Компьютерная геометрия

Лекция 5

Лектор – Болотова Юлия Александровна

Обозначения

- КГ – компьютерная графика;
- КГеом – компьютерная геометрия;
- СК – система координат;

Процесс построения изображения на экране монитора

- Моделирование - компьютерная геометрия.
- Визуализация – компьютерная графика.

Компьютерная геометрия (КГеом)

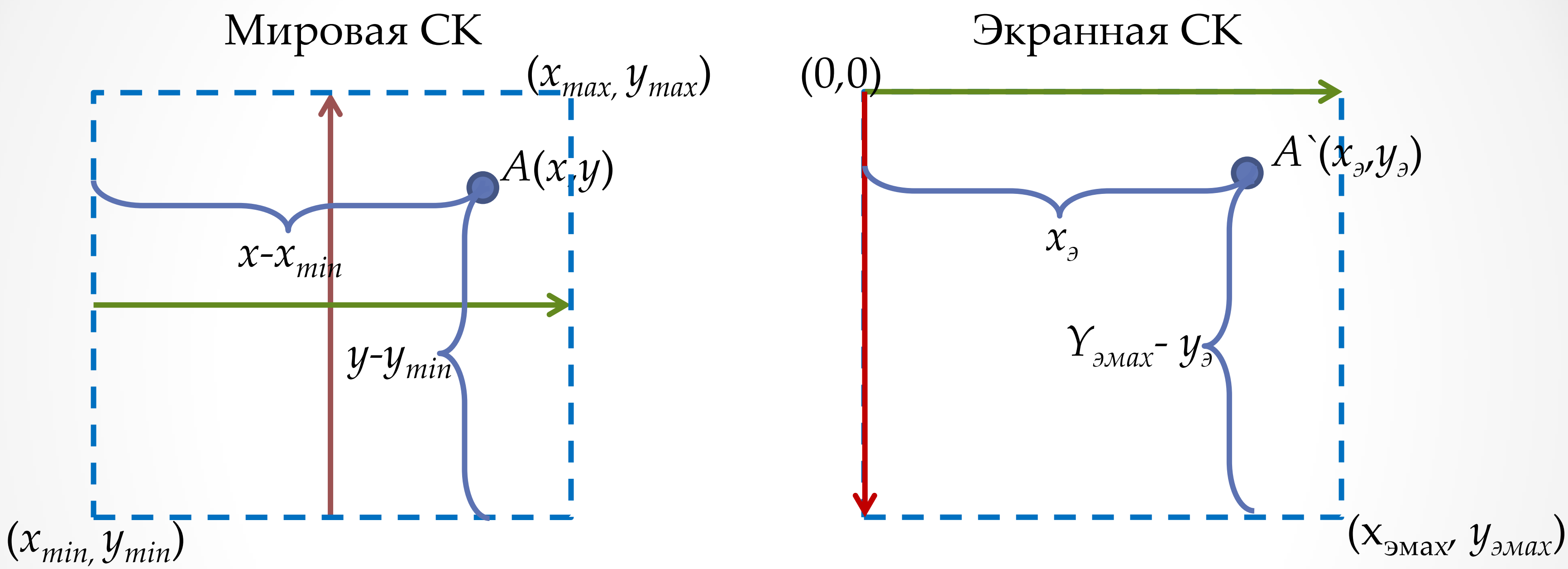
- КГеом есть математический аппарат, лежащий в основе компьютерной графики.
- КГеом изучает различные преобразования изображений на плоскости, такие как:
  - **поворот**,
  - **масштабирование**,
  - **перенос**,
  - **сдвиг**,
  - **отражение**,
  - **построение проекций.**

Система координат устройства и мировая СК

- При создании изображения на экране монитора приходится иметь дело с 2-мя СК:

1. СК устройства (монитора);
2. мировая СК – представляет собой декартову систему, определяемую программистом, и является независимой от графического устройства.

Переход из мировой СК в экранную



1. $\frac{x_э}{x-xmin} = \frac{x_{эmax}}{x_{max}-xmi_n} \Rightarrow x_э = x_{эmax}\left(\frac{x-xmin}{x_{max}-xmi_n}\right);$

2. $\frac{y-y_{min}}{y_{эmax}-y_э} = \frac{y_{max}-ymi_n}{y_{эmax}} \Rightarrow y_э = y_{эmax}\left(1-\frac{y-ymin}{y_{max}-ymi_n}\right).$

Преобразование координат. Общий случай

- Пусть задана ***n***-мерная система координат (СК) в базисе (k_1, k_2,…, k_n), описывающая положение точки в пространстве с помощью числовых значений *k*.
- Пусть задана другая ***N***-мерная СК в базисе (m_1, m_2,…, m_N).
- Задача – определить координаты в новой СК, зная координаты в старой СК.

Определение координат в новой СК

$$\begin{cases} m_1 = f_1(k_1, k_2, \ldots, k_n), \\ m_2 = f_2(k_1, k_2, \ldots, k_n), \\ \ldots \\ m_N = f_N(k_1, k_2, \ldots, k_n), \end{cases}$$

где f_i – некоторая функция преобразования из одной СК в другую.

- Решение обратной задачи:

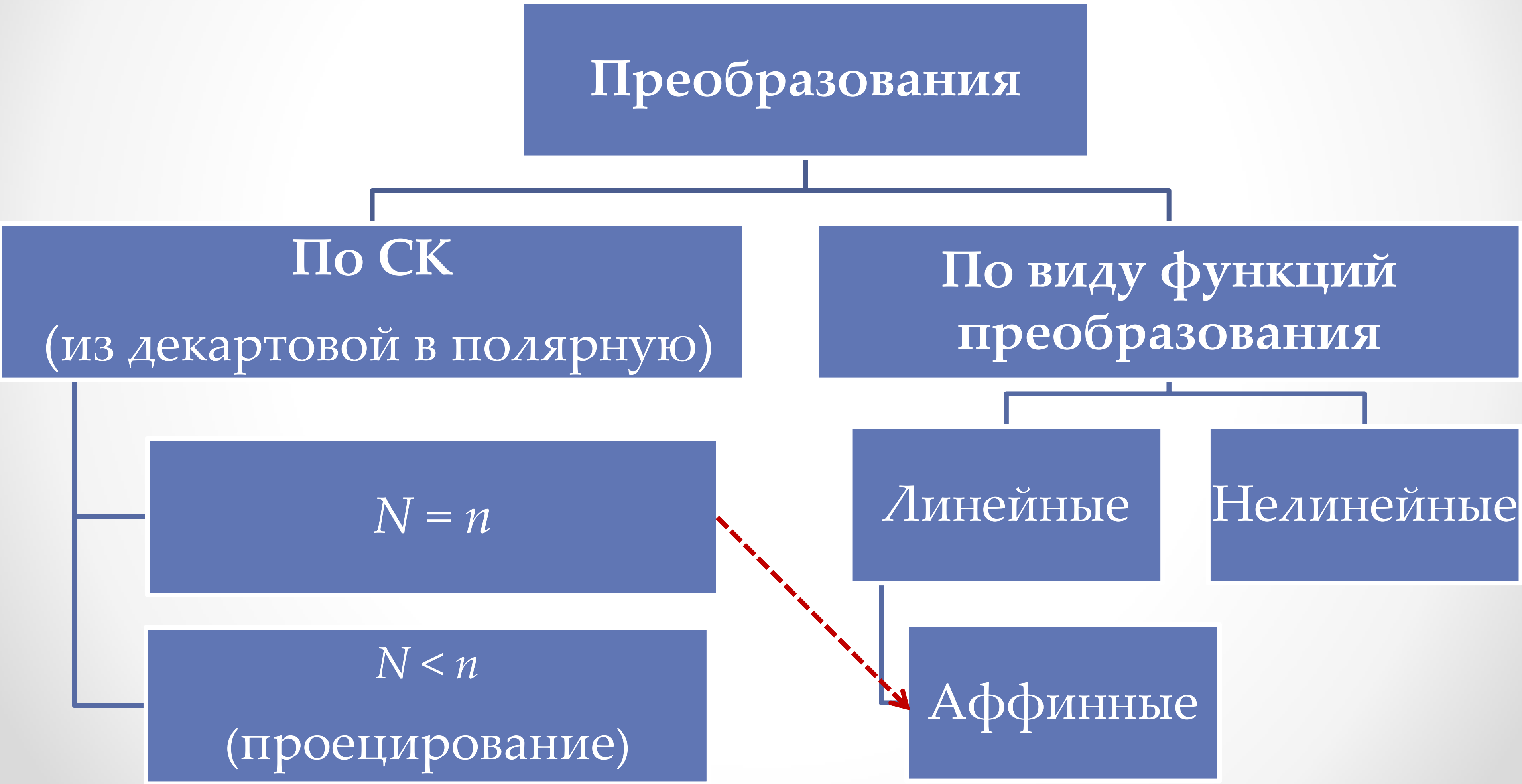
$$\begin{cases} k_1 = F_1(m_1, m_2, \ldots, m_N), \\ k_2 = F_2(m_1, m_2, \ldots, m_N), \\ \ldots \\ k_n = F_n(m_1, m_2, \ldots, m_N), \end{cases}$$

где F_j – функция обратного преобразования

перевод из пространства меньшей размерности в пространство с большей размерностью

- В случае, когда $n<N$, осуществить однозначное преобразование координат не удается.

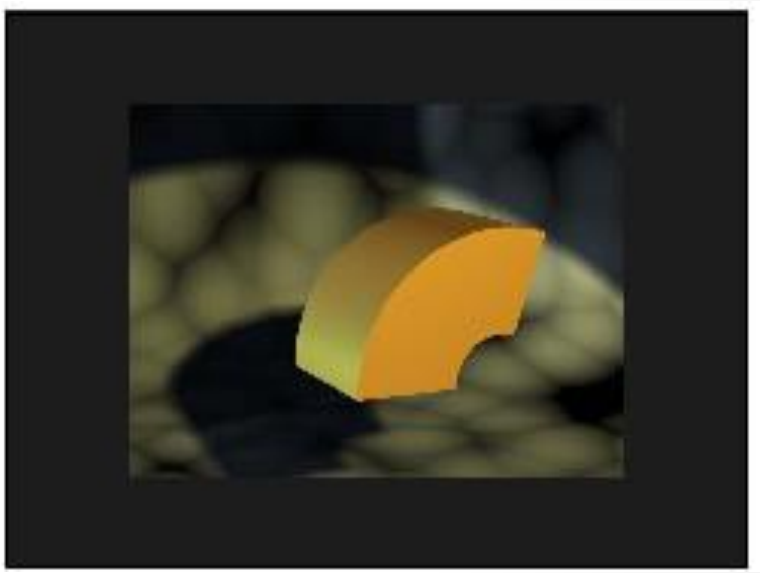
Классификация преобразований координат



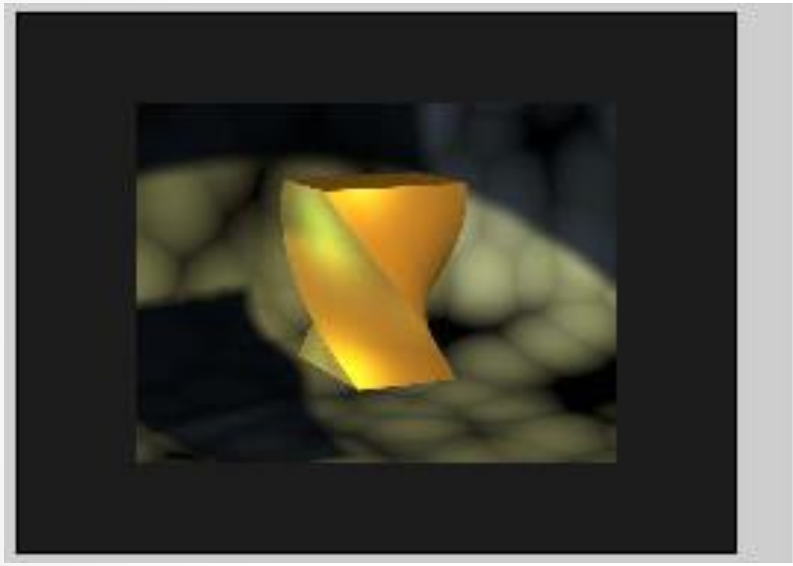
Типы геометрических преобразований

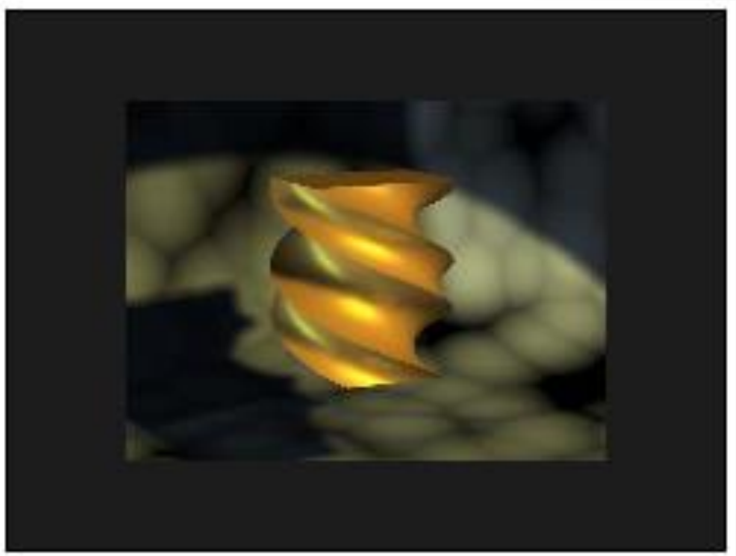
- **Изометрия** (сохраняются расстояния) композиция поворотов и переносов
- **Подобие** (сохраняются углы) масштабирование
- **Аффинные** преобразование (сохраняется параллельность линий) сдвиг
- **Линейные** (проективные) преобразования (прямые переходят в прямые)
- **Нелинейные** преобразования

Нелинейные преобразования (1)



Нелинейные преобразования (2)





Линейные преобразования
Transformations

Linear Equations

$$x' = Ax + By + Cz + D$$

$$y' = Ex + Fy + Gz + H$$

$$z' = Ix + Jy + Kz + L$$

Transform the geometry – leave the topology as is

Линейные преобразования

Линейные:

Если при всех i=1,2,…,N, ф-ции f_i – линейны относительно аргументов (k_1,k_2,…, k_n)

$$f_i = a_{i1}k_1 + a_{i2}k_2 + \ldots + a_{in}k_n + a_{i,n+1},$$

где a_{ij} – константы.

Аффинные преобразования являются подклассом линейных преобразований, при которых $n = N$).

Нелинейные преобразования

Если хотя бы для одного i функция f_i – нелинейна относительно $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$.

Например, преобразование

$$X = 3x + 5y,$$
$$Y = 4xy + 10y$$

нелинейно, т.к. в выражении присутствует **xy**.

Линейные преобразования

- Линейные преобразования можно записать в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ m_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & a_{1,n+1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & a_{2,n+1} \\ & & \cdot\ \cdot\ \cdot & & \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{Nn} & a_{N,n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \\ \\ k_N \end{bmatrix}.$$

Аффинные преобразования

Аффинные преобразования

- Поворот;
- Масштабирование;
- Отражение;
- Сдвиг;
- Перенос.

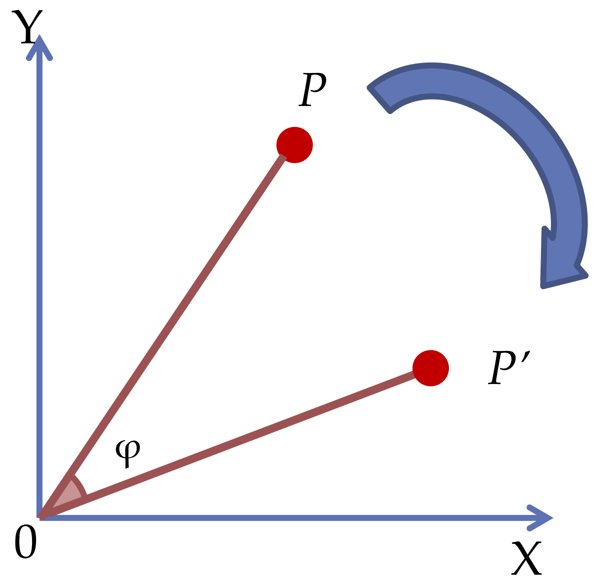
Далее будем рассматривать преобразования в 2-х и 3-х мерном пространствах.

2-мерные преобразования

Общая матрица двумерных преобразований:

$$\mathrm{T} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Преобразование поворота



Преобразование поворота

Преобразование поворота точки P угол θ (по часовой стрелке) можно рассматривать как задачу перехода из системы координат XOY в систему координат $X`OY`$, повернутую относительно XOY на угол θ против часовой стрелки.

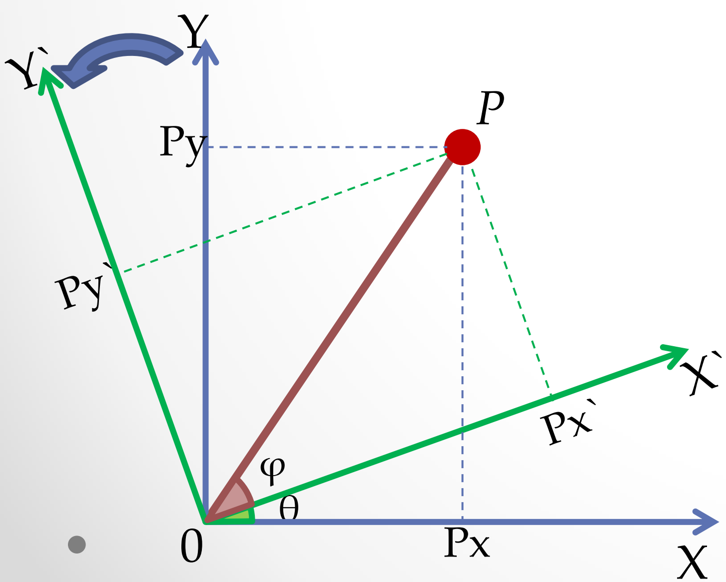
$$0P_x = 0P * \cos(\phi+\theta) = x$$
$$0P_y = 0P * \sin(\phi+\theta) = y$$

$$\cos(\phi+\theta) = \cos\phi * \cos\theta - \sin\phi * \sin\theta;$$
$$\sin(\phi+\theta) = \sin\phi * \cos\theta + \cos\phi * \sin\theta;$$

$$x = 0P_x = \overbrace{0P \cos\phi}^{x`} * \cos\theta - \overbrace{0P \sin\phi}^{y`} * \sin\theta;$$
$$y = 0P_y = \underbrace{0P \sin\phi}_{y`} * \cos\theta + \underbrace{0P \cos\phi}_{x`} * \sin\theta;$$

$$\underbrace{x = x`\cos\theta - y`\sin\theta; \; y = y`\cos\theta + x`\sin\theta}$$

$$(x,y) = (x`,y`)\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$



Для нахождения координат (x′, y′) надо найти обратную матрицу

$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ – ортогональная матрица, т.к.

1. ее строки ортогональны:

$$-\cos\theta\,\sin\theta + \cos\theta\,\sin\theta = 0$$

2. модули базисных векторов равны 1:

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

Преобразование поворота

$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ – ортогональная матрица.

Квадратная матрица называется **ортогональной**, если транспонированная к ней матрица совпадает с обратной, т.е. $C^{T}=C^{-1}$

Следовательно, при повороте точки (x,y) на угол θ по часовой стрелке, ее координаты будут равны (x`,y`):

$$(x`,y`)=(x,y)\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

А против часовой стрелки?

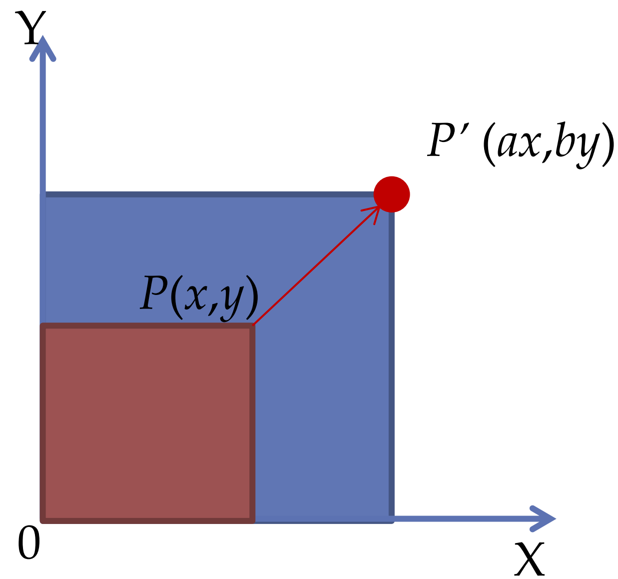
Поворот против часовой стрелки

Можно вместо угла θ подставить -θ:

- Зная, что функция cos – четная, а sin – нечетная, получим:

$$(x`,y`)=(x,y)\begin{pmatrix} cos\theta & sin\theta \\ -sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}.$$

Масштабирование



Масштабирование

При масштабировании начальные координаты точки (x, y) изменяются в соответствии с коэффициентами масштаба:

$$x` = x*a; y` = y*d,$$

следовательно, матрица поворота будет выглядеть:

$$R = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}.$$

Масштабирование

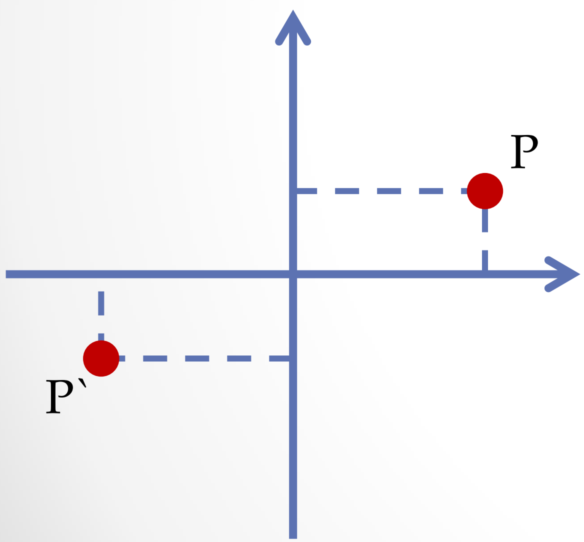
$$R = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

1. Если *a*≠*d* – изменения вдоль различных осей различны.
2. Если *a* > 1, *d* > 1 - увеличение масштаба по двум осям.
3. Если 0 < *a* < 1, 0 < *d* < 1 - уменьшение масштаба.
4. Если a < 0, d < 0 ?

Если $a<0$, $d<0$

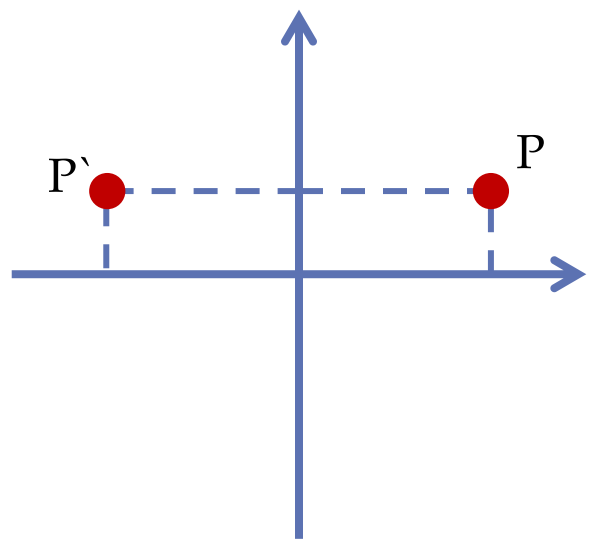
- То исходные значения координат помимо изменения масштаба меняют свой знак на противоположный. Такое преобразование называется **отражением**.

Отражение относительно начала координат



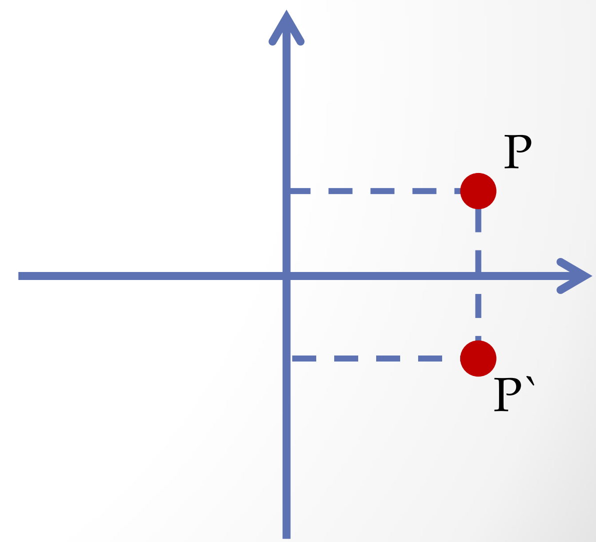
$$R = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Отражение относительно оси Y



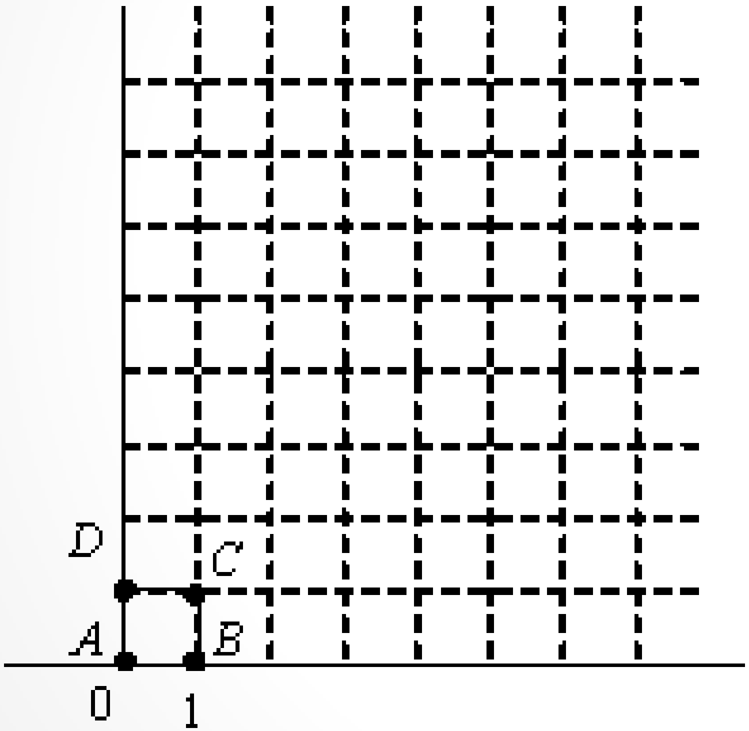
$$R = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

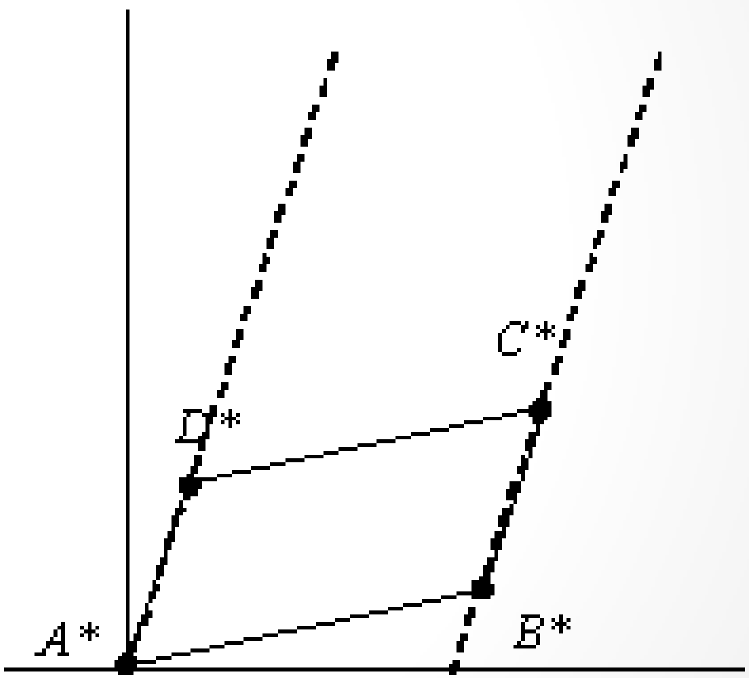
Отражение относительно оси X



$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Преобразование сдвига



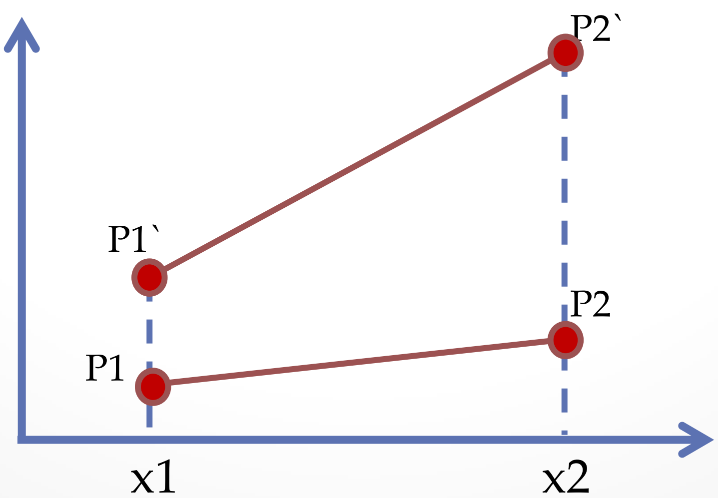


Преобразование сдвига

- Рассмотрим случай, когда в матрице преобразования коэффициенты *a*=*d*=1:

$$(x, y) * \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (x, bx+y).$$

Координаты точки x не изменились, а y линейно зависит от начальных координат x и y. Этот эффект называется сдвигом.

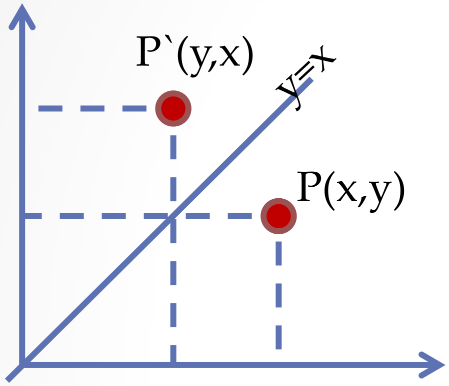


Преобразование сдвига

- Преобразованием сдвига является преобразование, при котором новое значение абсциссы и/или ординаты точки зависят от предыдущих значений абсциссы и ординаты точки, т.е.

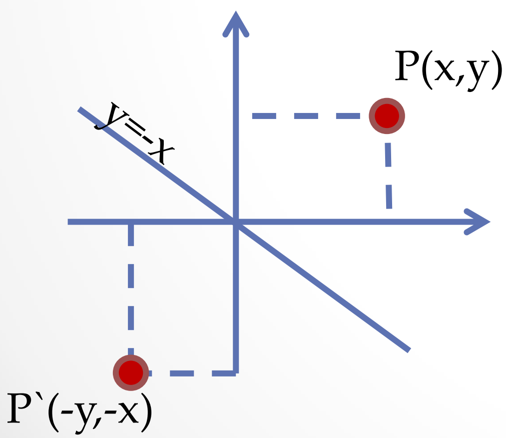
$$x` = f_x(x, y);$$
$$y` = f_y(x, y).$$

Отражение относительно осей $y = x$ и $y = -x$



1. Для отражения точки относительно прямой y = x:

$$(x, y)*\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=(y, x).$$



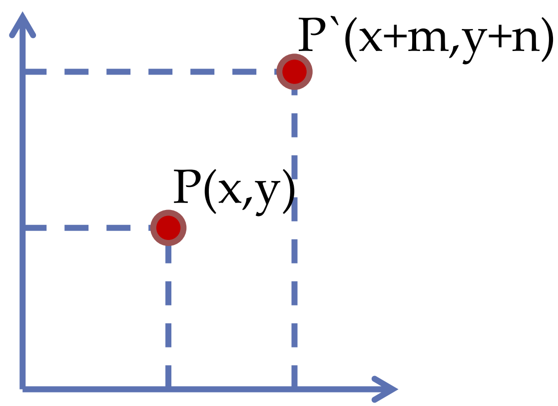
2. Для отражения точки относительно прямой y = -x:

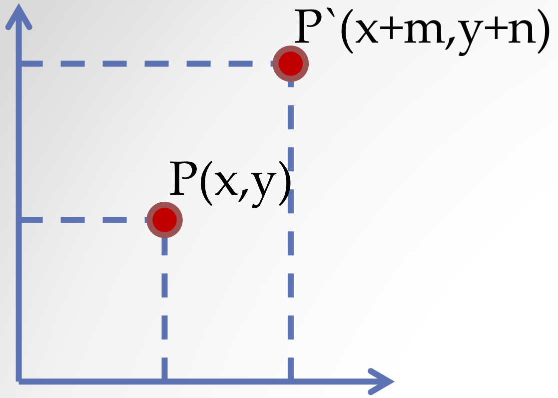
$$(x, y)*\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=(-y, -x).$$

Перенос

$x` = x + m; \ y` = y + n.$

С помощью двумерной матрицы преобразования мы не можем осуществить перенос, т.к. перенос реализуется с помощью сложения.





Перенос

Эту проблему можно решить за счет введения третьей компоненты в координаты точки и дополнив матрицу преобразования до размера 3*3:

$$(x, y, 1) * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ m & n & 1 \end{pmatrix} = (x + m, y + n, 1)$$

Третья компонента координаты может рассматриваться как дополнительная координата вектора положения уже в трехмерном пространстве.

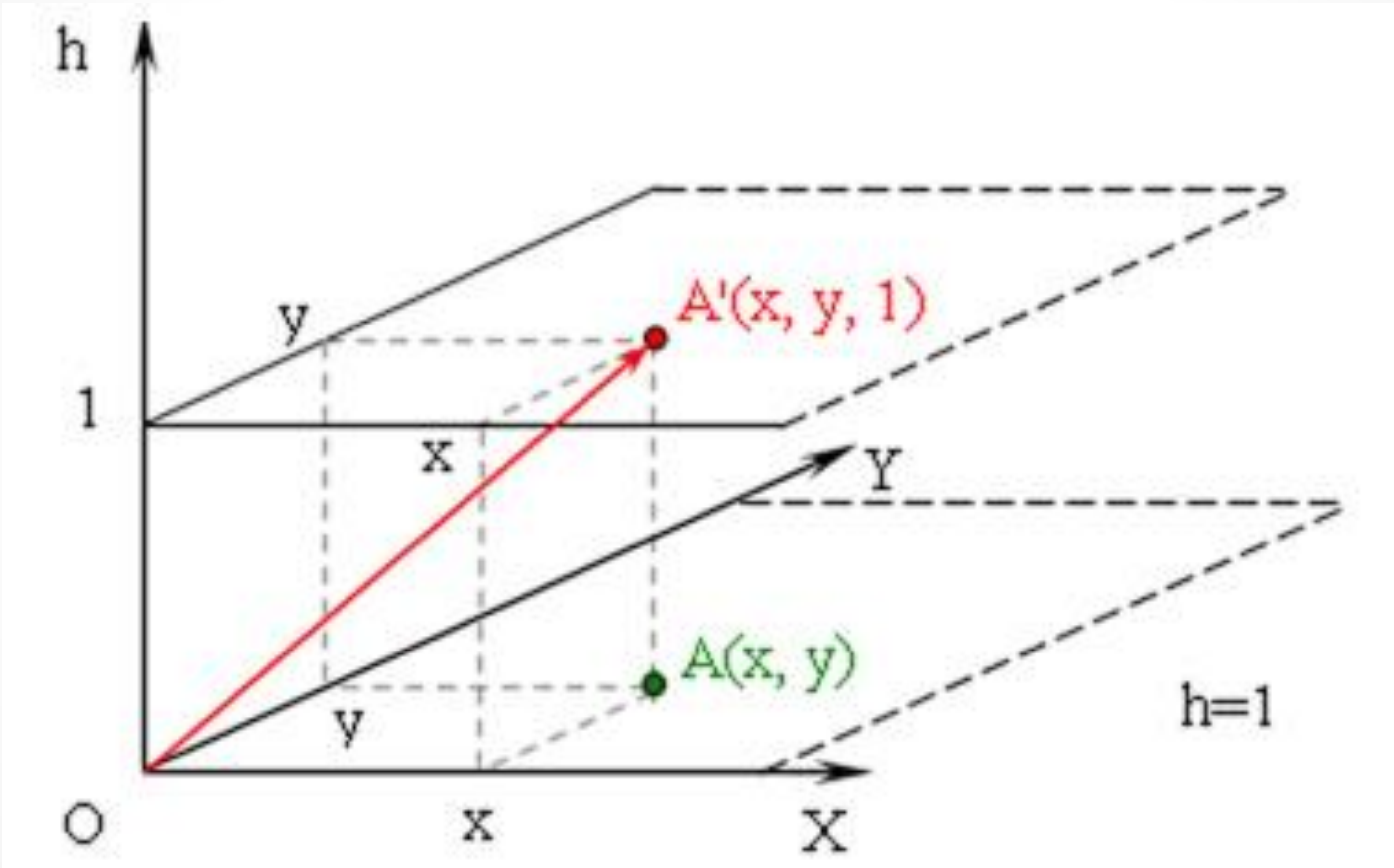
$(x, y, 1)$ – однородные координаты

- Пусть M(x, y) – произвольная точка плоскости. **Однородными координатами** этой точки называется любая тройка одновременно неравных нулю числе x1, x2, x3, связанных с заданными числами x, y следующими соотношениями:

$$\frac{x1}{x3} = x, \frac{x2}{x3} = y.$$

Тем самым между произвольной точкой с координатами (x, y) и множеством однородных координат вида (*hx*, *hy*, h), h≠0, устанавливается взаимно однозначное соответствие, позволяющее считать числа *hx*, *hy*, *h* новыми координатами этой точки.

Однородные координаты



Общая матрица двумерных преобразований

Основная матрица преобразования размером 3*3 для двумерных однородных координат может быть подразделена на четыре части:

$$\left[\begin{array}{cc|c} a & b & p \\ c & d & q \\ \hline m & n & s \end{array}\right]$$

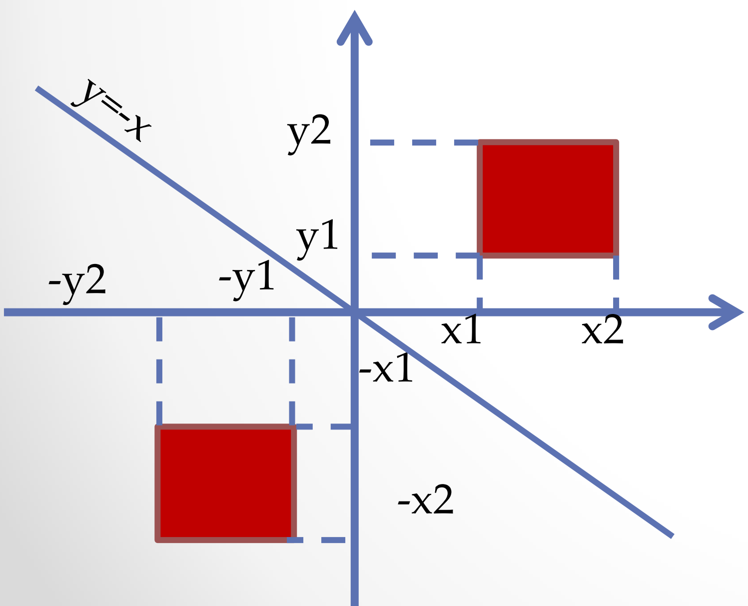
Как мы видим, *a, b, c* и *d* осуществляют изменение масштаба, сдвиг и вращение; *m* и *n* выполняют смещение, *p* и *q* — получение проекций.
Оставшаяся часть матрицы, элемент *s*, производит полное изменение масштаба.

$$\begin{bmatrix} X & Y & H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & s \end{bmatrix}$$

Здесь $X = x$, $Y = y$, а $H = s$. Это дает $x^* = x/s$ и $y^* == y/s$.
В результате преобразования [x y 1] —> [x/s y/s 1] имеет место однородное изменение масштаба вектора положения.
При $s < 1$ происходит увеличение, а при $s > 1$ — уменьшение масштаба.

Преобразование фигуры

- До сих пор мы рассматривали матричное преобразование точки. Для того, чтобы за одну операцию преобразовать фигуру целиком, необходимо организовать все точки данной фигуры в единую матрицу:



$$\begin{pmatrix} x1 & y1 & 1 \\ x1 & y2 & 1 \\ x2 & y2 & 1 \\ x2 & y1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y1 & -x1 & 1 \\ -y2 & -x1 & 1 \\ -y2 & -x2 & 1 \\ -y1 & -x2 & 1 \end{pmatrix}$$

Композиция преобразований

- Подвергнем точку трём последовательным преобразованиям:

(x`,y`,1)=(x,y,1)*M1;

(x``,y``,1)=(x`,y`,1)*M2;

(x```,y```,1)=(x``,y``,1)*M3;

(x```,y```,1)=(((x,y,1)*M1)M2)M3.

- В силу ассоциативности произведения матриц:

(x```,y```,1)=(x,y,1)*(M1*M2*M3)

(x```,y```,1)=(x,y,1)*$M_{пр}$.

Произведение матриц, задающих аффинные преобразования, дает матрицу, задающую также аффинные преобразования.

Обратные преобразования(1)

- Часто при решении задач КГеом требуется выполнить обратное преобразование. Для его выполнения необходимо найти обратную матрицу:
- $(x`, y`, 1) = (x, y, 1)\ M_{пр}$
- $(x, y, 1) = (x`, y`, 1)\ M^{-1}_{пр}$

Обратные преобразования

$$M\text{пр} = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ m & n & 1 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Задание: вспомнить и найти обратную матрицу для $M_{пр}$.

Нотации матричных преобразований

В литературе встречается 2 типа записи матричных преобразований:

1. Координаты представлены вектором-строкой:

$$(x`, y`, 1) = (x, y, 1)\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ m & n & 1 \end{pmatrix} \text{ (библиотека } DirectX\text{)}$$

2. Координаты представлены вектором-столбцом:

$$\begin{pmatrix} x` \\ y` \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c & m \\ b & d & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ (библиотека } OpenGL\text{)}$$

NB! Обратите внимание, что при переходе от одной нотации к другой матрица преобразований транспонируется.

Общая матрица 2D-преобразований

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ m & n & s \end{pmatrix}$$

Поворот – коэффициенты a, b, c, d.

Масштабирование – a, d, s.

Отражение (отн-но начала координат, OY, OX) – a, d.

Отражение (отн-но $y = x$, $y = -x$) – c, b.

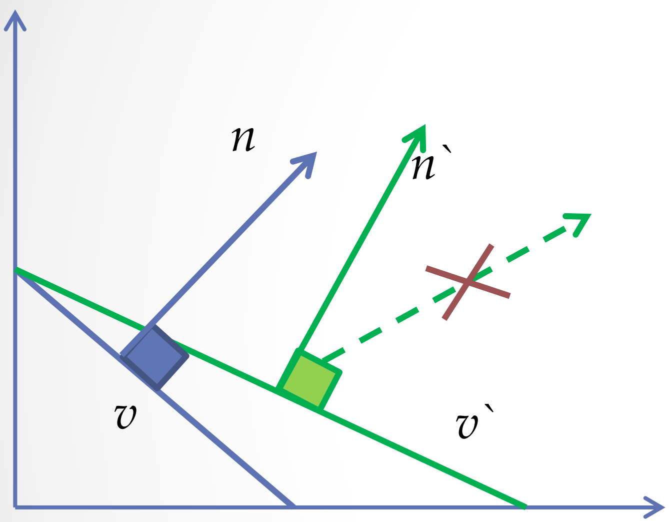
Сдвиг - a, b, c, d.

Перенос – m, n.

Отличие преобразования точек, векторов и нормалей

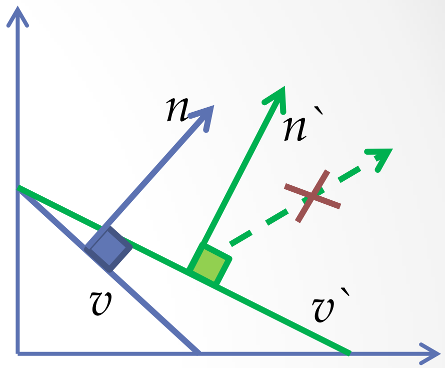
- Точка представляется радиус-вектором $p(x,y,1)$.
- Векторы и нормали имеют только направление, поэтому могут быть заданы соответственно: $v(x,y,0)$, $n(x,y,0)$.

Преобразование векторов и нормалей (1)



- Пусть дан вектор ***v***(x, y, 0) и его нормаль ***n***(*A*, *B*, 0).
- Вектор v был преобразован с помощью матрицы ***Mtr***, в результате получился вектор ***v`***.
- Необходимо найти такую матрицу преобразования ***Qtr*** для нормали ***n***, чтобы в результате преобразования нормаль ***n`*** осталась нормалью к вектору ***v`***.

Преобразование векторов и нормалей



- $\vec{n} \times \vec{v} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{n`} \times \overrightarrow{v`} = 0;$
- $\overrightarrow{n`} = \vec{n} \times Qtr;\ \overrightarrow{v`} = \vec{v} \times Mtr.$
- $(\vec{n} \times Qtr) \times (\vec{v} \times Mtr) = 0;$
- Подставляем значения $\vec{n}$ и $\vec{v}$:
- $(A,B,0)(x,y,0)^T=0$ (до преобразования)
- $((A,B,0)Qtr) \times ((x,y,0)Mtr)^T = 0$ (после преобразования)
- $(A,B,0)(Qtr \times Mtr^T)(x,y,0)^T=0;$

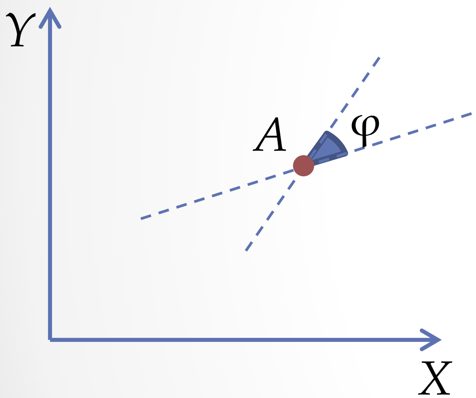
- $Qtr \times Mtr^T=E$ => $\boldsymbol{Qtr=(Mtr^T)^{-1}}$

Таким образом была найдена матрица для преобразования нормали.

Преобразования относительно произвольной точки

- До сих пор мы рассматривали преобразования относительно начала координат.
- Как из базовых матриц преобразования получить матрицы преобразований относительной произвольной точки?
- Рассмотрим эту задачу на примере.

Пример. Построить матрицу поворота относительно точки $A(a,b)$ на угол φ



Шаг1. Перенос на вектор A(-a,-b) для совмещения центра поворота с началом координат. Матрица преобразования:

$$(T1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -a & -b & 1 \end{pmatrix}$$

Шаг2. Поворот на угол ϕ.

$$(T2) = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Шаг3. Перенос на вектор A(a, b) для возвращения центра поворота в прежнее положение.

$$(T3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & 1 \end{pmatrix}$$

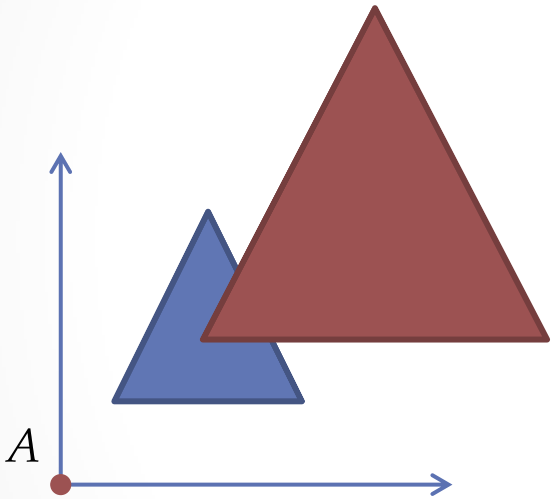
Общая матрица преобразования будет выглядеть как

Tпр= *T*1**T*2**T*3.

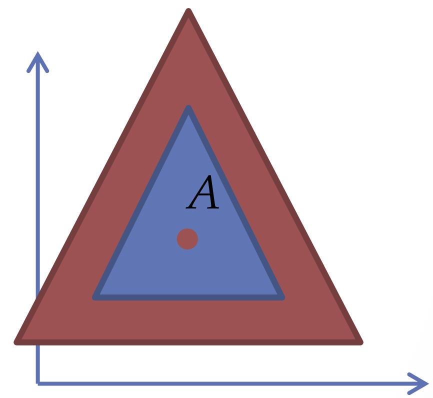
Таким образом, для поворота некоторой точки (x,y,1) на угол ϕ относительно точки A необходимо вычислить:

(x`,y`,1)= (x,y,1)**Tпр*.

Относительность преобразований



Масштабирование относительно начала координат



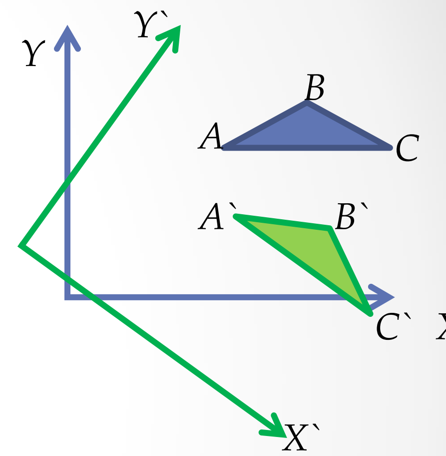
Масштабирование относительно центра масс фигуры

Пример. Построить матрицу преобразования из одной СК в другую

Дано: Треугольник ABC в одной СК и его координаты $A`B`C`$ в другой СК:

- $A(x_0,y_0)$->$A`(x_0`,y_0`)$;
- $B(x_1,y_1)$->$B`(x_1`,y_1`)$;
- $C(x_2,y_2)$->$C`(x_2`,y_2`)$.

Задача – найти матрицу преобразования из одной СК в другую.



Пусть $\boldsymbol{G}$ – матрица старых координат объекта, $\boldsymbol{G}`$ - матрица новых координат, а $\boldsymbol{M}$ – искомая матрица преобразования, тогда

$$G' = G*M; \ -> M = (G)^{-1}*G'.$$

Подставляя в формулу данные координаты, получим:

- $$\begin{pmatrix} x_0` & y_0` & 1 \\ x_1` & y_1` & 1 \\ x_2` & y_2` & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{pmatrix} \times M;$$
- $$M = \frac{1}{\det G} \times \begin{pmatrix} y_1 - y_2 & y_2 - y_0 & y_0 - y_1 \\ x_2 - x_1 & x_0 - x_2 & x_1 - x_0 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 & x_2 y_0 - x_0 y_2 & x_2 y_1 - x_1 y_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_0` & y_0` & 1 \\ x_1` & y_1` & 1 \\ x_2` & y_2` & 1 \end{pmatrix}.$$

Трехмерные преобразования

Правосторонняя и левосторонняя СК

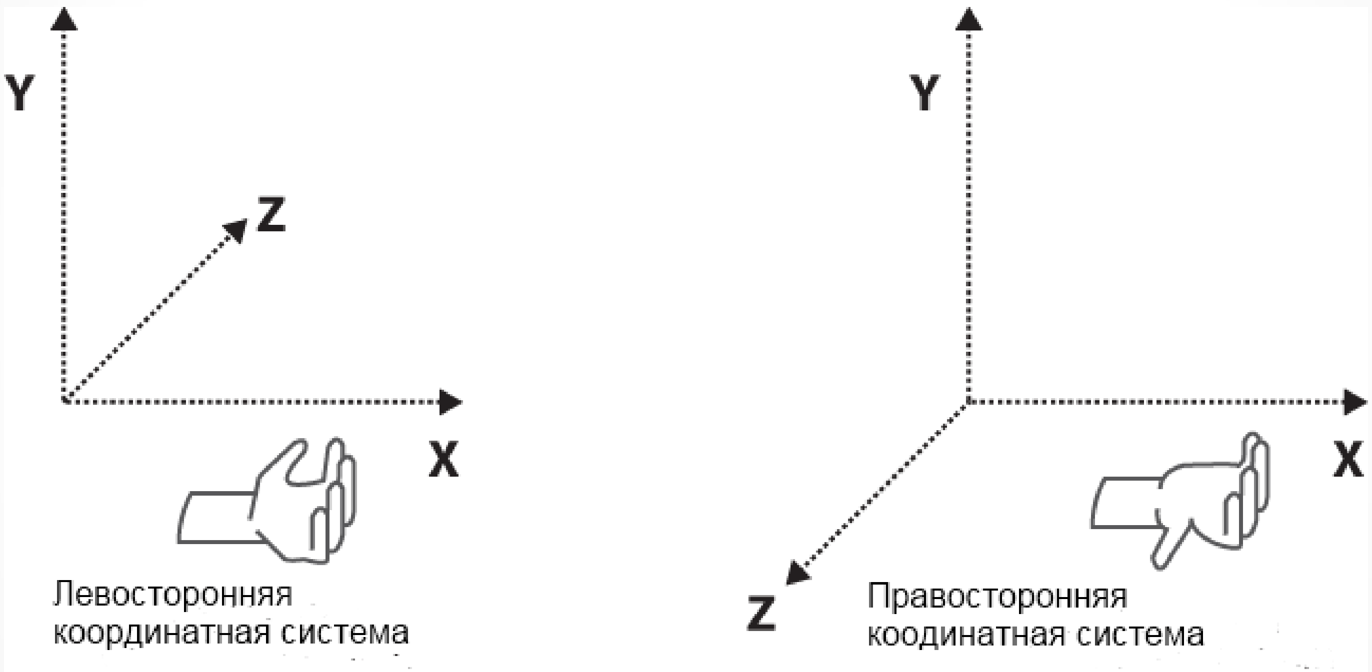
Перед тем, как глубже погрузиться в мир 3D, давайте посмотрим на трехмерную координатную систему. Если вы уже с ней знакомы, то вы, наверное, представляете, что ось X направлена вправо, ось Y - вверх. Однако направление оси Z точно не определено. Существуют различные трехмерные координатные системы, в которых ось Z направлена как в одну сторону, так и в другую. Направление оси Z определяет ориентацию. Ориентация бывает двух видов:

левосторонняя и *правосторонняя*.

Правосторонняя и левосторонняя СК

Чтобы понять смысл этих ориентаций, используем ладони руки. Положите перед собой ладонь вверх лицевой стороной и направьте ее вправо, а все пальцы, кроме большого, загните вверх. Тогда **общее направление ладони** - то есть вправо - будет соответствовать направлению **оси X**, а направление **загнутых вверх пальцев** - **оси Y**. Направление свободно располагающегося **большого пальца - оси Z**, и так как у правой и левой руки большой палец будет направлен в разные стороны, то соответственно получатся две трехмерные системы.

Правосторонняя и левосторонняя СК



- Аналогично тому, как точка на плоскости описывается координатами (x,y), точка в трёхмерном пространстве описывается координатами (x,y,z).
- Как и в двухмерном случае, для возможности реализации трёхмерных преобразований с помощью матриц, перейдем к однородным координатам:

$$(x,y,z,1)=(X/H,\ Y/H,\ Z/H,1),\ \text{где } H \mathrel{!}= 0.$$

Обобщенная матрица преобразования

- Обобщенная матрица преобразования для трёхмерных однородных координат имеет вид:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a & b & c & p \\ d & e & f & q \\ h & i & j & r \\ \hline l & m & n & s \end{array}\right]$$

- Она может быть представлена в виде четырёх отдельных частей.

Обобщенная матрица преобразования

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a & b & c & p \\ d & e & f & q \\ h & i & j & r \\ \hline l & m & n & s \end{array}\right] \qquad \begin{bmatrix} 3\times3 & 3\times1 \\ 1\times3 & 1\times1 \end{bmatrix}$$

- Матрица 3×3 осуществляет линейное преобразование в виде изменения **масштаба**, **сдвига** и **вращения**.
- Матрица 1×3 производит **перенос**.
- Матрица 3×1- преобразования в **перспективе**.
- Скалярный элемент 1×1 выполняет полное изменение **масштаба**.

Трехмерный перенос

- Является простым расширением двухмерного:

$$T(Dx,Dy,Dz)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ Dx & Dy & Dz & 1 \end{bmatrix}$$

т. е. $[x,y,z,1]*T(Dx,Dy,Dz)=[x+Dx,y+Dy,z+Dz,1]$.

Трехмерное изменение масштаба

- Рассмотрим **частичное** изменение масштаба. Оно реализуется следующим образом:

$$S(Sx,Sy,Sz)=\begin{bmatrix} Sx & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Sy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Sz & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

т. е. $[x,y,z,1]*S(Sx,Sy,Sz)=[Sx*x,Sy*y,Sz*z,1]$.

Общее изменение масштаба

- Общее изменение масштаба получается за счет 4-го диагонального элемента, т. е.

$$[x\ y\ z\ 1] * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S \end{bmatrix} = [x\ y\ z\ S] = [\ \frac{X}{S}, \frac{Y}{S}, \frac{Z}{S}, 1\ ].$$

Такой же результат можно получить при равных коэффициентах частичных изменений масштабов. В этом случае матрица преобразования такова:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{S} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{S} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{S} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Трёхмерный сдвиг

- Недиагональные элементы матрицы 3×3 осуществляют сдвиг в трех измерениях, т. е.

$$[x\ y\ z\ 1] \times \begin{bmatrix} 1 & b & c & 0 \\ d & 1 & f & 0 \\ h & i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [x+yd+hz,\ bx+y+iz,\ cx+fy+z,\ 1].$$

Трёхмерное вращение

Двухмерный поворот, рассмотренный ранее, является в то же время трёхмерным поворотом вокруг оси Z . В трехмерном пространстве поворот вокруг оси Z против часовой стрелки описывается матрицей:

$$\begin{bmatrix} \cos(\Theta) & \sin(\Theta) & 0 & 0 \\ -\sin(\Theta) & \cos(\Theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Матрица вращения фигуры по часовой стрелке

- Если матрица вращения относительно оси Z против ч.с.:

$$\begin{bmatrix} \cos(\Theta) & \sin(\Theta) & 0 & 0 \\ -\sin(\Theta) & \cos(\Theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Какая будет матрица вращения фигуры по часовой стрелке?
- Можно просто поменять значение угла на противоположное, тогда, согласно условию четности-нечетности функций получим:

$$Rz = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

т. е. знаки перед sin меняются на противоположные ввиду нечетности функции.

- Матрица поворота вокруг оси *X* имеет вид

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\Theta) & \sin(\Theta)0 & 0 \\ 0 & -\sin(\Theta) & \cos(\Theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Матрица поворота вокруг оси *Y* имеет вид

$$\begin{bmatrix} \cos(\Theta) & 0 & -\sin(\Theta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin(\Theta) & 0 & \cos(\Theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Аффинные преобразования

$$S_{xyz} = \begin{bmatrix} Sx & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Sy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Sz & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Rf_{xy} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_{xyz} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ dx & dy & dz & 1 \end{bmatrix}$$

$$Rf_{yz} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_y = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

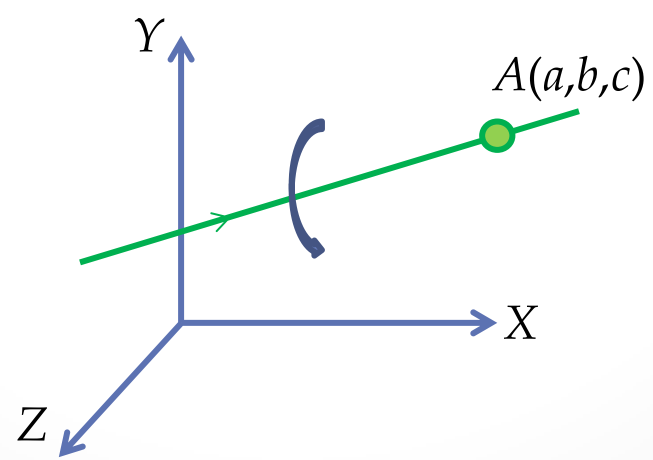
$$Sh_{xyz} = \begin{bmatrix} 1 & b & c & 0 \\ d & 1 & f & 0 \\ h & i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Rf_{xz} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_z = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Пример

- В правосторонней СК построить матрицу вращения на угол ϕ против ч.с. вокруг прямой L, проходящей через точку A (a,b,c) и имеющую направляющий вектор (l,m,n). Можно считать, что направляющий вектор является единичным, т.е. $l^2+m^2+n^2=1$.



Решение

- Решение разбивается на несколько шагов:

1.Перенос на расстояние (*-a*,*-b*,*-c*), чтобы прямая *L* проходила через начало координат.

2. Для того, чтобы воспользоваться стандартными формулами поворота, необходимо совместить прямую *L* с одной из осей, например с осью аппликат (Z).

3. Осуществление поворота на угол ϕ, согласно условиям задачи.

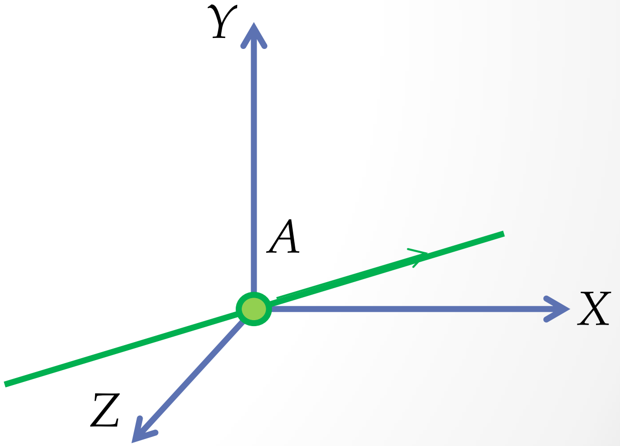
4. Обратный поворот.

5. Обратный перенос.

Шаг 1

Перенос на расстояние (-a,-b,-c), чтобы прямая L проходила через начало координат:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -a & -b & -c & 1 \end{bmatrix}$$



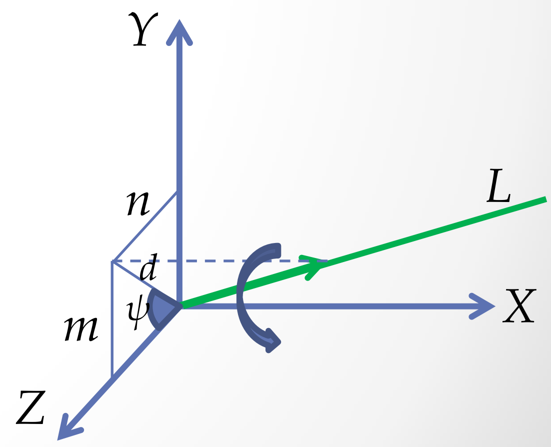
Шаг 2(А)

Совмещение прямой *L* с осью аппликат двумя поворотами:

А) Вокруг оси *X* на угол ψ для того, чтобы прямая *L* оказалась в плоскости *XOZ*:

$$cos\psi = \frac{n}{d}; sin\psi = \frac{m}{d}; d = \sqrt{m^2 + n^2};$$

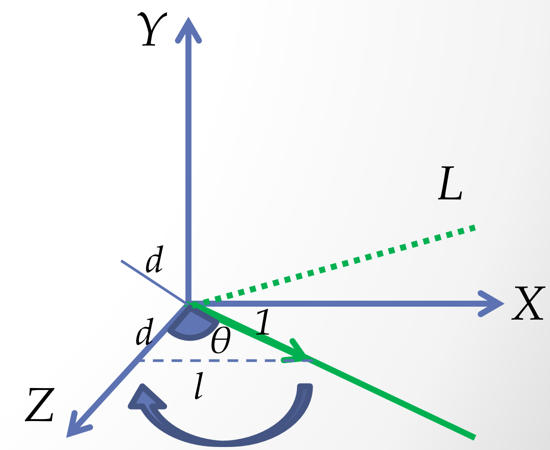
$$Rx = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{n}{d} & \frac{m}{d} & 0 \\ 0 & -\frac{m}{d} & \frac{n}{d} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Шаг 2(Б)

- Поворот вокруг оси ординат (Y) на угол **ϑ**:
- Т.к. мы повернули прямую L относительно оси X на прошлом шаге, то ее проекция на ось X не изменилась и осталась равной *l*.
- Также длина проекции единичного вектора на плоскость YOZ не изменилась и осталась равной *d*.
- Следовательно, угол **ϑ** можно вычислить как:
- $\cos\vartheta = \frac{d}{1}; sin\vartheta = -\frac{l}{1}$ *(знак «-» т.к. поворот совершается по часовой стрелке).*

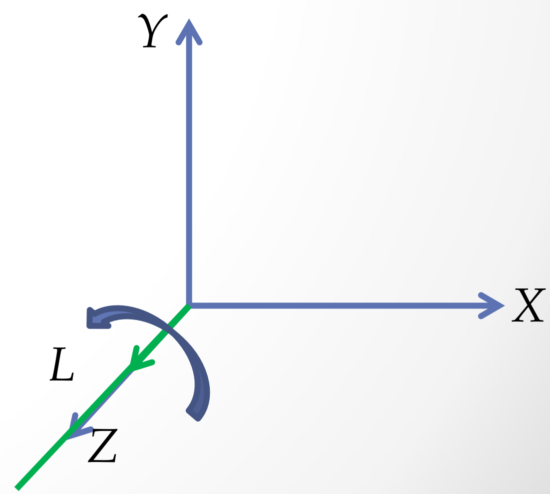
$$Ry = \begin{bmatrix} d & 0 & l & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -l & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Шаг 3

- Осуществление поворота на угол ϕ, согласно условиям задачи:

$$Rz = \begin{bmatrix} cos\varphi & sin\varphi & 0 & 0 \\ -sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

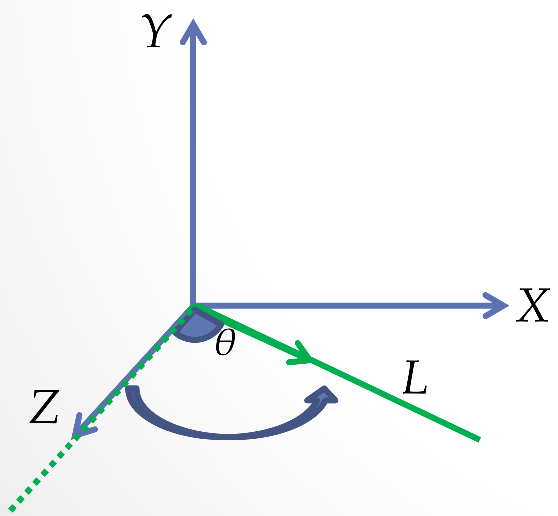


Шаг 4

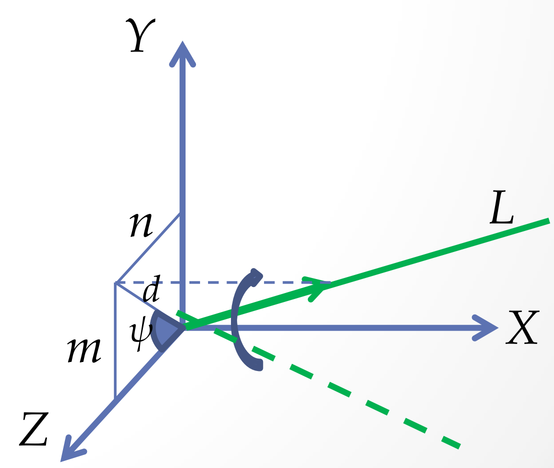
- Обратный поворот для возвращения прямой L в начальное положение.

А) относительно оси ординат(Y) на угол θ

Б) относительно оси абсцисс (X) на угол -ψ



А

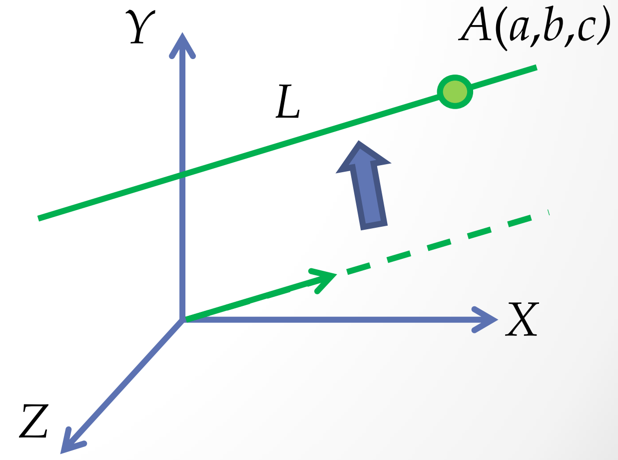


Б

Шаг 5

- Обратный перенос.

$$T\text{обр} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a & b & c & 1 \end{bmatrix}$$



Б

Общее решение:

- Подытожив все преобразования, получим:

$$(x`, y`, z`, 1) =$$

$$(x, y, z, 1) \times [T] \times [Rx(\psi)] \times [Ry(\theta)] \times$$

$$[Rz(\varphi)] \times [Ry^{-1}(\theta)] \times [\mathrm{Rx}^{-1}(\psi)] \times [T^{-1}],$$

где матрицы $R_{x,y,z}$ – ортогональные =>

$Rx^{-1}=Rx^{T}$; $R^{y-1}=Ry^{T}$; $Rz^{-1}=Rz^{T}$.