \geq 0{,}11887$. Значит, минимальная процентная ставка размещения вклада составляет 0,11887 против 0,08 без учета инфляции.

3.4. Поток платежей и его доходность

Пусть $\{R_k, t_k\}$ – поток платежей, в нем t_k – моменты времени, R_k – платежи. Будем говорить, что рассматриваемый поток имеет современную величину A при уровне доходности j, если $\sum_k R_k/(1+j)^{t_k} = A$. Если поток есть годовая рента с годовым платежом R и длительностью n, то рента имеет современную величину A при уровне доходности j, если $R \cdot a_{n,j} = A$. Фиксируем A, тогда при увеличении R доходность ренты увеличивается. Можно сказать и по-другому: для увеличения доходности ренты надо увеличить годовой платеж.

Все эти соображения особенно хорошо видны на примере вечной ренты, поскольку для нее $A = R/j$, или, по-другому: доходность вечной ренты есть $j = R/A$. Важно отметить, что определенная таким образом доходность потока платежей не зависит от ставки процента, а зависит только от величины и моментов самих платежей, в силу чего ее называют часто внутренней доходностью потока платежей.

Если в потоке платежей имеются отрицательные величины, то внутренняя доходность определяется как наименьший положительный корень (наименьшая процентная ставка) уравнения $\sum_k R_k/(1+j)^{t_k} = 0$.

Пример. Вексель учтен по ставке i =10% за 160 дней до его оплаты (временная годовая база равна 360 дням). При выполнении операции учета с владельца векселя удержаны комиссионные в размере 0,5% от номинала векселя. Найти доходность операции.

Решение. Абсолютная доходность операции без учета комиссионных:

$$d = \frac{S}{P} - 1 = \frac{N}{N(1 - i \cdot m)} - 1,$$

где S, P — конечная и начальная стоимость векселя; N – номинал векселя; $m = 160/360$. Подставим исходные данные, получим: d = 0.046, т.е. d = 4.6%.

С учетом комиссионных абсолютная доходность равна:

$$d = \frac{S}{P} - 1 = \frac{N}{N(1 - i \cdot m - 0.005)} - 1 = 5.2\%$$

Средне-годовая доходность равна:

$(1 + 0{,}046)^{360/160} - 1 = 0{,}106$, т.е. 10,6% —, без учета комиссионных,
$(1 + 0{,}052)^{360/160} - 1 = 0{,}1208$, т.е. 12,08% — с учетом комиссионных.

3.5. Варианты заданий

1. Значения капитала в моменты времени 0; 1; 2; 4 есть K_0 = 100, K_1 = 200, K_2 = 300, K_4 = 400. Найти абсолютную и среднегодовую доходность для каждого из шести отдельных промежутков.

Решить аналогичную задачу, взяв данные из таблицы 3.1.

Таблица 3.1

Вариант	K_0	K_1	K_2	K_4
1	100	150	200	400
2	100	200	250	400
3	120	200	300	350
4	120	250	300	450
5	130	150	200	350
6	130	200	250	400
7	140	250	350	500
8	140	300	400	480
9	150	200	400	500
10	150	300	450	500
11	160	300	450	500
12	150	360	450	500
13	150	300	470	500
14	150	300	450	600
15	150	300	500	500

2. Допустим, инвестиционный проект «циклический». Фабрика работает циклами: один год из n = 10 она на капитальном ремонте и обновлении, что требует K = \$30 000, в остальные девять лет цикла фабрика приносит доход R = \$10 000 в год. Найти внутреннюю доходность этого инвестиционного проекта и среднегодовую доходность. Расходы на модернизацию отнести на начало периода.

Решить аналогичную задачу, взяв данные из таблицы 3.2.

Таблица 3.2.

Вариант	n, лет	K,\$	R, \$
1	9	70000	20000
2	9	90000	22000
3	9	95000	25000
4	9	60000	18000
5	9	50000	10000
6	10	80000	15000
7	10	100000	20000

8	10	140000	20000
9	10	45000	8000
10	11	53000	13000
11	12	53000	12000
12	11	55000	14000
13	11	53500	12000
14	10	54000	13000
15	11	53000	10000

3. Рассмотрим операцию с иностранной валютой. Пусть в 2011 г. курс доллара возрос с H = 28 руб. до K = 31 руб. Банк в начале года купил доллары за рубли, а в конце года продал доллары, получив рубли. Найдите доходность этой операции в процентах годовых. Если инфляция за этот год была α = 6%, то какова реальная доходность операции?

Решить аналогичную задачу, взяв данные из таблицы 3.3

Таблица 3.3.

Вариант	H, руб.	K, руб.	α,%
1	28	30	6
2	27	31	5,5
3	26	32	5,5
4	28	30	5,5
5	28	31	5,5
6	29	32	5,5
7	28	33	5,5
8	28	32	6
9	29	31	6
10	28	30	7
11	28,5	30,5	7
12	27,5	30	7
13	28	30,5	7
14	29,5	30,5	7
15	28	30	6

4. По срочному годовому рублевому вкладу банк платит i_1 = 15% годовых. Прогноз повышения курса доллара за год – с H = 27 руб. до K = 31 руб. Какое принять решение: нести рубли в банк или купить на них доллары и хранить их дома?

Решить аналогичную задачу, взяв данные из таблицы 3.4.

Таблица 3.4.

Вариант	i_1, %	H, руб.	K, руб.

1	14	27	30
2	13,5	28	31
3	12	27	31
4	12,5	27,5	30,5
5	13	28	31,5
6	12,5	29	32
7	14	28,5	32
8	14,5	27,5	30,5
9	14	28	30,4
10	13,5	28,4	31,3
11	14,5	28,1	31,3
12	13	28,2	31,3
13	13,5	28,4	31,4
14	12,5	28,4	31,5
15	11,5	28,4	31,6

5. По срочному годовому рублевому: вкладу банк платит i_1 = 14% годовых, а по такому же валютному — i_2 = 8%. Прогноз повышения курса доллара за год — с H = 29 руб. до K = 31 руб. Какое принять решение: нести рубли в банк иди купить на них доллары и положить их на валютный счет?

Решить аналогичную задачу, взяв данные из таблицы 3.5.

Таблица 3.5.

Вариант	i_1, %	i_2, %	H, руб.	K, руб.
1	14	6	27	30
2	13,5	7	27,5	31
3	13,3	8	28	30,5
4	13,4	7	27,4	32
5	12	7	28,5	31,5
6	12,8	7	29	30
7	13	6	28,3	31,5
8	13,8	7	28,2	31,3
9	14	8	29,3	32
10	13,9	7	28	31,5
11	130	7,5	28,1	31,5
12	13,3	7	28,2	31,5
13	13,4	7	28,3	31,5
14	13,9	6,5	28,4	31,5
15	13,8	7	28	31,5

6. Обменные курсы валют в банке: по доллару США – 29,1/29,8 руб. за доллар (т.е. D_b = 29,1, D_s = 29,8); по евро – 40,2/40,9 руб. за евро (т.е. E_b = 40,2, E_s = 40,9). Какова доходность для банка операции по обмену долларов на евро?

Решить аналогичную задачу, взяв данные из таблицы 3.6.

Таблица 3.6.

Вариант	D_b, руб. за доллар	D_s, руб. за доллар	E_b, руб. за евро	E_s, руб. за евро
1	29,8	30,7	40,7	41,4
2	29,2	29,7	40,2	40,7
3	28,5	29,2	39,3	40,2
4	28,8	29,2	41,6	42.5
5	27,2	28,8	40,8	41,2
6	29,2	30,2	39,2	40,2
7	30,5	30.9	38,2	38,8
8	30,6	31,3	39,1	39,8
9	29,7	30.8	39,9	40,7
10	28,2	29,1	40,5	41,3
11	28,0	29,1	40,5	41,4
12	28,2	29,2	40,5	41,5
13	28,2	29,3	40,5	41,6
14	28,1	29,1	40,5	41,7
15	28,2	29,5	40,5	41,3

7. Автокредит в сумме A = 480 000 рублей с годовой ставкой i = 13% и начальным взносом q = 20% взят на n = 3 года. Услуги банка за пользование кредитом составляют g = 0.2% в месяц. Вычислить размер ежемесячного платежа (размер срочной уплаты), среднегодовую и внутреннюю доходность операции для банка.

Решить аналогичную задачу, взяв данные из таблицы 3.7.

Таблица 3.7.

Вариант	A, тыс. руб.	n, лет	i, %	q, %	g, %
1	500	3	13	25	0,2
2	550	3	13	25	0,2
3	600	3.5	14	30	0,2
4	650	3	14	20	0,2
5	750	3.5	12	20	0,2
6	650	4.5	16	30	0,2
7	600	5	13	30	0,2
8	700	5	12	30	0,2
9	480	3	12,5	20	0,2

10	540	3	13,5	30	0,2
11	550	3	13,4	30	0,2
12	560	3	13,3	30	0,2
13	570	3	13,2	30	0,2
14	580	3	13,1	30	0,2
15	590	3	13,5	30	0,2

8. При выдаче кредита на n =200 дней под i = 10 % годовых кредитор удерживает комиссионные в размере k =0,5% от суммы кредита. Ставка налога на проценты j = 10%. Какова доходность операции для кредитора?

Решить аналогичную задачу, взяв данные из таблицы 3.8.

Таблица 3.8

Вариант	n , дней	i , %	k , %	j , %
1	150	10	0,5	10
2	150	11	0,6	11
3	200	9	0,6	9
4	200	11	0,4	11
5	200	10	0,4	10
6	200	12	0,6	12
7	250	9	0,4	9
8	250	10	0,5	10
9	250	11	0,6	11
10	300	12	0,4	12
11	300	12	0,2	10
12	300	10	0,3	11
13	200	11	0,2	12
14	260	12	0,4	12
15	270	13	0,3	12

9. Ссуда выдана на n =2 года с обязательством выплатить на 30% больше (т.е. под 15 ежегодных простых процентов, i_n = 15%). Найдите эквивалентную ставку сложных годовых процентов.

Решить аналогичную задачу, взяв данные из таблицы 3.9.

Таблица 3.9

Вариант	n , лет	i_n , %
1	2	16
2	2	10
3	2	12
4	3	13
5	3	17
6	4	16
7	4	15
8	5	15
9	5	14
10	5	16
11	4	14

12	3	13
13	2	16
14	3	16
15	5	15

10. На какую годовую ставку процентов нужно заменить номинальную ставку годовых сложных процентов j = 12%, если начислять сложные проценты ежеквартально?

Решить аналогичную задачу, взяв данные из таблицы 3.10.

Таблица 3.10

Вариант	j, %	m
1	9	4
2	10	4
3	11	4
4	12	4
5	13	4
6	14	6
7	10	6
8	11	6
9	12	6
10	13	6
11	12	6
12	11	6
13	10	4
14	13	2
15	10	4

Лабораторная работа № 4

Кредитные расчеты

4.1. Расходы по обслуживанию долга

Определение периодических расходов, связанных с займом, называют обслуживанием долга. Разовую сумму по обслуживанию долга называют **срочной уплатой.** Срочные уплаты включают: текущие процентные платежи; средства, предназначенные для погашения (амортизации) основного долга. Таким образом, срочная уплата равна $Y = R + I$, где R - годовые расходы по погашению основной суммы долга, I - проценты по займу.

Обычно проценты выплачиваются на протяжении всего срока займа периодически. Иногда они начисляются и присоединяются к основной сумме долга. Основная сумма чаще всего погашается частями, причём размеры платежей по погашению (срочная уплата) могут быть одинаковы или могут изменяться.

Погашение займа одним платежом в конце срока займа

Пусть займ D выдан на n лет под i сложных годовых процентов. К концу n-го года наращенная его величина станет $D(1+i)^n$. Если предполагается отдать займ одним платежом, то это и есть размер данного платежа.

Погашение основного долга одним платежом в конце в срока займа

Сам заем называется основным долгом, а наращиваемый добавок — процентными деньгами. Пусть заем D выдан на n лет под i сложных годовых процентов. За 1-й год процентные деньги составят $Y_1 = iD$. Если их выплатить, то останется снова только основной долг в размере D. И так будем выплачивать в конце каждого t-го года наращенные за этот год процентные деньги в размере $Y_t = iD$. В конце n-го года выплаты составят величину $Y_n = iD + D$ — процентные деньги за последний год и основной долг. Общая сумма выплат за n лет составит: $n \cdot i \cdot D + D = D \cdot (1 + n \cdot i)$.

Погашение основного долга равными годовыми выплатами

Пусть заем D выдан на n лет под i сложных годовых процентов. При рассматриваемом способе его выплаты в конце каждого года выплачивается n-я доля основного долга, т.е. величина $d = D/n$. В конце 1-го года, кроме того, платятся проценты с суммы D, которой пользовались в течение этого года, т.е. еще iD. Весь платеж в конце 1-го года равен $Y_1 = d + iD$. В конце 2-го года выплата составит $Y_2 = d + i(D - d)$ и т.д., так что в конце $(k+1)$-го года платеж $Y_{k+1} = d + i(D - k \cdot d)$. Легко видеть, что платежи $Y_1, Y_2, \dots$ образуют убывающую арифметическую прогрессию с разностью iD/n, первым членом $Y_1 = d + iD$ и последним $Y_n = d + id$. Общая сумма выплат составит $D \cdot (1 + n \cdot i) - D \cdot \dfrac{i \cdot (n-1)}{2}$.

Погашение основного долга равными срочными уплатами

На протяжении всего срока погашения регулярно выплачивается постоянная срочная уплата, часть её идёт в погашение долга, а часть - в погашение процентов за заём. Величина долга убывает после каждой выплаты. Однако в связи с уменьшением выплат по процентам с течением времени увеличиваются суммы, идущие на погашение основного долга. Срочная уплата равна

$$Y = d_t + iD_t = const,$$

где d_t – .сумма, которая идет на погашения основного долга в году с номером t, iD_t – проценты за кредит в году с номером t

Периодически выплачиваемые суммы Y можно рассматривать как постоянную годовую ренту, член которой определяется по формуле:

$$Y = \frac{D_1}{a_{n,i}}$$, где $D_1 = D$ – размер займа.

Структура срочной уплаты, то есть та ее часть, которая идёт на погашение основного долга, и часть, которая идет на погашение процентов, имеет вид:

- размер погасительного платежа в году t:

$$d_t = Y - D_t i = d_{t-1}(1+i) = d_1(1+i)^{t-1},\ t = 2,...,n;$$

$$d_1 = Y - D_1 i = Yv^n = D_1 v^n / a_{n,i} = D_1 / s_{n,i};$$

- остаток долга на начало года $t+1$:

$$D_{t+1} = D_t - d_t = D_t(1+i) - Y;$$

- сумма погашенного долга на конец t-го года:

$$W_t = \sum_{k=0}^{t-1} d_1(1+i)^k = d_1 s_{t,i},$$

где $s_{t,i}$ - коэффициент наращения годовой ренты, срок которой равен t лет.

- выплаченные проценты на конец t-го года: $I_t = i \cdot \sum\limits_{k=1}^{t} D_k = t \cdot Y - W_t$.

4.2. Формирование погасительного фонда по более высоким процентам

Взятый заем может погашаться разными способами. Например, заемщик может создать специальный погасительный фонд и накапливать на нем средства, чтобы погасить заем единым платежом в конце срока займа. Понятно, что это имеет смысл, если у заемщика есть возможность получать на деньги погасительного фонда большие проценты, чем те, под которые он взял заем.

Рассмотрим три варианта формирования погасительного фонда.

1. Основной долг погашается из фонда в конце срока разовым платежом. Сумма взносов в фонд с процентами на них должна быть равна долгу на момент его уплаты. Проценты по долгу выплачиваются не из фонда.

Пусть накопление средств в фонде производится путём регулярных ежегодных взносов, размер которых равен R, и на эти взносы начисляются проценты по ставке i. Одновременно происходит выплата процентов, начисляемых на долг по ставке g (проценты выплачиваются не из фонда). Тогда срочная уплата $Y = Dg + R$, где Dg - проценты по долгу, R - платежи в фонд.

Размер платежа (взноса) в фонд равен:

$$R = \frac{D}{s_{n,i}}.$$

С учетом этого, срочная уплата

$$Y = D(g + \frac{1}{s_{n,i}}).$$

2. Основной долг и проценты выплачиваются из фонда в конце срока.

Если условия финансового обязательства предусматривают присоединение процентов к сумме основного долга, то взносы в фонд к концу срока должны обеспечить накопление суммы $D(1+g)^n$. В этом случае

$$Y = \frac{D(1+g)^n}{s_{n,i}}.$$

3. Фонд формируется таким образом, чтобы обеспечить периодическую выплату процентов по долгу (из фонда) и в конце срока возврат основного долга.

Рассмотрим процесс формирования фонда. Первая выплата в фонд в сумме R осуществляется в момент взятия кредита. На сумму R начисляются проценты за n лет (n - общий срок кредита) по сложной ставке i. В конце срока эта сумма будет равна $R(1+i)^n$. В начале второго года в фонд вносится сумма R и выплачиваются из фонда проценты по долгу I. Таким образом, фактически в фонд вносится сумма $(R-I)$. На неё будут начисляться проценты в течение $(n-1)$ лет, к концу срока получим сумму $(R-I)(1+i)^{n-1}$. В начале третьего года вносим в фонд сумму R и одновременно берём из фонда сумму I. На этот взнос (за вычетом процентов по долгу) будут начисляться проценты в течение $(n-2)$ лет. В результате к концу срока получим сумму $(R-I)(1+i)^{n-2}$. Последний взнос в фонд осуществляется в момент времени $(n-1)$ и он вместе с начисленными процентами (с учетом изъятия из фонда суммы процентов по долгу) даст сумму $(R-I)(1+i)$. В конце срока необходимо обеспечить выплату суммы, размер которой равен $(D+I)$ (основной долг плюс проценты по долгу за последний год).

Составим балансовое уравнение. В нем все взносы в фонд за вычетом процентов по долгу, с учётом начисления на них процентов в фонде, приравниваем к сумме долга плюс проценты за последний год. Имеем

$$R(1+i)^n + (R-I)(1+i)^{n-1} + ... + (R-I)(1+i)^2 + (R-I)(1+i) = D + I.$$

Из этого уравнения определяем размер взносов в фонд R :

$$R = \frac{D}{(1+i)s_{n,i}} + \frac{I}{1+i}.$$

Эта сумма и будет равна срочной уплате: $Y = R$.

4.3. Потребительский кредит и его погашение

При выдаче потребительского кредита сразу на всю сумму кредита начисляются простые проценты, они прибавляются к величине самого кредита и сумма всех погашающих выплат должна быть равна этой величине. Существует несколько схем погашения потребительского кредита.

Погашение равными выплатами. Пусть кредит размером D взят на n лет, годовая ставка простых процентов i, следовательно, всего надо набрать выплат на сумму $D(1+n\cdot i)$. Если в год предусмотрено (договором о кредите) m выплат, то одна выплата равна $D(1+n\cdot i)/nm$.

Погашение по правилу 78. При этом способе основной долг D выплачивается равными долями $d=D/n$, где n – количество месяцев (n = 12). Процентные деньги в размере $D\cdot i$ выплачивают по следующему правилу. Сложим номера всех двенадцати месяцев $N=(1+2+...+12)=78$ (отсюда и название этого правила) и вычислим величину $g=\frac{D\cdot i}{78}$. В первый месяц выплачивается сумма $(d+12g)$, во второй месяц – сумма $(d+11g)$ и т.д., в последний месяц $-(d+g)$.

4.4. Льготные кредиты

Льготный кредит выдают по льготной ставке, меньшей обычной ставки. Фактически тем самым заемщик получает субсидию, которую рассчитывают как разницу соответствующих современных сумм.

Пусть кредит размером D выдан на n лет по льготной ставке g, меньшей обычной ставки i, и будет погашаться равными выплатами. Эти выплаты образуют годовую ренту. Обозначим размер одной выплаты y, тогда современная величина этой ренты равна $y\cdot a(n,g)$. Отсюда найдем: $y=D/a(n,g)$. А если бы выплаты шли по обычной ставке i, то размер каждой выплаты был бы $z=D/a(n,i)$. Разность $z-y=D/a(n,i)-D/a(n,g)$ — это ежегодные потери кредитора, а современная величина ренты этих потерь по действующей ставке i, т.е. $(z-y)\cdot a(n,i)=\left[D/a(n,i)-D/a(n,g)\right]a(n,i)=D\left[1-\frac{a(n,i)}{a(n,g)}\right]$ и есть субсидия кредитора заемщику. Эта субсидия называется еще абсолютным грант-элементом, а величина $1-\frac{a(n,i)}{a(n,g)}$— относительным грант-элементом. Наращенная сумма абсолютного грант-элемента или, что то же самое, наращенная сумма субсидии называется общими потерями кредитора.

Пример. Пусть D=1000,n=8, i=8%, g=5%. Находим выплаты по обычной ставке из уравнения: $z\cdot a(8,8)$ = 1000. Коэффициент приведения ренты $a(8,8)$ = 5,747; отсюда z = 174. Выплаты по льготной ставке находим из уравнения: $y\cdot a(8,5)$ = 1000, находим: a(8,5) = 6,463; отсюда y =155. Следовательно, ежегодные потери кредитора равны 174 – 155 = 19. Подсчитаем относительный и абсолютный грант-элементы (последний, напоминаем, есть субсидия кредитора заемщику): $1-\frac{a(n,i)}{a(n,g)}$= I – 5,747/6,463=0,108; 1000·0,108= =108. Наконец, общие потери кредитора 108·(1+0,08)^8; величина M(8,8) = (1+0,08)^8 = 1,851. Следовательно, общие потери кредитора равны 200.

4.5. Варианты заданий

1. Заем был взят под i_1=16% годовых, выплачивать осталось ежеквартально по 500 д.е. (R=500 д.е.) в течение n=2 лет. Из-за изменения ситуации в стране процентная ставка снизилась до i_2=6% годовых. В банке согласились с необходимостью пересчета ежеквартальных выплат. Каков должен быть новый размер выплаты?

Расчеты провести для сложной процентной ставки.

Решить аналогичную задачу, взяв данные из таблицы 4.1.

Таблица 4.1.

Вариант	R, д.е.	i_1, %	i_2, %	n, лет
1	400	17	7	2
2	450	15	5	2
3	480	14	6	3
4	490	16	7	3
5	500	16	7	2
6	510	16	5	2
7	520	15	6	2
8	550	17	8	2
9	600	15	7	3
10	640	14	4	3
11	680	15,5	10	4
12	700	16,5	9	5
13	750	14,4	6	3
14	740	17,2	7	4
15	780	16	9	5

2. На покупку дачного домика взят потребительский кредит D=40 000 д.е. на n=8 лет под годовую сложную ставку i=8% процентов. Его нужно погашать равными ежеквартальными выплатами. Найти размер этой выплаты. Найти сумму, которую может получить банк, если поступающие платежи будет размещать в другом банке под те же i=8% годовых.

Решить аналогичную задачу, взяв данные из таблицы 4.2.

Таблица 4.2.

Вариант	D, д.е.	i, %	n, лет.
1	30	7	6
2	30	9	5
3	35	7	7
4	35	8	8
5	40	7	7
6	40	9	9
7	45	8	8
8	45	6	6
9	50	7	7
10	50	8	8
11	60	9	7
12	70	10	6
13	65	9	5
14	75	8	6
15	80	7	5

3. Магазин продает телевизоры в рассрочку на 1 год. Сразу же к цене телевизора D =\$400 добавляют i = 10% и всю эту сумму надо погасить в течение года, причем стоимость телевизора гасится равномерно, а надбавка — по правилу 78. Найти ежемесячные выплаты.

Решить аналогичную задачу, взяв данные из таблицы 4.3.

Таблица 4.3.

Вариант	D, \$	i, %
1	200	11
2	250	10
3	300	9
4	350	8
5	400	8

6	450	10
7	500	9
8	550	8
9	600	9
10	650	10
11	630	9,5
12	550	9,6
13	400	8
14	450	9
15	470	10

4. Заем D =$5000 взят на n =8 лет под i =8% годовых. Погашаться будет равными ежегодными выплатами основного долга (дифференцированная схема). Найдите ежегодные выплаты.

Расчеты провести для сложной процентной ставки.

Решить аналогичную задачу, взяв данные из таблицы 4.4.

Таблица 4.4.

Вариант	D , $	n , лет.	i , %
1	3000	6	8
2	3000	5	7
3	4000	7	8
4	4000	8	6
5	5000	9	8
6	6000	9	5
7	6000	10	7
8	7000	8	7
9	7000	10	6
10	8000	9	6
11	8500	9	5
12	9000	8	9

13	10000	10	10
14	12000	9	9
15	13000	8	8

5. Заем D=20000 д.е. взят на n=8 лет под i=8% годовых. Погашаться будет ежегодными равными выплатами (схема аннуитета). Найдите размер этой выплаты.

Расчеты провести для сложной процентной ставки.

Решить аналогичную задачу, взяв данные из таблицы 4.5.

Таблица 4.5.

Вариант	D, тыс. д.е.	n, лет.	i, %
1	10	7	9
2	15	7	8
3	20	9	8
4	25	8	9
5	30	9	8
6	35	9	7
7	40	9	8
8	45	10	9
9	50	10	7
10	55	10	7
11	60	10	8
12	65	9	9
13	63	8	8
14	57	10	9
15	70	12	7

6. Заем D=20 000 д.е. взят на n=10 лет под i=8% годовых. Погашаться будет начиная с конца n_1=6-го года ежегодными равными выплатами. Найдите размер этой выплаты.

Расчеты провести для сложной процентной ставки.

Решить аналогичную задачу, взяв данные из таблицы 4.6.

Таблица 4.6.

Вариант	D, тыс. д.е.	n, лет.	i, %	n_1
1	10	8	9	4
2	10	7	8	5
3	15	8	7	3
4	20	9	9	5
5	20	10	7	5
6	25	9	8	4
7	30	10	8	6
8	30	11	7	7
9	40	10	6	7
10	40	11	8	8
11	45	12	9	6
12	50	6	10	3
13	55	7	10	3
14	60	8	11	4
15	65	9	12	4

7. Срок погашения долга – n=10 лет. При выдаче кредита была использована сложная учетная ставка d = 4% годовых. Величина дисконта за 6-й год срока долга составила D_6=339 д.е. Какова величина дисконта за 3-й и 8-й годы в сроке долга? Какова сумма кредита?.

Решить аналогичную задачу, взяв данные из таблицы 4.7.

Таблица 4.7.

Вариант	n, лет	d, %	D_6, д.е.
1	10	4	257
2	10	4	315
3	10	4	357
4	10	6	390
5	10	6	300
6	10	6	360
7	11	4	399
8	11	4	420
9	11	6	600
10	11	6	420
11	12	5	500
12	13	6	600
13	12	5	300
14	13	6	450
15	10	7	500

8. Необходимо учесть долговое обязательство на сумму 50 000 д.е. за 4 года до погашения. Банк для учета обязательства применяет сложную процентную ставку 5 % годовых. Проценты могут начисляться 1, 2 или 4 раза в год. Указать условия договора, по которому это обязательство может быть учтено.

Решить аналогичную задачу, взяв данные из таблицы 4.8.

Таблица 4.8.

Вариант	Сумма обязательства, тыс. д.е.	Процентная ставка i, %	Срок гашения n, годы
1	150	7,5	4
2	150	7,2	5
3	200	7	4
4	200	6,5	3
5	200	6,2	2
6	200	6	6
7	250	5,8	7
8	250	5,5	8
9	250	5,2	5
10	300	5	3
11	350	5	4
12	400	5,5	5
13	370	4	6
14	320	6	7
15	310	7	3

9. Обязательство об уплате R_1 = 8000 д.е. в момент t_1 = 01.03.2011 и R_2 = 12 000 д.е. в момент t_2 = 30.09.2011 пересмотрено так, что первая выплата в сумме R_3 = 6000 д.е. будет произведена t_3 = 01.02.2011, а остальная часть долга R_4 гасится в момент t_4 = 15.11.2011. Для замены обязательства применялась сложная процентная ставка i = 6 % годовых. В финансовом году 365 дней. Определить сумму погашаемого остатка R_4. Уравнение эквивалентности составить относительно t_1 = 01.03 и относительно t_3 = 01.02.

Решить аналогичную задачу, взяв данные из таблицы 4.9.

Таблица 4.9.

Вариант	Сумма обязательства, тыс. д.е.			Сроки уплаты				Процентная ставка i, %
	R_1	R_2	R_3	t_1	t_2	t_3	t_4	
1	10	15	8	15.03.	15.09.	15.02.	15.12.	7,5
2	10	12	6	15.03.	15.10.	15.01.	30.12.	7,2
3	20	25	10	15.02.	30.09.	30.01.	15.12.	7
4	8	12	3	01.03.	15.09.	01.02.	15.12.	6,5
5	6	10	4	15.03.	15.10.	15.02.	15.12.	6,2
6	6	10	4	15.03.	15.09.	15.02.	15.12.	6

7	5	10	1	15.03.	15.09.	15.01.	15.12.	5,8
8	6	10	4	01.03.	15.09.	01.02.	15.12.	5,5
9	10	12	6	15.03.	15.09.	15.02.	15.12.	5,2
10	3	30	10	15.03.	15.09.	15.01.	15.11.	5
11	4	20	4	01.03	30.09.	15.02.	15.12.	6,5
12	5	30	5	15.03.	15.09	15.01.	15.11.	7,5
13	6	40	6	01.03	30.09.	15.02.	15.12.	6
14	7	30	7	15.03.	15.09.	15.01.	15.11.	5,5
15	8	20	8	01.03	30.09.	15.02.	15.12.	5

10. Заем величиной D=10 000 д.е. должен быть оплачен в течение n=10 лет постоянной обычной рентой, выплачиваемой ежемесячно. Сумма ежемесячного платежа рассчитывается на основе ежемесячной процентной ставки i=1%. Найти:

а) сумму ежемесячного взноса;

б) величину погашенного основного долга и выплаченных процентов к концу первого года;

в) номер платежа t, после которого невыплаченный долг становится меньше D_t =5000 д.е.

Решить аналогичную задачу, взяв данные из таблицы 4.10.

Таблица 4.10.

Вариант	D, тыс. д.е.	n, лет	i, %	D_t, тыс. д.е.
1	8	8	1	4
2	9	9	1	4
3	10	10	1	4
4	11	11	1	5
5	12	12	1	6
6	13	13	1,5	6
7	14	14	1	7
8	15	15	1	7
9	16	16	1	8
10	16	16	1,5	8
11	17	14	1	8
12	18	14	1,5	9
13	19	15	1	10
14	20	16	1,5	10
15	21	14	1	11

11. Контракт сроком на T = 4 лет предусматривает взносы в два этапа с начислением на них сложных процентов по годовой процентной ставке r_1 = 0,08 на первом этапе в течение первых Δt_1 = 1,5 лет и по годовой процентной ставке r_2 = 0,1 на втором этапе в последующие Δt_2 = 2,5 года. На первом этапе взносы по R_1 = 5000 д.е. производятся в конце каждого полугодия. На втором этапе взносы по R_2 = 8000 д.е. производятся в конце каждого квартала. Найти величину вклада к концу T - го года контракта.

Решить аналогичную задачу, взяв данные из таблицы 4.11.

Таблица 4.11.

Вари ант	Взносы, тыс. д.е.		Продолжительность этапов, лет		Процентные ставки, %		Срок контракта T, лет
	R_1	R_2	Δt_1	Δt_2	r_1	r_2	
1	10	8	2	3	8	10	5
2	8	5	1.5	3.5	7	9	5
3	6	5	2.5	3	6.5	8.5	5.5
4	3	5	3.5	3	6.5	8.5	6.5
5	6	5	2.5	3	5	8	5.5
6	6	5	4.5	3	6.5	8.5	7.5
7	2	5	2.5	3	6	10	5.5
8	6	5	3.5	3.5	6.5	8.5	7
9	3	5	3	3	6.5	8.5	6
10	6	5	4	3	5	8	7
11	5	6	3.5	3.5	5,5	7	7
12	4	5	4	3.5	5	6	7,5
13	5	4	3.5	3.5	5,5	5	7
14	4	3	4	4	5	4	8
15	5	5	3.5	4	5,5	6	7,5

12. Заем величиной D=3000 д.е. погашается одинаковыми ежемесячными взносами. На долг ежемесячно начисляются сложные проценты по ставке i=12% годовых. За какой срок долг будет погашен, если ежемесячный взнос составляет: а) R_1=50 д.е.; б) R_2=100 д.е.?

Решить аналогичную задачу, взяв данные из таблицы 4.12.

Таблица 4.12.

Вариант	D, д.е.	i, %	R_1, д.е.	R_2,д.е.
1	2000	10	40	80
2	2500	10	30	60
3	2500	11	50	100
4	3000	11	50	100
5	3500	11	40	80
6	3500	13	50	100
7	4000	12	60	120
8	4500	13	70	140
9	4500	11	60	120
10	5000	14	80	160
11	6000	13	90	180
12	5000	12	80	160
13	7000	11	100	200
14	8000	10	100	200
15	9000	9	100	200

13. Для покупки через n = 12 лет оборудования за D = 200 000 д.е. фирма каждый год вкладывает деньги в резервный фонд для начисления сложных процентов по годовой процентной ставке i_1 =0,06. Первоначальные взносы были по R_1 = 11855 д.е. После m = 8 лет банк увеличил годовую процентную ставку до i_2 = 0,08. Какой величины были взносы в оставшийся период?

Решить аналогичную задачу, взяв данные из таблицы 4.13.

Таблица 4.13.

Вариант	D, тыс. д.е.	n, лет	i_1, %	R_1, д.е.	i_2, %	m, лет
1	150	10	5	9 000	7	7
2	160	7	6	9 000	8	4
3	170	8	5	13 000	7	4
4	180	6	6	13 000	8	4
5	190	4	4	14 000	7	2
6	200	5	5	14 000	8	2
7	210	10	6	11 000	9	6
8	220	10	7	10 000	9	7
9	230	9	6	20 000	8	7
10	240	10	5	19 000	8	6
11	350	9	5	20 000	7	6
12	360	8	6	25 000	7	6
13	400	7	5	30 000	6	5
14	350	6	5	55 000	6	3
15	340	7	7	55 000	8	3

14. К категории льготных займов относится беспроцентный заем. Найдите относительный и абсолютный грант-элементы для такого займа при D = 1000 д.е., n = 5 лет, i = 10%.

Решить аналогичную задачу, взяв данные из таблицы 4.14.

Таблица 4.14.

Вариант	D, д.е.	n, лет	i, %
1	500	3	8
2	600	4	8
3	700	4	7
4	800	5	9
5	900	5	9
6	1 000	6	10
7	1 100	6	10
8	1 200	7	9
9	1 300	7	10
10	1 400	8	11
11	1 000	7	10
12	1 100	6	10
13	1 200	5	9

14	1 300	6	9
15	1 400	7	9

15. Магазин продает товар стоимостью P = 1000 д.е. в кредит сроком на n = 12 месяцев. Кредит погашается равномерно с ежемесячной выплатой суммы долга. Ежемесячная банковская ставка r = 1,0 %. Для привлечения покупателей магазин предлагает следующие условия: 1) первоначальный взнос – 0%; 2) за кредит – 0 %. Рассчитать ежемесячный взнос. Сколько будет стоить товар, если его купить сразу?

Решить аналогичную задачу, взяв данные из таблицы 4.15.

Таблица 4.15.

Вариант	Стоимость покупки P, д.е.	Срок погашения кредита n, месяцев	Банковская ставка r, %
1	50 000	36	1,2
2	6 000	10	1,0
3	7 000	11	0,8
4	8 000	6	0,9
5	9 000	15	0,9
6	1 000	12	1,5
7	2 000	15	1,0
8	3 000	18	0,9
9	40 000	24	1,0
10	2 000	8	1,1
11	3 500	9	0,9
12	4 000	10	1,0
13	5 000	11	0,1
14	6 000	12	0,1
15	7 000	13	0,1

Лабораторная работа № 5

Инвестиционные процессы

5.1. Общие понятия

В широком смысле термин "инвестировать" означает любое вложение денежных средств с целью получения доходов в будущем. Различают два вида инвестиций - реальные и финансовые.

Реальные инвестиции (real investments) означают инвестиции в какой-либо тип материальных активов, таких, как земля, оборудование, заводы.

Финансовые инвестиции (financial investments) - это контракты, зафиксированные на бумаге, такие, как обыкновенные акции и облигации.

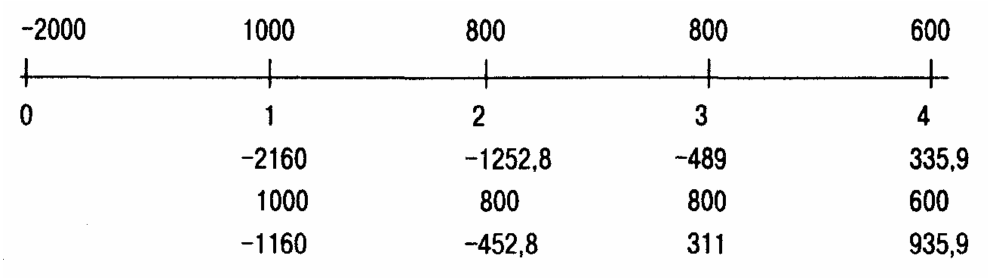
Основным объектом математического моделирования и анализа в данном случае является поток платежей, а именно, суммы распределённых во времени денежных расходов и поступлений, предполагаемых в результате реализации инвестиционного проекта. При этом важную роль играют два фактора – время и риск.

Методы оценки эффективности проектов основаны на принципе дисконтирования потоков платежей, а именно, на приведении инвестиционных расходов и доходов к одному моменту времени (обычно на начало реализации проекта). При этом наиболее важным моментом является выбор уровня ставки процентов, по которой производится дисконтирование. В анализе реальных инвестиций эту ставку называют ставкой сравнения.

В финансовом анализе реальных инвестиций применяют четыре основных показателя:

1) чистый приведённый доход;
2) внутренняя норма доходности;
3) срок окупаемости;
4) индекс рентабельности.

Пример. Пусть в начале года вложены инвестиции размером K=2000, а затем в течение 4 лет получены доходы R_1 = 1000, R_2 = 800, R_3= 800, R_4=600. Ставка процента 8% в год.



Поясним рисунок. Наверху указаны размеры инвестиций (отрицательные) и получаемые доходы (положительные). Допустим, доходы вкладываются в тот же банк, который дал инвестиции, и на доходы начисляются те же сложные проценты, под которые банк выдал кредит-инвестиции. Самая верхняя строка под линией — размер счета в банке до внесения очередного платежа-дохода. Следующая строка — это платеж-доход, еще ниже — итоговый размер счета в банке. Итак, –2160 — это наращенная за один год сумма выданных в кредит инвестиций, добавим 1000, получим –1160 — это долг заемщика банку. В конце 2-

го года счет в банке еще отрицателен –452,8, но в конце 3-го года уже положителен — 311. Значит, за 3 года инвестиции окупились, так что срок окупаемости проекта равен 3 годам. К концу 4-го года счет в банке положителен — это наращенная величина чистого дохода. Если эту величину дисконтировать к моменту 0 по ставке 8%, то получим 935,9/(1+0,08)^4= =935,9/1,360 = 688,2. Эта величина называется *чистым приведенным доходом проекта.*

5.2. Чистый приведенный доход

Пусть $\{R_k, t_k\}$– поток платежей R_k в момент t_k, знак платежа R_k имеет значение: если он положителен – это доход, отрицательный – затраты или инвестиции. Все платежи производятся на стыке лет.

Чистый приведенный доход NPV (от английского термина Net Present Value) – это разность дисконтированных по ставке сравнения на один момент времени (обычно на начало реализации проекта) потоков доходов и вложений.

Эта величина характеризует абсолютный результат инвестиционной деятельности. Рассмотрим последовательно модели различных наиболее характерных вариантов инвестиционных процессов, на основе которых рассчитывается NPV, начиная с простейших.

1. Пусть инвестиции осуществляются одним платежом в начальный момент времени. Отдача от инвестиций поступает один раз в год в конце года в течение n лет. Обозначим K - размер инвестиций, R - размер ежегодного дохода, W - чистый приведенный доход. Таким образом, очевидно, поток доходов можно рассматривать как годовую ренту. Тогда, в соответствии с определением, чистый приведенный доход

$$W = R\frac{1-(1+q)^{-n}}{q} - K$$

где q - ставка сравнения, первое слагаемое - современная величина потока доходов.

Правило принятия решения на основе NPV состоит в следующем: если W больше нуля, то проект принимается к рассмотрению. Если W равен нулю, то доходы только окупают вложения и прибыли не приносят. Если W меньше нуля, то проект убыточен. При анализе нескольких альтернативных проектов, при прочих равных условиях предпочтение отдается проекту с наибольшим NPV.

2. Пусть вложения и поступления - равномерные дискретные потоки платежей, поступающих один раз в конце года. Процесс отдачи начинается сразу после завершения вложений.

Обозначим n_1 – продолжительность периода вложений (в годах), n_2 – продолжительность периода отдачи от вложений, K – размер ежегодных вложений, R – размер ежегодных поступлений..

Потоки доходов и расходов дисконтируем на начальный момент времени. Расходы представляют собой годовую ренту со сроком n_1,. Следовательно, приведенная величина расходов равна $Ka_{n_1,q}$. Доходы – отложенная на n_1 год годовая рента, все платежи которой нужно привести на нулевой момент времени. Современная величина такой ренты определяется по формуле $Ra_{n_2,q}v^{n_1}$, где

$v = \dfrac{1}{1+q}$ – множитель дисконтирования по ставке q. Таким образом, уравнение для определения NPV в этом случае будет иметь вид

$$W = Ra_{n_2,q}v^{n_1} - Ka_{n_1,q}.$$

3. Предположим, что инвестиционные затраты и доходы разделяются на два неравномерных потока платежей, причем процесс отдачи от инвестиций начинается сразу после окончания вложений и все платежи поступают в конце года. Пусть R_j – размеры доходов в году j $\left(j = 1,2,...,n_2\right)$, K_t - инвестиционные расходы в году t $(t = 1,2,...,n_1)$. Сумма дисконтированных вложений определяется по формуле современной величины переменного потока платежей и равна $\sum_{t=1}^{n_1} K_t v^t$. Рассмотрим отдельный платеж R_j. Дисконтируем его на момент начала инвестиционного проекта. Очевидно, дисконтированная величина этого платежа равна $v^{n_1} R_j v^j$. Сумма дисконтированных платежей R_j даст современную величину потока доходов $v^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} R_j v^j$. Выражение для NPV имеет вид

$$W = v^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} R_j v^j - \sum_{t=1}^{n_1} K_t v^t.$$

4. Предположим, что процессы вложения и отдачи задаются в виде единого неравномерного потока платежей, поступающих один раз в конце года. Это означает, что процессы вложения и получения доходов могут протекать как последовательно, так и параллельно.

Обозначим R_t - размер отдельного платежа. Тогда чистый приведенный доход определится по формуле

$$W = \sum_t R_t v^t, \ t = 1,2,...,n,$$

где n – весь срок проекта.

5.3. Внутренняя норма доходности

Под внутренней нормой доходности IRR (от английского термина Internal Rate of Return) понимают предельный уровень ставки процента, при котором взятые по этой ставке инвестиции окупаются доходами процесса (наращиваемыми по той же ставке).

Другими словами, если проект финансируется только за счёт привлечённых средств, то значение IRR показывает верхнюю границу допустимого уровня банковской процентной ставки, превышение которой делает проект убыточным. Обозначим q - внутреннюю норму доходности. Если кредит получен по ставке i, то разность $(q - i)$ характеризует эффективность инвестиционной деятельности. Если $(q - i) = 0$, то доход только окупает инвестиции, если $q < i$, то инвестиции убыточны. При сравнении различных проектов выбираем тот, у которого этот показатель выше. Рассмотрим метод расчета IRR.

Если инвестиции и отдача от них задаются в виде единого потока платежей, то тогда q определяется как наименьший положительный корень уравнения:

$$\sum_{t=1}^{n} \frac{R_t}{(1+q)^t} = 0 .$$

Рассмотренные в п. 5.2 модели инвестиционных процессов также можно использовать для определения внутренней нормы доходности, если в соответствующих уравнениях положить $W = 0$ и дисконтирование проводить по искомой ставке q .

5.4. Срок окупаемости

Под сроком окупаемости понимают продолжительность периода, в течение которого сумма доходов, дисконтированных на момент завершения инвестиций, становится равной сумме инвестиций, приведённых к тому же моменту времени. Дисконтирование осуществляется по ставке сравнения при этом все платежи приводятся на момент завершения инвестиций (или, что то же самое, на момент начала периода отдачи).

Рассмотрим способы определения этого показателя, начиная с наиболее простой модели инвестиций, соответствующей первому варианту из раздела 5.2. В этом случае срок окупаемости можно определить из уравнения

$$R\frac{1-(1+q)^{-n}}{q} = K .$$

Решая это уравнение относительно переменной n , получим

$$n_{ок} = -\frac{\ln(1-\frac{K}{R}q)}{\ln(1+q)}$$

Из этой формулы видно, что не всякий уровень дохода приводит к окупаемости инвестиций. Срок окупаемости будет конечной величиной, если $R > qK$ (формально это следует из свойств логарифмической функции).

Рассмотрим, как определяется срок окупаемости $n_{ок}$ в общем случае.

Пусть K - приведённая к началу периода отдачи величина инвестиций, то есть K - наращенная сумма всех платежей, которые составляют вложения $K = \sum_{j=1}^{n_1} K_j (1+q)^j$.

Пусть доходы - произвольный поток поступлений. Тогда срок окупаемости $n_{ок}$ определяется суммированием доходов, дисконтированных по ставке q до тех пор, пока не получим сумму, равную объёму инвестиций, т.е. $K = \sum_{t=1}^{n_{ок}} R_t \frac{1}{(1+q)^t}$.

Основной недостаток показателя $n_{ок}$ как меры эффективности инвестиций заключается в том, что он не учитывает весь период осуществления проекта и на него не влияет отдача, которая лежит за пределами этого срока.

5.5. Индекс рентабельности

Индекс рентабельности показывает, сколько денежных единиц современной стоимости будущего денежного потока доходов приходится на одну денежную единицу приведенных инвестиций.

Предположим, что инвестиционные расходы и доходы - переменные потоки платежей, поступающих один раз в конце года. Тогда индекс рентабельности определяется по формуле

$$U = \frac{v^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} R_j v^j}{\sum_{t=1}^{n_1} K_t v^t}.$$

Здесь в числителе - современная величина потока доходов на момент начала инвестиционного проекта, в знаменателе - инвестиционные расходы, дисконтированные на этот же момент времени.

Если $U > 1$, то проект принимается к рассмотрению; если $U = 1$, то проект не приносит прибыли, а только окупается; при $U < 1$ проект нерентабелен. Из нескольких проектов выбирается тот, у которого индекс рентабельности наибольший. Очевидно, применение этого показателя корректно, если инвестиции и доходы идут последовательно.

Пример. На строительство магазина надо затратить в течение месяца

$10 000, а затем в течение 10 лет магазин будет давать доход $3 000 в год. Найти характеристики данного проекта, если ставка процента 8% в год.

Решение. Пусть K – размеры инвестиций, R – последующий годовой доход в течение n лет, q – ставка процента для инвестиций и доходов. Определить характеристики проекта.

Поток доходов есть конечная годовая рента с годовым платежом R, длительностью n лет. Современная величина этой ренты на момент окончания вложений $A = R \cdot a_{n,q}$, где $a_{n,q}$ – коэффициент приведения ренты. Значит, приведенный чистый доход проекта есть $W = \frac{1}{(1+q)^{n_1}}\left(R \cdot a_{n,q} - K\right)$, где $n_1 = 1/12$. Подставим исходные данные, получим: $a_{n,q}$ = 6.71; $R \cdot a_{n,q}$ = $20130.24; W = $10065.48.

Доходность проекта $d = W / K \approx 1$.

Найдем срок окупаемости проекта из условия $W = 0$, т.е. $R \cdot a_{n,q} = K$. Отсюда $n_{ок} = -\ln(1 - \frac{K}{R} q) / \ln(1+q)$. Подставим исходные данные, получим $n_{ок}$ = 4.03 года.

Найдем индекс рентабельности проекта:

$U = v^{n_1} R \cdot a_{n,q} / K v^{n_1} = R \cdot a_{n,q} / K$ = 20130.24/10000 = 2.01.

Вычислим внутреннюю доходность q инвестиционного проекта из соотношения $W = R \frac{1-(1+j)^{-n}}{j} - K = 0$. Отсюда найдем $\frac{1-(1+j)^{-n}}{j} = K / R$. Подставим данные, получим: $\frac{1-(1+j)^{-9}}{j} = 3.333$. Выполнив вычисления, получаем j = 27,3 %.

5.6. Определение размера платы за аренду оборудования

Своеобразным инвестиционным процессом является аренда оборудования. Для арендодателя (владельца оборудования) важно обеспечить нужный уровень эффективности сдачи в аренду, для арендатора — решить дилемму: купить оборудование или его арендовать. Первый шаг в решении этих проблем — определение размера арендных платежей.

Пусть оборудование стоимостью P сдается в аренду на n лет. К концу этого срока остаточная его стоимость составит S. Таким образом, владелец оборудования «теряет» $P-S/(1+j)^n$, где $1/(1+j)^n$ – коэффициент дисконтирования, j – ставка дисконтирования. «Потерю» владельцу должен возместить арендатор. Современная величина потока его арендных платежей по ставке j должна быть равна $P-S/(1+j)^n$, так что размер разового годового арендного платежа R может быть определен из уравнения

$$R \cdot a_{n,j} = P - S/(1+j)^n .$$

Отсюда, годовой платеж $R = [P - S/(1+j)^n]/a_{n,j}$.

5.7. Определение внутренней доходности операции по сдаче оборудования в аренду

Пусть оборудование стоимостью P сдается в аренду на n лет. Норма амортизации данного типа оборудования равна h процентов в год. Тогда по истечении n лет остаточная стоимость оборудования S равна $P(1-nh)$.

Предположим, что годовой арендный платеж есть R. Тогда норма доходности аренды рассчитывается из уравнения $R \cdot a_{n,j} = P - S/(1+j)^n$.

Если внутренняя доходность j больше нормы амортизации h, т.е. разность $(j-h)>0$, арендодателю выгодно сдавать оборудование в аренду.

5.8. Варианты заданий

1. Как изменяется срок окупаемости проекта при изменении величины инвестиций, годовых доходов, ставки процента? Построить графики и дать объяснение.

2. Проверить следующие расчеты инвестиционного проекта: K = 4000 д.е., последующий годовой доход при i = 8% годовых равен R = 1000 д.е., длительность проекта n = 6 лет и получено, что чистый приведенный доход NPV = 623 д.е. и срок окупаемости t = 5 лет.

Решить аналогичную задачу, взяв данные из таблицы 5.1.

Таблица 5.1.

Вариант	K, д.е.	i,%	R, д.е.	n,	NPV,	t, лет

				лет	д.е.	
1	2000	9	500	6	243	6
2	3000	10	750	7	651	6
3	1000	6	400	7	1233	3
4	1500	9	500	6	743	4
5	4200	7	1000	6	566,5	6
6	3800	7	800	7	511	6
7	3900	9	800	7	126	7
8	4000	9	900	7	530	6
9	4500	8	900	7	186	7
10	5000	8	1100	6	85	6
11	5500	8	1200	6	85	6
12	5600	8	1300	6	85	6
13	5700	8	1000	6	85	6
14	5800	8	1100	6	85	6
15	5900	8	1000	6	85	6

3. В банке взят кредит D = 10000 д.е. на срок n = 10 лет под инвестиционный проект по ставке g = 5%, а доходы от проекта помещаются в другой банк по большей ставке i = 8%. Для обеспечения возврата долга создаётся погасительный фонд. Вычислите итоговые характеристики для следующих схем погашения:

3.1 Основной долг погашается из фонда в конце срока разовым платежом. Сумма взносов в фонд с процентами на них должна быть равна долгу на момент его уплаты. Проценты по долгу выплачиваются не из фонда.

3.2 Условия финансового обязательства вместо периодической выплаты процентов предусматривают их присоединение к сумме основного долга.

3.3 Фонд формируется таким образом, чтобы обеспечить периодическую выплату процентов по долгу (из фонда) и в конце срока возврат основного долга.

Решить аналогичную задачу, взяв данные из таблицы 5.2.

Таблица 5.2.

Вариант	D, д.е.	g, %	n, лет	i, %
1	8 000	5	9	12
2	9 000	6	9	12

3	1 0000	5	10	11
4	1 1000	6	10	12
5	1 2000	4	9	10
6	1 3000	5	10	12
7	1 4000	5	10	11
8	1 5000	6	10	11
9	1 6000	5	9	10
10	1 7000	6	9	10
11	1 7000	7	9	9
12	1 7000	6	10	8
13	1 7000	6	8	10
14	1 7000	6	9	10
15	1 7000	6	10	9

4. Некто получил наследство в виде солидного банковского счета K = 300 000 д.е. и теперь его «проедает», беря каждый месяц со счета в банке сумму R = 3000 д.е. и тратя ее в течение месяца. Банковская ставка i =10% годовых. По сути, это «перевернутый» инвестиционный процесс. Что здесь является инвестициями, сроком окупаемости, внутренней нормой доходности, чистым приведенным доходом. Вычислить эти характеристики.

Решить аналогичную задачу, взяв данные из таблицы 5.3.

Таблица 5.3.

Вариант	K, д.е.	R, д.е.	i, %
1	300 000	6 000	10
2	235 000	3 500	10
3	240 000	3 000	10
4	245 000	2 500	11
5	150 000	2 500	11
6	255 000	3 500	11
7	266 000	3 000	9
8	450 000	8 000	9
9	700 000	9 000	9
10	675 000	9 000	9
11	650 000	9 000	9
12	600 000	9 000	9

13	625 000	9 000	9
14	675 000	10 000	9
15	675 000	12 000	9

5. Рассматривается инвестиционный проект. Проект предусматривает следующий поток платежей инвестиций: первый платеж K_1 = 160 тыс. д.е. в момент времени t_{K1} = 0, второй платеж K_2 = 200 тыс. д.е. в момент времени t_{K2} = 0.5 года, третий платеж K_3 = 250 тыс. д.е. в момент времени t_{K3} = 1.5 года. Отдача от проекта начинается через время Δ = 0.5 года после последнего инвестиционного платежа. Поток платежей доходов следующий: R_1 = 200 тыс. д.е. в момент времени t_{R1} = 2 года, R_2 = 300 тыс. д.е. в момент времени t_{R2} = 3.6 года, R_3 = 400 тыс. д.е. в момент времени t_{R3} = 4 года, R_4 = 500 тыс. д.е. в момент времени t_{R4} = 4.5 года. Безрисковая процентная ставка r = 10%. Рассчитать характеристики инвестиционного проекта (чистый приведенный доход, внутреннюю норму доходности, срок окупаемости, индекс рентабельности).

Решить аналогичную задачу, взяв данные из таблицы 5.4.

Таблица 5.4.

Вариант	K_1, тыс. д.е.	K_2, тыс. д.е.	K_3, тыс. д.е.	R_1, тыс. д.е..	R_2, тыс. д.е.	R_3, тыс. д.е.	R_4, тыс. д.е.
1	160	200	250	200	300	400	450
2	160	200	200	200	300	400	450
3	160	200	250	250	300	400	450
4	160	200	250	200	350	400	450
5	160	200	250	200	300	450	450
6	200	200	250	250	300	400	450
7	200	200	250	250	300	400	450
8	200	200	250	200	350	400	450
9	200	200	250	200	350	450	450
10	200	200	250	200	300	400	500
11	240	200	260	210	310	300	480
12	250	200	240	220	320	350	490
13	200	220	230	210	330	360	500
14	200	230	220	220	340	370	510

15	200	240	210	210	310	380	520

6. Рассчитайте ежегодный платеж за аренду оборудования стоимостью P=$20 000 в течение n=10 лет, если к концу аренды остаточная стоимость оборудования будет S=$10 000. Ставку дисконтирования Внутреннюю норму i равной 13%.

Решить аналогичную задачу, взяв данные из таблицы 5.5.

Таблица 5.5.

Вариант	P, $	n, лет	S,$	i, %
1	10000	10	2000	12
2	15000	5	10000	10
3	20000	11	5000	12
4	25000	10	10000	11
5	28000	8	9000	11
6	30000	12	5000	12
7	35000	10	15000	12
8	37000	9	20000	10
9	40000	11	10000	10
10	41000	11	11000	10
11	35000	9	12000	10
12	41000	10	13000	10
13	41000	11	12000	10
14	41000	12	11000	10
15	41000	10	10000	10

7. Выясните, надо ли купить оборудование стоимостью P=$20 000 или арендовать его на n=8 лет с ежегодным арендным платежом R=$3000, если ставка процента i=6% годовых, а норматив амортизации оборудования h = 15%.

Примечание. Остаточная стоимость оборудования $S = P(1 - n \cdot h)$, где P – стоимость оборудования, n – срок эксплуатации.

Решить аналогичную задачу, взяв данные из таблицы 5.6.

Таблица 5.6.

Вариант	P, $	n, лет	R, $	i, %	h, %
1	24000	8	4500	6	9
2	27000	8	4600	6	11
3	30000	8	4000	6	12
4	32000	9	5000	7	11
5	33000	8	4000	6	8
6	35000	8	4000	6	10
7	35000	9	5200	7	11
8	38000	9	5200	7	10
9	40000	10	6000	8	8
10	45000	10	7000	8	7
11	44000	10	6500	8	7
12	43000	10	6400	8	7
13	42000	10	6300	8	7
14	41000	10	6200	8	7
15	40000	10	6100	8	7

8. Вычислите характеристики инвестиционного проекта, поток платежей которого показан на рисунке.

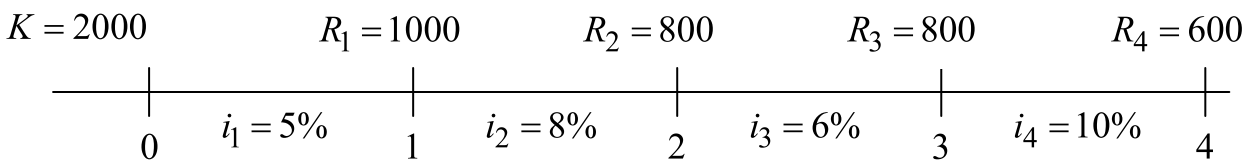


Таблица 5.7.

Вариант	K, д.е.	R_1, д.е.	R_2, д.е.	R_3, д.е.	R_4, д.е.	i_1, %	i_2, %	i_3, %	i_4, %
1	1500	500	400	600	500	4	5	4	3
2	1500	500	900	400	500	5	7	4	7
3	2000	1000	800	800	500	5	8	5	9
4	2500	900	1000	1000	500	6	5	4	7
5	3000	1500	800	750	750	4	7	6	8
6	3200	1000	1800	500	800	7	8	5	6
7	3900	900	1500	1800	800	6	7	5	4
8	4000	2000	1000	1900	900	5	3	4	6

9	4500	2000	1500	500	1500	5	6	7	4
10	5000	1000	1900	2000	1800	4	6	5	6
11	4500	1100	1800	1900	1800	4	6	5	6
12	5000	1500	1900	2000	1800	4	7	5	7
13	5100	1400	1900	2000	1800	5	6	6	5
14	5200	1300	1900	2000	1800	4	5	6	7
15	5300	1200	1900	2000	1800	3	6	6	7

ПРИЛОЖЕНИЕ

Примеры решения типовых задач в пакете Mathcad

Задание 1. В банк помещен депозит в размере A = 5000 руб. По этому депозиту в первом году будет начислено i_1 = 10% , во втором - i_2 = 12%, в третьем - i_3 = 15%, в четвертом и пятом -$i_4 = i_5$ = 16% годовых. Сколько будет на счету в конце пятого года? Сколько надо было бы поместить на счет при постоянной процентной ставке i = 13%, чтобы обеспечить ту же сумму. Расчеты провести для простой и сложной процентной ставки.

Решение. Формула наращения по схеме сложных и простых процентов для переменной ставки имеет вид

а) $S = A(1+i_1)^{n_1} \cdot (1+i_2)^{n_2} \cdot (1+i_3)^{n_3} \cdot (1+i_4)^{n_4}$,

б) $S = A(1+\sum_{k=1}^{4} n_k i_k)$.

где n_i — i -ый период начисления процентов ($n_1 = n_2 = n_3 = 1$, $n_4 = 2$, $n = \sum_{i=1}^{4} n_i = 5$).

Вводим исходные данные

$$A := 5000 \qquad i := \begin{pmatrix} 10\% \\ 12\% \\ 15\% \\ 16\% \end{pmatrix} \qquad n := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad i1 := 13\% \qquad n1 := 5$$

Решение MathCAD для простой ставки

$$S := A \cdot \left(1 + \sum_{k=1}^{4} i_k \cdot n_k\right) \qquad S = 8.45 \times 10^3$$

$P := 1$

Given

$S = P \cdot (1 + i1 \cdot n1)$

$P := \mathrm{Find}(P) \qquad P = 5.121212 \times 10^3$

Решение MathCAD для сложной ставки

$$S1 := A \cdot \prod_{k=1}^{4} \left(1 + i_k\right)^{n_k} \qquad S1 = 9.53223 \times 10^3$$

$P1 := 1$

Given

$S1 = P1 \cdot (1 + i1 \cdot n1)$

$P1 := \mathrm{Find}(P1) \qquad P1 = 5.777109 \times 10^3$

Ответ: в конце 5-го года на счету будет 8450 руб. либо 9352 руб., если начисление процентов проводится по схеме простых процентов либо по схеме сложных процентов. Для получения суммы 8450 руб. в конце пятого года при ставке i = 13% необходимо в начале периода поместить депозит в размере 5121 руб. (по схеме простых процентов) либо 5 173 руб. руб. (по схеме сложных процентов) для получения суммы 9352 руб..

Задача 2. Вычислить размер платежа n - годичной ссуды покупки квартиры за A рублей с годовой ставкой i процентов и начальным взносом q процентов. Сделать расчет для ежемесячных выплат.

Расчет провести для следующих данных: n = 20 лет; A = 1 400 000 руб.; i = 18%; q =

30%.
Расчеты выполнить для сложной процентной ставки.

Решение. Сумма, которую нужно выплатить по ссуде, равна $A - q \cdot A = A \cdot (1-q)$.
Рассчитаем ежегодный платеж R выплаты ссуды из уравнения
$A \cdot (1-q) = R \cdot \dfrac{1-(1+j/m)^{-n \cdot m}}{(1+j/m)^{m/p}-1} = R \cdot a(p,n,j/m)$, отсюда $R = \dfrac{A \cdot (1-q)}{a(p,n,j/m)}$. Здесь p = 12 (количество платежей в год), m = 12 (количество начислений процентов в год).

Вводим исходные данные.

$A := 1400000 \qquad j := 18\% \qquad q := 30\% \qquad n1 := 20$

$p := 12 \qquad m := 12$

Решение MathCAD

$$a := \frac{1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-n1 \cdot m}}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1} \qquad a = 64.795732$$

$$R := \frac{A \cdot (1-q)}{a} \qquad R = 1.512445 \times 10^{4}$$

Ответ. Ежемесячные выплаты составят 15 124, 45 руб.

Задача 3. Семья хочет накопить $12000 на машину, вкладывая в банк $1000 ежегодно. Годовая ставка процента в банке 7%. Как долго ей придется копить?
Решение. Для решения данной задачи используем формулу наращенной величины ренты.

$$.\,S = R \cdot (1+i)\frac{((1+i)^{n}-1)}{i}$$

Отсюда:

$$n = \frac{\ln(\frac{S \cdot i}{R(1+i)} + 1)}{\ln(1+i)}$$

Запишем исходные данные:

$$S := 12000 \qquad R := 1000 \qquad i1 := 7\%$$

Решение MathCAD

$$n1 := \frac{\ln\left[1 + \frac{S \cdot i1}{R \cdot (1 + i1)}\right]}{\ln(1 + i1)} \qquad n1 = 8.564235$$

$$S1 := R \cdot (1 + i1) \cdot \frac{(1 + i1)^9 - 1}{i1} \qquad S1 = 1.281645 \times 10^4$$

Ответ. Семье придется копить 9 лет. К концу 9-го года на счету будет 12816,5 руб.

Задача 4. Заем взят под i_1=16% годовых, выплачивать осталось ежеквартально по 500 д.е. (R_1=500 д.е.) в течение n=2 лет. Из-за изменения ситуации в стране процентная ставка снизилась до i_2=6% годовых. В банке согласились с необходимостью пересчета ежеквартальных выплат. Каков должен быть новый размер выплаты? Расчеты провести для сложной процентной ставки.

Решение. Для решения этой задачи необходимо записать современную величину невыплаченной суммы по ставке i_1=16% и приравнять современной величине потока платежей по ставке i_2=6%.

Имеем $R_1 \frac{1-(1+i_1/m)^{-n \cdot m}}{(1+i_1/m)^{m/p}-1} = R_2 \frac{1-(1+i_2/m)^{-n \cdot m}}{(1+i_2/m)^{m/p}-1}$, где m = 4 (количество начислений процентов в год), p = 4 (количество платежей в год). Из этого уравнения находим размер платежа R_2.

Исходные данные для MathCAD.

$$R1 := 500 \qquad n := 2 \qquad m := 4 \qquad p := 4$$

$$i1 := 16\% \qquad i2 := 6\%$$

Решение MathCAD

$$R2 := 1$$

Given

$$R1 \cdot \frac{1-\left(1+\frac{i1}{m}\right)^{-n\cdot m}}{\left(1+\frac{i1}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1} = R2 \cdot \frac{1-\left(1+\frac{i2}{m}\right)^{-n\cdot m}}{\left(1+\frac{i2}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1}$$

$$R2 := \mathrm{Find}(R2) \qquad R2 = 449.693578$$

Ответ. Размер новой выплаты составит 449,7 руб.

Задача 5. Необходимо учесть долговое обязательство на сумму 50 000 д.е. за 4 года до погашения. Банк для учета обязательства применяет сложную процентную ставку 5 % годовых. Проценты могут начисляться 1, 2 или 4 раза в год. Указать условия договора, по которому это обязательство может быть учтено.

Решение. В данной задаче необходимо найти современную величину суммы S, которая через 4 года составит 50 000 д.е. в зависимости от количества начисления процентов в год. Расчет проводим по формуле $P = \frac{S}{(1+j/m)^{n\cdot m}}$, где j - годовая ставка, m - количество начислений процентов в год.

Исходные данные

$$S := 50000 \qquad i1 := 5\%$$

$$n1 := 4$$

Решение MathCAD

$$P1(m1) := \frac{S}{\left(1 + \frac{i1}{m1}\right)^{n1 \cdot m1}}$$

$$P1(1) = 4.113512 \times 10^4$$

$$P1(2) = 4.103733 \times 10^4$$

$$P1(4) = 4.098732 \times 10^4$$

Ответ. Обязательство будет учтено на сумму 41 135 д.е. при начислении процентов один раз в год, на сумму 41037 д.е. – при начислении процентов два раза в год, на сумму 41987 д.е. – при начислении процентов четыре раза в год.

Задача 6. Как изменяется срок окупаемости проекта при изменении величины инвестиций, годовых доходов, ставки процента? Построить графики и дать объяснение.
Решение. Рассмотрим следующую модель инвестиционного проекта. Инвестиции в проект в размере K осуществляются единовременным платежом в начале срока, доход R поступает регулярно один раз в год в течении n лет, процентная ставка равна j. Срок окупаемости в этом случае рассчитывается по формуле

$$n = -\frac{\ln(1 - \frac{K \cdot j}{R})}{\ln(1 + j)} .$$

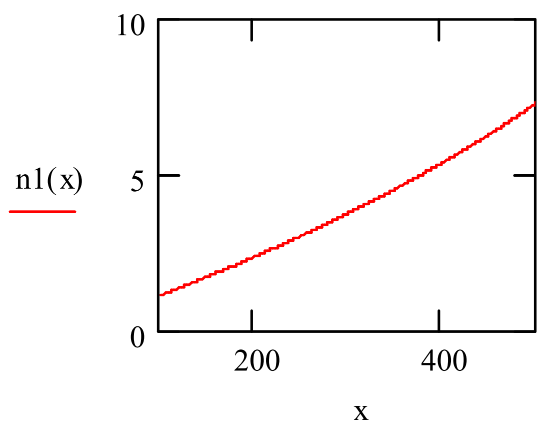
Исходные данные

$$K := 500 \qquad R := 100 \qquad j := 10\%$$

Решение MathCAD

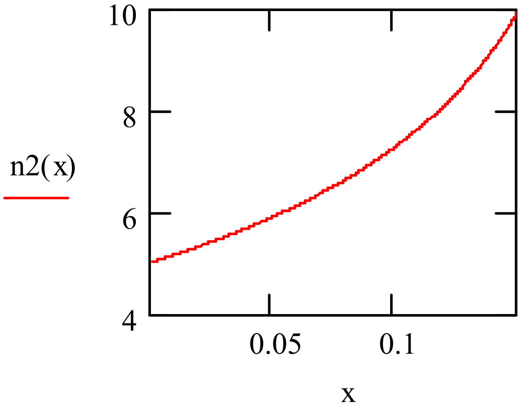
Зависимость срока окупаемости от размера инвестиций

$$n1(x) := \frac{-\ln\left(1 - \frac{x \cdot j}{R}\right)}{\ln(1 + j)}$$



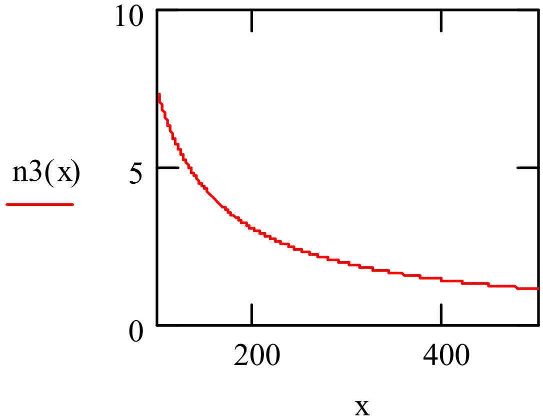
Зависимость срока окупаемости от ставки

$$n2(x) := \frac{-\ln\left(1 - \frac{x \cdot K}{R}\right)}{\ln(1 + x)}$$



Зависимость срока окупаемости от величины дохода

$$n3(x) := \frac{-\ln\left(1 - \frac{j \cdot K}{x}\right)}{\ln(1 + j)}$$



Ответ. Срок окупаемости с ростом объема инвестиций увеличивается, так как для окупаемости инвестиций требуется большее время получения дохода от проекта.
С ростом процентной ставки срок окупаемости растет. С экономической точки зрения это можно объяснить следующим образом. Если для инвестиций берется ссуда в банке под процентную ставку j, то с ростом ставки растут проценты по ссуде, и,

следовательно, растет долг заемщика. Поэтому требуется большее время получения дохода от проекта для погашения ссуды.
С ростом дохода от проекта срок окупаемости уменьшается

Задача 7. Проверьте план погашения основного долга равными годовыми уплатами, если величина займа D составляет 600 д.е., а процентная ставка i – 8%.

Уплаты	168.0	158.4	148.8	139.2	129.6
Годы	1	2	3	4	5

Решение. Величина займа D = 600 д.е. погашается равными долями в течении 5 лет. Проценты по долгу выплачиваются каждый год на остаток долга.

Таким образом, размер срочной уплаты в году с номером t равен

$Y_t = d + (D-(t-1)d)\cdot i$, где $d = D/n$, n – срок долга.

Исходные данные

$$D := 600 \qquad n1 := 5 \qquad j := 0.08$$

Решение MathCAD

$$d := \frac{D}{n1} \qquad d = 120$$

$$t := 1..n1$$

$$Y_t := d + [D-(t-1)\cdot d]\cdot j$$

$$Y = \begin{pmatrix} 168 \\ 158.4 \\ 148.8 \\ 139.2 \\ 129.6 \end{pmatrix}$$

Ответ. План погашения долга составлен верно.

Задача 8. Проверьте расчеты. Для инвестиционного проекта длительностью 6 лет с планируемыми годовыми доходами 400 д.е. и годовой ставкой 10% с найдены необходимые инвестиции — 1742 д.е.

Решение. Здесь рассматривается инвестиционный проект заданной длительности, с которой совпадает срок окупаемости. Проект должен обеспечивать заданный годовой доход.

В общем виде решение задачи таково: пусть R,n,i — размер последующего годового дохода (предполагается, что доходы от инвестиций начинают поступать после окончания вложений), длительность проекта и ставка процента. Какие нужны для обеспечения этого минимальные инвестиции?

Очевидно, что необходимые инвестиции есть $K = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$. Это значит, что чистый приведенный доход проекта равен 0, а внутренняя доходность совпадает со ставкой процента.

На основе этих заключений выполним компьютерные расчеты.

Запишем исходные данные:

$$R := 400 \qquad n1 := 6 \qquad j := 0.1$$

Решение MathCAD

$$K := R \cdot \frac{1-(1+j)^{-n1}}{j} \qquad\qquad K = 1.742104\times 10^{3}$$

Ответ: Величина необходимых инвестиций составит 1742 д.е., т.е. расчеты проекта верны.

Задача 9. Некто получил наследство в виде солидного банковского счета K и теперь его «проедает», беря каждый год со счета в банке определенную сумму R и тратя ее в течение года. По сути, это «перевернутый» инвестиционный процесс. Что здесь является инвестициями, сроком окупаемости, внутренней нормой доходности, чистым приведенным доходом. Какие меры должен принять наследник при увеличении темпов инфляции? Расчеты выполнить для следующих исходных данных: K = 30 000 д.е., R =10 000 д.е., ставка i =10%.

Решение. В данном случае мы имеем "перевернутый" инвестиционный проект. В качестве инвестиций выступает счет в банке K, на который банк начисляет проценты по ставке i. В качестве доходов от инвестиций мы имеем сумму R, которую снимает наследник ежегодно в банке. Поэтому срок окупаемости такого «проекта» будет равен сроку, за который наследник снимет всю сумму в банке. Внутренняя норма доходности – это предельная ставка процента, при которой за определенный срок наследник снимет всю сумму в банке.

Итак, срок окупаемости n, т.е. срок в течение которого наследник снимет всю сумму, определится из уравнения $K = R\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$, где i – ставка банковского процента. Отсюда получим $n = \frac{-\ln(1-i\cdot\frac{K}{R})}{\ln(1+i)}$. Внутренняя норма доходности «проекта» определяется из того же уравнения, в котором срок n задан и нужно определить i. Если срок "проекта" равен сроку окупаемости, то внутренняя норма доходности совпадает с банковской процентной ставкой, а чистый приведенный доход будет равен нулю.

Исходные данные

$$K := 30000 \qquad R := 10000 \qquad j := 0.1$$

Решение MathCAD

$$no := \frac{-\ln\left(1 - \frac{K \cdot j}{R}\right)}{\ln(1 + j)} \qquad no = 3.742254$$

т.е. наследник проест свое наследство за 4 года, причем в последний 4 год он получит сумму меньшую, чем 10000 д.е. Найдем эту сумму.

$$R \cdot \frac{1 - (1 + j)^{-4}}{j} = 3.169865 \times 10^{4}$$

Отсюда получим 31699 – 30000 = 1699 д.е. Таким образом, в последний год наследник получит не 10000 д.е., а на 1699 д.е. меньше, т.е. 10000 – 1699 = 8301 д.е.

Найдем внутреннюю норму доходности «проекта».

$$q := 0.001$$

$$f(q) := \left[R \cdot \frac{1 - (1 + q)^{-no}}{q}\right] - K$$

$$\mathrm{root}(f(q), q) = 0.1$$

Таким образом, внутренняя норма доходности совпадает со ставкой процента банка.

Если ставка процента будет больше 10%, например, 13%, то чистый приведенный доход будет равен

$j := 13\%$

$$W := \left[R \cdot \frac{1 - (1 + j)^{-no}}{j} \right] - K$$

$$W = -1.76511 \times 10^{3}$$

В инвестиционном проекте это значило бы, что проект убыточен, а в данном «перевернутом проекте» это означает, что у наследника на счету останется еще 1765 д.е.

Задача 10. Найдите курс облигации без погашения с периодической — раз в год — выплатой процентов при q = *8%* , i = *5%* . Вычислите доходность такой облигации, если ее курс равен K =120.

Решение. Выплаты по такой облигации можно рассматривать как вечную ренту. Курс облигации по определению равен

$K = \frac{P}{N}100$, где P – рыночная цена облигации (цена покупки), N – номинал облигации. Рыночная цена облигации облигации без погашения с периодической выплатой процентов равна $P = \frac{N \cdot q}{i}$, где q – купонная ставка. Таким образом, курс равен $K = \frac{q}{i}100$. Доходность облигации равна $j = \frac{q}{K}100$.

Исходные данные

$q := 0.08 \qquad j := 0.05 \qquad K1 := 120$

Решение MathCAD

$K := 100 \cdot \frac{q}{j} \qquad K = 160$

$j1 := 100 \cdot \frac{q}{K1} \qquad j1 = 0.066667$

Ответ. Курс облигации при при q = 8% , i = 5% равен 160, доходность облигации при курсе 120 равна 6,67%.

Задача 11. Рассматривается 8% купонная облигация номиналом 1000 д.е., по которой обещают производить купонные выплаты дважды в году в течение 3-х лет.

Безрисковые процентные ставки одинаковы для всех сроков и равны 10% годовых. Вычислить дюрацию и показатель выпуклости облигации.

Решение. Дюрация – это средняя продолжительность платежей. Дюрация облигации характеризует меру процентного риска облигации – чем больше дюрация, тем больше процентный риск облигации. Показатель выпуклости облигации – это вспомогательная характеристика. Показатель выпуклости облигации можно интерпретировать как показатель того, насколько точно дюрация облигации оценивает величину процентного риска облигации.

Дюрация D и показатель выпуклости C облигации рассчитываются по следующим формулам

$$D=\frac{1}{P}\sum_{k=1}^{m} t_k \frac{R_k}{(1+i)^{t_k}}, \quad C=\frac{1}{P}\sum_{k=1}^{m} t_k(t_k+1)\frac{R_k}{(1+i)^{t_k}},$$

где $P=\sum_{k=1}^{m}\frac{R_k}{(1+i)^{t_k}}$ – рыночная цена облигации; R_k – размер платежа в момент времени t_k; i – безрисковая процентная ставка; $m=n\cdot p$ – количество платежей по облигации до срока гашения облигации (здесь n – срок долга, p – количество платежей в год). Размер k-го платежа равен $R_k=\dfrac{N\cdot q}{p}$, где N – номинал облигации.

Исходные данные

$n1 := 3 \qquad p := 2 \qquad q := 8\%$

$N := 1000 \qquad j := 10\%$

Решение MathCAD

$n2 := n1 \cdot p$

$k := 1 .. n1 \cdot p$

$t_k := \dfrac{k}{p} \qquad R_k := N\cdot\dfrac{q}{p} \qquad R_{n2} := R_{n2} + N$

$$P := \sum_{k=1}^{n2}\frac{R_k}{(1+j)^{t_k}} \qquad D := \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n2}\frac{t_k\cdot R_k}{(1+j)^{t_k}}}{P} \qquad C := \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n2}\frac{t_k\left(t_k+1\right)\cdot R_k}{(1+j)^{t_k}}}{P}$$

$D = 2.718466 \qquad C = 10.555657$

Ответ. Дюрация облигации равна 2,718 года, показатель выпуклости равен 10,555.

Задача 12. Рассчитать оптимальный портфель Марковица минимального риска для трех ценных бумаг с доходностями и рисками: (4,10); (10,40); (40,80); нижняя граница доходности портфеля m_p задана равной 15.

Решение. Портфель Марковица минимального риска формируется по следующей схеме.

Необходимо определить доли вложений x_j ($j = 1, 2, ..., n$) в рисковые ценные бумаги, минимизирующие вариацию (риск) портфеля

$$V_p = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} V_{ij} x_i x_j$$

при условии, что обеспечивается заданное значение m_p ожидаемой эффективности портфеля

$$\sum_{j=1}^{n} m_j x_j \ge m_p .$$

Кроме того, должны быть выполнены дополнительные ограничения вида

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1, \; x_j \ge 0$$

при всех $j = 1, 2, ..., n$.

Здесь V_{ij} – элементы матрицы ковариации доходностей рисковых ценных бумаг ($i,\ j = 1, 2, ..., n$); n – количество видов ценных бумаг; m_j – доходность j-ой ценной бумаги.

Исходные данные

$$\mathrm{mp} := 15 \qquad \mathrm{m1} := 3$$

$$\mathrm{m2} := \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 40 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{r} := \begin{pmatrix} 10 \\ 40 \\ 80 \end{pmatrix}$$

Решение MathCAD

$$Vp(x) := \left(r1_1\right)^2 \cdot x_1 + \left(r1_2\right)^2 \cdot x_2 + \left(r1_3\right)^2 \cdot x_3$$

$$x_3 := 0$$

Given

$$m2_1 \cdot x_1 + m2_2 \cdot x_2 + m2_3 \cdot x_3 \geq mp$$

$$\sum_{k=1}^{m1} x_k = 1$$

$$x \geq 0$$

$$x1 := \text{Minimize}(Vp, x) \qquad x1 = \begin{pmatrix} 0.694444 \\ 0 \\ 0.305556 \end{pmatrix}$$

$$m2^T \cdot x1 = (15)$$

$$Vp(x1) = 2.025 \times 10^3$$

$$\sqrt{Vp(x1)} = 45$$

Ответ. Доли бумаг в портфеле составляют (0,69;0;0,31), риск портфеля равен 45.