

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
**«Национальный исследовательский
Томский политехнический университет»**

М.В. Горбенко, Т.И. Горбенко

**СБОРНИК ЗАДАЧ И УПРАЖНЕНИЙ
ПО ТЕОРИИ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН**

*Рекомендовано в качестве учебного пособия
Редакционно-издательским советом
Томского политехнического университета*

Издательство
Томского политехнического университета
2011

УДК 621.01(076.5)

ББК 34.41-01.я73

Г 673

Горбенко М.В.

Г 673

Сборник задач и упражнений по теории механизмов и машин: учебное пособие / М.В. Горбенко, Т.И. Горбенко; Национальный исследовательский Томский политехнический университет – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2011. – 188с.

Практикум по теории механизмов и машин содержит большое количество задач и примеров. В пособии кратко излагаются основные теоретические положения по структуре, кинематике и динамике механизмов, рассматриваются вопросы кинематического проектирования планетарных механизмов.

Сборник предназначен для студентов машиностроительных, механических и приборостроительных специальностей изучающих курс теории механизмов и машин. Каждый раздел сборника задач снабжен кратким изложением основ теории и рекомендациями по практическому применению.

УДК 621.01(076.5)

ББК 34.41-01.я73

Рецензенты:

доктор технических наук, профессор НИ ТПУ
Ан И-Кан

доктор физико-математических наук, профессор НИ ТГУ
В.А. Скрипняк

© ГОУ ВПО Национальный исследовательский
Томский политехнический университет, 2011

© Горбенко М.В., Горбенко Т.И., 2011

© Оформление. Издательство Томского
политехнического университета, 2011

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	6
Часть 1. Анализ механизмов.....	7
Глава 1. Структурный анализ и классификация механизмов	7
1.1. Структура механизмов	8
1.2. Классификация механизмов	15
1.3. Составление кинематических схем механизмов	19
1.4. Структурный состав механизма	23
Контрольные вопросы	34
Глава 2. Кинематический анализ механизмов.....	35
2.1. Аналитическое определение положений, скоростей и ускорений звеньев механизмов	35
2.2. Планы положений звеньев групп и построение траекторий, описываемых точками звеньев механизма	41
2.3. Построение планов скоростей механизма.....	44
2.4. Построение планов ускорений механизма.....	47
2.5. Кинематический анализ зубчатых механизмов.....	58
2.5.1. Передаточные отношения и их определение.....	58
2.5.2. Передаточные отношения многоступенчатых рядовых механизмов	60
2.5.3. Эпициклические механизмы	62
2.5.4. Передаточные отношения зубчатых механизмов с коническими зубчатыми колесами	66
2.5.5. Передаточное отношение для винтовых и червячных механизмов	66
2.5.6. Передаточное отношение замкнутых дифференциальных механизмов	67
Контрольные вопросы.....	78
Глава 3. Силовой анализ механизмов.....	80
3.1. Общие положения.....	80
3.2. Силовой расчет методом планов.....	84
3.2.1. Силы, действующие на звенья механизма	85
3.2.2. Силовой расчет группы 4–5 [$B_{2,4} - П_{4,5} - B_{5,0}$].....	87
3.2.3. Силовой расчет группы 2–3 [$B_{1,2} - B_{2,3} - П_{3,0}$].....	89
3.2.4. Силовой расчет начального механизма 1–0.....	91
3.2.5. Определение величины уравновешивающей силы методом рычага Н. Е. Жуковского.....	94

3.3. Определение величины КПД механизма	95
3.4. Примеры силового расчета	97
3.4.1. Кривошипно-шатунный механизм	97
3.4.2. Шарнирный четырехзвенный механизм	99
3.4.3. Пример силового расчета группы 2-го класса третьего вида	102
Контрольные вопросы	108
Глава 4. Динамический анализ механизмов	109
4.1. Приведение масс и моментов инерции в механизмах	109
4.2. Общее уравнение движения	117
4.3. Определение истинной скорости движения звена приведения	119
Контрольные вопросы	125
Часть 2. Синтез механизмов	126
Глава 5. Синтез механизмов с низшими кинематическими парами	126
Контрольные вопросы	133
Глава 6. Синтез механизмов с высшими кинематическими парами	134
6.1. Проектирование трехзвенных зубчатых передач	134
6.2. Кинематический синтез типовых планетарных зубчатых передач	140
6.2.1. Передаточное отношение	142
6.2.2. Условие соосности	145
6.2.3. Условие сборки механизма	146
6.2.4. Условие соседства	146
6.2.5. Условие правильного зацепления	147
6.2.6. Коэффициент полезного действия	148
6.2.7. Подбор чисел зубьев AA , AJ и JJ механизмов по методу сомножителей	149
6.2.8. Подбор чисел зубьев \overline{AJ} механизма по методу генерального уравнения	150
6.2.9. Порядок определения чисел зубьев по методу сомножителей и выбор варианта разложения на сомножители	152
6.2.10. Примеры	153
6.3. Синтез кулачковых механизмов с вращающимся кулачком с поступательно движущимся и коромысловым толкателями	160
6.3.1. Назначение кулачковых механизмов	160
6.3.2. Определение радиуса ролика	161
6.3.3. Определение координат профиля кулачка аналитическим методом	163
6.3.4. Угол давления как один из критериев работоспособности кулачкового механизма	166
6.3.5. О выборе закона движения толкателя	168

6.3.6. Определение размеров, профилирование и силовой расчет кулачкового механизма	170
Контрольные вопросы	180
Приложения	182
Приложение П1. Значения коэффициентов смещения исходного контура	182
Приложение П2. Значения эвольвентной функции	183
Список литературы	186

ПРЕДИСЛОВИЕ

Практикум по теории механизмов и машин предназначен для студентов машиностроительных, механических и приборостроительных специальностей и других инженерно-технических специальностей, изучающих курс теории механизмов и машин.

При подготовке данного пособия фрагментарно использованы материалы из учебной литературы [1–6].

Пособие состоит из двух частей, шести глав. В каждой главе кратко излагаются основные теоретические положения. Приводятся задачи и контрольные вопросы. Рассмотрены примеры решения задач.

Первая часть посвящена исследованию механизмов.

В первой главе рассматриваются основные понятия, связанные со строением механизмов. Даются принципы классификации механизмов и их элементов.

Вторая глава посвящена исследованию кинематики рычажных и зубчатых механизмов как аналитическим методом, так и методом планов (планы положений, скоростей и ускорений).

Методы определения сил, действующих на звенья механизма, реакций в кинематических парах, уравнивающей (движущей) силы рассмотрены в третьей главе.

В четвертой главе решаются задачи исследования режимов движения механизма под действием заданных сил.

Вторая часть пособия посвящена синтезу механизмов.

В пятой главе рассматриваются вопросы синтеза механизмов с низшими кинематическими парами.

В шестой главе рассматривается синтез механизмов с высшими парами: синтез зубчатых и кулачковых механизмов,

Самостоятельное решение студентами задач по каждому разделу курса теории механизмов и машин учит практическому применению методов кинематического и динамического анализа и проектирования механизмов, развивает навыки расчетной техники и кругозор, закрепляет теоретические знания.

ЧАСТЬ 1. АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ

ГЛАВА 1. СТРУКТУРНЫЙ АНАЛИЗ И КЛАССИФИКАЦИЯ МЕХАНИЗМОВ

Механизмом называется система тел, предназначенных для преобразования движения одного или нескольких тел в требуемое движение других тел.

Механизмы, входящие в состав машин, весьма разнообразны. Одни из них представляют собой сочетание твердых тел, другие могут иметь в своем основном составе гидравлические, пневматические, электрические или магнитные устройства. Соответственно такие механизмы называются гидравлическими, пневматическими, электрическими ... механизмами.

Механизмы можно классифицировать по их функциональному назначению:

- механизмы двигателей и преобразователей;
- передаточные механизмы;
- исполнительные механизмы;
- механизмы управления ...

Однако, несмотря на функциональные различия, в структуре разных механизмов много общего. Поэтому можно к исследованию механизмов применять общие методы механики. При исследовании машин и механизмов, как правило, можно считать жесткие тела, образующие механизм, абсолютно твердыми, так как перемещения, возникающие от деформации, малы по сравнению с перемещением самих тел.

ТММ – наука, изучающая строение, кинематику и динамику механизмов.

Анализ механизмов может быть структурным, кинематическим и динамическим.

1.1. Структура механизмов

Любой механизм состоит из отдельных деталей, групп деталей и кинематических пар.

Все неподвижные детали образуют одну жесткую неподвижную систему тел, называемую *неподвижным звеном* или *стойкой*.

Каждая подвижная деталь или группа деталей, образующих одну жесткую подвижную систему тел, называется *подвижным звеном*.

Подвижные и неподвижные звенья соединены между собой таким образом, что обеспечивается возможность их относительного движения.

В соответствии с характером движения звеньев относительно стойки можно выделить следующие, часто встречающиеся названия звеньев:

а) **кривошип** – звено, которое совершает полное круговое движение, – на 360° (рис. 1.1);

б) **коромысло** – звено, которое совершает колебательное движение относительно некоторого центра (рис. 1.2);

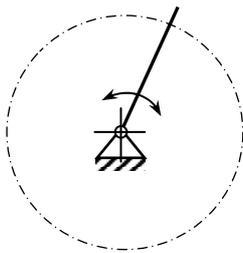


Рис. 1.1. Кривошип

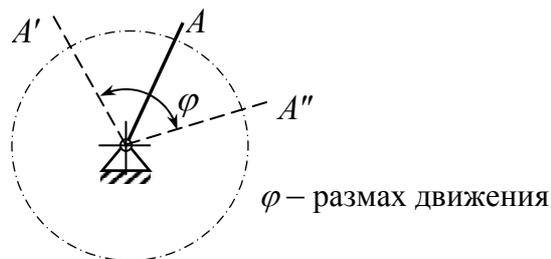


Рис. 1.2. Коромысло

в) **шатун** – звено, совершающее сложное движение (поступательное и вращательное);

г) **ползун** – звено, совершающее только поступательное движение (рис. 1.3).

Кроме классификационных названий звеньев по характеру их абсолютного (относительно неподвижного звена) движения, названия звеньев вводятся еще по взаимосвязи, взаимовлиянию движения, особенностей геометрической формы звеньев:

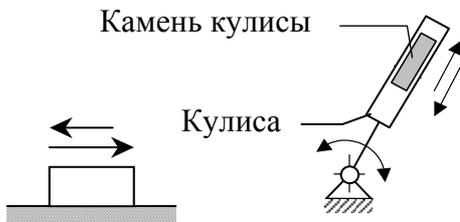


Рис. 1.3. Ползун

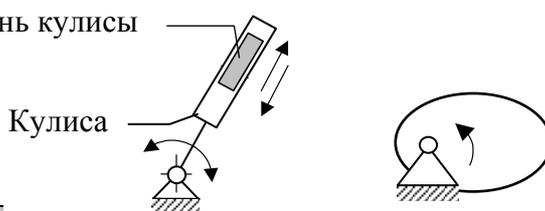


Рис. 1.4. Кулиса

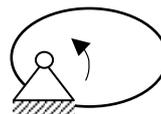


Рис. 1.5. Кулачок

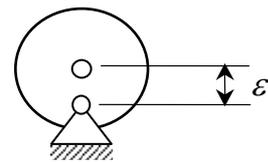


Рис. 1.6. Эксцентрик

д) **кулиса** – подвижная направляющая (рис. 1.4). В данном примере в соответствии с характером собственного движения кулиса может быть коромыслом, реже – кривошипом. Кулиса может совершать и поступательное движение, тогда его можно классифицировать как ползун-кулиса;

е) **кулачок** – звено, очерченное профилем переменной кривизны, который определяет характер перемещения сопряженного с ним звена и образует с последним пару высшего класса. Сам кулачок может совершать вращательное (рис. 1.5) или поступательное движение;

ж) **эксцентрик** – частный случай кулачка. Профилем является окружность, но звено совершает вращательное движение не вокруг своей геометрической оси (рис. 1.6);

з) **толкатель** – звено, сопряженное высшей кинематической парой с кулачком. Различают поступательно движущийся (рис. 1.7,а) и коромысловый (рис. 1.7,б) толкатели.

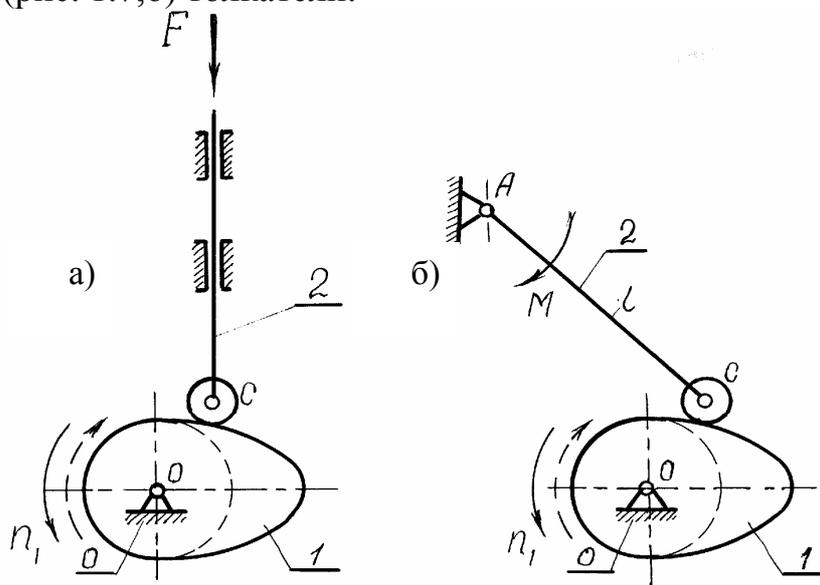


Рис. 1.7. Кулачковые механизмы: а – с поступательно движущимся толкателем; б – с коромысловым толкателем (1 – кулачок, 2 – толкатель)

и) **зубчатое колесо** (см. рисунок к задаче 12).

Соединение двух соприкасающихся звеньев, допускающее их относительное движение, называется *кинематической парой* (КП). Соприкасающиеся поверхности, линии, точки называются элементами кинематических пар.

Все кинематические пары подразделяются на пять классов. Номер класса КП определяется числом условий связи, которые наложены на движение одного звена пары относительно другого.

Кинематические пары классифицируются по ряду признаков:

- 1) по числу условий связи (невозможных движений), накладываемых на относительные движения звеньев;
- 2) по характеру соприкосновения звеньев;
- 3) по характеру относительного движения.

Кинематические пары плоских механизмов в соответствии с первым признаком могут быть:

- а) 5-го класса – P_5 (5 условий связи),
- б) 4-го класса – P_4 (4 условия связи).

По второму признаку КП могут быть двух видов:

- а) низшие КП, в которых контакт осуществляется по поверхности,
- б) высшие КП – контакт по точке или по линии.

По третьему признаку кинематические пары 5-го класса могут быть двух видов: вращательные (В) и поступательные (П).

Кинематические пары 4-го класса имеются в зубчатых, кулачковых и других механизмах (ВП, ПП, ВВ).

Для решения вопроса, к какому классу относится та или иная КП, следует поступать следующим образом. Одно из звеньев, входящих в КП, представить неподвижным. Связать с ним систему координат $Oxyz$ и, ориентируясь по ней, проследить число невозможных движений.

Число этих невозможных движений (число связей) представляет собой номер класса КП.

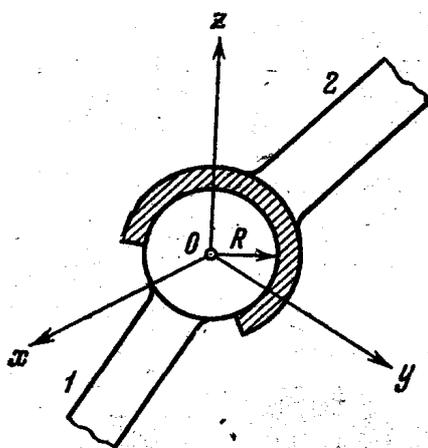


Рис. 1.8. Сферическая кинематическая пара

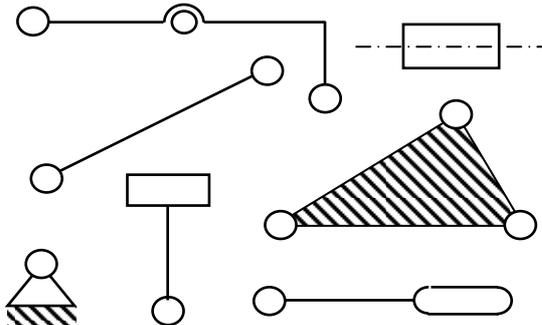
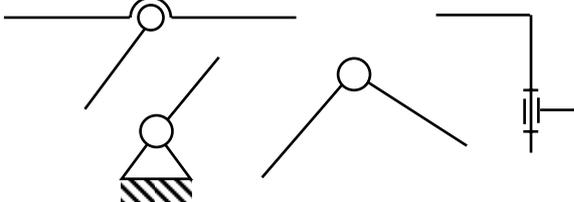
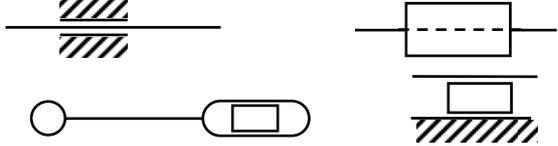
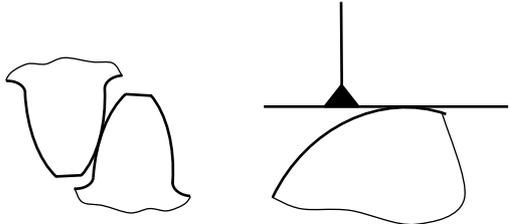
На примере сферического шарнира (рис. 1.8) проследим число связей (невозможных движений). Звено 2 не может совершать поступательное движение вдоль ни одной из осей Ox , Oy , Oz , но вращаться вокруг них может. Число условий связи $S=3$, число степеней свободы $H=3$. Пара 3-го класса.

Если же наложить еще условие плоскостности (плоский механизм – движение звеньев только в одной плоскости), то окажется, что звено 2 сможет совершать вращательное движение вокруг двух осей – перпендикулярной плоскости механизма и оси, проходящей через центр шарнира и ось звена 2. $S=4$, $H=2$, пара 4-го класса. Если звенья механизма могут совершать только плоскопараллельные движения – отнимается еще и возможность вращения звена 2 вокруг своей оси – пара 5-го класса (следует считать только в условиях данного механизма).

Для составления кинематической схемы механизма необходимо уметь правильно изображать звенья и кинематические пары, условные обозначения которых приведены в табл. 1.1.

Таблица 1.1

Схематическое изображение звеньев и кинематических пар

Объект изображения	Условное обозначение
Звенья	
Кинематические пары вращательные 5-го класса	
Кинематические пары поступательные 5-го класса	
Кинематические пары 4-го класса высшие	

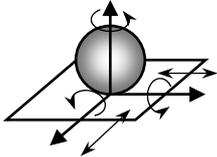
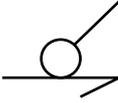
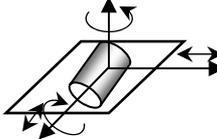
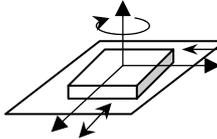
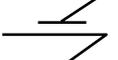
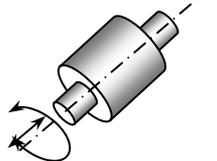
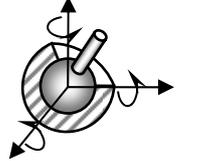
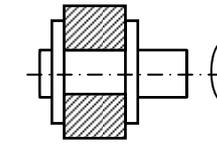
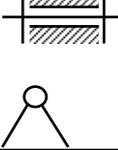
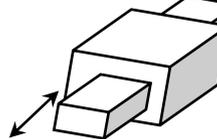
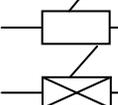
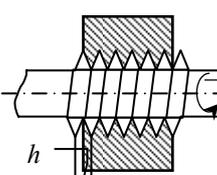
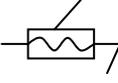
Другие типы кинематических пар, их конструктивные схемы и условные обозначения на чертежах приведены в табл. 1.2.

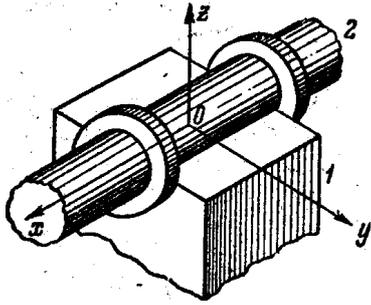
ЗАДАЧИ 1–10

Определить класс кинематической пары, образованной звеньями 1 и 2. Указать, какие из шести независимых движений (трех поступательных и трех вращательных) одного звена относительно другого невозможны в кинематической паре.

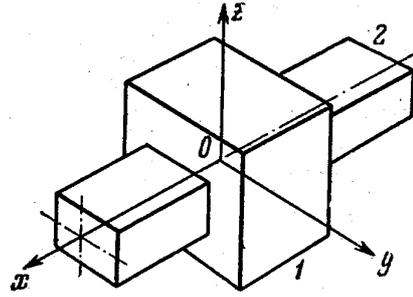
Таблица 1.2

Кинематические пары и их обозначения на схемах

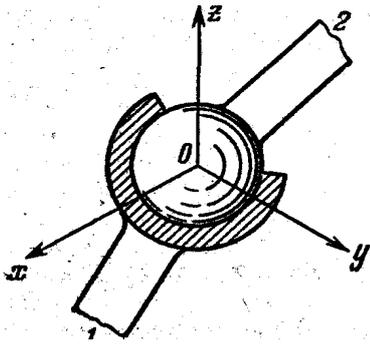
Кинематическая пара	Рисунок	Обозначение
Сфера-плоскость $H = 5, S = 6 - H = 1$ ВВВП		
Цилиндр на плоскости $H = 4, S = 6 - H = 2$ ВВПП		
Призма на плоскости $H = 3, S = 6 - H = 3$ ВПП		
Цилиндрическая $H = 2$ $S = 6 - H = 4$ ВП		
Сферическая $H = 3$ $S = 6 - H = 3$ ВВВ		
Сферическая с пальцем $H = 2, S = 6 - H = 4$ ВВ		
Вращательная (цилиндрическая с буртом) $H = 1, S = 6 - H = 5$ В		
Поступательная $H = 1, S = 6 - H = 5$ П		
Винтовая $H = 1, S = 6 - H = 5$ ВП (движения взаимозависимы)		



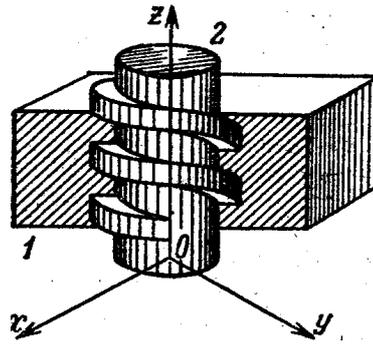
К задаче 1



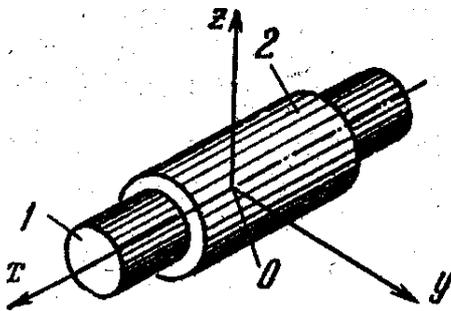
К задаче 2



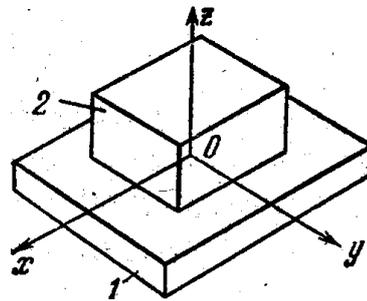
К задаче 3



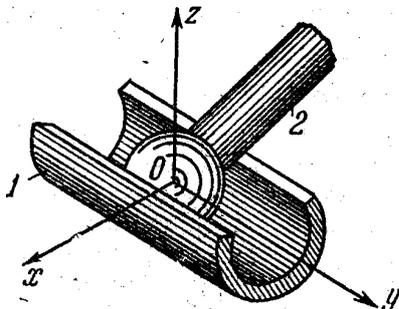
К задаче 4



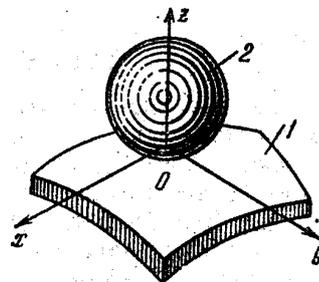
К задаче 5



К задаче 6



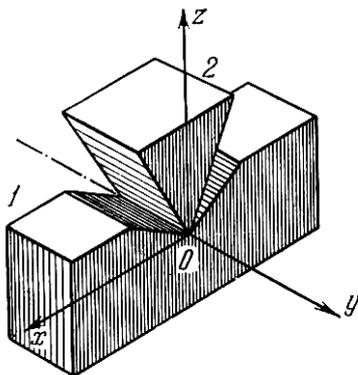
К задаче 7



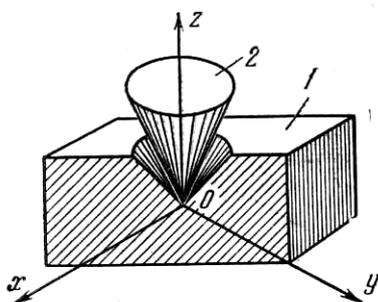
К задаче 8

ЗАДАЧИ 11–14

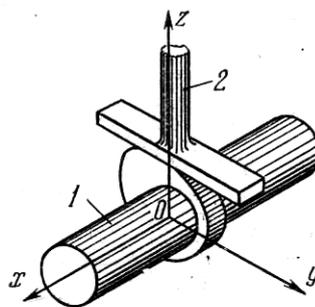
Определить класс кинематической пары, образованной звеньями 1 и 2, если оба звена, вошедшие в кинематическую пару, совершают плоскопараллельное движение относительно плоскости OYZ .



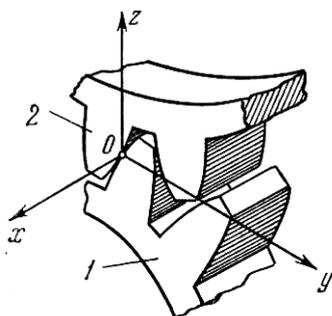
К задаче 9



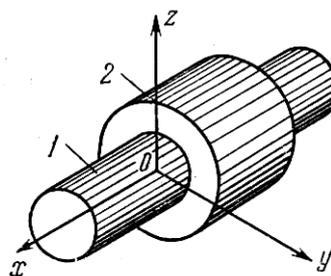
К задаче 10



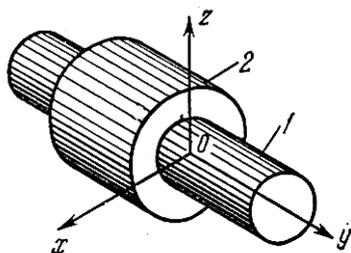
К задаче 11



К задаче 12



К задаче 13



К задаче 14

1.2. Классификация механизмов

Определение степени подвижности механизма

Числом ведущих звеньев определяется степень подвижности механизма, или число его степеней свободы относительно стойки.

Итак, известно, что в кинематической цепи (КЦ) могут быть КП 1...5 классов: P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 . Число степеней свободы отдельного звена, не связанного с другими, равно 6. Если число звеньев КЦ k , тогда число степеней свободы $6k$. Отсюда надо отнять число степеней свободы, которые отнимаются вхождением звеньев в КП, таким образом, число степеней свободы H , которыми обладает КЦ:

$$H=6k-5P_5-4P_4-3P_3-2P_2-P_1. \quad (1.1)$$

Обычно рассматривается число степеней свободы механизма относительно неподвижного звена (стойки):

$$W=H-6=6(k-1)-5P_5-4P_4-3P_3-2P_2-P_1.$$

Пусть $k-1=n$ – число подвижных звеньев КЦ, тогда

$$W=6n-5P_5-4P_4-3P_3-2P_2-P_1. \quad (1.2)$$

Эта формула носит название Сомова–Малышева (Сомов П.И., 1887, Малышев А.П., 1923), формула подвижности или структурная формула кинематической цепи общего вида.

Данная формула применима в том случае, если на движение звеньев, входящих в состав механизма, не наложено каких-либо общих дополнительных условий.

В частном случае плоского механизма (когда все звенья движутся параллельно одной общей плоскости) на движение в целом наложено три общих ограничения, структурная формула принимает вид (формула Чебышева):

$$W=(6-3)n-(5-3)P_5-(4-3)P_4-(3-3)P_3=3n-2P_5-P_4.$$

Номер семейства равен числу общих условий связи, которые наложены на все звенья механизма.

Для механизмов первого семейства:

$$W=5n-4P_5-3P_4-2P_3-P_2;$$

для механизмов второго семейства:

$$W=4n-3P_5-2P_4-P_3;$$

формула Чебышева справедлива для механизмов третьего семейства; для механизмов четвертого семейства (формула Добровольского):

$$W=2n-P_5.$$

В этих формулах W – степень подвижности механизма; n – число подвижных звеньев; P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 – число кинематических пар соответствующих классов.

Прежде чем применять структурные формулы, следует установить, сколько *общих* условий связи наложено на движение звеньев исследуемого механизма. Число этих связей будет соответствовать номеру семейства.

После установления номера семейства следует выяснить, нет ли в данном механизме звеньев, которые накладывают *пассивные связи*, не влияющие на кинематику основных звеньев механизма. Если подобные звенья в рассматриваемом механизме имеются, то необходимо их выделить, исключить из рассмотрения. Такие звенья в реальных механизмах применяются для перераспределения нагрузки между звеньями, повышения жесткости системы, уменьшения износа элементов и повышения КПД системы (замены трения скольжения трением качения – введение роликов).

Лишними степенями свободы называют подвижности звеньев, не влияющие на степень свободы механизма в целом, например, вращение роликов на своих осях (или отсутствие такового) в кулачковом механизме никоим образом не сказывается на характере перемещения ведомого звена – толкателя, однако привносит дополнительную степень подвижности. Исследуя кинематику основного механизма, этим движением можно пренебречь.

Пример 1

Дан плоский шарнирный параллелограмм (рис. 1.9). На движение его звеньев наложено три общих условия связи: звенья не могут перемещаться поступательно вдоль оси Ox и вращаться вокруг осей Oy и Oz . Это механизм третьего семейства.

В механизме длины звеньев (расстояние между осями шарниров) подобраны так, что изменяемая фигура $ABCD$ всегда будет параллелограммом ($l_{AB} = l_{CD}$, $l_{BC} = l_{AD}$). Вследствие того, что $l_{AF} = l_{ED}$, $l_{FE} = l_{AD}$, звено 5 не стесняет движения остальных звеньев. Поэтому оно должно быть отнесено к пассивной связи и не учитывается при подсчёте числа подвижных звеньев n .

При отброшенном звене 5 степень подвижности механизма равна

$$W = 3n - 2P_5 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = 1.$$

Это означает, что для придания определенности движения звеньям механизма достаточно задать движение одному звену.

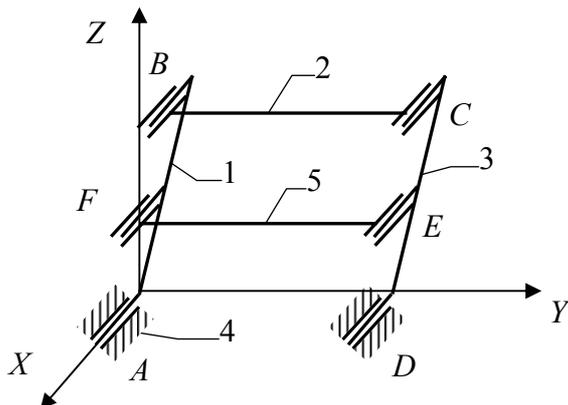


Рис. 1.9. Плоский шарнирный параллелограмм

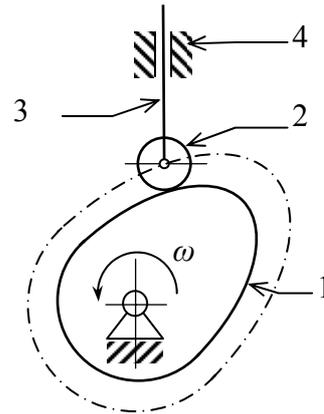


Рис. 1.10. Кулачковый механизм

Если бы не была отброшена пассивная связь, то при подсчете степени подвижности был бы получен неверный результат:

$$W = 3n - 2P_5 = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 6 = 0.$$

Пример 2

Рассмотрим кулачковый механизм (рис. 1.10), где:

- 1 – кулачок (ведущее звено),
- 2 – ролик,
- 3 – толкатель (ведомое звено),
- 4 – стойка.

Число подвижных звеньев $n=3$ (1, 2, 3).

Кинематических пар 5-го класса: $P_5=3$ (B_{14} , B_{23} , Π_{34}).

Кинематических пар 4-го класса: $P_4=1$ ($В\Pi_{12}$).

Тогда по формуле Чебышева:

$$W = 3n - 2P_5 - P_4 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 1 = 2.$$

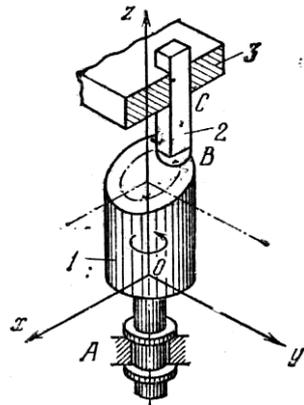
Ролик 2 можно удалить (или жестко связать со звеном 3, исключив соответственно одну кинематическую пару $B_{2,3}$) – он не оказывает никакого влияния на характер движения выходного звена. Тогда $n=2$ (1, 3); $P_5=2$ (B_{14} , Π_{34}); $P_4=1$ ($В\Pi_{13}$) и

$$W = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 2 - 1 = 1.$$

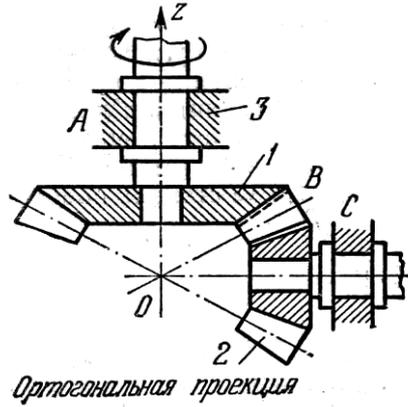
ЗАДАЧИ 15–18

15. Определить семейство и степень подвижности торцевого кулачкового механизма.

16. Определить семейство и степень подвижности механизма зубчатой передачи с коническими колесами.



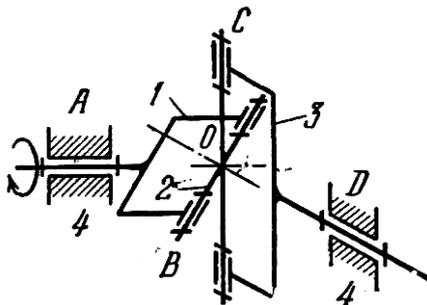
К задаче 15



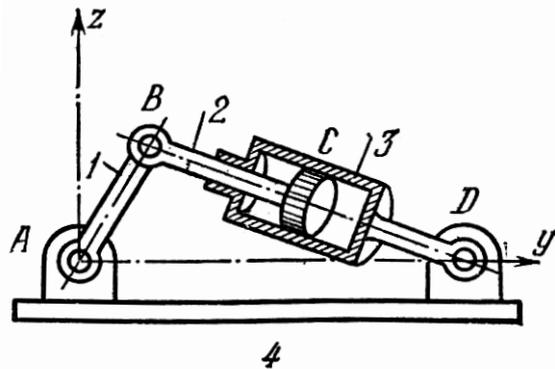
К задаче 16

17. Определить семейство и степень подвижности механизма оди-
нарного шарнира Гука (оси всех его вращательных пар пересекаются в
одной точке O).

18. Определить семейство и степень подвижности механизма гид-
ропривода.



К задаче 17



К задаче 18

1.3. Составление кинематических схем механизмов

Кинематическая схема механизма дает полное представление о структуре механизма и определяет его кинематические свойства. Она является графическим изображением механизма посредством условных обозначений звеньев и кинематических пар с указанием размеров, которые необходимы для кинематического анализа механизма.

На кинематических схемах механизмов звенья, как правило, изображаются отрезками прямых и нумеруются арабскими цифрами. Кинематические пары в пространственных механизмах обозначаются большими буквами латинского алфавита и схематически изображаются так, как это сделано на рис. 1.9. Схематическое изображение кинематических пар плоских механизмов показано в табл. 1.1 и 1.2. Элементы высшей пары очерчиваются кривыми, которыми они характеризуются в природе. Стойку (неподвижное звено) принято выделять штриховкой (см. рис. 1.1–1.7 и др.).

Для построения кинематической схемы механизма рекомендуется следующая последовательность действий:

1. Установить основное кинематическое назначение механизма.
2. Подсчитать общее число звеньев k , включая стойку. Число подвижных звеньев будет $n = k - 1$.
3. Выяснить, сколько наложено на подвижные звенья механизма общих условий связи, и по их числу установить номер семейства механизма.
4. Подсчитать и установить класс кинематических пар, а также найти степень подвижности механизма.
5. Вычертить схему механизма. Начинать её надо с нанесения на чертеж неподвижных элементов кинематических пар, т. е. элементов, принадлежащих стойке. Далее следует вычертить ведущие звенья, входящие в кинематические пары со стойкой. (Число этих звеньев соответствует найденной ранее степени подвижности.) Затем надо нанести на чертеж кинематическую цепь, образующую ведомую часть механизма.

При составлении схемы плоских механизмов чертеж должен совпадать с плоскостью, параллельно которой движутся точки звеньев механизма, исключение составляют передачи с цилиндрическими зубчатыми колесами, когда для наглядности схема может вычерчиваться в плоскости, перпендикулярной плоскости вращения колес (рис. 1.11).

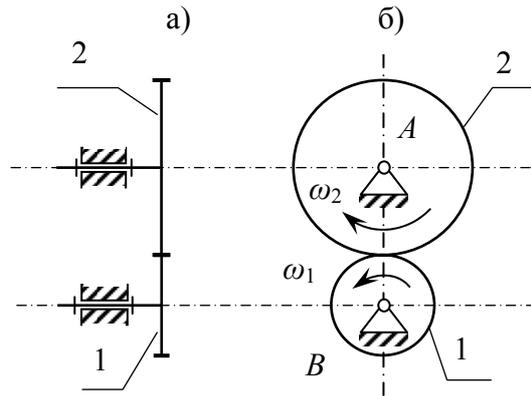


Рис. 1.11. Принятые на схемах изображения цилиндрических зубчатых передач

Рассмотрим следующие задачи.

1. Составить кинематическую схему механизма. Подсчитать число звеньев и кинематических пар, его образующих. Определить семейство механизма и класс кинематических пар.

На рис. 1.12 приведен кривошипно-ползунный механизм (механизм поршневого двигателя).

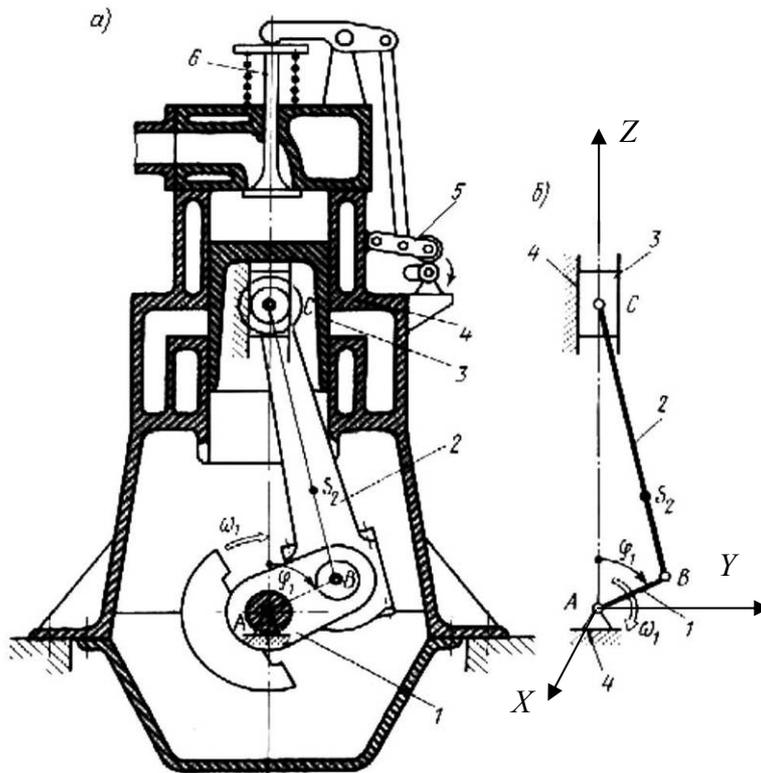


Рис. 1.12. Механизм поршневого двигателя (а) и его основная кинематическая схема (б)

Выделяем основную его структуру (клапанный механизм не рассматриваем). Вычерчиваем в масштабе, отражая характерными графическими обозначениями кинематические пары. Пронумеруем все звенья и обозначим кинематические пары буквами латинского алфавита.

Общее число звеньев $k = 4$. Число подвижных звеньев $n = k - 1 = 3$.

Число возможных движений – три: V_X (звенья 1, 2); Π_Y (звено 2); Π_Z (звенья 2, 3), т. е. три невозможных движения (три условия связи). Механизм третьего семейства. Кинематических пар 5-го класса $P_5=4$ (1–4, 1–2, 2–3, 3–4), кинематических пар 4-го класса нет, $P_4=0$. Тогда по формуле Чебышева степень подвижности механизма:

$$W = 3n - 2P_5 - P_4 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = 1.$$

Механизм состоит из звеньев:

1 – кривошип, 2 – шатун, 3 – ползун, 4 – стойка.

2. Применить условие первой задачи для плоского кулачкового механизма с тарельчатым толкателем (рис. 1.13).

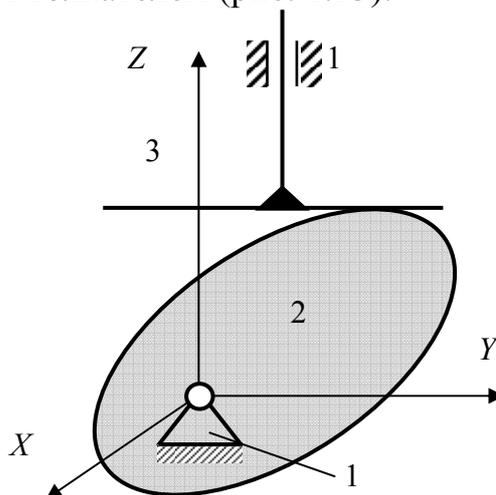


Рис. 1.13. Кулачковый механизм с тарельчатым толкателем

Общее число подвижных звеньев $k=3$, тогда $n=2$. Число возможных движений – 3: (1–2) – V_X ; (2–3) – V_X, Π_Y ; (3–1) – Π_Z , т. е. три невозможных движения. Механизм третьего семейства.

$P_5=2$ (V_{12}, Π_{31}), $P_4=1$ ($V\Pi_{23}$).

Степень подвижности:

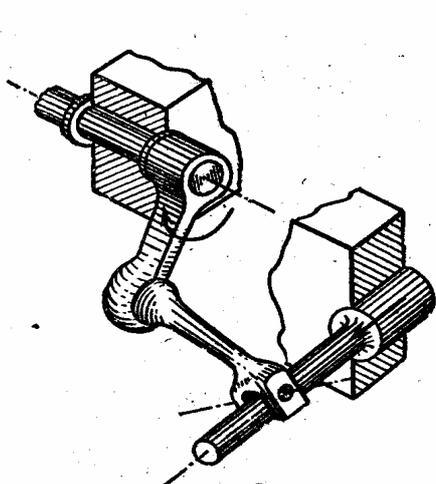
$$W = 3n - 2P_5 - P_4 = 1.$$

Механизм состоит из звеньев:

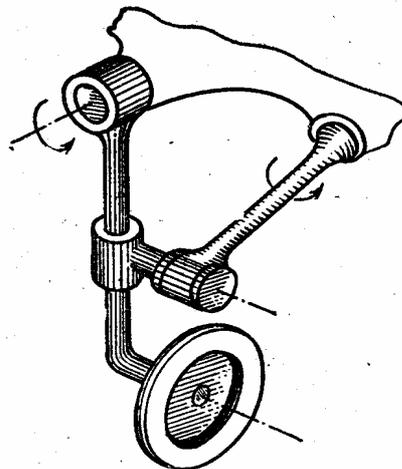
1 – стойка, 2 – кулачок, 3 – толкатель.

ЗАДАЧИ 19–28

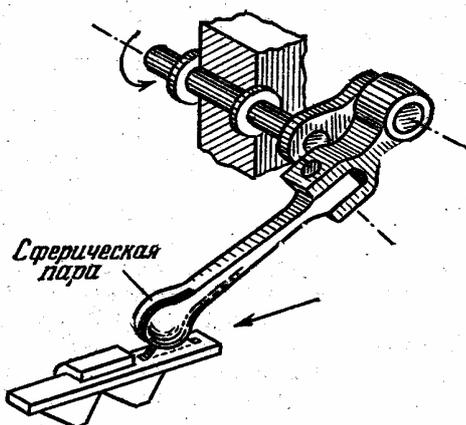
Составить кинематическую схему механизма. Подсчитать число звеньев и кинематических пар, его образующих. Определить семейство механизма и класс кинематических пар.



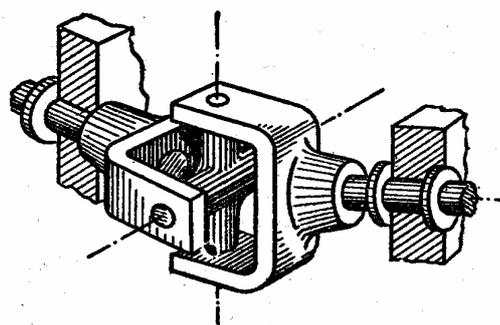
К задаче 19



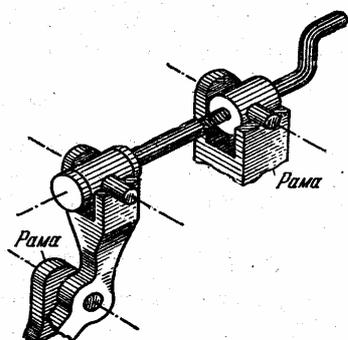
К задаче 20



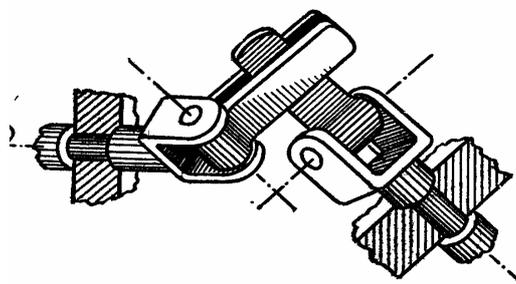
К задаче 21



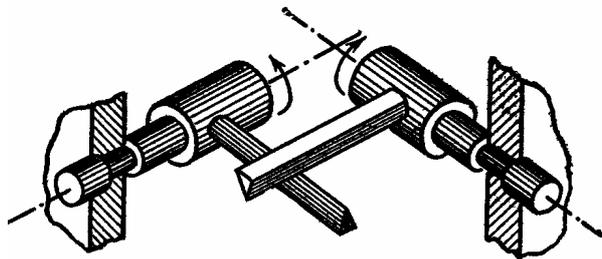
К задаче 22



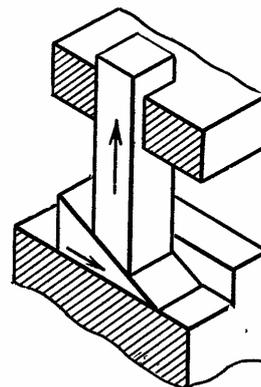
К задаче 23



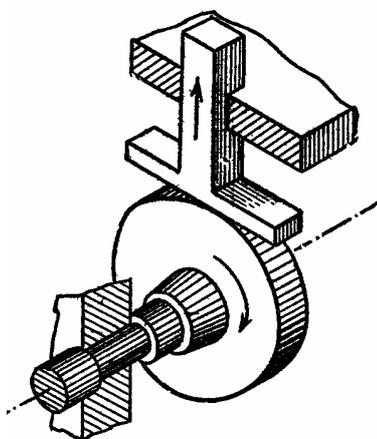
К задаче 24



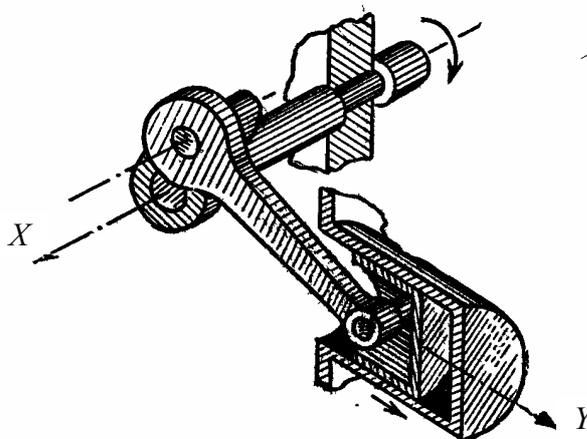
К задаче 25



К задаче 26



К задаче 27



К задаче 28

1.4. Структурный состав механизма

Структурная классификация плоских шарнирных механизмов была разработана русским ученым профессором Л.В. Ассуром (1914 г.), а затем развита И.И. Артоболовским.

Согласно классификации Л.В. Ассура каждый плоский механизм состоит из начальных механизмов и присоединенных к ним структурных групп (групп Ассура) с нулевой степенью подвижности.

Начальными механизмами могут быть:

а) начальный вращательный механизм (рис. 1.14,а):

$n=1, P_5=1 (B_{12}), P_4=0, W=1;$

б) начальный поступательный механизм (рис. 1.14,б):

$n=1, P_5=1 (\Pi_{12}), P_4=0, W=1.$

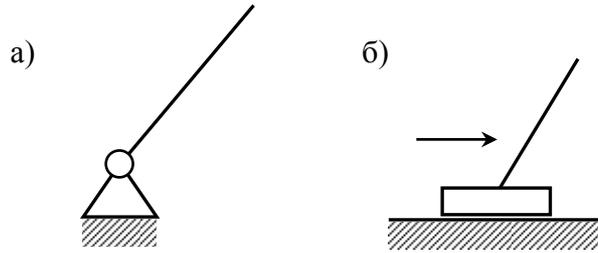


Рис. 1.14. Начальные механизмы

Начальные механизмы относятся к механизмам 1-го класса.

Основной принцип образования механизмов заключается в последовательном наложении кинематических цепей, обладающих определенными структурными свойствами.

Группой Ассура называется кинематическая цепь с нулевой степенью свободы относительно тех звеньев, с которыми входят в кинематические пары свободные элементы ее звеньев, и не распадающаяся на более простые цепи, обладающие также нулевой степенью свободы.

Равноправно и следующее определение: группой Ассура называют элементарную кинематическую цепь, которая в случае ее присоединения элементами внешних пар к стойке получает нулевую степень подвижности:

$$W = 3n - 2P_5 - P_4 = 0.$$

Рассмотрим, при каком соотношении между числом подвижных звеньев n и кинематическими парами P_5 и P_4 могут существовать группы Ассура:

а) для групп Ассура только с кинематическими парами только 5-го класса степень подвижности определяется:

$$W = 3n - 2P_5, \text{ следовательно, } n = \frac{2}{3}P_5.$$

Возможные сочетания чисел звеньев и кинематических пар (рис. 1.15–1.18):

n	2	4	6	8	...
P_5	3	6	9	12	...

б) для групп Ассура с КП 5-го и 4-го классов:

$$W = 3n - 2P_5 - P_4.$$

n	P_5	P_4
1	1	1
2	2	2
...

Назовем звено и стойку, образующие кинематическую пару 5-го класса, механизмом 1-го класса.

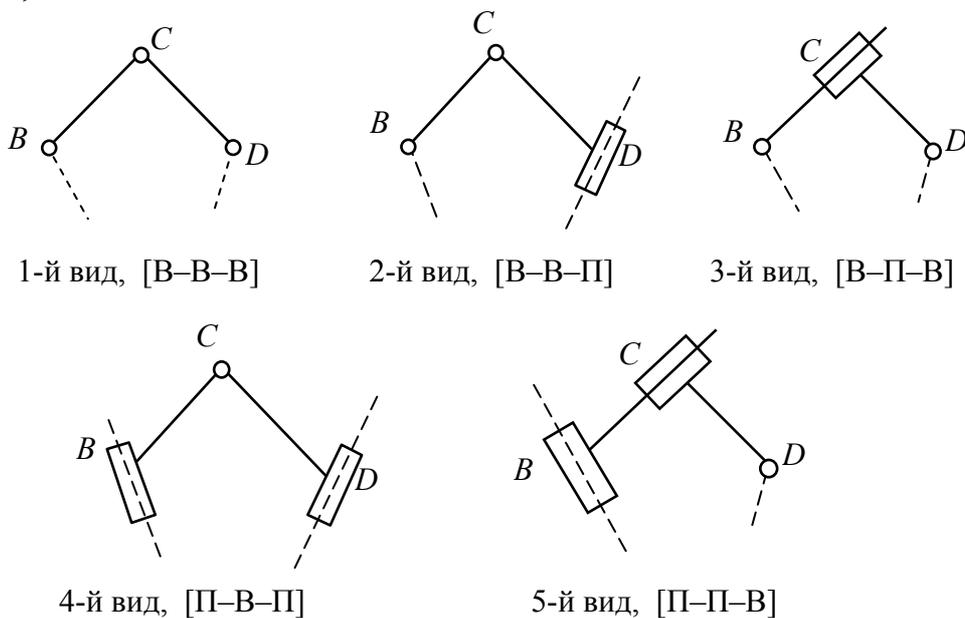


Рис. 1.15. Группы Ассура 2-го класса ($n=2$, $P_5=3$, $P_4=0$)

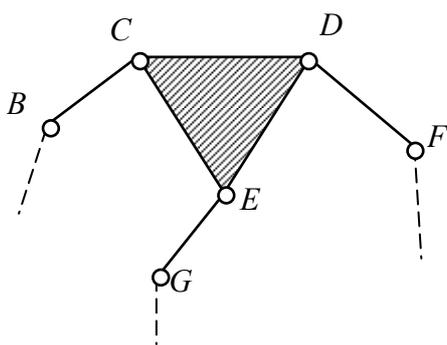


Рис. 1.16. Группа Ассура 3-го класса ($n=4$, $P_5=6$)

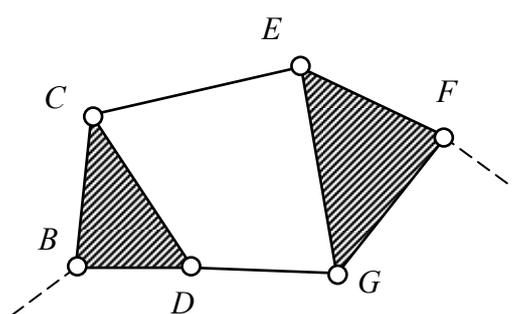


Рис. 1.17. Группа Ассура 4-го класса ($n=4$, $P_5=6$)

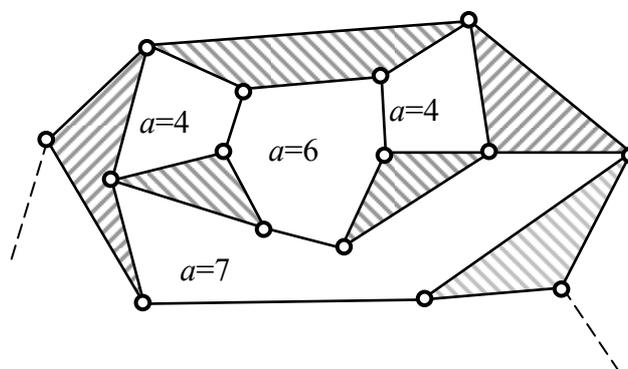


Рис. 1.18. Группа Ассура 7-го класса ($n=10$, $P_5=15$, $P_4=0$, $W=0$, $k=2$)

Характерным примером группы Ассура с высшей кинематической парой 4-го класса может быть толкатель в кулачковом механизме (см. рис. 1.13 – одно звено, одна пара 5-го и одна пара 4-го классов) или зубчатое колесо.

Образование любого плоского механизма может быть представлено как последовательное присоединение групп, удовлетворяющих условию

$$W = 3n - 2P_5 - P_4 = 0 .$$

Класс механизма соответствует классу наивысшей группы, входящей в его состав.

Порядок группы определяется числом элементов звеньев, которыми группа присоединяется к основному механизму.

Все виды групп 2-го класса могут быть получены путем замены отдельных вращательных пар парами поступательными (рис. 1.15).

Класс групп Ассура определяется сложностью контура их звеньев, входящих в группу.

Задача об определении класса плоского механизма решается так:

1. Вычерчивается схема механизма. Подсчитывается степень подвижности его по формуле Чебышева.

2. Выбирается ведущее звено (начальный вращательный или поступательный механизм).

3. Производится отделение (с конца механизма) группы Ассура возможно более низкого класса. Если невозможно отделить группы 2-го класса, ищется группа 3-го класса и т. д.

4. После отделения каждой группы Ассура выполняется проверка оставшегося механизма по степени подвижности (измениться не должна, не должно оставаться звеньев, не связанных с механизмом).

5. Снова выполняется пункт 3, до тех пор пока не останется лишь начальный (начальные – в случае если степень подвижности более 1) механизм.

Следует иметь в виду, что от группы Ассура не может быть отделена кинематическая цепь, удовлетворяющая условию $W = 0$, без разрушения самой группы. Если такое отделение возможно, то исследуемая кинематическая цепь представляет собой совокупность нескольких групп Ассура.

Рассмотрим примеры на структурный анализ и классификацию плоских механизмов по Ассуру–Артоболовскому.

В данных примерах необходимо определить степень подвижности механизма, написать формулу его строения и указать его класс.

Пример 1 (рис. 1.19).

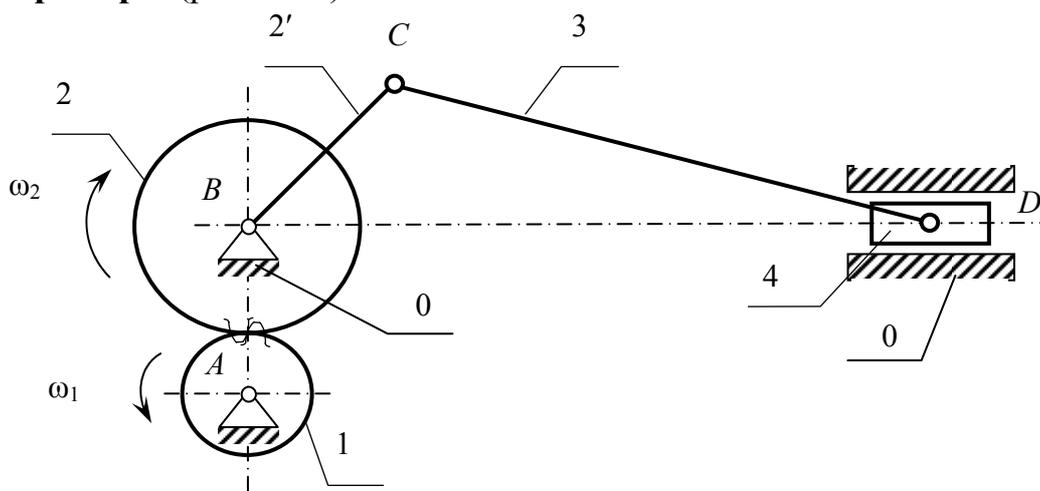


Рис. 1.19. Зубчато-рычажный механизм

- 1 – кривошип–зубчатое колесо,
- 2-2' – кривошип–зубчатое колесо,
- 3 – шатун, 4 – ползун.

$$n=4, P_5=5, P_4=1.$$

Степень подвижности механизма:

$$W = 3n - 2P_5 - P_4 = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 5 - 1 = 1.$$

Пассивные связи в механизме отсутствуют. В составе:

- начальный вращательный механизм 1 класса (звено 1 со стойкой);
- двухзвенная, двухповодковая группа Ассур 2-го класса с двумя вращательными и одной поступательной парой (звенья 3 и 4);
- однозвенная двухповодковая группа Ассур 2-го класса с вращательной и зубчатой парой (звено 2-2').

Итак, количество начальных механизмов – 1; количество групп Ассур – 2.

Формула строения механизма:

$$V_{0,1} - [ВП_{1,2} - V_{2,0}] - [V_{2',3} - V_{3,4} - П_{4,0}], \text{ механизм 2-го класса.}$$

Пример 2 (рис. 1.20).

Общее число звеньев $k=4$, число подвижных звеньев $n=3$, кинематические пары: $P_5=4, P_4=0$.

Степень подвижности механизма по формуле Чебышева:

$$W = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = 1.$$

Ведущее звено одно, так как $W=1$.

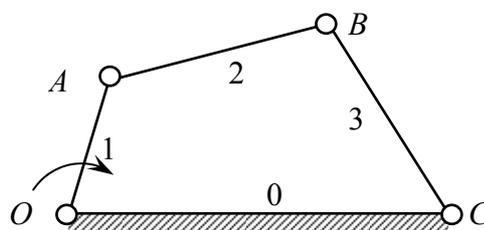


Рис. 1.20. Шарнирный четырехзвенный механизм

Механизм расчленяется на группы Ассур. Вначале отделяется группа Ассур 2-го класса первого вида, образованная звеньями 2, 3. На этом отделение заканчивается, так как осталось ведущее звено 1 и стойка 0.

Записываем формулу строения механизма:

$$B_{0,1} - [B_{1,2} - B_{2,3} - B_{3,0}].$$

Наивысший класс присоединенной группы – второй, поэтому механизм 2-го класса.

При выполнении структурного анализа часто рекомендуется выполнить замену высших кинематических пар низшими 5-го класса. Такая процедура получила название *построение эквивалентного заменяющего механизма*.

Высшие кинематические пары 4-го класса могут быть заменены условным звеном, входящим только в кинематические пары 5-го класса, при этом характер мгновенного относительного движения не должен измениться – малые перемещения, скорости и ускорения действительных звеньев механизма сохраняются.

Характер заменяющего звена зависит от типа контакта реальных звеньев.

1. Контакт двух криволинейных поверхностей (рис. 1.21).

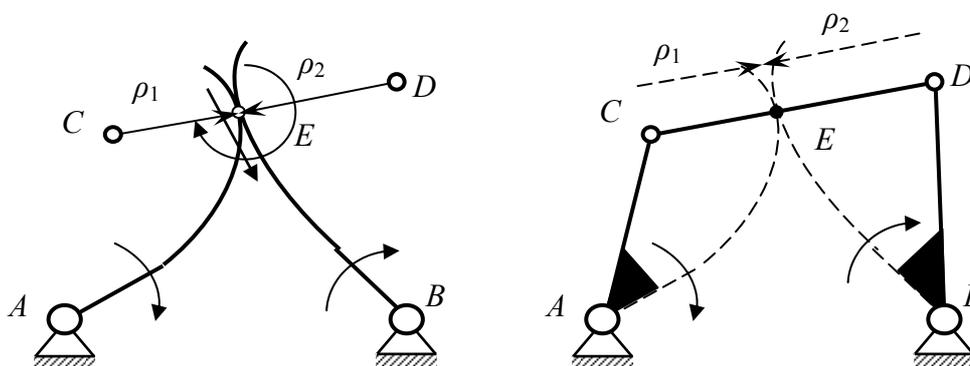


Рис. 1.21. К замене высших пар низшими.

Элементы кинематической пары: две кривые линии

В центрах кривизны (C и D) контактирующих кривых помещают вращательные пары 5-го класса, реальные звенья AE и BE заменяются жестко связанными с ними условными звеньями AC и BC (в общем случае переменной длины), эквивалентными по характеру движения реальным, вводится условное звено CD (длина которого равна сумме длин мгновенных радиусов кривизны действительных профилей $\rho_1 + \rho_2$). Заменяющий шарнирный четырехзвенник кинематически эквивалентен исходному механизму, но образован только с помощью кинематических пар 5-го класса.

2. Контакт криволинейной поверхности и прямой (рис. 1.22).

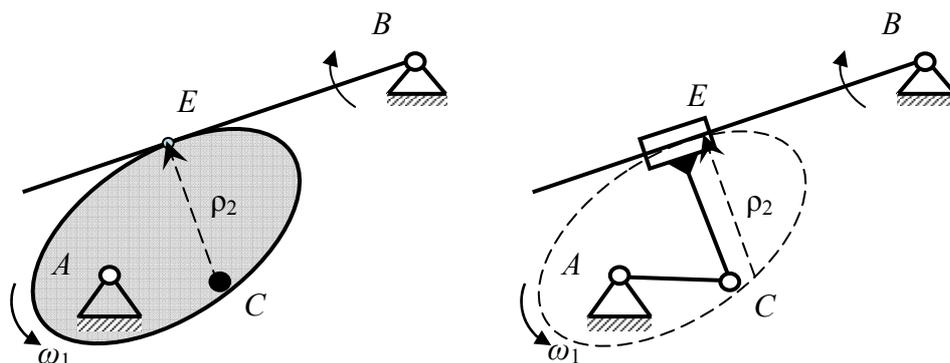


Рис. 1.22. К замене высших пар низшими.
Элементы кинематической пары: прямая и кривая

В центре кривизны C помещается вращательная кинематическая пара, в точке контакта E на прямой – поступательная пара. Звено AC – ведущее звено, совершающее движение, идентичное кулачку, звено CE – условное. Длины заменяющих звеньев AC и CE имеют переменное значение, свое для каждого положения механизма, зависят от профиля (радиуса кривизны в точке контакта и положения центра кривизны в каждый момент времени).

3. Контакт криволинейной поверхности и точки (рис. 1.23).

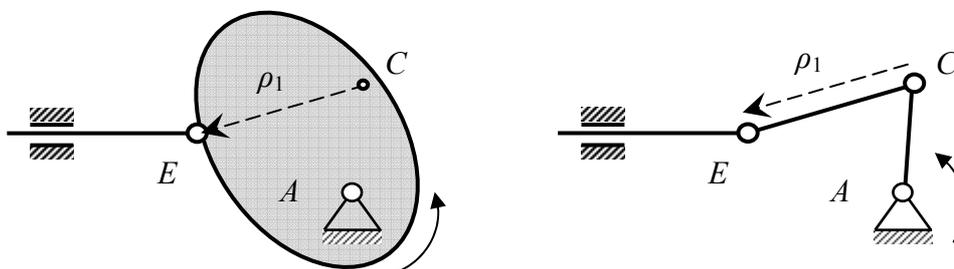


Рис. 1.23. К замене высших пар низшими.
Элементы кинематической пары: кривая и точка

В случае точечного контакта, как и в центре кривизны, помещаются вращательные кинематические пары, соединяемые звеньями AC и CE .

4. Контакт прямой линии и точки (рис. 1.24).

В точке C контакта прямой и точки помещаются и вращательная пара и поступательная.

Во всех случаях высшая кинематическая пара 4-го класса заменяется условным звеном, входящим в две пары 5-го класса. При сравнении структуры механизмов до замены и после видно, что структурная группа, состоящая из одного звена, входящего в одну пару 5-го класса и од-

ну пару 4-го класса, кинематически эквивалентна группе Ассур 2-го класса, состоящей из двух звеньев, входящих в три пары 5-го класса. По этой причине однозвенные группы с высшей парой также относят к группам Ассур 2-го класса.

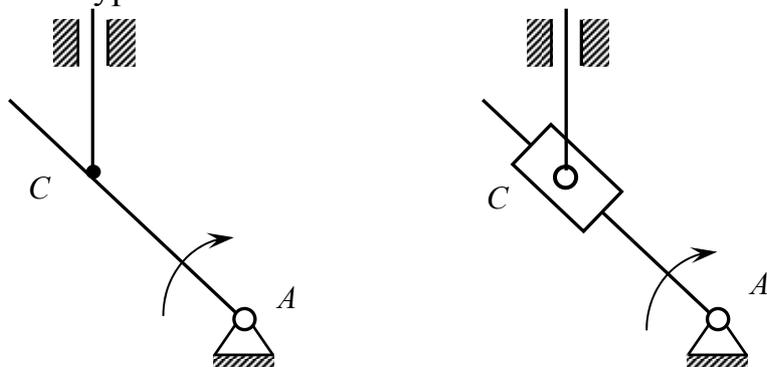
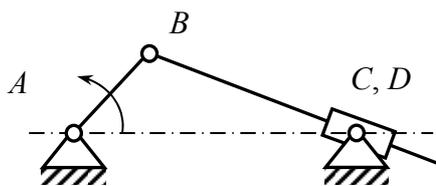


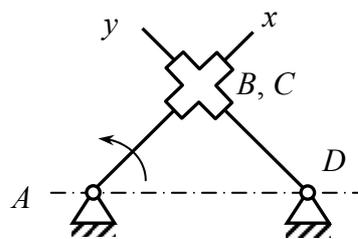
Рис. 1.24. К замене высших пар низшими.
Элементы кинематической пары: прямая и точка

ЗАДАЧИ 29–48

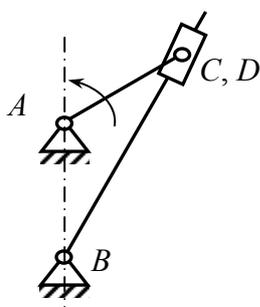
Определить степень подвижности механизма и найти его класс. При наличии звеньев, создающих пассивные связи или лишние степени свободы, их указать и не учитывать при подсчете степени подвижности механизма. Каждую кинематическую пару 4-го класса заменить одним звеном, входящим в две кинематические пары 5-го класса. Расчленить механизм на группы Ассур, написать формулу его строения и указать его класс. Ведущие звенья отмечены стрелками.



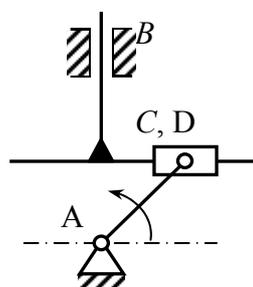
К задаче 29



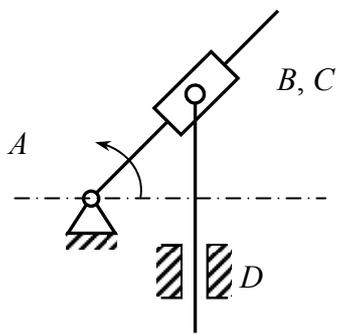
К задаче 30



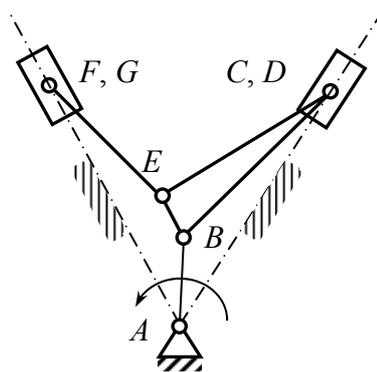
К задаче 31



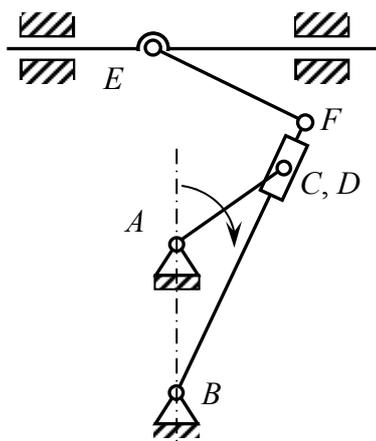
К задаче 32



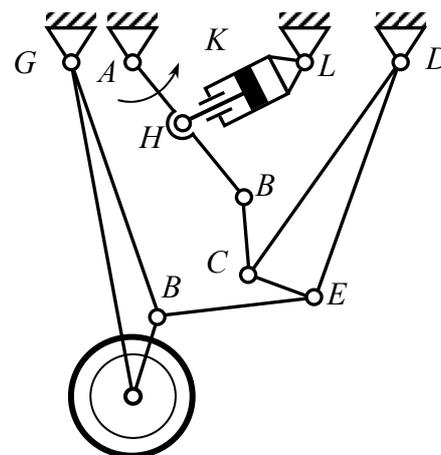
К задаче 33



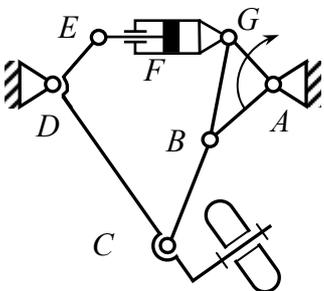
К задаче 34



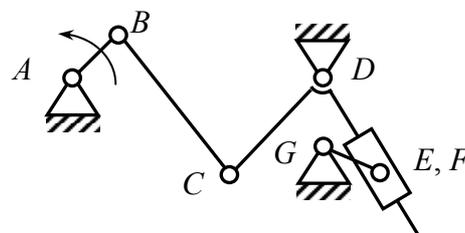
К задаче 35



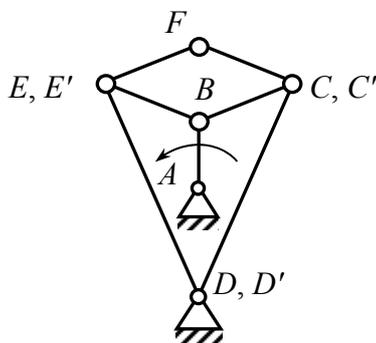
К задаче 36



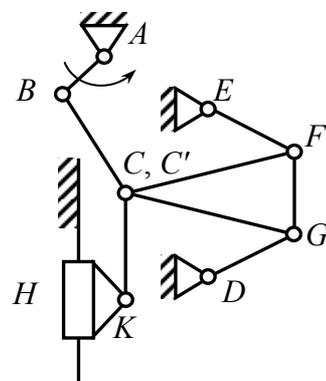
К задаче 37



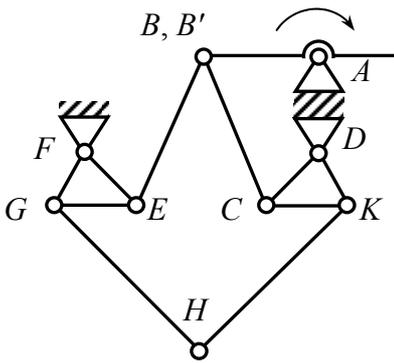
К задаче 38



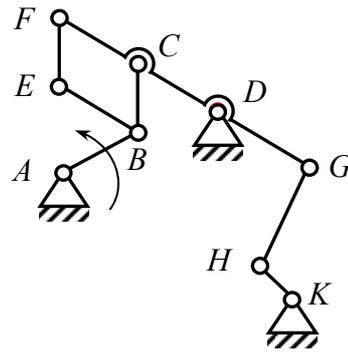
К задаче 39



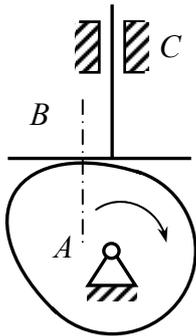
К задаче 40



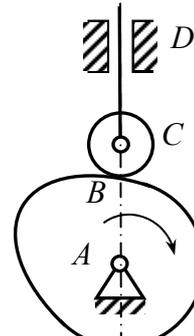
К задаче 41



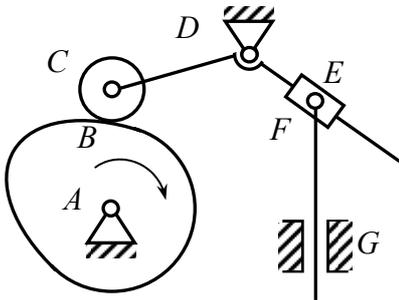
К задаче 42



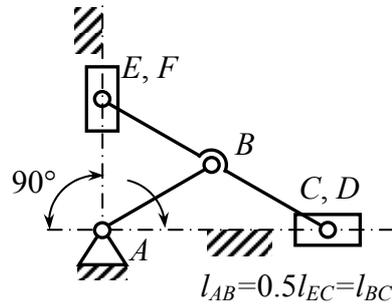
К задаче 43



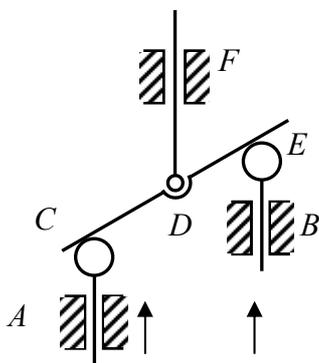
К задаче 44



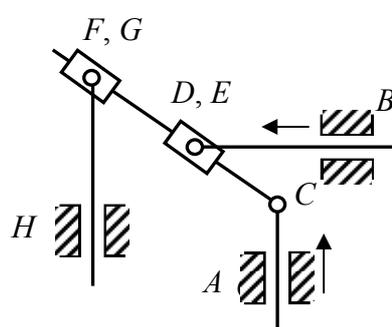
К задаче 45



К задаче 46



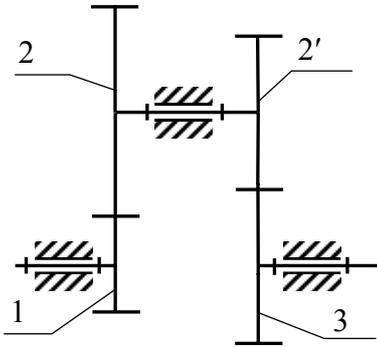
К задаче 47



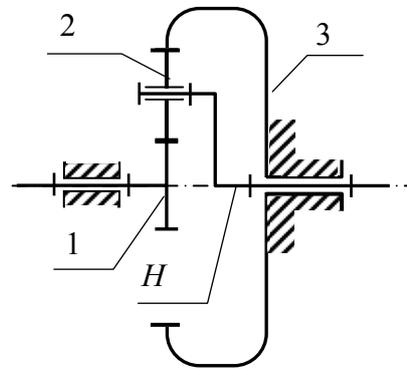
К задаче 48

ЗАДАЧИ 49–54

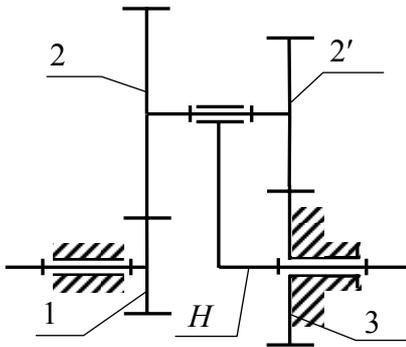
Определить степень подвижности механизмов. В задачах 53 и 54 все обозначения сделать самостоятельно.



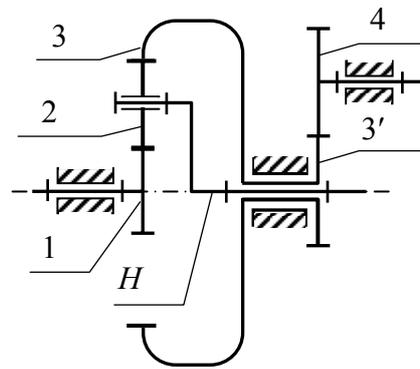
К задаче 49



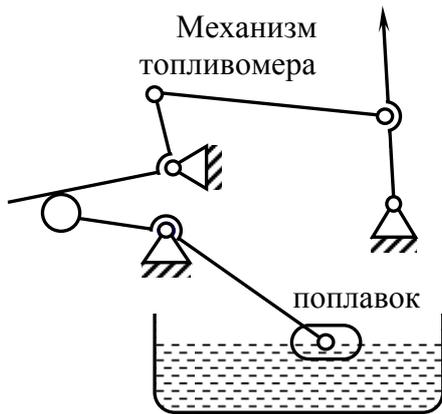
К задаче 50



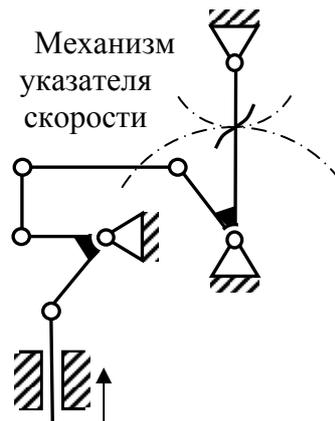
К задаче 51



К задаче 52



К задаче 53



К задаче 54

Контрольные вопросы

1. Что называется звеном, какие виды звеньев существуют?
2. Что называется кинематической парой, как их классифицируют?
3. Что называется кинематической цепью, какие виды существуют?
4. Что называется механизмом? Принципы классификации механизмов.
5. Что называется степенью подвижности механизма? Какие существуют расчетные формулы?
6. Что такое пассивные связи и пассивные (локальные) подвижности в механизме? Как их учитывают?
7. Что называется группой Ассура? Виды и классификация групп Ассура.
8. Принципы образования механизмов по Асуру-Артоболовскому.
9. Формула строения механизмов; условные обозначения кинематических пар и звеньев на схемах.
10. Цели и способы условной замены высших кинематических пар низшими.

ГЛАВА 2. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ

2.1. Аналитическое определение положений, скоростей и ускорений звеньев механизмов

Кинематическое исследование механизма, т. е. изучение движения звеньев механизма без учета сил, обуславливающих это движение, состоит в основном в решении трех задач:

- 1) определение перемещений звеньев и траекторий, описываемых точками звеньев;
- 2) определение скоростей отдельных точек звеньев и угловых скоростей звеньев;
- 3) определение ускорений отдельных точек звеньев и угловых ускорений звеньев.

Функцией положения ведомого звена (или точки на нем) называется зависимость его (или ее) перемещения от перемещения ведущего звена (или точки на нем), например:

$$\varphi_k = \varphi_k(\varphi_1) \text{ или } \varphi_k = \varphi_k(s_1), \dots,$$

где φ_1, s_1 – перемещение (положение) ведущего звена.

Вид функции положения зависит от схемы механизма, а значения постоянных, которые входят в нее, – от размерных параметров механизма. Для того чтобы составить функцию положения механизма, следует рассмотреть фигуру, которую образуют оси его звеньев. Из геометрических свойств этой фигуры находят искомую зависимость.

Если механизм имеет одну степень подвижности, то перемещения, скорости ускорения ведомых звеньев и точек механизма являются функциями перемещений, скоростей и ускорений ведущего звена механизма, они могут быть заданы в различной форме – аналитической, графической, табличной и представлять собой некоторые функции:

– для ведущего звена, входящего во вращательную пару со стойкой:

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \varphi(t) \\ \omega &= \omega(t) \\ \varepsilon &= \varepsilon(t) \end{aligned} \right\};$$

– для ведущего звена, входящего в поступательную пару со стойкой:

$$\left. \begin{aligned} s &= s(t) \\ v &= v(t) \\ a &= a(t) \end{aligned} \right\}.$$

При кинематическом исследовании механизмов скорости и ускорения ведомых звеньев удобно выражать в функции поворота φ или перемещения s ведущего звена. Если для некоторого звена механизма $\varphi_k = \varphi_k(\varphi)$, то угловая скорость этого звена

$$\omega_k = \frac{d\varphi_k}{dt} = \frac{d\varphi_k}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \omega \cdot \frac{d\varphi_k}{d\varphi} = \omega \cdot \omega_\varphi = \omega \varphi'_k.$$

Здесь ω – угловая скорость ведущего звена, а $\omega_\varphi = \varphi'_k$ – безразмерная угловая скорость этого k -го звена – аналог угловой скорости.

Угловое ускорение:

$$\begin{aligned} \varepsilon_k &= \frac{d\omega_k}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega \cdot \omega_\varphi) = \omega \frac{d\omega_\varphi}{dt} + \omega_\varphi \frac{d\omega}{dt} = \\ &= \omega \frac{d\omega_\varphi}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} + \varepsilon \cdot \omega_\varphi = \omega^2 \varepsilon_\varphi + \varepsilon \omega_\varphi. \end{aligned}$$

здесь ε_φ – аналог углового ускорения. Аналогично можно получить уравнения для скорости и ускорения какой-либо точки m звена. Пусть r_m – радиус-вектор, определяющий положение точки m . При вращательном движении ведущего звена

$$v_m = \frac{dr_m}{dt} = \frac{dr_m}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \omega \cdot \frac{dr_m}{d\varphi} = \omega \cdot v_\varphi;$$

при поступательном движении ведущего звена

$$v_m = \frac{dr_m}{dt} = \frac{dr_m}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = v \cdot v_s.$$

v_φ – аналог скорости точки m , имеющий размерность длины.

v_s – аналог скорости точки m , безразмерная величина.

Ускорение a_m в общем случае может быть представлено через следующие составляющие:

- 1) нормальное ускорение, направленное вдоль радиус-вектора к его началу;
- 2) тангенциальное ускорение, направленное перпендикулярно к радиус-вектору r_m ;
- 3) относительное релятивное ускорение, направленное вдоль радиус-вектора;
- 4) кориолисово ускорение, направленное перпендикулярно к радиус-вектору.

$$\begin{aligned}
a_m &= \frac{dv_m}{dt} = \frac{d}{dt} \cdot (\omega v_\varphi) = \omega \frac{dv_\varphi}{dt} + v_\varphi \frac{d\omega}{dt} = \\
&= \omega \frac{dv_\varphi}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} + v_\varphi \varepsilon = \omega^2 a_\varphi + \varepsilon v_\varphi.
\end{aligned}$$

Здесь a_φ – аналог ускорения точки m . Имеет размерность длины.

Если ведущее звено механизма вращается с постоянной угловой скоростью ω ($\varepsilon=0$, такое движение носит название *перманентного* или *основного* движения механизма), то

$$\begin{aligned}
\omega_k^{\text{п}} &= \omega \omega_\varphi, & v_m^{\text{п}} &= \omega v_\varphi, \\
\varepsilon_k^{\text{п}} &= \omega^2 \varepsilon_\varphi, & a_m^{\text{п}} &= \omega^2 a_\varphi.
\end{aligned}$$

Если же рассматривается начальный момент движения механизма, когда $\omega = 0$, то

$$\begin{aligned}
\omega_k^{\text{н}} &= 0, & v_m^{\text{н}} &= 0, \\
\varepsilon_k^{\text{н}} &= \varepsilon \omega_\varphi, & a_m^{\text{н}} &= \varepsilon v_\varphi.
\end{aligned}$$

Такое движение носит название *начального*. В общем случае

$$\begin{aligned}
\omega_k &= \omega_k^{\text{п}}, \\
\varepsilon_k &= \varepsilon_k^{\text{п}} + \varepsilon_k^{\text{н}}, \\
v_m &= v_m^{\text{п}}, \\
a_m &= a_m^{\text{п}} + a_m^{\text{н}}.
\end{aligned}$$

Подобный подход был предложен Н.Е. Жуковским и позволяет исследовать движение (т. е. определять положения, скорости и ускорения) в функции обобщённой координаты механизма.

Для кинематического исследования, таким образом, достаточно вначале рассмотреть перманентное движение (считать движение ведущего звена происходящим с постоянной скоростью), а если ведущее звено в действительности движется неравномерно, то после перманентного движения следует рассмотреть дополнительно и начальное движение механизма. Поэтому в дальнейшем при кинематическом исследовании механизма будем всегда предполагать движение его ведущего звена равномерным.

Дадим определение ещё одному понятию – *передаточная функция*. Первая и вторая производные от функции положения $\varphi_k = \varphi_k(\varphi_1)$ по φ_1 – их называют первая передаточная функция, или передаточная функция скорости; и вторая передаточная функция, или передаточная функ-

ция ускорения, также будут геометрическими характеристиками, не зависящими от абсолютных значений скоростей звеньев

$$F'(\varphi_1) = \frac{d\varphi_k}{d\varphi_1} = \frac{d\varphi_k}{dt} \cdot \frac{dt}{d\varphi_1} = \frac{\omega_k}{\omega_1} = i_{k,1}(\varphi_1),$$

$$F''(\varphi_1) = \frac{d^2\varphi_k}{d\varphi_1^2}.$$

Как видно, это те же самые аналоги скорости и ускорения, полученные ранее.

Аналогично могут быть получены и передаточные функции в случае поступательного движения ведущего звена.

В приведенном случае первая передаточная функция $F'(\varphi_1)$ представляет отношение угловой скорости k -го звена к угловой скорости звена 1.

Отношение угловой скорости *ведущего* звена к угловой скорости *ведомого* звена называется *передаточным отношением*. Рекомендуемое обозначение по ГОСТу 16530-83 i .

$$i_{1,k} = \frac{\omega_1}{\omega_k} = \left(\frac{\omega_k}{\omega_1} \right)^{-1} = \frac{1}{F'(\varphi_1)}.$$

Рассмотрим пример.

Найти выражения для функции положения и аналога скорости точки B_3 звена 3 тангенсного механизма (рис. 2.1), совмещенной с точкой B_1 звена 1.

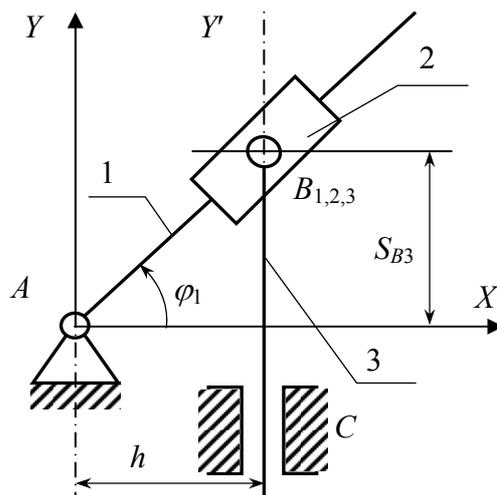


Рис. 2.1. Тангенсный механизм

Ведущее звено 1, положение звена 1 определяется углом φ_1 , а положение точки B_3 – расстоянием S_{B_3} , размер h известен, звено 3 движется вдоль оси Y' .

Решение. Функцию положения точки B_3 находим из геометрической фигуры, которую образуют оси звеньев данного механизма:

$$S_{B_3} = h \cdot \operatorname{tg} \varphi_1.$$

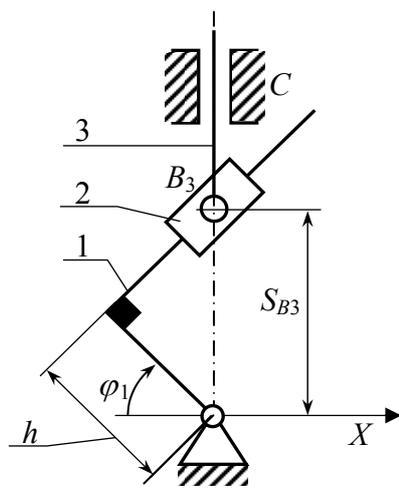
Аналог скорости точки B_3 определится:

$$\frac{dS_{B_3}}{d\varphi_1} = h \cdot \frac{1}{\cos^2 \varphi_1}.$$

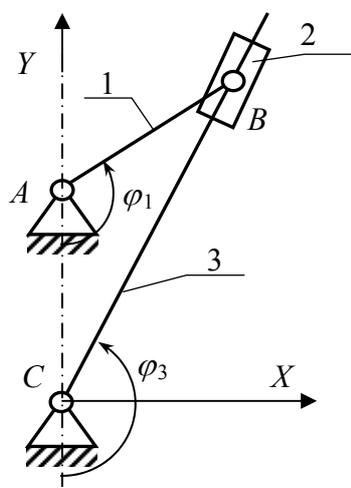
Задачи 55–61

55. Найти выражения для функции положения и аналога скорости точки B_3 – точки звена 3 косекансного механизма, совпадающей с точкой B_1 звена 1. Ведущее звено 1; положение звена 1 определяется углом φ_1 , а положение точки B_3 – расстоянием S_{B_3} ; величина h известна.

56. Найти выражение для функции положения кулисы 3 кулисного механизма Витворта. Ведущее звено 1; положения звеньев 1 и 3 определяются углами φ_1 и φ_3 . Размеры l_{AB} и l_{BC} известны.



К задаче 55



К задаче 56

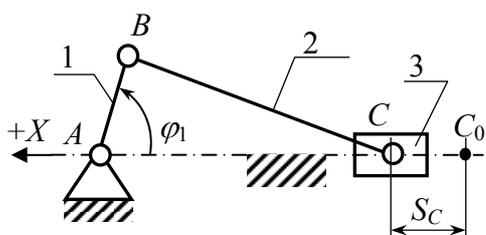
57. Найти выражение для функции положения точки C кривошипно-ползунного механизма и ее аналога скорости. Ведущее звено 1; положение звена 1 определяется углом φ_1 , а положение точки C – расстоянием S_C , отсчитываемым от крайнего правого положения на оси OX ; размеры l_{AB} и l_{BC} известны.

58. У кривошипно-ползунного механизма вычислить скорость точки шарнира C . Ведущее звено 1; положение звена 1 определяется углом $\varphi_1=30^\circ$, его угловая скорость $\omega_1=100 \text{ сек}^{-1}$; размеры: $l_{AB}=0,1 \text{ м}$ и $l_{BC}=0,3 \text{ м}$.

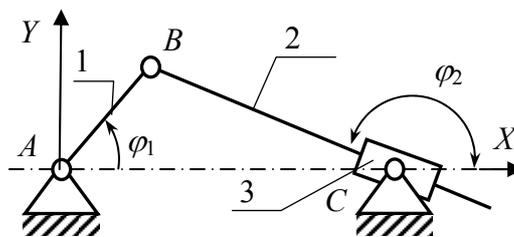
59. Найти выражение для функции положения штока 2 кривошипного механизма с качающимся ползуном и аналога скорости штока. Ведущее звено 1; положения звеньев 1 и 2 определяются углами φ_1 и φ_2 . Размеры l_{AB} и l_{AC} известны.

60. Вычислить значения скорости и ускорения, а также их аналогов для точки B_3 звена 3 синусного механизма, совпадающей с точкой B_1 звена 1. Угловая скорость звена 1 $\omega_1=100 \text{ сек}^{-1}$; положение звена 1 определяется углом $\varphi_1=45^\circ$, $l_{AB}=0,1 \text{ м}$.

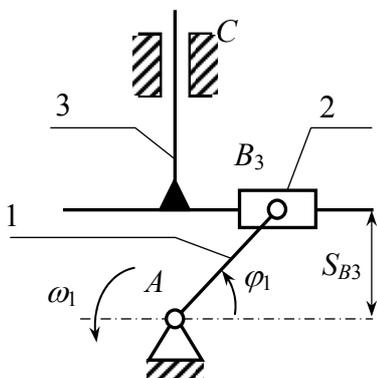
61. Вычислить скорость точки B_3 звена 3 тангенсного механизма, совпадающей с точкой B_1 звена 1. Положение звена 1 определяется углом $\varphi_1=45^\circ$, его угловая скорость $\omega_1=20 \text{ сек}^{-1}$, $h=0,1 \text{ м}$.



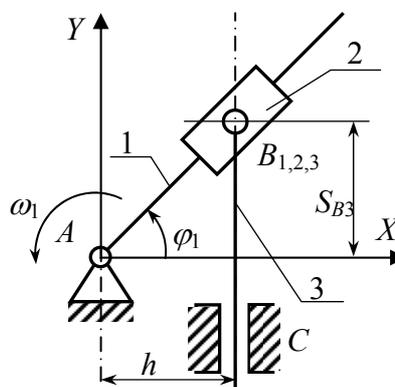
К задачам 57, 58



К задаче 59



К задаче 60



К задаче 61

2.2. Планы положений звеньев групп и построение траекторий, описываемых точками звеньев механизма

Задачи о положениях, скоростях и ускорениях решаются применительно к группам Ассура, которыми образован механизм.

Эти задачи решаются в такой последовательности.

1. Выполняется структурный анализ и классификация механизма по Ассуру–Артоболовскому.

2. Указываются ведущие звенья (их количество соответствует степени подвижности механизма). Задаются их законы движения. При построении планов положений обычно задаются равномерным движением ведущего звена (ведущих звеньев). Выбирается обобщенная координата.

3. Выбирается масштаб построения чертежа.

4. Наносятся все неподвижные элементы кинематических пар механизма в некоторой координатной сетке в соответствии с их расположением.

5. По заданной обобщенной координате строится положение ведущего звена.

6. Последовательно по группам Ассура строится план положений механизма.

Масштабы построения выбираются таким образом, чтобы была возможность и достаточно точного построения, и наилучшим образом использовалось поле чертежа.

При вращательном движении ведущего звена в качестве обобщенной координаты используется угол, определяющий положение данного звена в выбранной системе координат (см. рисунки к задачам 60, 61...), при поступательном движении ведущего звена – соответствующая линейная координата. Само построение плана выполняется элементарными геометрическими построениями (рис. 2.2).

Для определения размера пространства, необходимого для работы механизма, траекторий, описываемых различными точками звеньев, выполняется, как правило, построение не менее 12 положений за цикл работы механизма. За начальные положения часто принимается одно из крайних положений, соответствующее началу *рабочего хода*. Последовательные положения интересующих точек соединяются кривой. Например, при ведущем кривошипе 1 (рис. 2.2) строится его 12 равноотстоящих положений – через 30° , нумерация начинается соответственно от крайнего левого положения по выходному звену 5, так как полезная сила, приложенная к звену 5, направлена влево.

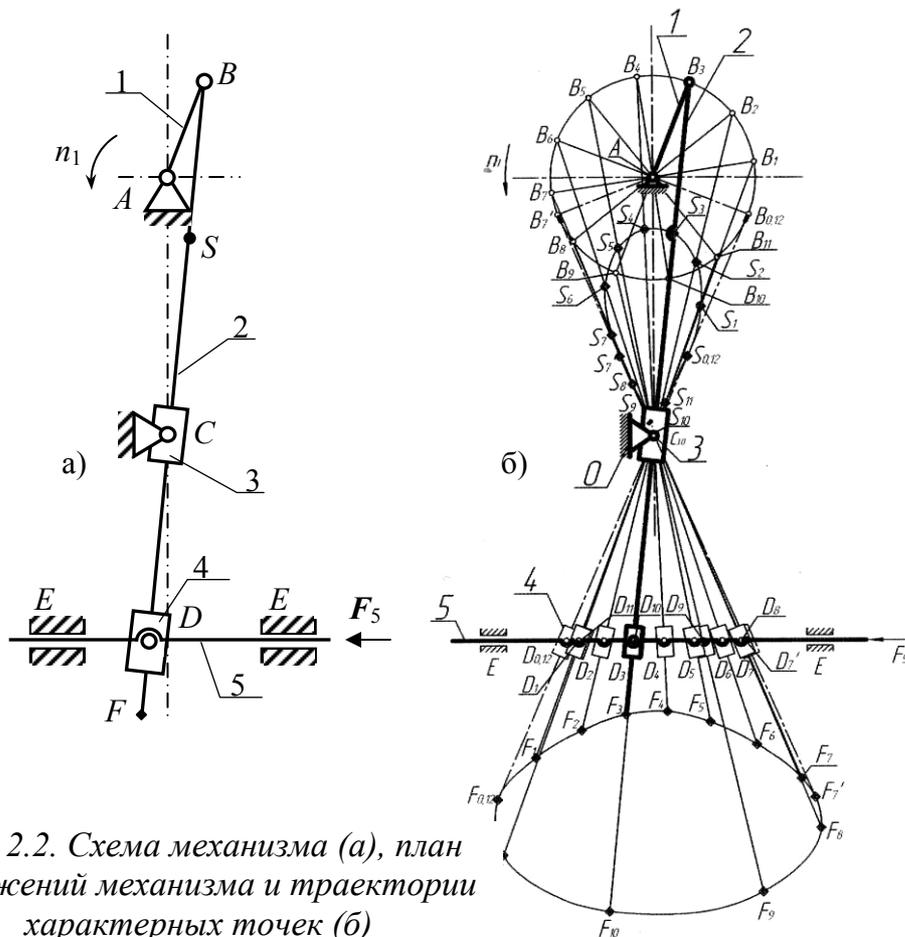


Рис. 2.2. Схема механизма (а), план положений механизма и траектории характерных точек (б)

Рассмотрим пример, поясняющий порядок построения планов скоростей и ускорений, а также форму записей в поясняющей текстовой части.

На рис. 2.3,а приведена схема шестизвенного рычажного механизма с качающейся кулисой. Размеры звеньев и частота вращения ведущего звена – известны:

$$l_{AB} = 150 \text{ мм}, l_{BC} = 700 \text{ мм},$$

$$l_{CD} = 600 \text{ мм}, l_{CF} = 270 \text{ мм},$$

$$l_{KL} = 650 \text{ мм}, n_1 = 225 \text{ об/мин.}$$

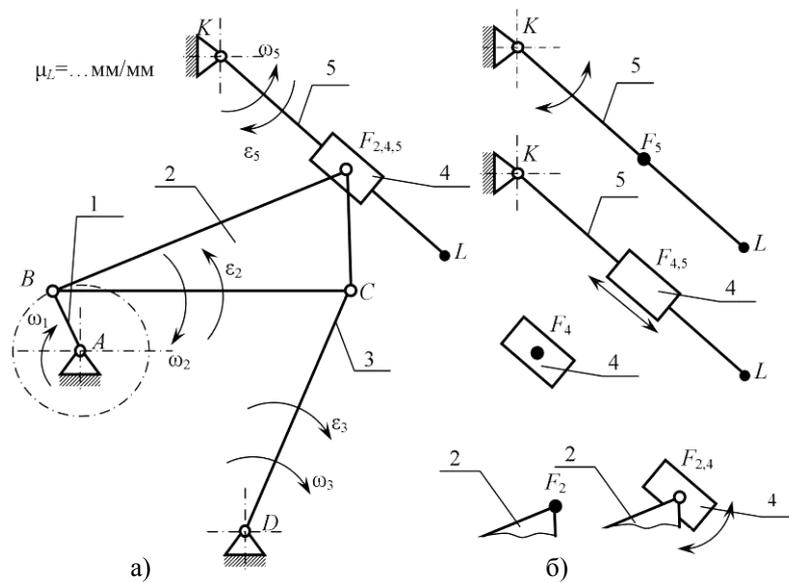
Этот механизм состоит из начального механизма – кривошипа 1 с вращательной кинематической парой $B_{0,1}$ и двух последовательно присоединенных групп Ассур, содержащих звенья 2–3 и 4–5. В общем виде формулу строения механизма можно записать в такой форме:

$$1 - [2-3] - [4-5],$$

или в развернутом виде

$$B_{0,1} - [B_{1,2} - B_{2,3} - B_{3,0}] - [B_{2,4} - \Pi_{4,5} - B_{5,0}].$$

Это механизм 2-го класса.



План скоростей
 $\mu_v = \dots (\text{м/с})/\text{мм}$

План ускорений
 $\mu_a = \dots (\text{м/с}^2)/\text{мм}$

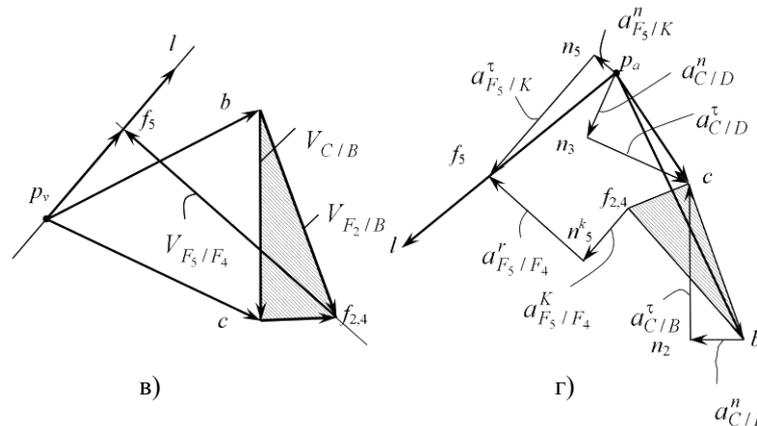


Рис. 2.3. К кинематическому исследованию методом планов:
 а – схема механизма; б – фрагменты; в – план скоростей; г – план ускорений

Для лучшего понимания характера *абсолютного* и *относительного* движения звеньев кулисной пары и правильного составления векторных уравнений при построении планов скоростей и ускорений рядом показаны (см. рис. 2.3,б): отдельно звено 2 с точкой F_2 , звено 4 – камень кулисы с точкой F_4 и звено 5 – кулиса с точкой F_5 (на механизме эти точки совпадают).

Отдельно показаны соединения: звенья 2 и 4 образуют вращательную кинематическую пару $B_{2,4}$, следовательно, относительное движение этих звеньев может быть только вращательным, а звенья 4 и 5 входят в поступательную кинематическую пару $\Pi_{4,5}$, и относительное движение этих звеньев – поступательное.

2.3. Построение планов скоростей механизма

Кинематический анализ выполняется последовательно от начального механизма (ведущего звена, для которого известен закон движения) по группам Ассура, начиная с первой присоединенной группы.

Для механизма, образованного только диадными группами (группами Ассура 2-го класса), на каждом этапе исследования присоединенной группы ищется такая точка механизма, движение которой может быть рассмотрено через две другие известные точки механизма согласно теореме о скоростях точек твердого тела.

Порядок выполнения кинематического анализа методом планов может быть структурирован следующим образом:

1. Вычерчивается механизм в масштабе в заданном положении.

2. Определяется скорость точки начального механизма, в которой присоединена первая группа Ассура, т. е. точки звена, закон движения которого задан. В данном случае это точка B звена 1:

$$V_B = \omega_1 \cdot L_{AB},$$

где

$$\omega_1 = \frac{\pi \cdot n}{30} = \frac{3,14 \cdot 225}{30} = 23,56 \text{ 1/с.}$$

Подставив значения, получим

$$V_B = 23,56 \cdot 0,15 = 3,53 \text{ м/с.}$$

3. Примем масштаб построения плана скоростей, например:

$\mu_v = 0,05 \frac{\text{м/с}}{\text{мм}}$. (Масштаб определяется абсолютными значениями величин скорости, располагаемым форматом, и его следует выбирать из ряда предпочтительных значений: 1; 2; 2,5; 4; 5; 10 и т. д. или 0,1; 0,2 и т. д.)

Вектор скорости точки B на плане отобразится отрезком длиной

$$\bar{V} = \frac{V_B}{\mu_v} = \frac{3,53}{0,05} = 70,6 \text{ мм,}$$

он перпендикулярен кривошипу AB и направлен в сторону вращения. (В дальнейшем будем записывать символом $\bar{V}_B \perp AB$). Концы векторов удобно обозначать теми же, но малыми буквами, что и на механизме.

Выбираем произвольную точку – полюс плана скоростей p_v (см. рис. 2.3,в) и откладываем отрезок $p_v b = 70,6$ мм.

4. Ищется на механизме ближайшая точка, скорость которой может быть определена через две другие известные точки. В рассматриваемом примере такой точкой является точка C – центр кинематической пары между звеньями 2 и 3. Точка C принадлежит звеньям 2 и 3 (см. рис.

2.3,а). Рассматривая звено 2 (твердое тело, для которого закон движения точки B уже определен), можно записать уравнение

$$\bar{V}_C = \bar{V}_B + \bar{V}_{C/B}.$$

В силу предположения об абсолютной жесткости звеньев расстояние между точками B и C неизменно, следовательно, в своем относительном движении точка C относительно точки B может совершать только вращение, значит, вектор относительной скорости

$$\bar{V}_{C/B} \perp CB.$$

С другой стороны, рассматривая звено 3, совершенно аналогично можно записать: $\bar{V}_C = \bar{V}_D + \bar{V}_{C/D}$. Здесь $\bar{V}_D = 0$, а $\bar{V}_C \perp CD$.

Таким образом, скомпонована система векторных уравнений

$$\begin{cases} \bar{V}_C = \bar{V}_B + \bar{V}_{C/B} \\ \bar{V}_C = \bar{V}_D + \bar{V}_{C/D} \end{cases},$$

в которой первые составляющие известны полностью по величине и направлению, а последние компоненты известны по их линиям действия. Данная система может быть решена графически.

Заметим, что *суть метода планов (скоростей, ускорений, ...)* заключается в графическом решении системы векторных уравнений или закольцованного уравнения.

Из точки b плана проводим прямую, перпендикулярную BC , а из полюса (поскольку скорость точки D равна 0) – перпендикуляр к CD и на пересечении получаем точку c , это единственная точка, удовлетворяющая одновременно обоим уравнениям системы. Отрезок bc представляет относительную скорость точки C относительно B . Направление этой скорости (согласно уравнению) от b к c . В силу характера геометрических построений длины полученных на плане отрезков в том же самом масштабе представляют искомые относительные скорости. Измеряя их на плане и переводя через масштабный фактор, получим

$$V_C = p_{vc} \cdot \mu_v = 68 \cdot 0,05 = 3,4 \text{ м/с};$$

$$V_{C/B} = cb \cdot \mu_v = 64 \cdot 0,05 = 3,2 \text{ м/с}.$$

5. Скорость точки F_2 . Скорость точки F_2 проще определить на основании свойства подобия: Δbf_2c на плане скоростей должен быть подобен ΔBF_2C с сохранением того же порядка обхода букв (на плане скоростей образуются фигуры, подобные и сходственно расположенные жестким звеньям механизма, но повернутые на 90° в сторону мгновенного вращения). Построив на стороне bc треугольник, подобный треугольнику на механизме с сохранением того же порядка обхода букв,

получим точку f_2 . Соединив точку f_2 с полюсом, получим вектор скорости точки F_2 .

6. Скорость точки F_4 . Так как звенья 4 и 2 образуют вращательную кинематическую пару,

$$V_{F_4} = V_{F_2} = 4,6 \text{ м/с.}$$

Точка F_4 является точкой присоединения к механизму следующей группы Ассур, образованной звеньями 4 и 5. Для последней группы Ассур теперь известны скорости двух точек звеньев 4 и 5 (F_4 и K). Скорость точки K равна 0. Теперь можно определить скорость в точке внутренней для данной группы кинематической пары.

7. Скорость точки F_5 . Рассматривая соединения звеньев 4 и 5, получим уравнение

$$\bar{V}_{F_5} = \bar{V}_{F_4} + \bar{V}_{F_5/F_4}.$$

Здесь $\bar{V}_{F_5/F_4} // KL$ (относительное движение – поступательное).

Рассматривая точку F_5 как принадлежащую звену 5, следует $\bar{V}_{F_5} \perp KL$ и можно записать $\bar{V}_{F_5} = \bar{V}_K + \bar{V}_{F_5/K}$.

Таким образом, опять скомпонована система двух векторных уравнений:

$$\begin{cases} \bar{V}_{F_5} = \bar{V}_K + \bar{V}_{F_5/K} \\ \bar{V}_{F_5} = \bar{V}_{F_4} + \bar{V}_{F_5/F_4} \end{cases},$$

которая решается графически, дополняя план скоростей: из конца вектора $f_{2,4}$ проводим линию, параллельную KL , а через полюс проводим линию, перпендикулярную KL . На пересечении этих направлений получим точку f_5 .

8. Скорость точки L . Скорость точки L найдем на основании свойства подобия из пропорциональных отрезков

$$\frac{kl}{kf_5} = \frac{KL}{KF_5},$$

отсюда

$$kl = kf_5 \frac{KL}{KF_5} = 30 \cdot \frac{65}{40} = 49 \text{ мм.}$$

Из плана получим

$$V_{F_5} = p_v f_5 \cdot \mu_v = 30 \cdot 0,05 = 1,5 \text{ м/с,}$$

$$V_{F_5/F_4} = f_5 f_4 \cdot \mu_v = 86 \cdot 0,05 = 4,3 \text{ м/с,}$$

$$V_L = p_v l \cdot \mu_v = 49 \cdot 0,05 = 2,45 \text{ м/с.}$$

9. Определение угловых скоростей звеньев. Угловые скорости звеньев определяются из отношений:

$$\omega_2 = \frac{V_{C/B}}{l_{CB}} = \frac{3,2}{0,7} = 4,56 \text{ 1/с,}$$

$$\omega_3 = \frac{V_C}{l_{CD}} = \frac{V_{F_5}}{l_{F_5K}} = \frac{3,4}{0,6} = 5,66 \text{ 1/с,}$$

$$\omega_4 = \omega_5 = \frac{V_{F_5}}{l_{F_5K}} = \frac{1,5}{0,4} = 3,75 \text{ 1/с.}$$

Направления мгновенных угловых скоростей ω_2 , ω_3 , $\omega_{4,5}$ определяются направлениями линейных скоростей точки C относительно B , точки C относительно D и точки F_5 относительно K соответственно (на рис. 2.3,а показаны эти направления). Для определения направлений угловых скоростей звеньев векторы относительных скоростей с плана переносим в соответствующие точки механизма, например, bc ($V_{C/B}$) переносим в точку C , и направление вращения звена BC – по часовой стрелке.

2.4. Построение планов ускорений механизма

Построение плана ускорений ведут в том же порядке и последовательности, как и план скоростей.

1. Ускорение точки B звена 1. Так как $\omega_1 = \text{const}$, угловое ускорение $\varepsilon_1 = 0$ и тангенциальное ускорение $a_{B/A}^\tau = 0$. Следовательно, полное ускорение точки B будет равно нормальному ускорению, т. е.

$$a_B = a_{B/A}^n = \omega_1^2 \cdot l_{AB} = 23,56 \cdot 0,15 = 3,53 \text{ м/с}^2.$$

Нормальное ускорение всегда направлено к центру вращения, в данном случае от B к точке A (будем в дальнейшем обозначать \overline{BA}), т. е. $a_{B/A}^n \parallel \overline{BA}$.

2. Ускорение точки C .

Рассматривая звено 2, можно записать уравнение

$$\overline{a}_C = \overline{a}_B + \overline{a}_{C/B} = \overline{a}_B + \overline{a}_{C/B}^n + \overline{a}_{C/B}^\tau.$$

Здесь a_B – переносное ускорение; $a_{C/B}$ – относительное ускорение. Точка C относительно B совершает вращательное движение.

Нормальную составляющую ускорения можно найти, поскольку угловая скорость звена BC известна:

$$a_{C/B}^n = \omega_2^2 \cdot l_{CB} = 4,56^2 \cdot 0,7 = 14,62 \text{ м/с}^2,$$

$$\overline{a}_{C/B}^n = \frac{a_{C/B}^n}{\mu_a} = \frac{14,62}{1} = 14,62 \text{ мм;}$$

$$\bar{a}_{C/B}^n \parallel \overline{CB}$$

(вектор параллелен CB и направлен от C к B).

Для тангенциального ускорения $\bar{a}_{C/B}^\tau \perp CB$ известна линия действия.

Рассматривая движение звена 3, можно записать

$$\bar{a}_C = \bar{a}_D + \bar{a}_{C/D} = \bar{a}_D + \bar{a}_{C/D}^n + \bar{a}_{C/D}^\tau.$$

Здесь переносное ускорение $a_D = 0$ (точка D – неподвижна):

$$a_{C/D}^n = \omega_3^2 \cdot l_{CD} = 5,66^2 \cdot 0,6 = 19,26 \text{ мм},$$

$$\bar{a}_{C/D}^n = \frac{a_{C/D}^n}{\mu_a} = \frac{19,26}{1} = 19,26 \text{ мм},$$

$$\bar{a}_{C/D}^n \parallel \overline{CD}, \quad \bar{a}_{C/D}^\tau \perp \overline{CD}.$$

В результате для определения ускорения точки C имеется система векторных уравнений

$$\begin{cases} \bar{a}_C = \bar{a}_B + \bar{a}_{C/B} = \bar{a}_B + \bar{a}_{C/B}^n + \bar{a}_{C/B}^\tau, \\ \bar{a}_C = \bar{a}_D + \bar{a}_{C/D} = \bar{a}_D + \bar{a}_{C/D}^n + \bar{a}_{C/D}^\tau. \end{cases}$$

В данной системе тангенциальные ускорения известны по линиям действия, все остальные векторы известны полностью. Данная система может быть решена графически.

3. Если принять масштаб плана ускорений $\mu_a = 1 \frac{\text{м/с}^2}{\text{мм}}$, вектор ускорения B определится отрезком

$$\bar{a}_B = \frac{a_B}{\mu_a} = \frac{83,2}{1} = 83,2 \text{ мм}.$$

На плане (см. рис. 2.3,г) – это отрезок $p_a b$, где p_a – полюс плана ускорений.

Из конца вектора $p_a b$ откладывается отрезок bn_2 в соответствии с величиной и направлением $\bar{a}_{C/B}^n$ и из конца его проводится направление (линия действия) тангенциального ускорения $\bar{a}_{C/B}^\tau$.

Из полюса откладывается вектор отрезок $p_a n_3$ в соответствии с величиной и направлением нормального ускорения $\bar{a}_{C/D}^n$, из конца его проводится линия действия тангенциального ускорения $\bar{a}_{C/D}^\tau$. На пересечении этих линий векторов $\bar{a}_{C/B}^\tau$ и $\bar{a}_{C/D}^\tau$ получается точка c . Соединив

её с полюсом, получим вектор полного ускорения точки C , а отрезок bc на плане представит относительное ускорение $a_{C/B}$.

Из плана могут быть найдены:

$$\begin{aligned} a_C &= p_a c \cdot \mu_a = 40 \cdot 1 = 40 \text{ м/с}^2, \\ a_{C/B} &= cb \cdot \mu_a = 43 \cdot 1 = 43 \text{ м/с}^2, \\ a_{C/B}^{\tau} &= \bar{a}_{C/B}^{\tau} \cdot \mu_a = 40 \cdot 1 = 40 \text{ м/с}^2, \\ a_{C/D}^{\tau} &= \bar{a}_{C/D}^{\tau} \cdot \mu_a = 34 \cdot 1 = 34 \text{ м/с}^2. \end{aligned}$$

4. Ускорение точки F_2 . Ускорение точки F_2 , как и скорость, может быть найдено на основании свойства подобия. На стороне bc плана ускорений построится фигура (в данном случае – треугольник), подобная звену 2 на механизме, т. е. $\Delta b f_2 c \sim \Delta B F_2 C$ с тем же правилом обхода. Соединяя точку f_2 с полюсом, получим вектор $p_a f_2$ полного ускорения точки F_2 .

Из плана ускорений будет определена величина:

$$a_{F_2} = p_a f_2 \cdot \mu_a = 41 \cdot 1 = 41 \text{ м/с}^2.$$

Все характерные точки группы 2–3 исследованы. Можно перейти к анализу следующей присоединенной группы Ассур – группы 4–5.

5. Ускорение точки F_4 . Звенья 2 и 4 образуют вращательную кинематическую пару, следовательно, линейные ускорения этих точек F_4 и F_2 будут равны, т. е.

$$a_{F_4} = a_{F_2} = 41 \text{ м/с}^2.$$

6. Ускорение точки K внешней кинематической пары известно. $a_K=0$.

7. Ускорение точки F_5 . Звенья 4 и 5 образуют поступательную кинематическую пару. Звено 5 (кулиса) является подвижной направляющей для звена 4 (камня), тогда

$$\bar{a}_{F_5} = \bar{a}_{F_4} + \bar{a}_{F_5/F_4}^K + \bar{a}_{F_5/F_4}^r,$$

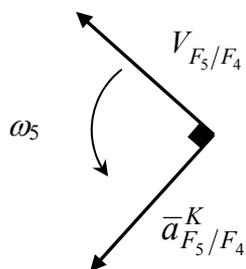


Рис. 2.4. К определению направления кориолисова ускорения

где кориолисово ускорение

$$a_{F_5/F_4}^K = 2 \cdot \omega_5 \cdot V_{F_5/F_4} = 2 \cdot 3,75 \cdot 4,3 = 32,2 \text{ м/с}^2.$$

Для определения направления этого ускорения нужно вектор относительной скорости V_{F_5/F_4} повернуть на 90° в сторону ω_5 (на рис. 2.4 показан фрагмент к определению направления кориолисова ускорения).

Ускорение a_{F_5/F_4} – это относительное ускорение в поступательном движении

звеньев (его также называют *релятивным*), оно всегда направлено по кулисе (векторы \bar{a}^K и \bar{a}^r всегда перпендикулярны между собой).

С другой стороны, рассматривать движение точки F_5 можно через твердое тело – звено 5.

Ускорение точки F_5 можно выразить уравнением

$$\bar{a}_{F_5} = \bar{a}_K + \bar{a}_{F_5/K} = \bar{a}_K + \bar{a}_{F_5/K}^n + \bar{a}_{F_5/K}^r$$

(здесь $a_K = 0$, точка K неподвижна),

$$a_{F_5/K}^n = \omega_5^2 \cdot l_{F_5K} = 3,75^2 \cdot 0,4 = 5,61 \text{ м/с}^2,$$

$$\bar{a}_{F_5/K}^n = \frac{a_{F_5/K}^n}{\mu_a} = \frac{5,61}{1} = 5,6 \text{ мм},$$

$$\bar{a}_{F_5/K}^n \parallel \overrightarrow{F_5K}, \quad \bar{a}_{F_5/K}^r \perp \overrightarrow{F_5K}.$$

Таким образом, для исследования группы Ассура 4–5 определена система векторных уравнений

$$\begin{cases} \bar{a}_{F_5} = \bar{a}_{F_4} + \bar{a}_{F_5/F_4}^K + \bar{a}_{F_5/F_4}^r, \\ \bar{a}_{F_5} = \bar{a}_K + \bar{a}_{F_5/K} = \bar{a}_K + \bar{a}_{F_5/K}^n + \bar{a}_{F_5/K}^r. \end{cases}$$

Из точки f_4 (она же f_2) проводится вектор \bar{a}_{F_5/F_4}^K в соответствии с его направлением. Из конца его проводится линия действия релятивного ускорения \bar{a}_{F_5/F_4}^r .

Из полюса p_a откладывается вектор $\bar{a}_{F_5/K}^n$, а из конца его проводится направление $\bar{a}_{F_5/K}^r$. На пересечении $\bar{a}_{F_5/K}^r$ и \bar{a}_{F_5/F_4}^r будет получена точка f_5 . Соединив её с полюсом, получим вектор полного ускорения точки F_5 . Из плана посредством измерения полученных отрезков и перевычисления через масштаб найдутся

$$a_{F_5} = p_a f_5 \cdot \mu_a = 61 \cdot 1 = 61 \text{ м/с}^2,$$

$$a_{F_5/F_4}^r = \bar{a}_{F_5/F_4}^r \cdot \mu_a = 37 \cdot 1 = 37 \text{ м/с}^2,$$

$$a_{F_5/K}^r = \bar{a}_{F_5/K}^r \cdot \mu_a = 60 \cdot 1 = 60 \text{ м/с}^2.$$

7. Ускорение точки L . Ускорение точки L может быть найдено на основании свойства подобия из пропорциональности отрезков:

$$\frac{kl}{kf_5} = \frac{KL}{KF_5},$$

отсюда

$$kl = kf_5 \frac{KL}{KF_5} = 60 \cdot \frac{65}{40} = 97,5 \text{ мм.}$$

Ускорение точки L :

$$a_L = kl \cdot \mu_a = 97,5 \cdot 1 = 97,5 \text{ м/с}^2 \quad (kl = p_a l).$$

8. Определение угловых ускорений звеньев. Угловые ускорения звеньев определяются из следующих отношений:

$$\varepsilon_2 = \frac{a_{C/B}^\tau}{l_{C/B}} = \frac{40}{0,7} = 57,1 \frac{1}{\text{с}^2},$$

$$\varepsilon_3 = \frac{a_{C/B}^\tau}{l_{CB}} = \frac{34}{0,6} = 56,8 \frac{1}{\text{с}^2},$$

$$\varepsilon_4 = \varepsilon_5 = \frac{a_{F_5/K}^\tau}{l_{F_5K}} = \frac{60}{0,4} = 150 \frac{1}{\text{с}^2}.$$

Направления угловых ускорений определяются направлениями соответствующих тангенциальных ускорений (показано на рис. 2.3,а).

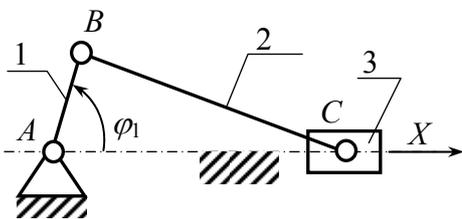
Как следует из анализа, звено 3 движется ускоренно (направления угловой скорости и ускорения совпадают), звенья 2 и 5 движутся замедленно.

ЗАДАЧИ 62–66

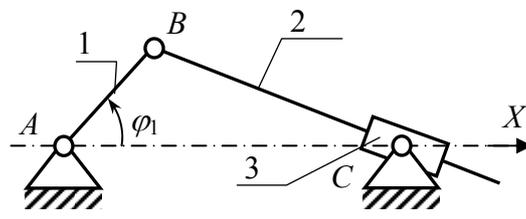
62. Построить положение шарнирного четырехзвенника при $\varphi_1=30^\circ$, $l_{AB}=30$ мм, $l_{BC}=150$ мм.

63. Построить положение шарнирного четырехзвенника при $\varphi_1=90^\circ$, $l_{AB}=40$ мм, $l_{BC}=120$ мм.

64. Найти аналитически и графически (построить) наибольший угол размаха штока (звена 2) кривошипного механизма с качающейся кулисой. $l_{AB}=40$ мм, $l_{AC}=100$ мм.



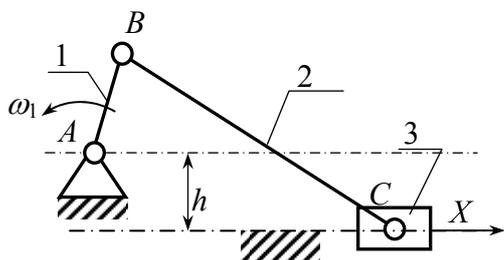
К задаче 62



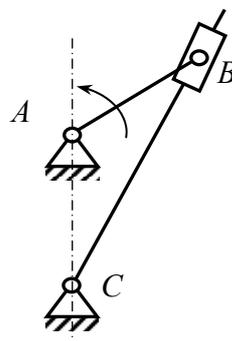
К задачам 63, 64

65. Построить два крайних положения ползуна 3 дезаксиального кривошипно-ползунного механизма при $l_{AB}=40$ мм, $l_{BC}=100$ мм, $h=20$ мм.

66. Построить два крайних положения кулисы 3 механизма Витворта при $l_{AB}=50$ мм, $l_{AC}=100$ мм.



К задаче 65



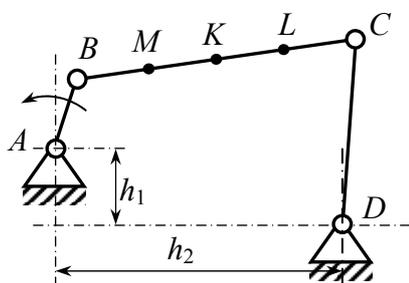
К задаче 66

ЗАДАЧИ 67–74

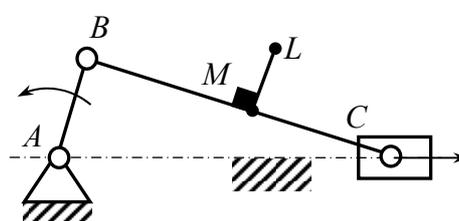
(при решении данных задач следует строить 8–12 равноотстоящих положений по ведущему звену механизма за цикл)

67. Вычертить шатунные кривые, описываемые точками M , K , и L механизма шарнирного четырехзвенника. $l_{AB}=50$ мм, $l_{BC}=200$ мм, $l_{CD}=140$ мм, $h_1=80$ мм, $h_2=220$ мм, $l_{BM}=l_{MK}=l_{KL}=0,25 l_{BC}$.

68. Вычертить шатунные кривые, описываемые точками M и L кривошипно-ползунного механизма. $l_{AB}=50$ мм, $l_{BC}=150$ мм, $l_{BM}=75$ мм, $l_{ML}=50$ мм.



К задаче 67



К задаче 68

69. Вычертить шатунные кривые, описываемые точками M и L механизма Витворта. $l_{AB}=60$ мм, $l_{AC}=80$ мм, $l_{BM}=40$ мм, $l_{ML}=20$ мм.

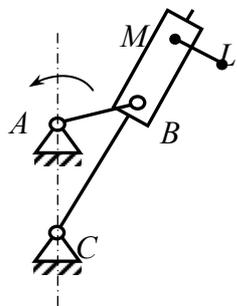
70. Вычертить шатунные кривые, описываемые точками M и L муфты Ольдгейма. $l_{AD}=100$ мм, $l_{ML}=30$ мм.

71. Вычертить шатунные кривые, описываемые точками M и L кривошипного механизма с качающейся кулисой. Известно: $l_{AB}=50$ мм, $l_{AC}=140$ мм, $l_{BM}=60$ мм, $l_{BL}=200$ мм.

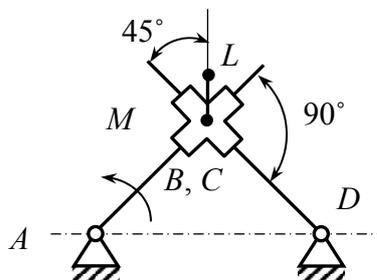
72. Вычертить шатунные кривые, описываемые точками M и L кривошипного механизма с качающейся кулисой. Известно: $l_{AB}=30$ мм, $l_{AC}=120$ мм, $l_{BM}=30$ мм, $l_{BK}=180$ мм, $l_{KL}=30$ мм.

73. Вычертить шатунные кривые, описываемые точками M и L кривошипно-ползунного механизма. Известно: $l_{AB}=10$ мм, $l_{BC}=30$ мм, $l_{BM}=96,7$ мм.

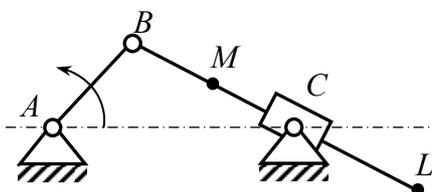
74. Вычертить шатунную кривую, описываемую точкой M механизма Чебышева. Известно: $l_{AB}=6,8$ мм, $l_{BC}=l_{CD}=l_{CM}=50$ мм, $l_{AD}=70,45$ мм.



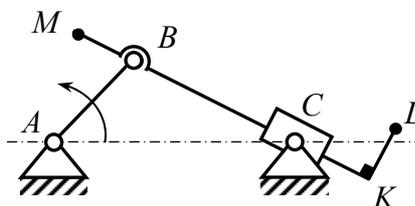
К задаче 69



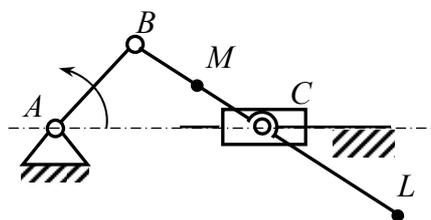
К задаче 70



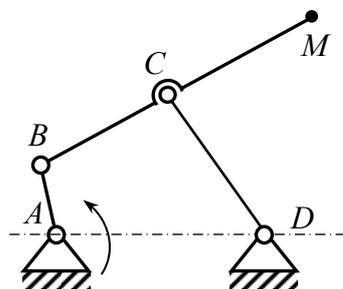
К задаче 71



К задаче 72



К задаче 73



К задаче 74

ЗАДАЧИ 75–89

(задачи решаются построением планов скоростей и ускорений)

75. Найти абсолютные значения скорости и ускорения точки E и угловой скорости и ускорения звена CD шарнирного четырехзвенного механизма. Известно: $l_{AB}=30$ мм, $l_{BC}=l_{CD}=l_{AD}=60$ мм, $l_{BE}=l_{CE}=35$ мм, $\varphi_1=30^\circ$, $\omega_1=\text{const}=20$ сек⁻¹.

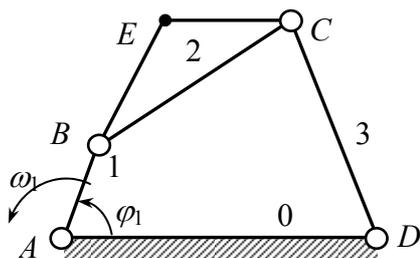
76. Найти угловую скорость и ускорение звена BC кривошипно-ползунного механизма. Известно: $l_{AB}=60$ мм, $l_{BC}=180$ мм, $\varphi_1=120^\circ$, $\omega_1=\text{const}=100$ сек⁻¹.

77. Найти угловую скорость и ускорение звена 3 механизма Витворта. Известно: $l_{AB}=30$ мм, $l_{AC}=60$ мм, $\varphi_1=240^\circ$, $\omega_1=\text{const}=10$ сек⁻¹.

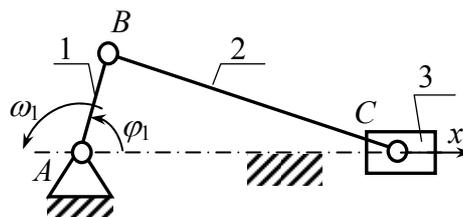
78. Найти абсолютные значения скорости и ускорения точки D_2 . Известно: $l_{AC}=50$ мм, $l_{BC}=70$ мм, $l_{BD_2}=16$ мм, $\varphi_1=30^\circ$, $\omega_1=\text{const}=100$ сек⁻¹.

79. Найти абсолютные значения скорости и ускорения точки D кривошипного механизма с качающимся ползуном. Известно: $l_{AB}=30$ мм, $l_{AC}=60$ мм, $l_{BD}=120$ мм, $\varphi_1=150^\circ$, $\omega_1=\text{const}=40$ сек⁻¹.

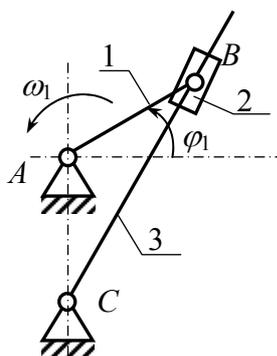
80. В муфте Ольдгейма найти скорость и ускорение точки B_2 звена 2, совмещенной с точками B_1 и B_3 , находящимися на пересечении осей направляющих A_x и C_y . Известно: $l_{AC}=40$ мм, $\varphi_1=30^\circ$, $\omega_1=\text{const}=10$ сек⁻¹.



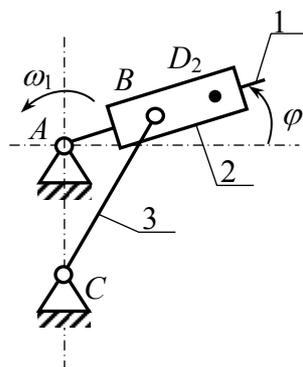
К задаче 75



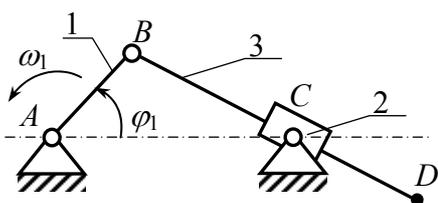
К задаче 76



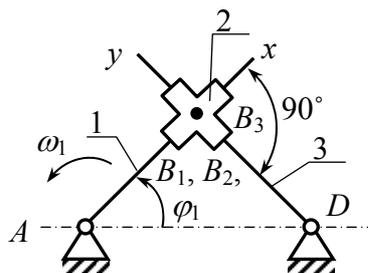
К задаче 77



К задаче 78



К задаче 79



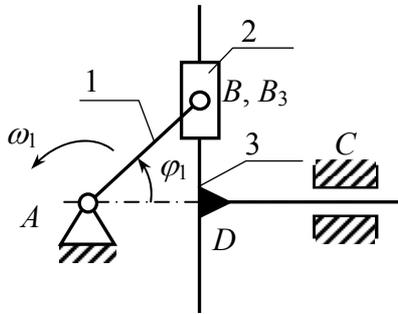
К задаче 80

81. Найти абсолютные значения скорости и ускорения точки B_3 звена 3 синусного механизма. Известно: $\omega_1=\text{const}=10$ сек⁻¹, $\varphi_1=45^\circ$, $l_{AB}=530$ мм.

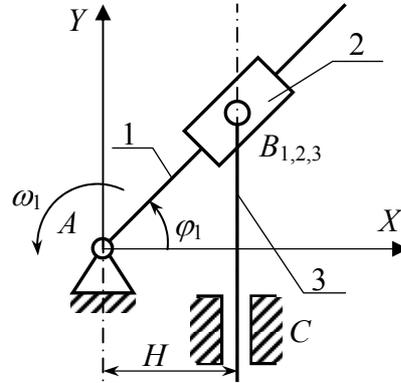
82. В тангенсном механизме найти абсолютные значения скорости и ускорения точки B_3 звена 3. Известно: $\omega_1=\text{const}=5$ сек⁻¹, $\varphi_1=30^\circ$, $H=250$ мм.

83. Построить планы скоростей и ускорений. $L_{AB}=100$ мм, $L_{BC}=L_{CD}=200$ мм, $L_{AK}=50$ мм, $n_1=300$ мин⁻¹.

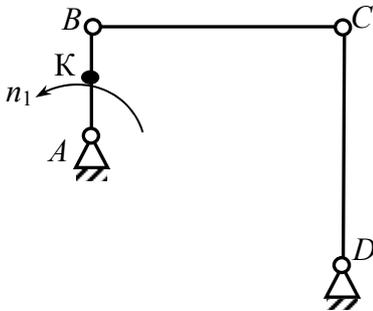
84. Построить планы скоростей и ускорений. $L_{AB}=100$ мм, $L_{BC}=L_{CD}=200$ мм, $L_{AK}=50$ мм, $L_{BM}=L_{CM}=150$ мм, $n_1=200$ мин⁻¹.



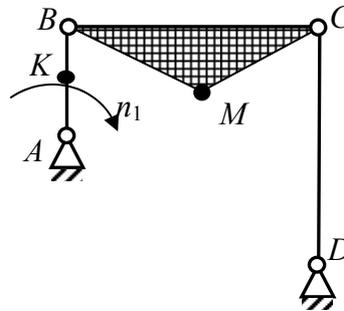
К задаче 81



К задаче 82



К задаче 83



К задаче 84

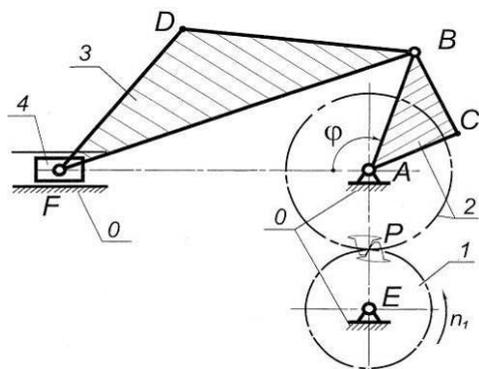
85. Построить план скоростей и план ускорений механизма, определить величины и направления угловых скоростей и угловых ускорений звеньев.

Вариант	n_1	φ	AB	BC	AC	BF	BD	DF	m	z_1	z_2
	об/мин	град	мм								
a	300	50	40	30	35	90	90	30	2	17	34
b	240	120	50	40	40	120	100	30	2	18	36
c	180	150	60	60	100	180	160	40	2	20	32
d	120	120	70	80	120	240	100	160	2,5	18	30
e	200	90	90	70	90	340	210	150	2	20	45

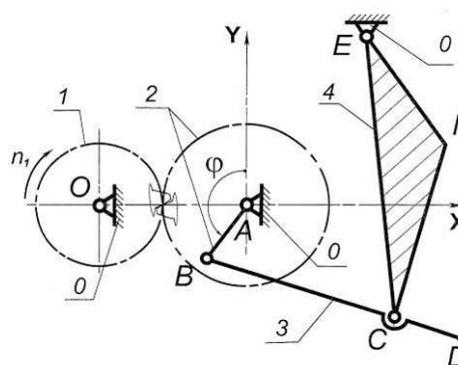
Указания: Начальные диаметры колес определяются по зависимостям: $d_k = m \cdot z_k$; межцентровое расстояние для пары зубчатых колес внешнего зацепления: $a_{1,2} = m \cdot (z_1 + z_2) / 2$.

86. Построить план скоростей и план ускорений механизма, определить величины и направления угловых скоростей и угловых ускорений звеньев. Смотри указания к задаче 83.

Вариант	n_1	φ	AB	BD	BC	EC	EF	CF	Y_E	X_E	m	z_1	z_2
	об/мин	град	мм										
a	400	150	15	90	70	100	40	150	40	50	1	25	50
b	1000	120	12	70	56	80	32	140	32	40	1,5	20	40
c	750	100	10	60	50	70	30	115	30	15	1	20	32
d	800	120	20	120	95	135	55	165	55	65	1,5	18	30
e	500	30	50	140	100	140	160	70	60	70	1,5	18	27



К задаче 85



К задаче 86

87. Построить план скоростей и план ускорений механизма в положении, соответствующем примерно середине рабочего хода, определить величины и направления угловых скоростей и угловых ускорений звеньев.

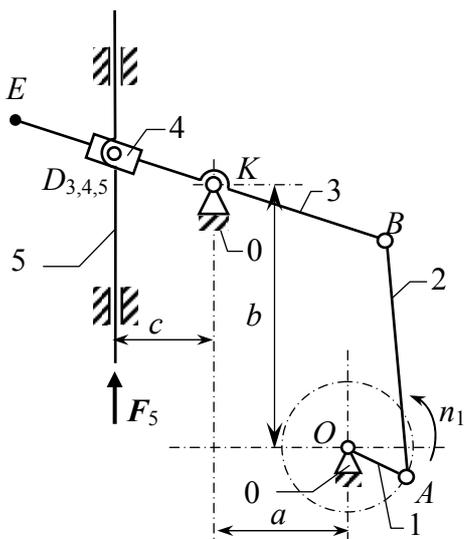
Вариант	a	b	c	l_{OA}	l_{AB}	l_{AC}	l_{BK}	n_1	F_5
	мм							об/мин	Н
1	400	600	400	150	600	300	620	150	
2	500	550	500	175	600	200	750	120	
3	400	900	500	250	1000	400	780	200	

88. Построить план скоростей и план ускорений механизма в положении, соответствующем примерно середине рабочего хода, определить величины и направления угловых скоростей и угловых ускорений звеньев.

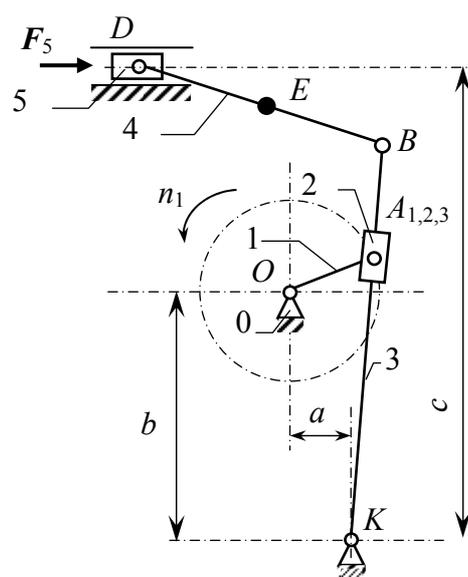
Вариант	a	b	c	l_{OA}	l_{KB}	l_{BD}	l_{BE}	n_1	F_5
	мм							об/мин	Н
1	80	310	550	110	480	250	150	200	
2	45	400	640	100	500	350	160	150	
3	35	300	580	100	480	270	130	250	

89. Построить план скоростей и план ускорений механизма в положении, соответствующем примерно середине рабочего хода, определить величины и направления угловых скоростей и угловых ускорений звеньев.

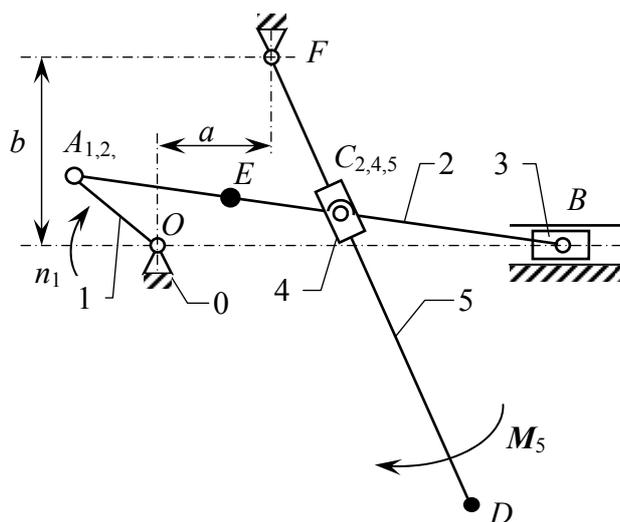
Вариант	a	b	l_{OA}	l_{AB}	l_{AC}	l_{FD}	l_{AE}	n_1	M_5
	мм							об/мин	Н
1	40	180	40	240	120	280	90	300	
2	80	200	50	240	110	320	90	280	
3	100	220	80	300	180	320	100	250	



К задаче 87



К задаче 88



К задаче 89

2.5. Кинематический анализ зубчатых механизмов

Зубчатые механизмы находят очень широкое применение во многих машинах и приборах для передачи вращательного движения (с изменением угловой скорости и крутящего момента) в широком диапазоне мощностей (до 100 тыс. кВт) и скоростей (до 200 м/с), а также для преобразования вращательного движения в поступательное или наоборот (реечные передачи). Они имеют высокий КПД (до 0,98-0,99 для одной пары колёс – ступени), надёжны в работе, просты в обслуживании, компактны.

Зубчатые механизмы относятся к механизмам с высшими кинематическими парами. Передача движения осуществляется *зацеплением*. Высшая кинематическая пара, образуемая последовательно взаимодействующими поверхностями зубьев, называется *зубчатым зацеплением*.

Простейшим зубчатым механизмом является механизм, состоящий из пары зубчатых колёс и стойки. Меньшее из этих колёс (с меньшим числом зубьев) называется *шестерней*, большее – *колесом*. Механизмы с числом зубчатых колёс больше двух являются сложными.

В кинематическом отношении зубчатые передачи можно разделить на две группы:

1) *рядовые* механизмы – механизмы, у которых оси вращения зубчатых колёс неподвижны;

2) *сателлитные* механизмы – механизмы, у которых имеются зубчатые колёса с подвижными осями вращения. Если степень подвижности таких механизмов равна единице, они называются *планетарными*, а механизмы с двумя и более степенями подвижности – *дифференциальными*.

Основной задачей кинематического анализа зубчатых механизмов является определение угловых скоростей или частоты вращения звеньев механизма, частоты вращения звеньев механизма, направления вращения. Эта задача обычно решается через вычисление передаточных отношений.

2.5.1. Передаточные отношения и их определение

Передаточное отношение является основным кинематическим параметром зубчатых механизмов. Согласно ГОСТу 16530–83 передаточным отношением называется *отношение угловых скоростей звеньев* (или частоты вращения), т. е.

$$i_{j,k} = \frac{\omega_j}{\omega_k} = \frac{n_j}{n_k}, \quad (2.1)$$

где i_{jk} – передаточное отношение от звена j к звену k ;

$\omega_j(n_j), \omega_k(n_k)$ – угловые скорости (частоты вращения) звеньев j, k .

В указанном выше ГОСТе есть такое примечание: «При отсутствии дополнительных указаний имеется в виду отношение угловой скорости ведущего к угловой скорости ведомого зубчатого колеса».

Передаточное отношение для двух зубчатых колёс с неподвижными осями можно выразить через диаметры (*начальных* или *делительных окружностей*) зубчатых колёс и числа зубьев (обратные отношения):

$$i_{1,2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{d_2}{d_1} = \frac{z_2}{z_1}. \quad (2.2)$$

При параллельных осях вращения (плоские механизмы) для определения направления вращения зубчатых колёс передаточному отношению приписывают знак. Передаточное отношение считается положительным, если направления вращения колёс одинаковы (для зубчатой пары с *внутренним зацеплением*), и отрицательным, если направления вращения (угловых скоростей) противоположны (для зубчатой пары с *внешним зацеплением* – рис. 2.5, а, б).

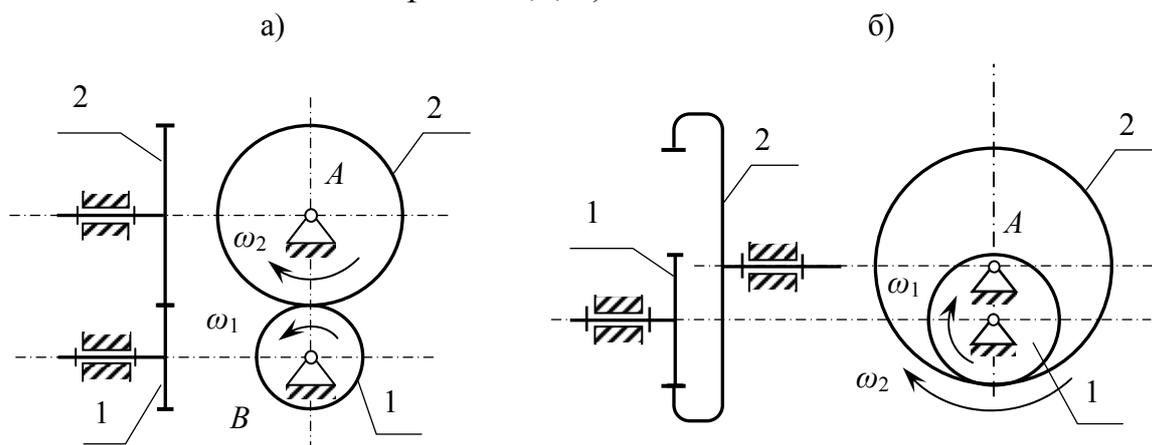


Рис. 2.5. Зубчатые механизмы

При пересекающихся или скрещивающихся осях вращения (*конические, винтовые, червячные передачи*) передаточное отношение равно отношению модулей угловых скоростей.

По ГОСТу 16530–83 кроме термина «передаточное отношение», используется термин «передаточное число», под которым понимается отношение числа зубьев колеса к числу зубьев шестерни (зубчатого колеса с меньшим числом зубьев), т. е.

$$U_{1,2} = \frac{z_2}{z_1}.$$

Передаточное число $U > 1$ и не имеет знака. Оно может быть равным или обратным передаточному отношению.

Для круглых зубчатых колёс передаточное отношение постоянное. В приборостроении и в общем машиностроении также применяются зубчатые механизмы с переменным передаточным отношением, которое воспроизводится некруглыми зубчатыми колесами различного вида.

Зацепление одной пары зубчатых колес называется *ступенью* с передаточным отношением до 6–8. Для обеспечения большего передаточного отношения применяются многоступенчатые зубчатые механизмы. Если угловая скорость ведомого звена меньше угловой скорости ведущего звена ($i > 1$), то этот механизм является замедляющим, или *редуктором*. В том случае, когда угловая скорость ведомого звена больше угловой скорости ведущего звена ($i < 1$) механизм является ускоряющим, или *мультипликатором*. В машиностроении более широкое применение нашли замедляющие передачи (редукторы).

2.5.2. Передаточные отношения многоступенчатых рядовых механизмов

Механизмы с параллельным соединением зубчатых колёс

На рис. 2.6 представлена схема трехступенчатого механизма с неподвижными осями. На промежуточных валах $O_2 - O_2$ и $O_3 - O_3$ жёстко насажены по два зубчатых колеса.

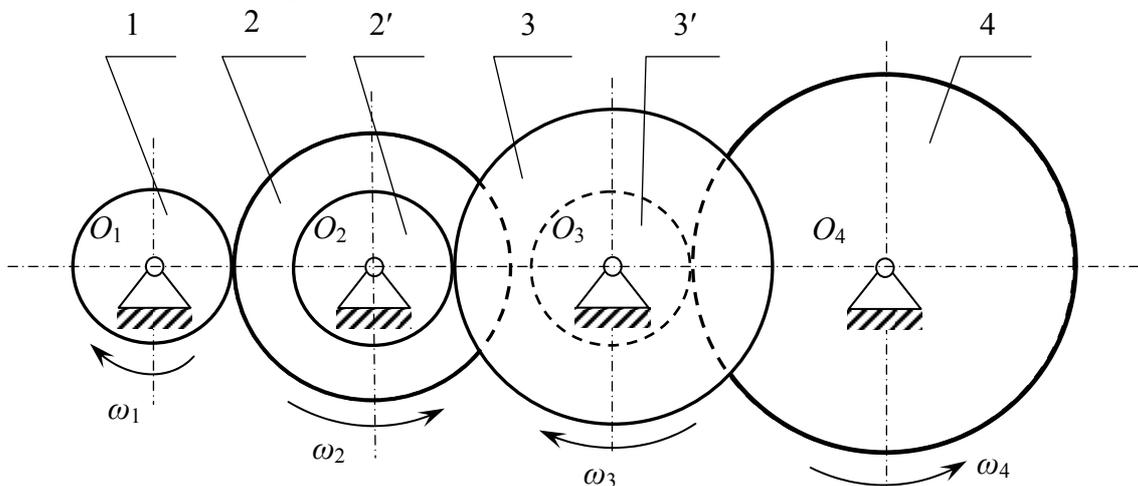


Рис. 2.6. Многоступенчатые зубчатые механизмы

Передаточное отношение механизма будет равно

$$i_{1,4} = \frac{\omega_1}{\omega_4}. \quad (2.3)$$

Передаточное отношение каждой пары колёс (ступени):

$$i_{1,2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{z_2}{z_1}, \quad i_{2',3} = \frac{\omega_{2'}}{\omega_3} = -\frac{z_2}{z_{2'}}, \quad i_{3',4} = \frac{\omega_{3'}}{\omega_4} = -\frac{z_4}{z_{3'}}. \quad (2.4)$$

Перемножив полученные передаточные отношения (2.4), получим

$$i_{1,2} \cdot i_{2',3} \cdot i_{3',4} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \cdot \frac{\omega_{2'}}{\omega_3} \cdot \frac{\omega_{3'}}{\omega_4} = -\frac{\omega_1}{\omega_4}.$$

Так как $\frac{\omega_1}{\omega_4} = i_{1,4}$, то

$$i_{1,4} = i_{1,2} \cdot i_{2',3} \cdot i_{3',4}. \quad (2.5)$$

Следовательно, передаточное отношение сложного зубчатого механизма с неподвижными осями равно произведению передаточных отношений отдельных ступеней.

Это уравнение справедливо для любых механизмов с неподвижными осями, которые могут содержать цилиндрические, конические зубчатые колёса, червячные, винтовые и другие передачи.

Для механизмов с параллельными осями при необходимости определения направления вращения валов передаточные отношения следует брать со своим знаком. Так как направление вращения изменяется при внешнем зацеплении (знак минус), то оно и будет изменяться столько раз, сколько кинематических пар с внешним зацеплением. Тогда формулу передаточного отношения сложного механизма можно представить в виде

$$i_{1,n} = \frac{\omega_1}{\omega_n} = (-1)^m \cdot i_{1,2} \cdot i_{2',3} \cdot i_{3',4} \dots i_{(k-1),k}, \quad (2.6)$$

где m – число пар с внешним зацеплением; k – число колёс.

Подставив значение передаточных отношений из формулы (2.4) в формулу (2.6), выразим общее передаточное отношение через числа зубьев. В данном механизме число пар с внешним зацеплением $m=3$, тогда

$$i_{1,4} = (-1)^m \cdot i_{1,2} \cdot i_{2',3} \cdot i_{3',4} = (-1)^3 \cdot \frac{z_2 \cdot z_3 \cdot z_4}{z_1 \cdot z_{2'} \cdot z_{3'}} = -\frac{z_2 \cdot z_3 \cdot z_4}{z_1 \cdot z_{2'} \cdot z_{3'}}. \quad (2.7)$$

То есть общее передаточное отношение равно отношению произведения числа зубьев (диаметров) ведомых колёс к произведению числа зубьев (диаметров) ведущих колёс, взятых со своими знаками.

Механизмы с последовательным соединением зубчатых колёс

В таком механизме (рис. 2.7) каждое колесо имеет собственную ось вращения.

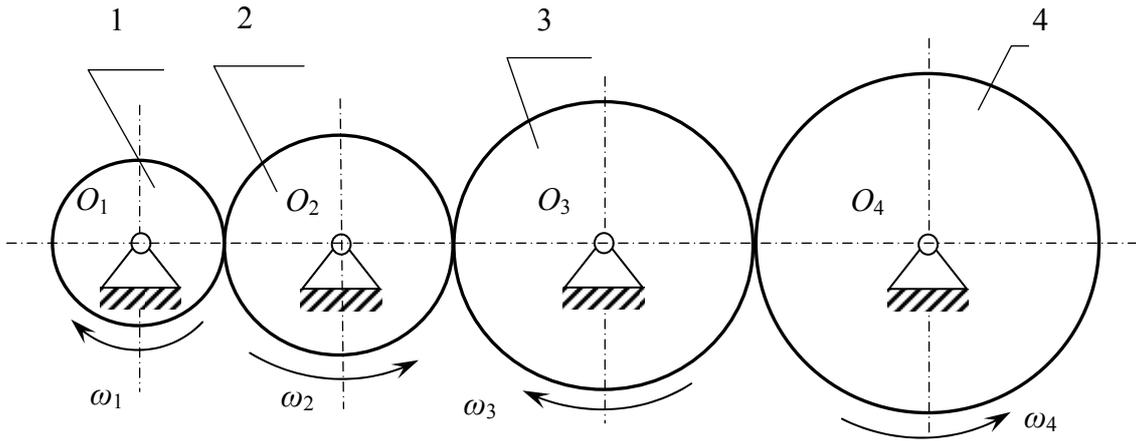


Рис. 2.7. Зубчатый механизм с паразитными колесами

Общее передаточное отношение рассматриваемого механизма, состоящего из четырёх зубчатых колёс, или трёх ступеней ($m=3$), равно

$$i_{1,4} = (-1)^m \cdot i_{1,2} \cdot i_{2,3} \cdot i_{3,4} = -\left(\frac{z_2}{z_1}\right) \cdot \left(\frac{z_3}{z_2}\right) \cdot \left(\frac{z_4}{z_3}\right) = -\frac{z_4}{z_1} = -\frac{d_4}{d_1}. \quad (2.8)$$

Или в общем случае при k колёсах в механизме с последовательным соединением

$$i_{1,k} = (-1)^m \cdot \frac{z_k}{z_1} = (-1)^m \cdot \frac{d_k}{d_1}. \quad (2.9)$$

Как следует из формулы (2.9), общее передаточное отношение рядового механизма определяется только размерами (числом зубьев или диаметрами) ведущего и ведомого зубчатых колёс, называемых промежуточными (или паразитными). Следует отметить, что последнее определение необъективно, так как промежуточные колёса выполняют существенную роль, заключающуюся в том, что в передаче движения при большом межосевом расстоянии значительно уменьшаются габариты механизма, а также в обеспечении надлежащего направления вращения ведомого вала.

2.5.3. Эпициклические механизмы

К эпициклическим механизмам относятся *дифференциальные* и *планетарные* механизмы. На рис. 2.8,а показан дифференциальный, на рисунке 2.8,б – планетарный механизмы. В этих механизмах звенья имеют названия: колёса 1, 3 – *центральные (солнечные)*. У этих колёс одна геометрическая ось $O-O$. Колесо 2 – *сателлит* (или планетарное). Эти колёса совершают сложное движение – вращаются вокруг собственной оси и относительно оси центральных колёс (движение планет в

Солнечной системе, откуда и названия механизмов). Звено H – водило – звено, несущее ось сателлита. На рис. 2.8,в – схема обращенного механизма (с остановленным водилом). На рис. 2.9 приведены типовые схемы планетарных механизмов с цилиндрическими зубчатыми колёсами со сдвоенным сателлитом 2–2'.

Планетарные редукторы, применяемые в машиностроении, выполняют с числом сателлитов не менее двух. Это обеспечивает уравнивание сил инерции, возникающих вследствие того, что сателлиты и центр массы водила вращаются на определённом расстоянии относительно оси центральных колёс. Так как при этом увеличивается число пар зацепления, то при одних и тех же габаритах можно передать больший крутящий момент.

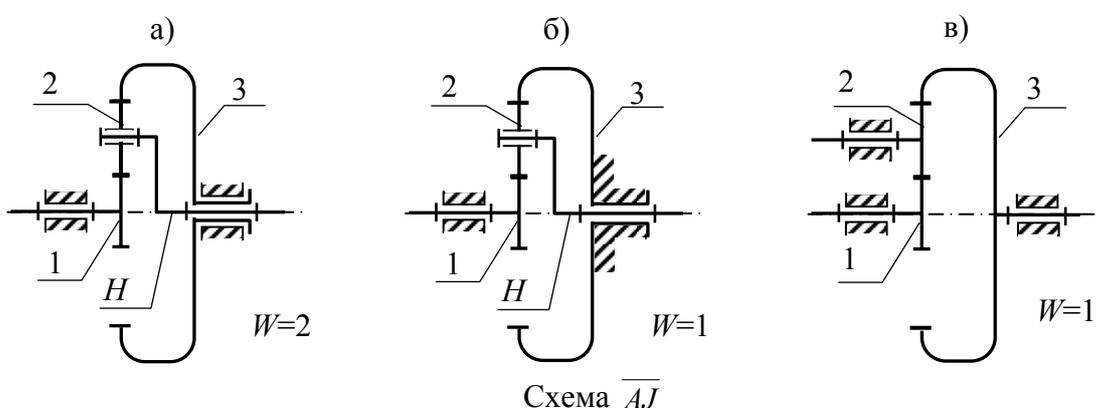


Рис. 2.8. Простейшие эпициклические механизмы и обращенный

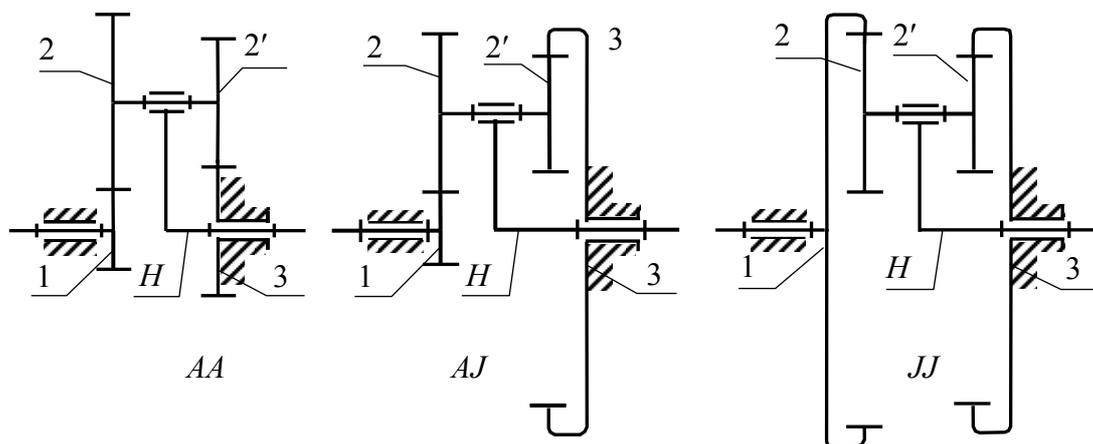


Рис. 2.9. Типовые схемы планетарных механизмов с цилиндрическими зубчатыми колёсами со сдвоенным сателлитом 2-2'

Планетарный редуктор, имеющий неподвижное колесо, превращается в дифференциал, если освободить неподвижное (центральное) колесо и сообщить ему вращение. Наоборот, любой дифференциал можно

превратить в планетарный редуктор, если закрепить одно (при $W=2$) или несколько (при $W>2$) из центральных колёс. Вследствие этого для планетарных и дифференциальных механизмов применяются одинаковые методы кинематического исследования. В подавляющем большинстве на практике используют планетарные зубчатые механизмы с цилиндрическими колёсами. Механизмы с коническими зубчатыми колёсами применяют главным образом в качестве дифференциальных механизмов.

Рассмотрим аналитический метод кинематического исследования дифференциальных и планетарных механизмов, предложенный Виллисом (Роберт Виллис – английский механик (1800–1875)), основанный на обращении движения. Сущность метода Виллиса состоит в том, что действительный механизм заменяется обращенным механизмом, у которого оси всех зубчатых колёс, в том числе и сателлитов, становятся неподвижными, и планетарный (или дифференциальный) механизм превращается в рядовой, передаточное отношение для которого определяется по формулам (2.5) – (2.9).

Применение этого метода покажем на примере дифференциального механизма, представленного на рис. 2.8,а, степень подвижности которого равна двум ($W=2$), все зубчатые колёса подвижные. Пусть все зубчатые колёса подвижные. Пусть все угловые скорости звеньев будут иметь значения: $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_H$. Зададим всей системе угловую скорость, равную и противоположную угловой скорости водила, т. е. $-\omega_H$. Тогда угловые скорости звеньев получают значения:

$$\begin{aligned}\omega_1^{(H)} &= \omega_1 - \omega_H, & \omega_2^{(H)} &= \omega_2 - \omega_H, \\ \omega_3^{(H)} &= \omega_3 - \omega_H, & \omega_H^{(H)} &= \omega_H - \omega_H = 0.\end{aligned}$$

Получим обращенный механизм, и обозначение $^{(H)}$ означает, что водило H неподвижно. Передаточные отношения механизма такого отношения будут:

$$\begin{aligned}i_{1,2}^{(H)} &= \frac{\omega_1^{(H)}}{\omega_2^{(H)}} = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_2 - \omega_H}, \\ i_{2,3}^{(H)} &= \frac{\omega_2^{(H)}}{\omega_3^{(H)}} = \frac{\omega_2 - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H}, \\ i_{1,3}^{(H)} &= \frac{\omega_1^{(H)}}{\omega_3^{(H)}} = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H}.\end{aligned}\tag{2.10}$$

Здесь

$$i_{1,2}^{(H)} = -\frac{z_2}{z_1}, \quad i_{2,3}^{(H)} = \frac{z_3}{z_2},$$

$$i_{1,3}^{(H)} = i_{1,2}^{(H)} \cdot i_{2,3}^{(H)} = \left(-\frac{z_2}{z_1}\right) \cdot \left(\frac{z_3}{z_2}\right) = -\frac{z_3}{z_1}.$$

Или в общем случае передаточное отношение от колеса j к колесу k при неподвижном водиле будет равно

$$i_{j,k}^{(H)} = \frac{\omega_j^{(H)}}{\omega_k^{(H)}} = \frac{\omega_j - \omega_H}{\omega_k - \omega_H}. \quad (2.11)$$

Это универсальное уравнение Виллиса для эпициклических механизмов.

В планетарном механизме (рис. 2.8,б) колесо 3 неподвижно, $\omega_3 = 0$, тогда, используя одно из уравнений (2.10), получим

$$i_{1,3}^{(H)} = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H} = \frac{\omega_1 - \omega_H}{0 - \omega_H} = 1 - \frac{\omega_1}{\omega_H} = 1 - i_{1,H}^{(3)},$$

где $i_{1,H}^{(3)}$ – передаточное отношение от колеса 1 к водилу H ,

$$i_{1,H}^{(3)} = 1 - i_{1,3}^{(H)} = 1 + \frac{z_3}{z_1}. \quad (2.12)$$

В общем случае формула передаточного отношения в планетарном механизме от колеса j к водилу H будет (формула Виллиса для планетарных механизмов):

$$i_{j,H}^{(k)} = 1 - i_{j,k}^{(H)}, \quad (2.13)$$

где k – неподвижное колесо; $i_{j,k}^{(H)}$ – передаточное отношение от колеса j к колесу k при неподвижном водиле H (обращенный рядовой механизм).

Передаточное отношение от водила H к колесу j равно

$$i_{H,j}^{(k)} = \frac{\omega_H}{\omega_j} = \frac{1}{i_{j,H}^{(k)}} = \frac{1}{1 - i_{j,k}^{(H)}}. \quad (2.14)$$

Для механизмов, показанных на рис. 2.9, ведущее звено – 1, ведомое – водило H , колесо 3 – неподвижное, тогда согласно формуле (2.13) получим:

$$i_{1,H}^{(3)} = 1 - i_{1,3}^{(H)} = 1 - i_{1,2}^{(H)} \cdot i_{2,3}^{(H)} = 1 - \left(\mp \frac{z_2}{z_1}\right) \cdot \left(\pm \frac{z_3}{z_2}\right) = 1 \pm \frac{z_2 \cdot z_3}{z_1 \cdot z_2'} \quad (2.15)$$

Здесь (+) – для схемы AJ , (–) – для схем AA , JJ .

2.5.4. Передаточные отношения зубчатых механизмов с коническими зубчатыми колесами

Такие механизмы применяются для передачи вращения в системах с перекрещивающимися валами (рис. 2.10).

Передаточное отношение таких механизмов определяется по тем же формулам, что и для цилиндрических колёс с параллельными осями, т. е. через отношение чисел зубьев или диаметров (радиусов) зубчатых колёс.

Направление вращения определяется методом стрелок (рис. 2.10). Знак передаточного отношения вводится только для передач с параллельными осями. Так, передаточное отношение на схеме (а) от первого колеса к третьему отрицательное.

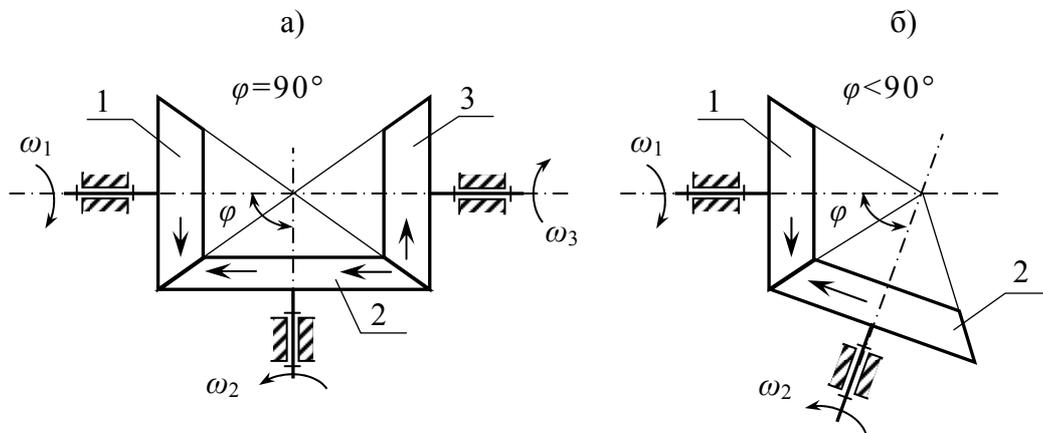


Рис. 2.10. Конические зубчатые механизмы

2.5.5. Передаточное отношение для винтовых и червячных механизмов

Такие механизмы применяют для передачи вращения между перекрещивающимися валами. Чаще всего угол перекрещивания валов равен 90° (рис. 2.11,а, б).

Передаточное отношение таких механизмов определяется также по уже знакомой формуле:

$$i_{1,2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{z_2}{z_1}, \quad (2.16)$$

где z_1 – число зубьев ведущего винтового колеса 1, а для червяка – число заходов червяка (на рис. 2.11,б показан двухзаходный червяк, т. е. $z_1=2$); z_2 – число зубьев ведомого винтового колеса.

Заметим, что передаточное отношение червячной передачи, в отличие от цилиндрических или конических колёс, не равно отношению диаметров червячного колеса к диаметру червяка.

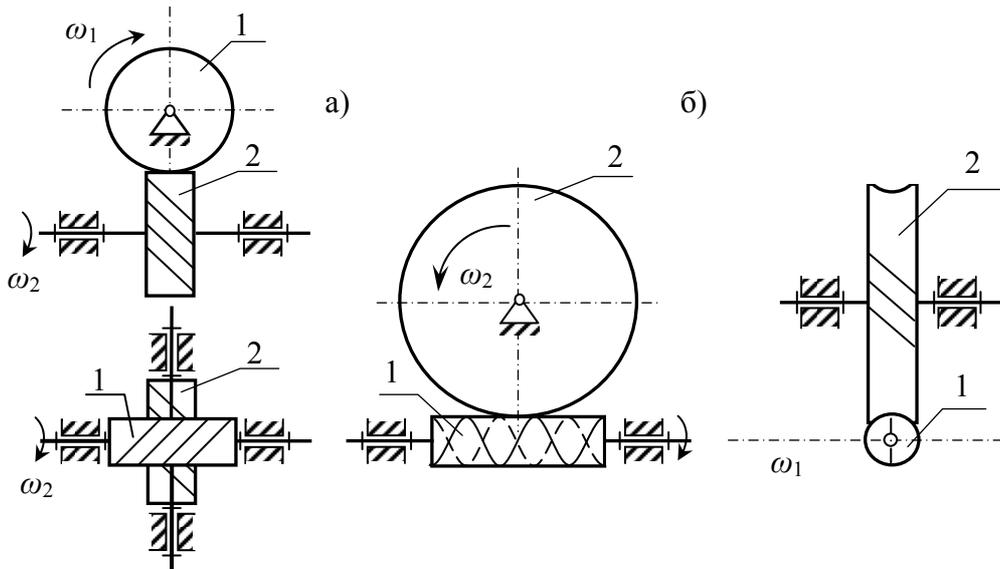


Рис. 2.11. Винтовые (а) и червячные (б) передачи

2.5.6. Передаточное отношение замкнутых дифференциальных механизмов

В технике находят применение сателлитные механизмы, состоящие из дифференциала с двумя степенями подвижности, между звеньями которого установлена промежуточная зубчатая передача, играющая роль замыкающего механизма. Эта передача накладывает дополнительное условие связи, и дифференциальный механизм превращается в сложный планетарный механизм с одной степенью подвижности. Такой механизм называется *замкнутым дифференциальным механизмом*.

В качестве примера на рис. 2.12 и 2.13 показаны два таких механизма. На рис. 2.12,а ведущим звеном является звено 1, ведомым – водило H .

Механизм состоит из дифференциала (рис. 2.12,б), с колёсами 1, 2, 2', 3 и водилом H , и замыкающего механизма (рис. 2.12,в), с зубчатыми колёсами 3', 4 и 5. Найдём передаточное отношение $i_{1,H}$.

Применив формулу Виллиса, имеем

$$i_{1,3}^{(H)} = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H}.$$

Разделив числитель и знаменатель на угловую скорость ведомого звена ω_H , получим

$$i_{1,3}^{(H)} = \frac{\frac{\omega_1}{\omega_H} - 1}{\frac{\omega_3}{\omega_H} - 1}, \quad (2.17)$$

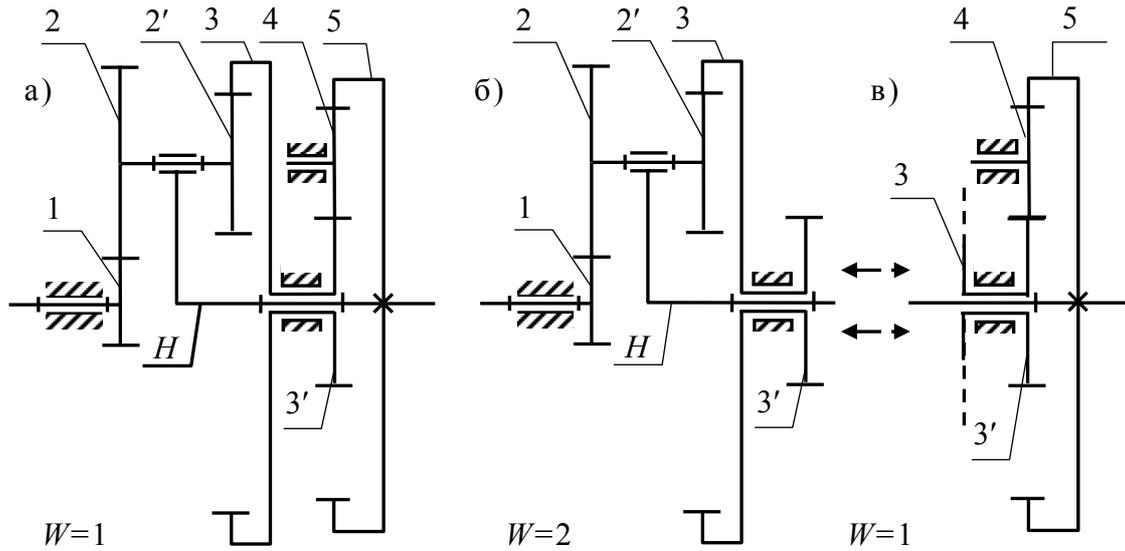


Рис. 2.12. Замкнутый дифференциальный механизм (схема АА)

откуда найдем

$$i_{1,H} = i_{1,3}^{(H)} \cdot (i_{3,H} - 1) + 1. \quad (2.18)$$

Здесь

$$i_{1,3}^{(H)} = i_{1,2}^{(H)} \cdot i_{2,3}^{(H)} = \left(-\frac{z_2}{z_1} \right) \cdot \left(\frac{z_3}{z_{2'}} \right) = -\frac{z_2 \cdot z_3}{z_1 \cdot z_{2'}}, \quad (2.19)$$

$$i_{3,H} = i_{3,5} = i_{3',5} = i_{3',4} \cdot i_{4,5} = \left(-\frac{z_4}{z_{3'}} \right) \cdot \left(\frac{z_5}{z_4} \right) = -\frac{z_5}{z_{3'}}. \quad (2.20)$$

Подставив (2.19), (2.20) в формулу (2.18), получим

$$i_{1,H} = \frac{z_2 \cdot z_3 \cdot z_5}{z_1 \cdot z_{2'} \cdot z_{3'}} + \frac{z_2 \cdot z_3}{z_1 \cdot z_{2'}} + 1. \quad (2.21)$$

На рис. 2.13 представлен замкнутый дифференциальный механизм. Ведущее звено – 1, мощность снимается с вала блока колёс 4–4'. В данном случае колёса 1, 2 – сателлиты, 3 и водило H принадлежат дифференциальному механизму, а колёса 3', 4, 4' – замыкающему элементу.

Найдём передаточное отношение механизма $i_{1,4'}$.

Согласно формуле Виллиса запишем

$$i_{1,3}^{(H)} = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H}. \quad (2.22)$$

Разделив числитель и знаменатель на угловую скорость ведомого звена $\omega_{4'}$, получим

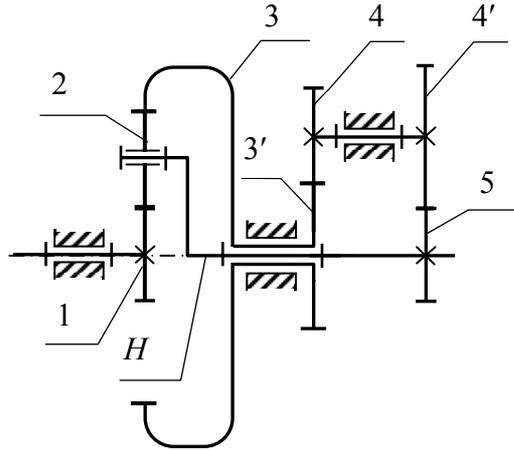


Рис. 2.13. Замкнутый дифференциальный механизм (схема АЖ)

$$i_{1,3}^{(H)} = \frac{\frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_{4'}}}{\frac{\omega_3 - \omega_H}{\omega_{4'}}} = \frac{i_{1,4'} - i_{H,4'}}{i_{3,4'} - i_{H,4'}}. \quad (2.23)$$

Из этого уравнения найдем

$$i_{1,4'} = i_{1,3}^{(H)}(i_{3,4'} - i_{H,4'}) + i_{H,4'}. \quad (2.24)$$

Здесь
$$i_{1,3}^H = i_{1,2}^H \cdot i_{2,3}^H = \left(-\frac{z_2}{z_1} \right) \left(+\frac{z_3}{z_2} \right) = -\frac{z_3}{z_1};$$

$$i_{3,4'} = i_{3,4} = -\frac{z_4}{z_3};$$

$$i_{H,4'} = i_{5,4'} = -\frac{z_4'}{z_5}.$$

Подставляя эти значения в уравнение (2.24), получим

$$i_{1,4'} = -\frac{z_3}{z_1} \left(-\frac{z_4}{z_3} - \frac{z_4}{z_3} \right) - \frac{z_4}{z_5} = \frac{z_3 \cdot z_4}{z_1 \cdot z_3'} + \frac{z_3 \cdot z_4}{z_1 \cdot z_3'} - \frac{z_4'}{z_5}. \quad (2.25)$$

Передаточное отношение сложных зубчатых механизмов, состоящих из механизмов рядовых (с неподвижными осями) и планетарных, определяется как произведение передаточных отношений рядовых и планетарных ступеней.

Пример 1. Для редуктора Давида (рис. 2.14) подсчитать передаточное отношение $i_{H,1}$ при $z_1=z_2'=50$, $z_2=49$, $z_3=51$.

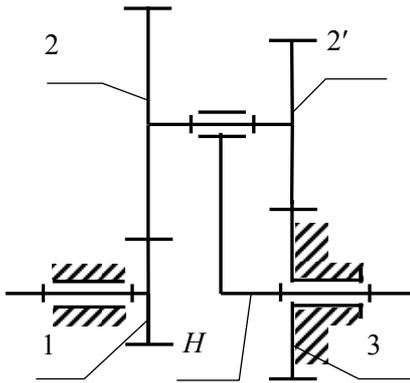


Рис. 2.14. Редуктор Давида

Решение. Данный механизм представляет простейшую планетарную систему, поэтому по формуле Виллиса (2.13), учитывая, что в данном механизме движение передается от водила H (2.14), запишем

$$\begin{aligned}
 i_{H,1}^{(3)} &= \frac{\omega_H}{\omega_1} = \frac{1}{i_{1,H}^{(3)}} = \frac{1}{1 - i_{1,3}^{(H)}} = \frac{1}{1 - i_{1,2}^H \cdot i_{2,3}^H} = \\
 &= \frac{1}{1 - \frac{z_2 \cdot z_3}{z_1 \cdot z_2'}} = \frac{z_1 \cdot z_2'}{z_1 \cdot z_2' - z_2 \cdot z_3} = \\
 &= \frac{50 \cdot 50}{50 \cdot 50 - 49 \cdot 51} = 2500
 \end{aligned}$$

Пример 2. Пусть для механизма, представленного на рис. 2.15, задано: числа зубьев колес $z_1 = z_2' = z_3' = 18$, $z_2 = z_3 = 42$, $z_4' = 16$, $z_5 = 38$. Модули зацепления $m_{2',3} = m_{3',4}$. Частота вращения ведущего звена $n_1 = 2200$ об/мин. Определить общее передаточное отношение, передаточные отношения отдельных ступеней и частоту вращения каждого звена.

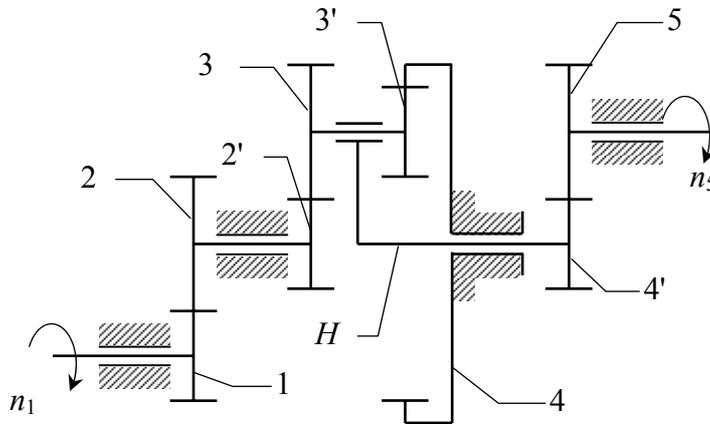


Рис. 2.15. Сложный зубчатый механизм

Решение. Данный механизм состоит из двух рядовых ступеней с неподвижными осями 1–2 и 4'–5 и планетарного механизма (ступени) 2'–3–3'–4– H , у которого входное ведущее звено 2' и выходное звено – водило H .

Передаточное отношение сложного механизма с последовательным соединением ступеней равно произведению передаточных отношений отдельных ступеней, т. е.

$$i_{1,5} = i_{1,2} \cdot i_{2',H} \cdot i_{4',5}, \quad (2.26)$$

где
$$i_{1,2} = -\frac{z_2}{z_1} = -\frac{42}{18} = -2,333.$$

Для планетарного механизма передаточное отношение от колеса j к водилу H (формула Виллиса) можно представить в общем виде

$$i_{j,H}^{(K)} = 1 - i_{j,K}^{(H)}, \quad (2.27)$$

где K – неподвижное колесо планетарного механизма;

$i_{j,K}^{(H)}$ – передаточное отношение от колеса j к колесу K при неподвижном водиле H .

Тогда, так как для рассматриваемого механизма j – это колесо $2'$, а K – это колесо 4, будем иметь

$$i_{2',H}^{(4)} = 1 - i_{2',4}^{(H)} = 1 - [i_{2',3}^{(H)} \cdot i_{3',4}^{(H)}] = 1 - \left[\left(-\frac{z_3}{z_{2'}} \right) \left(+\frac{z_4}{z_{3'}} \right) \right] = 1 + \frac{z_3 \cdot z_4}{z_{2'} \cdot z_{3'}}. \quad (2.28)$$

Заметим, что при использовании уравнения (2.27) обязательно следует учесть знак передаточного отношения: для внешнего зацепления он отрицательный, для внутреннего – положительный.

Число зубьев на колесе 4 определим из условия соосности, обязательного для планетарных механизмов.

Условие соосности для данного механизма выражается в равенстве межосевых расстояний:

$$a_{w2',3} = a_{w3',4}. \quad (2.29)$$

Если модули колес одинаковые, то для нулевых передач это уравнение можно выразить через числа зубьев:

$$z_{2'} + z_3 = z_4 - z_{3'}, \quad (2.30)$$

отсюда

$$z_4 = z_3 + z_{2'} + z_{3'}. \quad (2.31)$$

Подставив значения, получим

$$z_4 = 42 + 18 + 18 = 78.$$

Передаточное отношение планетарной ступени механизма

$$i_{2',H} = 1 + \frac{42 \cdot 78}{18 \cdot 18} = 11,111.$$

Передаточное отношение положительное, это означает, что колесо $2'$ и водило H вращаются в одну сторону.

Передаточное отношение последней ступени $4' - 5$ будет равно

$$i_{4',5} = -\frac{z_5}{z_{4'}} = -\frac{38}{16} = -2,375.$$

Передаточное отношение всего механизма будет

$$i_{1,5} = (-2,333) \cdot 11,111 \cdot (-2,375) = 61,565.$$

Найдем частоту вращения звеньев.

Частоту вращения колес 2, 2' найдем из выражения

$$i_{1,2} = \frac{n_1}{n_2},$$

отсюда

$$n_{2,2'} = \frac{n_2'}{i_{1,2}} = \frac{2200}{-2,333} = -942,99 \text{ об/мин}$$

(вращение в обратную сторону).

Частота вращения водила, равная частоте вращения колеса 4', найдется из формулы

$$i_{2',H} = \frac{n_{2'}}{n_H},$$

отсюда

$$n_{H,4'} = \frac{n_{2'}}{i_{1,2}} = \frac{942,99}{11,111} = 84,87 \text{ об/мин.}$$

Знак «-» показывает, что сателлит вращается в сторону, противоположную вращению водила H .

Тот же результат получим из другого выражения:

$$i_{2',3}^{(H)} = \frac{n_{2'} - n_H}{n_3 - n_H},$$

отсюда

$$n_3 = \frac{n_{2'} - n_H + n_H i_{2',3}^{(H)}}{i_{2',3}^{(H)}} = \frac{942,99 - 84,8 - 84,87 \cdot (-2,333)}{-2,333} = 282,9 \text{ об/мин.}$$

$$\text{Здесь } i_{2',3}^{(H)} = -\frac{z_3}{z_{2'}} = -\frac{42}{18} = -2,333.$$

ЗАДАЧИ 90–108

При решении некоторых задач данного раздела требуется найти межосевое расстояние (расстояние между осями пары зацепляющихся колес). Эти расстояния могут быть найдены из следующих соотношений (см. гл. 6):

1) радиусы начальных окружностей цилиндрических колес определяются

$$R = \frac{mz}{2}, \text{ где } m - \text{модуль по начальной окружности [мм]; } m = \frac{t}{\pi}; t - \text{шаг по на-}$$

чальной окружности; z – число зубьев колеса;

2) межцентровые расстояния соответственно определяются:

$$a = \frac{z_2 \pm z_1}{2} m, \text{ знак «+» для внешнего зацепления, «-» для внутреннего зацеп-$$

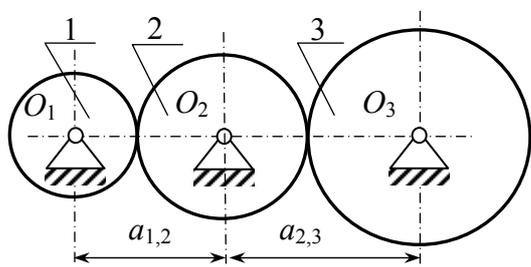
ления.

3) для рассмотренных эпициклических (планетарных и дифференциальных) механизмов обязательным условием работоспособности является условие соосности [см. рис. 2.8, 2.9, формулу (2.29)]:

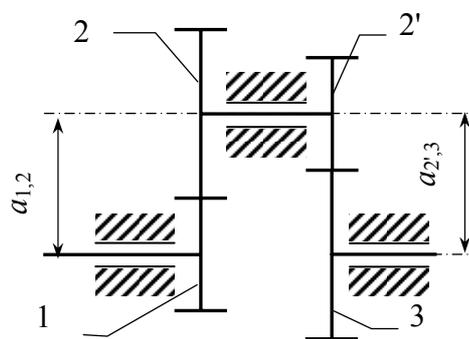
$$a_{1,2} = a_{2,3}.$$

90. Определить передаточное отношение $i_{1,3}$ и расстояния $a_{1,2}$ и $a_{2,3}$ между осями колес зубчатой передачи, если зубья всех колес имеют модуль $m=10$ мм, а числа зубьев колес соответственно $z_1=20$, $z_2=30$, $z_3=40$.

91. Определить передаточное отношение $i_{1,3}$ и расстояния $a_{1,2}$ и $a_{2,3}$ между осями колес зубчатой передачи, если зубья всех колес имеют модуль $m=10$ мм, а числа зубьев колес соответственно $z_1=20$, $z_2=40$, $z_2'=15$, $z_3=45$.



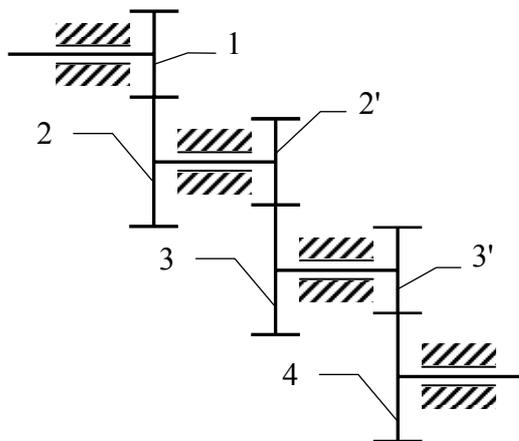
К задаче 90



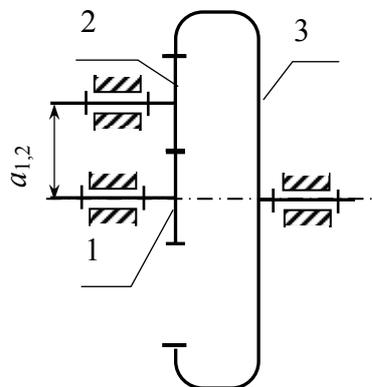
К задаче 91

92. Определить передаточное отношение $i_{1,4}$ зубчатой передачи, если числа зубьев колес соответственно $z_1=16$, $z_2=48$, $z_2'=20$, $z_3=40$, $z_3'=15$, $z_4=30$.

93. Определить передаточное отношение $i_{1,3}$ и расстояния $a_{1,2}$ и $a_{2,3}$ между осями колес зубчатой передачи, если зубья всех колес имеют модуль $m=5$ мм, а числа зубьев колес соответственно $z_1 = z_2=20$, $z_3=60$.



К задаче 92



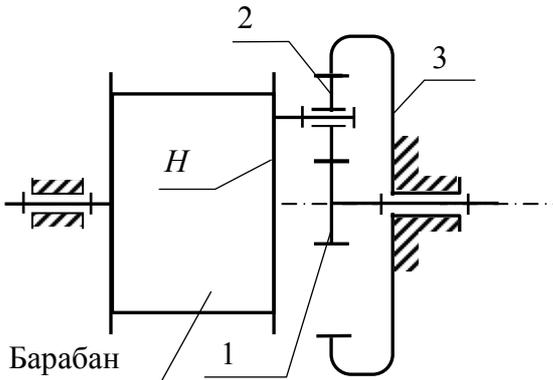
К задаче 93

94. Определить передаточное отношение $i_{1,H}$ зубчатой передачи лебедки, если числа зубьев колес соответственно $z_1 = z_2 = 18$, $z_3 = 54$.

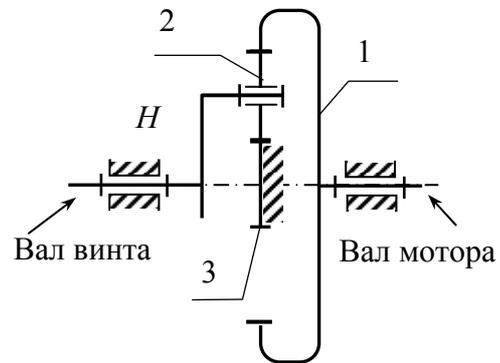
95. Определить передаточное отношение $i_{1,H}$ редуктора авиамотора, если числа зубьев колес соответственно $z_1 = 64$, $z_2 = 16$, $z_3 = 32$.

96. Определить числа оборотов в минуту водила H и сателлита 2, если вал 1 вращается с частотой $n_1 = 120$ об/мин, а числа зубьев колес соответственно $z_1 = 40$, $z_2 = 20$, $z_3 = 80$.

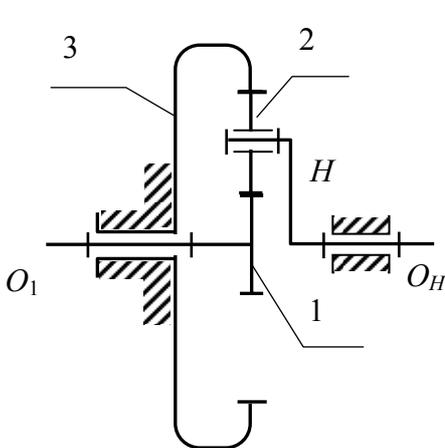
97. Определить передаточное отношение $i_{H,1}$ редуктора Давида, если числа зубьев колес соответственно $z_1 = 101$, $z_2 = 100$, $z_2' = 99$, $z_3 = 100$.



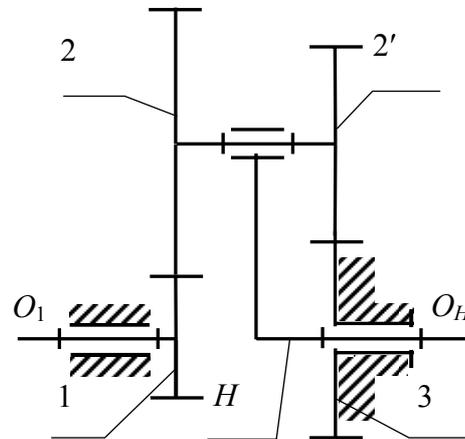
К задаче 94



К задаче 95



К задаче 96



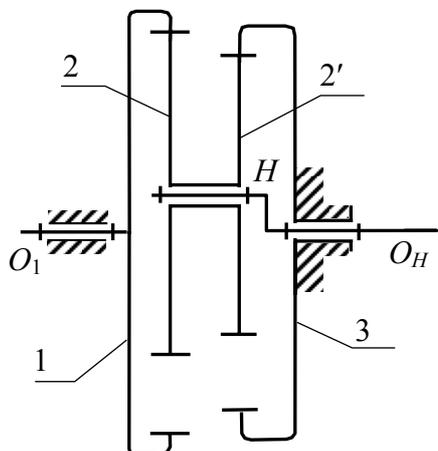
К задаче 97

98. Определить передаточное отношение $i_{H,1}$ редуктора Давида, если числа зубьев колес соответственно $z_1 = 65$, $z_2 = 62$, $z_2' = 63$, $z_3 = 66$.

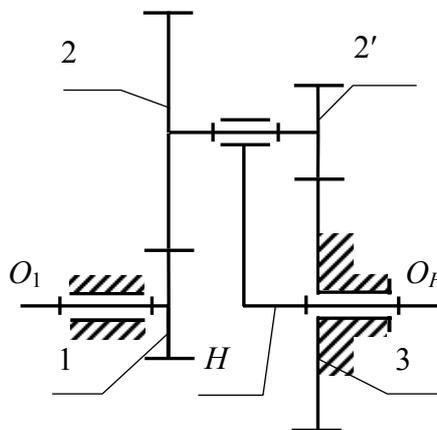
99. Определить передаточное отношение $i_{1,H}$ редуктора Давида, если числа зубьев колес соответственно $z_1 = 24$, $z_2 = 36$, $z_2' = 12$, $z_3 = 48$.

100. Определить передаточное отношение $i_{1,4}$ редуктора Давида с дополнительной непланетарной ступенью, если числа зубьев колес соответственно $z_1=20$, $z_2=36$, $z_3=45$, $z_3'=48$, $z_4=72$, $z_5=75$.

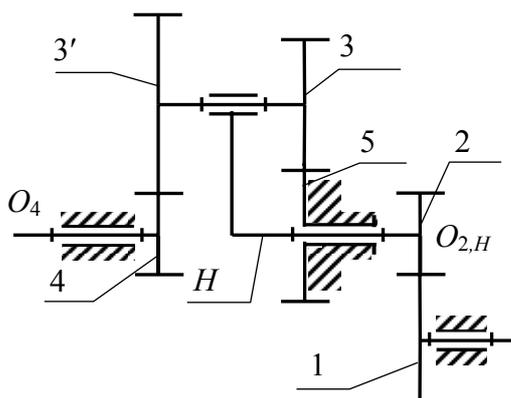
101. Определить передаточное отношение $i_{1,H2}$ редуктора, если числа зубьев колес соответственно $z_1=24$, $z_2=30$, $z_4=20$, $z_5=28$.



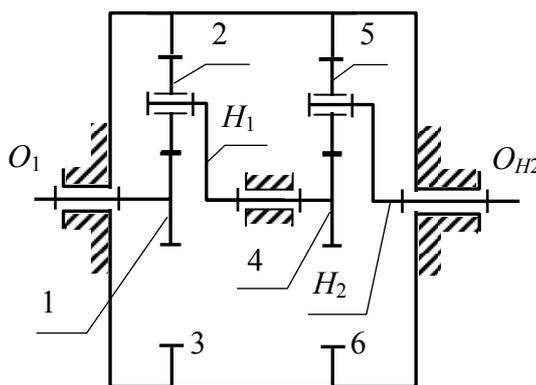
К задаче 98



К задаче 99



К задаче 100



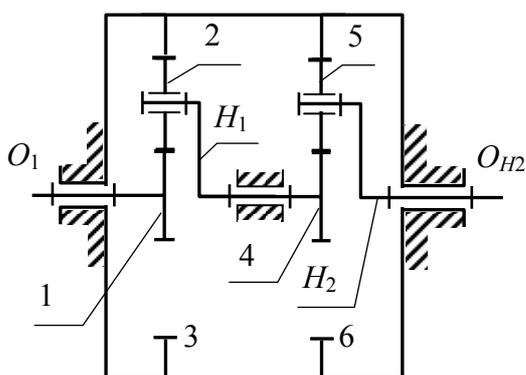
К задаче 101

102. Определить передаточное отношение $i_{1,H2}$ редуктора, если числа зубьев колес соответственно $z_1=22$, $z_2=31$, $z_4=18$, $z_5=33$.

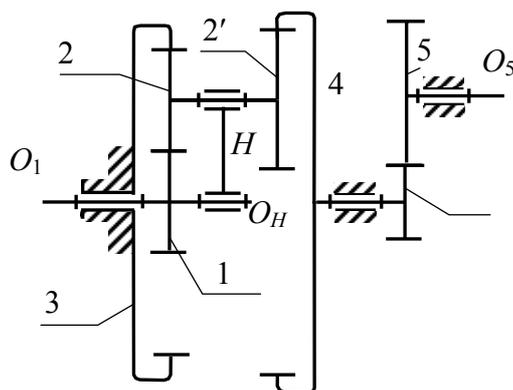
103. Определить передаточное отношение $i_{1,5}$ редуктора с плавающим водилом H , если числа зубьев колес соответственно $z_1=12$, $z_2=54$, $z_2'=48$, $z_3=120$, $z_4=114$, $z_4'=18$, $z_5=36$.

104. В четырехскоростной планетарной коробке передач при первой передаче включаются тормоза T_1 и T_2 , при второй – тормоз T_1 и муфта M_2 , при третьей – тормоз T_2 и муфта M_1 , при четвертой – муфты M_1 и M_2 . Определить значения передаточных отношений при различных передачах, если числа зубьев колес z_1, z_3, z_4, z_6 (см. таблицу значений).

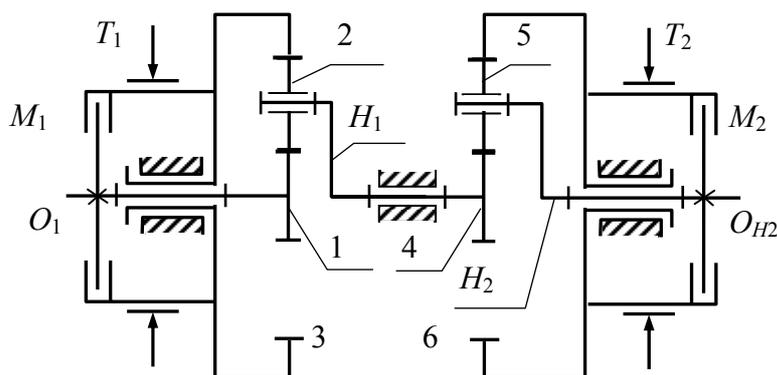
Варианты	1	2	3	4	5	6	7	8
z_1	25	24	22	21	20	19	18	17
z_3	91	96	78	85	70	75	66	65
z_4	90	96	80	84	63	64	58	59
z_6	46	48	42	40	35	32	28	29



К задаче 102



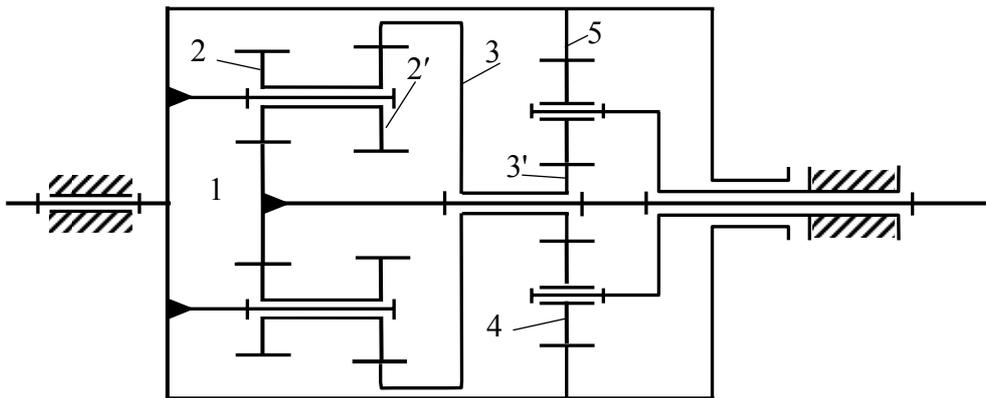
К задаче 103



К задаче 104

105. Для механизма замкнутого дифференциального зубчатого редуктора определить передаточное отношение от входного вала 1 к валу подвижного корпуса барабана 5 – $i_{1,5}$, если числа зубьев колес $z_1=z_2=z_3$, $z_2=z_4$ (см. таблицу значений). При решении учесть условие соосности механизма, считая, что все колеса прямозубые, нарезаны без смещения инструмента, модули всех колес одинаковы.

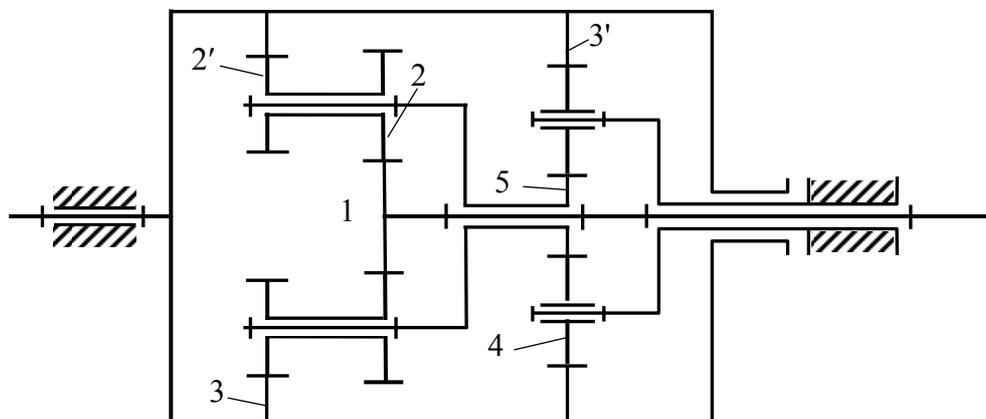
Варианты	1	2	3	4	5	6	7	8
z_1	20	21	22	23	20	21	22	23
z_2	35	34	33	42	39	40	41	45



К задаче 105

106. Для замкнутого дифференциального зубчатого редуктора определить передаточное отношение от входного вала 1 к выходному барабану 3 – $i_{1,3}$, если числа зубьев колес $z_1=z_2'=z_5$, $z_2=z_4$ (см. таблицу значений). При решении учесть условие соосности механизма, считая, что все колеса прямозубые, нарезаны без смещения инструмента, модули всех колес одинаковы.

Варианты	1	2	3	4	5	6	7	8
z_1	17	18	19	20	21	22	23	24
z_2	45	44	40	41	60	56	54	50



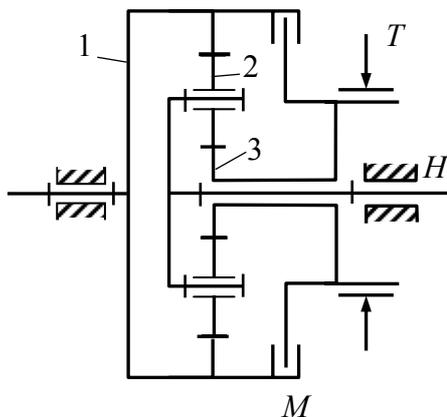
К задаче 106

107. Коробка передач с помощью устройств управления (T и M) может преобразовываться в планетарный или дифференциальный механизм. Определить передаточное отношение от входного колеса 1 к водилу H и частоту вращения водила n_H : а) при включенном тормозе T и выключенной муфте M ; б) при включенной муфте M и выключенном тормозе T ; в) при выключенных T и M . Числа зубьев колес z_2 , z_3 и частоты вращения n_1 и n_3 – известны (см. таблицу значений).

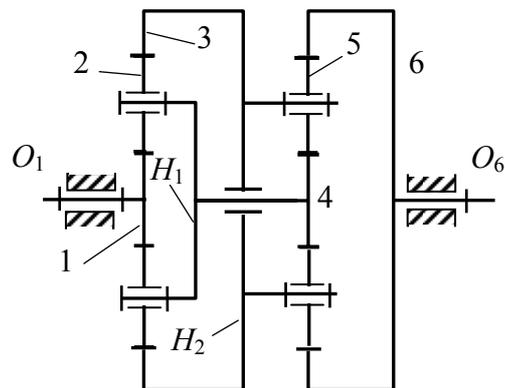
Варианты	1	2	3	4	5	6	7	8
z_2	22	40	32	22	34	24	30	28
z_3	24	30	28	36	32	42	28	56
n_1 (об/мин)	100	150	1200	2000	600	300	800	2500
n_3 (об/мин)	300	400	800	600	1000	700	1800	500

108. В двухскоростной планетарной коробке передач определить передаточные отношения от колеса 1 к колесу 6 и скорости вращения колеса 6: а) при заторможенном водиле H_1 (первая передача); б) при заторможенном водиле H_2 (вторая передача). Известны числа зубьев колес z_1, z_2, z_4, z_5 и скорость ω_1 (см. таблицу значений).

Варианты	1	2	3	4	5	6	7	8
z_1	17	20	17	21	17	18	20	17
z_2	29	40	32	40	36	36	42	42
z_4	24	17	18	17	18	20	17	18
z_5	36	28	42	34	37	45	38	39
ω_1 (об/мин)	70	90	150	300	150	90	70	90



К задаче 107



К задаче 108

Контрольные вопросы

1. Что называется функцией положения ведомого звена?
2. Что называется аналогом угловой скорости звена, аналогом углового ускорения звена, аналогом скорости (точки)?
3. Последовательность решения задачи о положениях, скоростях и ускорениях применительно к группам Ассура?

4. В какую сторону направлен вектор нормального ускорения точки звена?
5. Как, пользуясь теоремой подобия, определить скорость или ускорение заданной точки звена?
6. В чем заключаются преимущества и недостатки аналитического и графического методов кинематического анализа?
7. Что называется рядовым зубчатым редуктором?
8. Дать определения терминов «передаточное отношение» и «передаточное число».
9. Что называется планетарным редуктором?
10. Что называется дифференциальным механизмом?
11. Какова цель применения метода обращения движения при кинематическом анализе планетарных передач?
12. В чем заключаются условия соосности и соседства, когда они применяются?
13. Запишите формулу для определения передаточного отношения сложного зубчатого механизма при последовательном соединении ступеней.
14. Запишите формулы Виллиса для передаточного отношения планетарного и дифференциального механизмов.

ГЛАВА 3. СИЛОВОЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ

3.1. Общие положения

Силовой анализ включает в себя:

– изучение влияния *внешних сил*, сил веса звеньев, сил трения и сил инерции на звенья механизма, на элементы звеньев, кинематические пары и неподвижные опоры;

– установление способов уменьшения динамических нагрузок, возникающих при движении механизма.

Все силы, действующие на механизм, можно разделить на две группы:

1. *Внешние силы* – силы, приложенные к механизму, не зависящие от строения, массо-габаритных характеристик самого механизма:

а) движущие силы – $F_{дв}$ – силы, вызывающие движение. Передаются механизму ведущим звеном,

$$A_{дв} > 0;$$

б) силы производственного сопротивления – $F_{пс}$, – силы, для преодоления которых предназначен механизм,

$$A_{пс} < 0.$$

2. Силы, присущие самому механизму:

а) силы вредного сопротивления – $F_{вс}$, например, силы трения в кинематических парах

$$F_C = F_{пс} + F_{вс};$$

б) силы тяжести – $F_G \equiv (G)$

$$G = mg;$$

в) силы инерции – $F_i = -ma_s$.

Аналогично силам классифицируются и моменты.

Силовой анализ механизмов может быть:

- Статический – не учитываются силы инерции звеньев, дополнительные силы, возникающие в процессе движения (например, кориолисовы).
- Динамический – учитываются как статические, так и динамические нагрузки.

Методы, применяемые при выполнении силового анализа можно разделить на две основные группы:

1. Аналитические.

2. Графоаналитические.

Типичные задачи, решаемые при выполнении силового анализа, следующие:

1. Определение усилий, действующих на звенья механизма.
2. Определение реакций в кинематических парах.
3. Определение уравновешивающей силы или уравновешивающего момента.
4. Определение КПД механизма.

Кратко охарактеризуем некоторые методы.

Среди аналитических методов широкое распространение получил метод расчета на основе обыкновенных дифференциальных уравнений равновесия твердых тел.

Сущность метода: применение к решению задач динамики плоских механизмов уравнений статики – уравнений равновесия в форме Даламбера:

$$\begin{cases} \sum F_X = 0, \\ \sum F_Y = 0, \\ \sum M_Z = 0. \end{cases}$$

В приведенных уравнениях под силами F и моментами M понимаются все внешние силы и моменты, силы тяжести и реакции в кинематических парах, подлежащие определению. Подобные уравнения должны быть составлены для всех звеньев механизма и решены совместно. В результате для механизма с n подвижными звеньями решается система $3n$ уравнений. В исходном виде такая система применяется для механизмов с малыми (или мало меняющимися) скоростями движения звеньев, когда можно пренебречь инерциальными составляющими.

Для того чтобы механизм находился в равновесии под воздействием внешних сил, к одному из звеньев механизма должна быть приложена уравновешивающая сила F_y или уравновешивающая пара сил, характеризующая ее моментом M_y – уравновешивающим моментом. Эту силу или момент обычно считают приложенными к ведущему звену, которое либо получает энергию, требуемую для движения механизма, извне, как это имеет место у механизмов рабочих машин, либо отдает ее, как это имеет место у механизмов двигателей.

Если же в каждом уравнении добавить инерциальные составляющие, то каждое звено и механизм в целом можно считать находящимся в мгновенном равновесном состоянии (иногда называют *замороженное состояние*, *квазиравновесное*). В таком случае эта система уравнений равновесия называется *системой уравнений кинетостатики*. Для выполнения кинетостатических расчетов необходимо знать законы движе-

ния звеньев, поскольку в уравнения входят инерционные нагрузки, т. е. кинематический анализ должен быть выполнен.

Решение систем уравнений кинетостатики в общем случае, когда необходимо получить зависимости реакций от времени или положения механизма, может быть весьма затруднительным, поскольку инерциальные составляющие сил зависят от линейных ускорений, а моменты – от угловых ускорений, которые? в свою очередь, являются достаточно сложными тригонометрическими нелинейными функциями. В результате для простейшего шарнирного четырехзвенного механизма (с одной присоединенной группой Ассур 2-го класса) необходимо решить систему 9 нелинейных уравнений.

Оказывается, что решение приведенных систем можно упростить. Для этого рассмотрим реакции в кинематических парах:

– в каждой кинематической паре 5 класса подлежат определению две неизвестных величины (рис. 3.1):

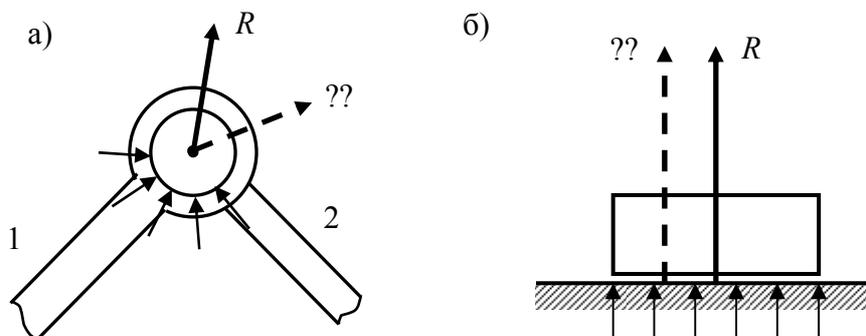


Рис. 3.1. К определению реакций в кинематических парах 5-го класса

– во вращательной паре (рис. 3.1,а) известна точка приложения силы – центр вращательной пары, но неизвестны величина и направление;

– в поступательной паре (рис. 3.1,б) известна линия действия (направление) – перпендикулярно поверхности контакта, но неизвестны величина и точка приложения;

– в каждой кинематической паре 4-го класса (рис. 3.2) подлежит определению одна неизвестная величина – численное значение реакции, так как точка приложения известна (точка контакта поверхностей или кривых) и линия действия также известна (вдоль общей нормали к контактирующим поверхностям).

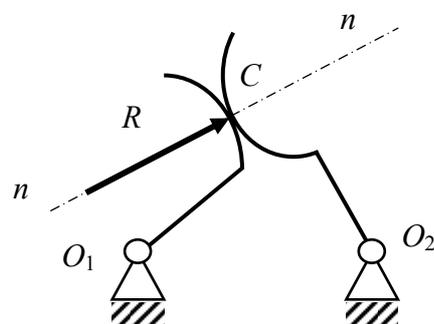


Рис. 3.2. К определению реакций в кинематических парах 4-го класса

Таким образом, общее число

неизвестных, подлежащих определению $2P_5 + P_4$. Общее количество линейно-независимых уравнений, которые могут быть составлены $3n$, где n – число подвижных звеньев. Известно, что система решается, если количество неизвестных равно числу уравнений:

$$3n = 2P_5 - P_4,$$

но это уравнение Чебышева для группы Ассур:

$$W = 3n - 2P_5 - P_4 = 0.$$

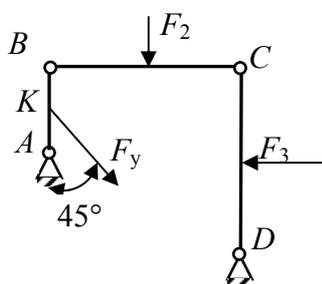
Следовательно, группы Ассур являются статически определимыми системами, и полную систему уравнений статики или кинетостатики для механизма можно разбить на ряд подсистем, которые решаются последовательно.

ЗАДАЧИ 109–114

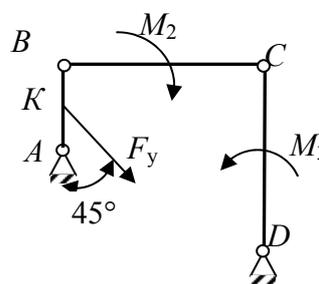
Силовой анализ выполняется аналитическим методом. Силами трения и инерции пренебречь.

109. Определить реакции во всех кинематических парах и величину уравновешивающей силы. $L_{AB}=100$ мм, $F_2=F_3=200$ Н, $L_{BC}=L_{CD}=200$ мм, $AK=50$ мм.

110. Определить реакции во всех кинематических парах и величину уравновешивающей силы. $L_{AB}=100$ мм, $M_2=M_3=200$ Нм, $L_{BC}=L_{CD}=200$ мм, $AK=50$ мм.



К задаче 109



К задаче 110

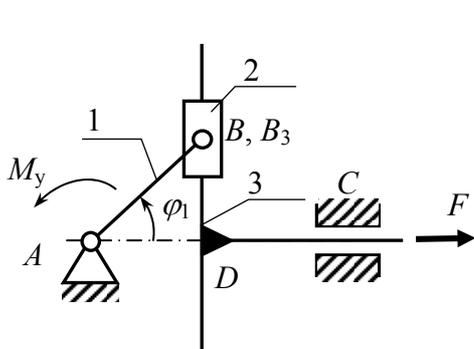
111. Найти величину уравновешивающего момента, приложенного к звену 3 синусного механизма. Известно: $F=500$ Н, $\varphi_1=45^\circ$, $l_{AB}=250$ мм.

112. В тангенсном механизме найти величину уравновешивающего момента. Известно: $F=5$ кН, $\varphi_1=30^\circ$, $H=250$ мм.

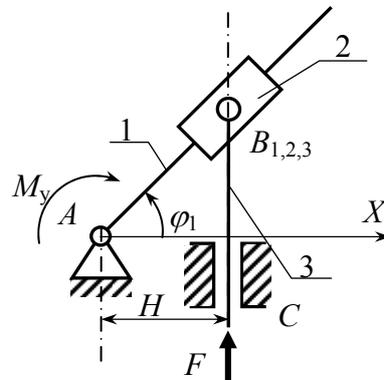
113. Найти наибольшую величину уравновешивающего момента M_y . Полезная нагрузка постоянна по величине и направлению в течение всего цикла работы (сила $F=1$ кН) и приложена в точке D кривошипного механизма с качающимся ползуном. Известно: $l_{AB}=30$ мм, $l_{AC}=60$ мм, $l_{BD}=120$ мм.

114*. Найти уравновешивающий момент M_y , приложенный к звену 1, и мощность P_1 , требуемую для приведения механизма в движение,

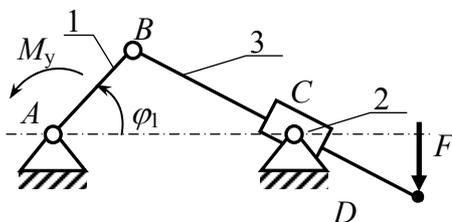
если: $l_{AB}=100$ мм, $l_{BC}= 500$ мм, $\varphi_1=120^\circ$, $\omega_1=1$ сек⁻¹, $F=10$ кН, $l_{BD}=0,5l_{BC}$. В данной задаче силами тяжести кривошипа и ползуна, силами инерции всех звеньев можно пренебречь. Масса шатуна 50 кг. Центр масс шатуна принять в точке D .



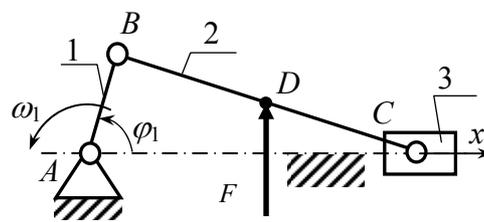
К задаче 111



К задаче 112



К задаче 113



К задаче 114

3.2. Силовой расчет методом планов

Рассмотрим общий порядок выполнения силового расчета рычажных механизмов методом планов сил на примере силового расчета шестизвенного кулисного механизма (построения даны в общем виде).

Целью силового расчета является определение усилий, действующих на звенья механизма (внешние силы), давлений (реакций) в кинематических парах (внутренние силы), определение уравновешивающего момента (или силы), приложенного к начальному механизму, определение коэффициента полезного действия механизма.

Рассмотрим силовой расчет кулисно-рычажного механизма (рис. 3.3).

По заданным размерам в масштабе вычерчивается механизм.

Силовому расчету всегда предшествуют структурный и кинематический анализ.

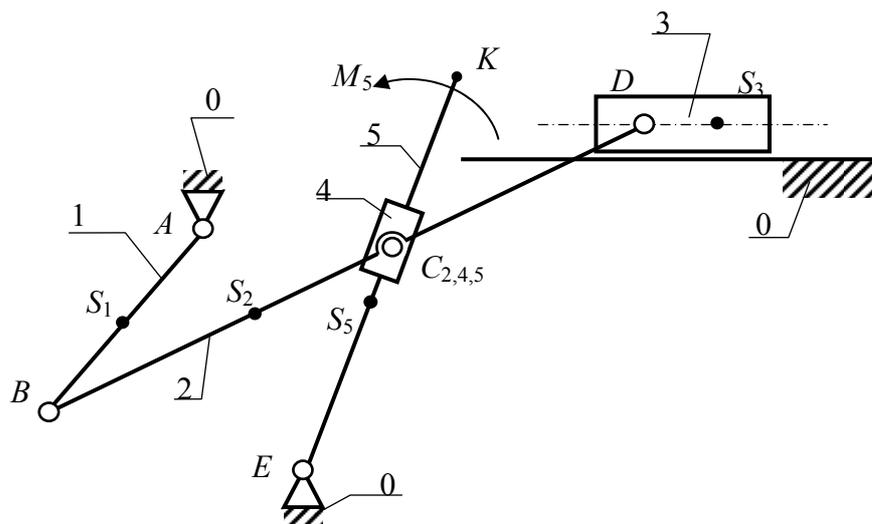


Рис. 3.3. Схема кулисно-рычажного механизма

Данный механизм содержит:

- пять подвижных звеньев: 1 – кривошип, 2 – шатун, 3 – ползун, 4 – камень, 5 – кулиса-коромысло;
- семь кинематических пар пятого класса: пять вращательных – $V_{0,1}, V_{1,2}, V_{2,3}, V_{4,2}, V_{5,0}$ и две поступательные – $П_{3,0}, П_{4,5}$.

Начальный механизм с вращательной кинематической парой $V_{0,1}$ состоит из звена 1 и стойки 0.

Механизм содержит две структурные группы (группы Ассура) 2-го класса:

- группа 2–3 [$V_{1,2} - V_{2,3} - П_{3,0}$] (второго вида);
- группа 4–5 [$V_{2,4} - П_{4,5} - V_{5,0}$] (третьего вида).

Силовой расчет начинают с *последней* группы и заканчивают расчетом *начального механизма*. В данном примере силовой расчет должен быть проведен в такой последовательности: расчет группы 4–5, затем группы 2–3 и расчет начального механизма 1–0.

Рассмотрим порядок силового расчета без учета трения в кинематических парах.

3.2.1. Силы, действующие на звенья механизма

Рабочим звеном данного механизма является звено 5, к которому приложено полезное (производственное) сопротивление M_5 , определяющееся из графика для данного положения механизма. Помимо заданного момента полезного сопротивления (или заданных сил), учтем силы тяжести, силы и моменты инерции звеньев.

Пусть массы звеньев будут m_1, m_2, m_3, m_5 . Массой камня кулисы m_4 пренебрегаем, так как она мала по сравнению с массами остальных

звеньев. Отдельными силами и моментами в оценочных расчетах можно пренебрегать, если в суммарной нагрузке они не превышают 5%.

Вес звеньев:

$$F_{G1} = g \cdot m_1 = 9,81 \cdot m_1 \text{ Н}, \quad F_{G2} = g \cdot m_2 = 9,81 \cdot m_2 \text{ Н},$$

$$F_{G3} = g \cdot m_3 = 9,81 \cdot m_3 \text{ Н}, \quad F_{G5} = g \cdot m_5 = 9,81 \cdot m_5 \text{ Н}.$$

Величины сил инерции звеньев:

$$F_{i1} = m_1 \cdot a_{S1} = \dots \text{ Н}, \quad F_{i2} = m_2 \cdot a_{S2} = \dots \text{ Н},$$

$$F_{i3} = m_3 \cdot a_{S3} = \dots \text{ Н}, \quad F_{i5} = m_5 \cdot a_{S5} = \dots \text{ Н},$$

где a_{S1} , a_{S2} , a_{S3} , a_{S5} – ускорения центров масс, определяемые из *плана ускорений*.

Силы тяжести и силы инерции приложены в центрах масс звеньев, т. е. в точках S_1 , S_2 , S_3 , S_5 . Силы тяжести всегда направлены к центру Земли, т. е. вертикально вниз. Силы инерции направлены противоположно ускорениям центров масс (это главные векторы сил инерции). Поэтому для большей точности и наглядности на листе, где выполняется силовой расчет, следует привести планы скоростей и ускорений.

Главные моменты сил инерции определяются по формуле

$$M_i = J_S \cdot \varepsilon \text{ Нм},$$

где J_S – момент инерции массы звена относительно оси, проходящей через центр масс, $\text{кг} \cdot \text{м}^2$;

ε – угловое ускорение звена, определенное ранее из кинематического исследования, $1/\text{с}^2$.

В рассматриваемом примере $M_{i1}=0$, так как при $\omega_1=\text{const}$ $\varepsilon_1=0$, а также $M_{i3}=0$ – поступательное движение звена 3 ($\varepsilon_3=0$), остальные:

$$M_{i2} = J_{S2} \cdot \varepsilon_2 \text{ Нм},$$

$$M_{i5} = J_{S5} \cdot \varepsilon_5 \text{ Нм}.$$

Моменты сил инерции направлены противоположно угловым ускорениям.

Порядок силового расчета методом планов сил можно свести к следующему:

1. Вычерчивается в масштабе группа Ассур в положении, для которого выполняется силовой расчет.
2. Расставляются учитываемые при силовом расчете внешние силы и моменты, действующие на звенья группы.
3. Расставляются неизвестные реакции во внешних кинематических парах.

4. Составляется уравнение равновесия группы в форме сил, после анализа которого, а в некоторых случаях дополнительного нахождения составляющих реакций, строится план сил.

3.2.2. Силовой расчет группы 4–5 [В_{2,4} – П_{4,5} – В_{5,0}]

К звеньям группы (рис. 3.4) приложены:

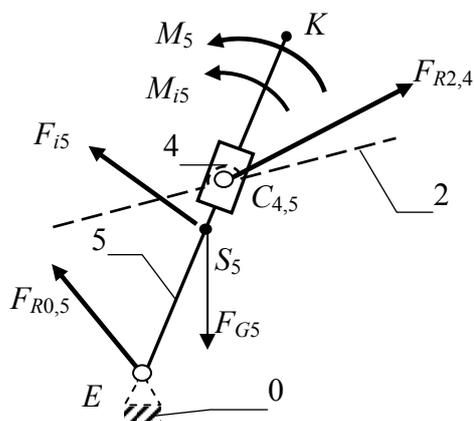


Рис. 3.4. Схема нагружения группы 4-5

$M_5 = \dots$ Нм – момент производственного сопротивления;

$M_{i5} = \dots$ Нм – момент сил инерции звена 5;

$F_{i5} = \dots$ Н – сила инерции звена 5;

$F_{G5} = \dots$ Н – сила тяжести звена 5;

$F_{R2,4}$ и $F_{R0,5}$ – реакции во внешних кинематических парах (рис. 3.4).

Так как внешние кинематические пары вращательные, то реакции будут проходить через центры шарниров С и Е. (Это один из параметров реакции как силы, два же других – модуль и направление – неизвестны и подлежат определению).

Записываем уравнение равновесия группы в форме сил:

Записываем уравнение равновесия группы в форме сил:

$$\sum \bar{F} = \bar{F}_{R2,4} + \bar{F}_{G5} + \bar{F}_{i5} + \bar{F}_{R0,5} = 0. \quad (3.1)$$

При составлении уравнения равновесия в форме сил рекомендуется придерживаться следующих правил:

- начинать уравнение и заканчивать его неизвестными реакциями;
- записать силы, действующие на одно звено, а затем – на другое.

Так как реакции $F_{R2,4}$ и $F_{R0,5}$ неизвестны ни по величине, ни по направлению, поступим следующим образом.

Рассмотрим отдельно взятое звено 4 (камень кулисы).

На него действуют две силы: реакция со стороны звена 2 – $F_{R2,4}$ и со стороны звена 5 – $F_{R5,4}$. реакция $F_{R2,4}$ во вращательной кинематической паре проходит через центр шарнира C_4 (давление второго звена на четвертое). Реакция $F_{R5,4}$ в поступательной кинематической паре (давление пятого на четвертое) перпендикулярна направляющей (рис. 3.5,а). Звено 4 находится в равновесии под действием двух сил, это означает, что силы равны по величине, противоположны по направлению и проходят через одну и ту же точку, т. е. $F_{R2,4} = -F_{R5,4}$, приложены к точке C_4 и перпендикулярны звену 5 (рис. 3.5,б).

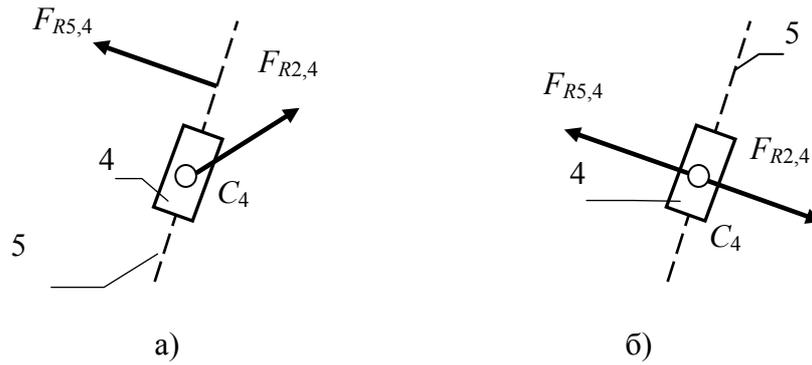


Рис. 3.5. Силовые факторы, действующие на камень кулисы

Теперь рассмотрим звено 5 (рис. 3.6). В точке C_5 звена будет приложена реакция $F_{R4,5}$, перпендикулярная к звену ($F_{R4,5} = -F_{R5,4}$), которую найдем из уравнения равновесия звена 5:

$$M_E = M_5 + M_{i5} - F_{R4,5} \cdot l_{CE} - F_{G5} \cdot h_1 + F_{i5} \cdot h_2 = 0, \quad (3.2)$$

отсюда

$$F_{R4,5} = \frac{M_5 + M_{i5} - F_{G5} \cdot h_1 + F_{i5} \cdot h_2}{l_{CE}}. \quad (3.3)$$

Здесь l_{CE} – действительное расстояние от С до Е;

h_1, h_2 – плечи сил, определяются по чертежу с учетом масштаба

$$(h_1 = \bar{h}_1 \cdot \mu_l, \quad h_2 = \bar{h}_2 \cdot \mu_l).$$

Если при решении уравнения (3.3) $F_{R4,5}$ получится отрицательной, следовательно, её направление противоположно.

Так как $F_{R4,5} = -F_{R5,4}$, а $F_{R5,4} = -F_{R2,4}$, то $F_{R4,5} = F_{R2,4}$.

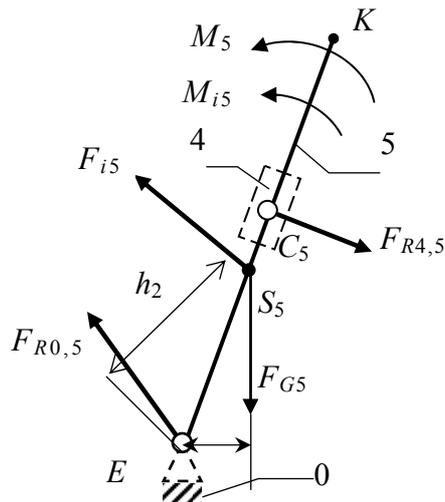


Рис. 3.6. Схема нагружения звена 5

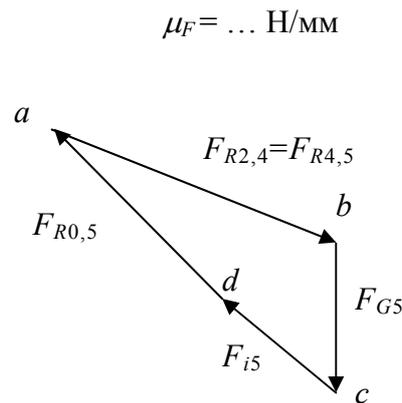


Рис. 3.7. План сил группы 4–5

На основании уравнения (3.1) строится план сил группы 4–5 (рис. 3.7) в масштабе $\mu_F = \dots \text{Н/мм}$.

Из плана сил найдем $\bar{F}_{R0,5} = -F_{R0,5} \cdot \mu_F = \dots \text{Н}$.

Силовой расчет этой группы можно выполнить и по-другому. Разложить реакцию $F_{R0,5}$ на составляющие, направленные по звену $F_{R0,5}^n$ и перпендикулярно ему: $F_{R0,5}^\tau$, т. е. $\bar{F}_{R0,5} = \bar{F}_{R0,5}^n + \bar{F}_{R0,5}^\tau$. Тогда уравнение (3.1) примет вид

$$\sum \bar{F} = \bar{F}_{R2,4} + \bar{F}_{G5} + \bar{F}_{i5} + \bar{F}_{R0,5}^\tau + \bar{F}_{R0,5}^n = 0. \quad (3.4)$$

Тангенциальная составляющая $F_{R0,5}^\tau$ определяется из уравнения моментов относительно точки C . Зная направление реакции $F_{R2,4}$, как было доказано выше, на основании уравнения (3.4) строится план сил, из которого определится реакция $F_{R0,5}$ и $F_{R2,4}$.

3.2.3. Силовой расчет группы 2–3 [В_{1,2} – В_{2,3} – П_{3,0}]

На рис. 3.8 представлена группа Ассур 2–3. К звеньям группы приложены:

$F_{i2} = \dots \text{Н}$ – сила инерции звена 2;

$F_{G2} = \dots \text{Н}$ – сила тяжести звена 2;

$F_{R4,2} = \dots \text{Н}$ – реакция в кинематической паре со стороны звена 4;

$M_{i2} = \dots \text{Нм}$ – момент сил инерции звена 2;

$F_{G3} = \dots \text{Н}$ – вес звена 3;

$F_{i3} = \dots \text{Н}$ – сила инерции звена 3.

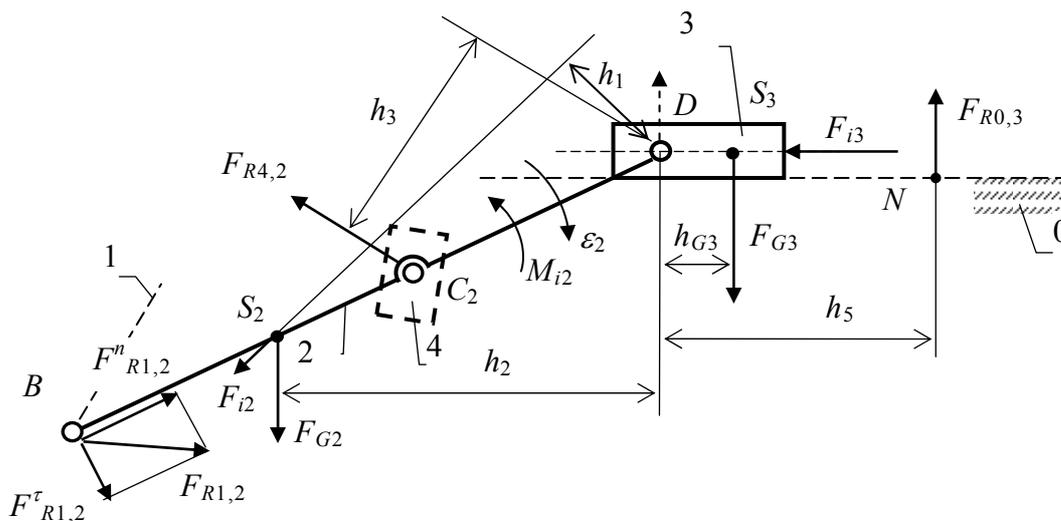


Рис. 3.8. Схема нагружения группы 2–3

Соединив точки h и b , получим полный вектор $F_{R1,2}$.

Из плана сил получим

$$F_{R1,2} = \bar{F}_{R1,2} \cdot \mu_F = \bar{hb} \cdot \mu_F \quad \text{и} \quad F_{R0,3} = \bar{F}_{R0,3} \cdot \mu_F = \bar{gh} \cdot \mu_F.$$

Для определения реакции $F_{R2,3}$ или $F_{R3,2}$ во внутренней кинематической паре $B_{2,3}$ (шарнир D) составим уравнение равновесия звена 2. Со стороны звена 3 на звено 2 будет действовать сила $F_{R3,2}$, тогда

$$\sum \bar{F} = \bar{F}_{R1,2} + \bar{F}_{i2} + \bar{F}_{G2} + \bar{F}_{R4,2} + \bar{F}_{R3,2} = 0. \quad (3.10)$$

На плане сил это будет отрезок eh (см. рис. 3.9):

$$F_{R3,2} = \bar{eh} \cdot \mu_F = \dots \text{ Н.}$$

(Получим тот же результат, если рассмотреть звено 3:

$$\sum \bar{F} = \bar{F}_{G3} + \bar{F}_{i3} + \bar{F}_{R0,3} + \bar{F}_{R3,2} = 0; \quad F_{R2,3} = -F_{R3,2}.)$$

Таким образом, из плана сил найдены реакции во всех кинематических парах группы 2–3: $F_{R1,2}$, $F_{R2,3}$, $F_{R3,0}$.

Найдем точку приложения реакции $F_{R0,3}$ в поступательной кинематической паре $\Pi_{0,3}$, для чего составим уравнение равновесия звена 3 (ползуна) в форме моментов.

В данном случае силы F_{i3} , $F_{R2,3}$ проходят через центр шарнира D , тогда для звена 3 момент сил относительно точки D

$$M_D = F_{R0,3} \cdot h_5 - F_{G3} \cdot h_4 = 0, \quad (3.11)$$

отсюда

$$h_5 = \frac{F_{G3} \cdot h_4}{R_{0,3}} = \dots \text{ мм.} \quad (3.12)$$

Если $h_4 = 0$, то и $h_5 = 0$, т. е. векторы всех сил и давлений в кинематической паре будут проходить через одну и ту же точку – центр шарнира D .

При необходимости учесть силы трения расчет ведется, как правило, методом последовательных приближений, за начальное приближение берется расчет без учета сил трения.

3.2.4. Силовой расчет начального механизма 1 – 0

Начальным механизмом является кривошип 1, образующий со стойкой вращательную кинематическую пару $B_{0,1}$.

Как известно, силовой расчет в этом случае сводится к определению реакции в кинематической паре $F_{R0,1}$ и величины уравновешивающей силы F_b либо уравновешивающего момента M_b , что определяется схемой привода.

Определим уравновешивающую силу F_b , приложенную по касательной к точке B . Схема действия сил показана на рис. 3.10,а.

К кривошипу 1 приложены силы:

$F_{R2,1} = \dots$ Н, реакция в шарнире B – давление со стороны звена 2, полученное из расчета предыдущей группы;

$F_{G2} = \dots$ Н, вес звена 1;

$F_{i1} = \dots$ Н – сила инерции звена 1.

Пусть уравновешивающая сила F_b приложена в точке B и линия действия её перпендикулярна кривошипу.

Уравновешивающую силу найдем из уравнения моментов

$$M_A = F_b \cdot AB + F_{G1} \cdot h_1 - F_{R2,1} \cdot h_2 = 0, \quad (3.13)$$

отсюда

$$F_b = \frac{-F_{G1} \cdot h_1 + F_{R2,1} \cdot h_2}{AB} = \dots \text{ Н.} \quad (3.14)$$

Здесь плечи сил h_1, h_2 определяются из чертежа.

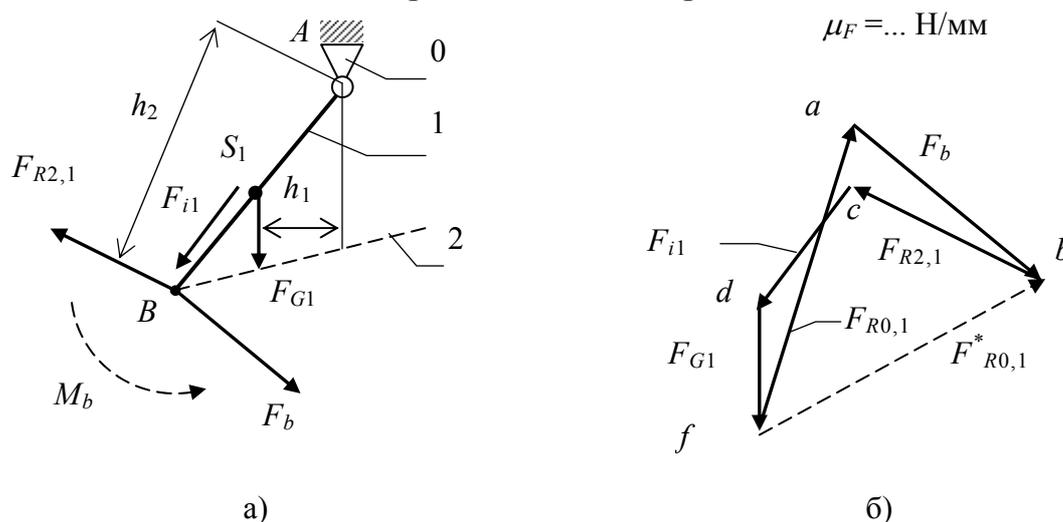


Рис. 3.10. Начальный механизм: а – схема; б – план сил

Реакцию $F_{R0,1}$ в кинематической паре $B_{0,1}$ (в шарнире A) определим из условия равновесия звена 1:

$$\sum \bar{F} = \bar{F}_b + \bar{F}_{R2,1} + \bar{F}_{i1} + \bar{F}_{G1} + \bar{F}_{R0,1} = 0. \quad (3.15)$$

Строим план сил (см. рис. 3.10,б, начало построения – точка a), отсюда найдем $F_{R0,1}$:

$$F_{R0,1} = \bar{fa} \cdot \mu_F = \dots \text{ Н.}$$

Если к начальному механизму будет приложен уравновешивающий момент M_b (показан на рис. 3.10,а пунктиром, его направление можем

задать произвольно, с учетом предполагаемого направления составим уравнения равновесия), то его величина и направление также определятся из уравнения равновесия кривошипа:

$$M_A = M_b + F_{G1} \cdot h_1 - F_{R2,1} \cdot h_2 = 0, \quad (3.16)$$

отсюда

$$M_b = F_{R2,1} \cdot h_2 - F_{G1} \cdot h_1 = \dots \text{Н}. \quad (3.17)$$

Здесь h_1, h_2 – действительные значения плеч действующих сил для механизма!

Если после подстановки в уравнение (3.17) момент M_b получится отрицательным, следовательно, направление его будет противоположным первоначально предположенному.

Реакция в кинематической паре $F_{R0,1}^*$ в этом случае определится из уравнения

$$\sum \bar{F} = \bar{F}_{R2,1} + \bar{F}_{i2} + \bar{F}_{G1} + \bar{F}_{R0,1}^* = 0. \quad (3.18)$$

Из плана сил найдем

$$F_{R0,1}^* = \bar{f}b \cdot \mu_F = \dots \text{Н}.$$

Как видно, величина реакции в шарнире A может существенно отличаться, а от этого будут зависеть размеры цапф (подшипников). Если вал кривошипа получает вращение через соединительную муфту, то к нему будет приложен момент и при силовом расчете следует определять величину уравновешивающего момента M_b . Если вал кривошипа получает вращение через зубчатое зацепление, то в этом случае на кривошип будет действовать уравновешивающая сила F_b , приложенная в полюсе зацепления, и будет направлена по линии зацепления. При передаче вращения посредством цепной или ременной передачи уравновешивающая сила будет направлена по ветви цепи или ремня.

Из сравнения уравнений (3.13) и (3.16) следует, что

$$M_b = F_b \cdot l_{AB},$$

т. е. определив F_b , при необходимости можно найти M_b , и наоборот:

$$F_b = \frac{M_b}{l_{AB}}.$$

3.2.5. Определение величины уравнивающей силы методом рычага Н.Е. Жуковского

Этот метод позволяет определить величину уравнивающей силы без определения реакций в кинематических парах, т. е. без выполнения силового расчета групп Ассра.

Рычаг Жуковского представляет повернутый на 90° план скоростей, принимаемый как твердое тело, с неподвижной точкой в полюсе, к концам векторов одноименных точек которого приложены внешние силы, в том числе уравнивающая сила. Из условия равновесия этого рычага и определяется величина уравнивающей силы.

На рис. 3.11 показан повернутый на 90° план скоростей с приложенными к концам соответствующих векторов внешними силами.

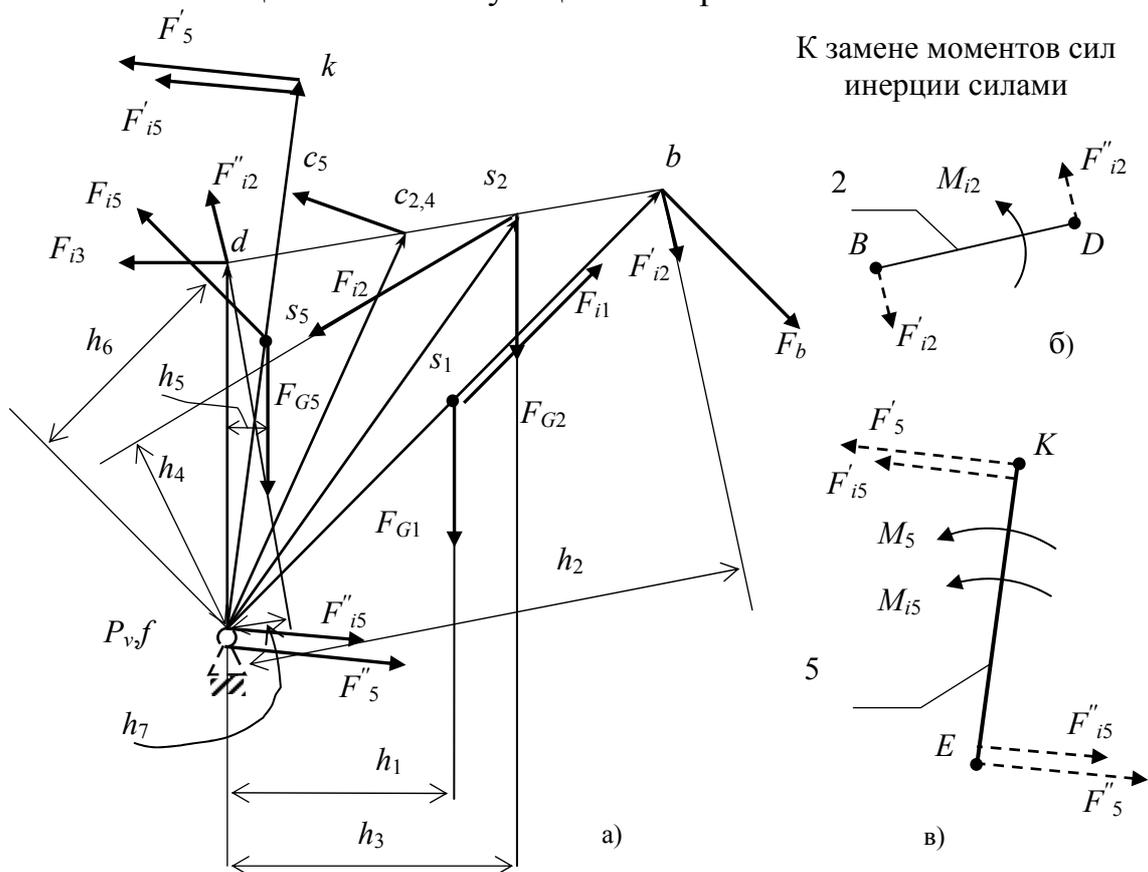


Рис. 3.11. Рычаг Жуковского

Момент сопротивления M_5 , а также моменты сил инерции M_{i5} и M_{i2} звеньев 5 и 2 на рычаге Жуковского заменены парами сил $F'_5 = -F''_5$, $F'_{i5} = -F''_{i5}$, приложенными в точках K и E , перпендикулярными звену 5, и силами $F'_{i2} = -F''_{i2}$, приложенными в точках B и D пер-

пендикулярно звену 2 (рис. 3.11,б, в). Значения этих сил определяются из выражений:

$$F'_5 = F''_5 = \frac{M_5}{l_{KF}}, \quad (3.19)$$

$$F'_{i5} = F''_{i5} = \frac{M_{i5}}{l_{KF}}, \quad (3.20)$$

$$F'_{i2} = F''_{i2} = \frac{M_{i2}}{l_{BD}}. \quad (3.21)$$

Принимая повернутый на 90° план скоростей как твердое тело (рычаг), напишем уравнение равновесия

$$M_{P_v} = F_b \cdot p_v b - F_{G1} \cdot h_1 - F'_{i2} \cdot h_2 - F_{G2} \cdot h_3 + F_{i2} \cdot h_4 - F_{G5} \cdot h_5 + F_{i5} \cdot h_6 + (F'_5 + F''_5) \cdot kf + F_{i2} \cdot h_7 + F_{i3} \cdot df = 0. \quad (3.22)$$

Из этого уравнения и определится уравновешивающая сила F_b . (Заметим, что в этом уравнении «плечи» сил $P_v b$, kf , df , h_1 , h_2 , ... могут определяться непосредственно по чертежу.)

Расхождения в значениях величины уравновешивающей силы, полученных из плана сил и рычага Жуковского, определяемые по формуле

$$\Delta F_b = \frac{F_b^{\text{пл}} - F_b^{\text{ж}}}{F_b^{\text{пл}}} \cdot 100 \%, \quad (3.23)$$

обычно не превышают 5...7 %.

Результаты определения реакций в кинематических парах и уравновешивающей силы удобно свести в таблицу.

3.3. Определение величины КПД механизма

Коэффициент полезного действия является показателем степени совершенства механизма.

Мгновенное значение КПД механизма, как уже было приведено ранее, определится по формуле

$$\eta = \frac{P_{\text{пс}}}{P_{\text{пс}} + \sum P_f}, \quad (3.24)$$

где $P_{\text{пс}} = M_5 \cdot \omega_5 = \dots$ Вт – мощность, затрачиваемая на преодоление производственного (полезного) сопротивления (M_5 – момент полезного сопротивления, Нм; ω_5 – угловая скорость, 1/с); $\sum P_f$ – суммарная мощность, затрачиваемая на преодоление трения во всех кинематических парах («вредные» сопротивления).

Найдем моменты трения во вращательных и силы трения в поступательных кинематических парах.

Пусть радиусы цапф вращательных кинематических пар: r_A, r_B, r_C, r_D, r_F (должны быть известны) и f – коэффициент трения в кинематических парах (в общем случае он может быть для каждой кинематической пары разным), тогда

$$\left. \begin{aligned} M_{f0,1} &= F_{R0,1} \cdot f_A \cdot r_A = \dots \text{ Нм}, \\ M_{f1,2} &= F_{R1,2} \cdot f_B \cdot r_B = \dots \text{ Нм}, \\ M_{f2,3} &= F_{R2,3} \cdot f_D \cdot r_D = \dots \text{ Нм}, \\ M_{f2,4} &= F_{R2,4} \cdot f_C \cdot r_C = \dots \text{ Нм}, \\ M_{f5,0} &= F_{R5,0} \cdot f_F \cdot r_F = \dots \text{ Нм}, \\ F_{f3,0} &= F_{R3,0} \cdot f_{3,0} = \dots \text{ Н}, \\ F_{f4,5} &= F_{R4,5} \cdot f_{4,5} = \dots \text{ Н}, \end{aligned} \right\} \quad (3.25)$$

мощности трения в кинематических парах будут:

$$\left. \begin{aligned} P_{f0,1} &= M_{f0,1} \cdot \omega_1 = \dots \text{ Вт}, \\ P_{f1,2} &= M_{f1,2} \cdot \omega_{1/2} = M_{f1,2} \cdot (\omega_1 - \omega_2) = \dots \text{ Вт}, \\ P_{f2,3} &= M_{f2,3} \cdot \omega_2 = \dots \text{ Вт}, \\ P_{f2,4} &= M_{f2,4} \cdot \omega_{2/4} = M_{f2,4} \cdot (\omega_2 - \omega_4) = \dots \text{ Вт}, \\ P_{f5,0} &= M_{f5,0} \cdot \omega_5 = \dots \text{ Вт}, \\ P_{f3,0} &= F_{f3,0} \cdot V_D = \dots \text{ Вт}, \\ P_{f4,5} &= F_{f4,5} \cdot V_{C_4/C_5} = \dots \text{ Вт}. \end{aligned} \right\} \quad (3.26)$$

Суммарная мощность трения

$$\sum P_f = P_{f0,1} + P_{f1,2} + P_{f2,3} + P_{f2,4} + P_{f5,0} + P_{f3,0} + P_{f4,5}. \quad (3.27)$$

Подставив значения $P_{\text{пс}}$ и $\sum P_f$ в уравнение (3.24), получим значение КПД для данного положения механизма (мгновенное).

Следует отметить, что относительная угловая скорость, например $\omega_{1/2}$, $\omega_{2/4}$, есть алгебраическая разность угловых скоростей, поэтому в формулу подставляются угловые скорости с учетом знака, т. е. с учетом направления вращения. Суммировать же мощности трения следует как скалярные величины, т. е. без учета знака.

На этом заканчивается силовой расчет механизма.

3.4. Примеры силового расчета

3.4.1. Кривошипно-шатунный механизм.

Требуется определить реакции во всех кинематических парах и величину уравновешивающей силы кривошипно-шатунного механизма (рис. 3.12). F_3 – сила полезного сопротивления, приложенная к звену 3.

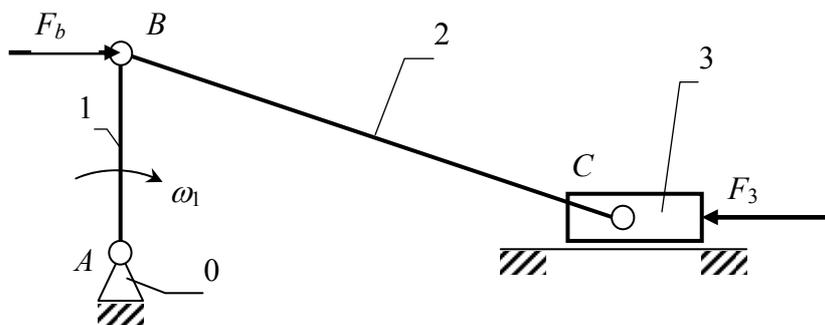


Рис. 3.12. Схема механизма

Пусть вес звеньев и силы инерции пренебрежимо малы по сравнению с внешней силой F_3 .

При решении этих примеров соблюдаем порядок, указанный ранее. Данный механизм состоит из начального механизма (кривошипа 1 и стойки 0) и группы Ассур (2–3) 2-го класса второго вида с двумя вращательными и одной внешней поступательной кинематической парой.

1. Вычерчиваем группу 2–3 в масштабе (рис. 3.13,а).

2. Расставляем неизвестные реакции во *внешних* кинематических парах: $F_{R1,2}$ – известна точка приложения – центр шарнира B; $F_{R0,3}$ – известна по направлению – перпендикулярна к направляющей $\alpha-\alpha$.

3. Составляем уравнение равновесия группы в форме сил:

$$\sum \bar{F} = \bar{F}_{R1,2} + \bar{F}_3 + \bar{F}_{R0,3} = 0. \quad (3.28)$$

Разложим реакции в шарнире B на составляющие:

$$\bar{F}_{R1,2} = \bar{F}_{R1,2}^n + \bar{F}_{R1,2}^\tau. \quad (3.29)$$

$\bar{F}_{R1,2}^\tau$ найдем из уравнения равновесия звена 2:

$$M_C = F_{R1,2}^\tau \cdot l_{BC} = 0. \quad (3.30)$$

Следовательно, $F_{R1,2}^\tau = 0$ и $F_{R1,2} = F_{R1,2}^n$.

В соответствии с уравнением (3.28) строим план сил группы (рис. 3.13,б).

Так как $F_{R0,3} \neq 0$, следовательно, $h_2=0$, т. е. в данном случае реакция $F_{R0,3}$ также будет проходить через центр шарнира C .

Расчет начального механизма 1–0.

К кривошипу 1 (рис. 3.14,а) приложены в точке B нагрузка $F_{R2,1}$ ($F_{R2,1} = -F_{R1,2}$) со стороны звена 2 и уравновешивающая сила F_b , перпендикулярная кривошипу, которую найдем из уравнения равновесия:

$$M_A = F_{R2,1} \cdot h_1 - F_b \cdot l_{AB} = 0, \quad (3.38)$$

отсюда

$$F_b = \frac{F_{R2,1} \cdot h_1}{l_{AB}}. \quad (3.39)$$

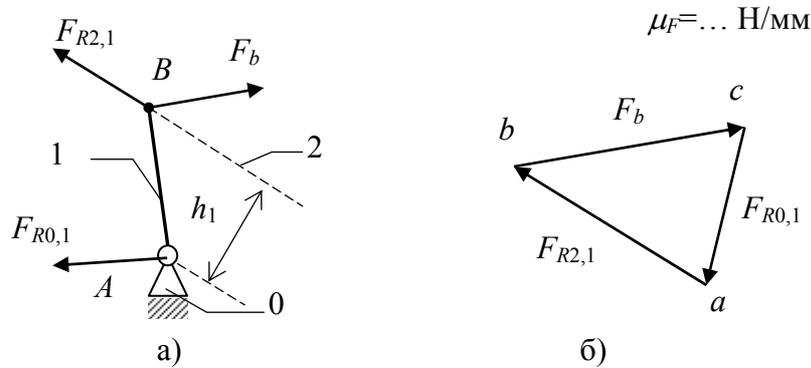


Рис. 3.14. Начальный механизм: а – схема; б – план сил

Реакцию в шарнире A найдем из плана сил, для чего составим уравнение равновесия звена 1 в форме сил:

$$\sum \bar{F} = \bar{F}_{F2,1} + \bar{F}_b + \bar{F}_{R0,1} = 0. \quad (3.40)$$

План сил построен на рис. 3.14,б.

3.4.2. Шарнирный четырехзвенный механизм.

Пусть $F_2 = F_3$ – внешние силы, приложенные к звеньям 2 и 3 в точках K и E посередине звеньев (рис. 3.15).

Решение. Выделим группу Ассур 2–3. $[B_{1,2} - B_{2,3} - B_{3,0}]$ – группа 2-го класса первого вида (рис. 3.16,а) с приложенными к звеньям 2 и 3 силами F_2 и F_3 .

Во внешних кинематических парах – шарнирах B и C приложим неизвестные реакции $F_{R2,1}$ и $F_{R0,3}$. Уравнение

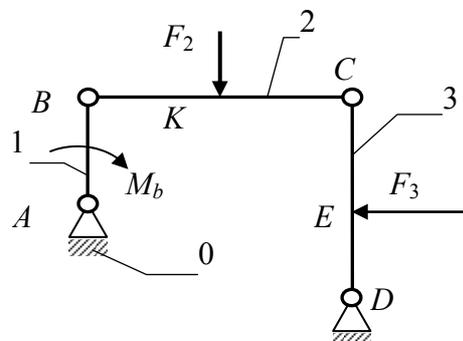


Рис. 3.15. Схема механизма

равновесия группы 2–3 примет вид

$$\sum F = F_{R1,2} + F_2 + F_3 + F_{R0,3} = 0. \quad (3.41)$$

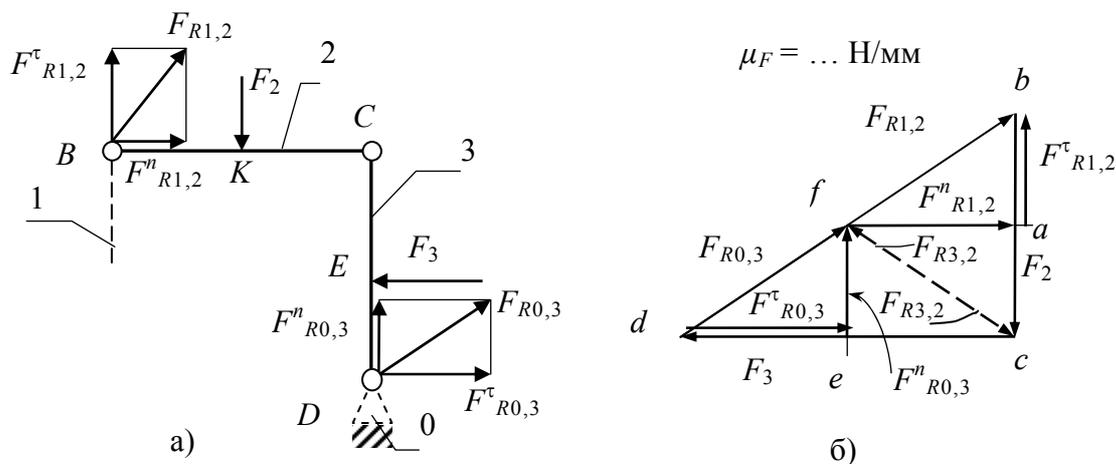


Рис. 3.16. Группа 2–3: а – план группы; б – план сил группы

Так как реакции $F_{R2,1}$ и $F_{R0,3}$ неизвестны ни по величине, ни по направлению, разложим их на составляющие, направив их по звену ($F_{R1,2}^n$ и $F_{R0,3}^n$) и перпендикулярно звену ($F_{R1,2}^tau$ и $F_{R0,3}^tau$), т. е.

$$\bar{F}_{R1,2} = \bar{F}_{R1,2}^n + \bar{F}_{R1,2}^tau, \quad (3.42)$$

$$\bar{F}_{R0,3} = \bar{F}_{R0,3}^n + \bar{F}_{R0,3}^tau. \quad (3.43)$$

Тангенциальные составляющие найдем из условия равновесия звеньев 2 и 3.

Для звена 2

$$M_C = -F_{R1,2}^tau \cdot l_{BC} + F_2 \cdot l_{KC} = 0, \quad (3.44)$$

отсюда

$$F_{R1,2}^tau = F_2 \frac{l_{KC}}{l_{BC}} = 0,5F_2. \quad (3.45)$$

Для звена 3

$$M_C = F_{R0,3}^tau \cdot l_{DC} - F_3 \cdot l_{FC} = 0, \quad (3.46)$$

отсюда

$$F_{R0,3}^tau = F_3 \frac{l_{EC}}{l_{DC}} = 0,5F_3. \quad (3.47)$$

Подставив (3.42) и (3.43) в уравнение (3.41), получим

$$\sum \bar{F} = \bar{F}_{R1,2}^n + \bar{F}_{R1,2}^tau + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \bar{F}_{R0,3}^tau + \bar{F}_{R0,3}^n = 0. \quad (3.48)$$

В строгом соответствии с этим уравнением строим план сил (рис. 3.16,б).

Начало плана – точка a , из которой откладываем вектор $F_{R1,2}^{\tau}$, затем из точки b – вектор F_2 , из точки c – вектор F_3 , из точки d – вектор $F_{R0,3}^{\tau}$. Из точек c и a проводим направления нормальных составляющих, которые пересеклись в точке f . Из плана находим $F_{R1,2}$ и $F_{R0,3}$ (отрезки fb и df).

Реакцию во внутреннем шарнире найдем по общему правилу – из уравнения равновесия одного из звеньев, например звена 2, тогда

$$\sum \bar{F} = \bar{F}_{R1,2} + \bar{F}_2 + \bar{F}_{R3,2} = 0. \quad (3.49)$$

На плане сил реакция $F_{R3,2}$ будет представлена отрезком cf .

Начальный механизм 1 – 0.

В точке B (рис. 3.17) кривошипа приложена сила $F_{R1,2}$ (из плана).

Пусть к кривошипу приложен уравнивающий момент M_b , который найдется из условия равновесия:

$$M_A = F_{R2,1} \cdot h - M_b = 0, \quad (3.50)$$

тогда

$$N_b = F_{R2,1} \cdot h. \quad (3.51)$$

(Заметим, что здесь «плечо» силы определяется с учетом масштаба, т. е. $h = \bar{h} \cdot \mu_l$.)

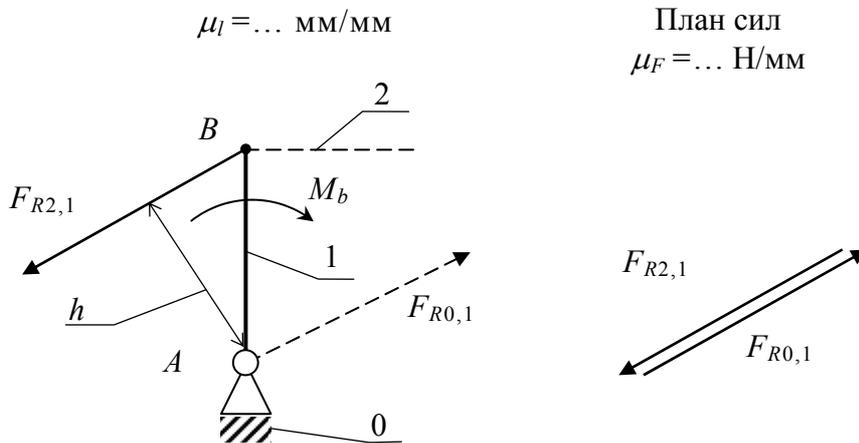


Рис. 3.17. Начальный механизм

Реакция $F_{R0,1}$ в данном случае будет равна и противоположна $F_{R2,1}$.

3.4.3. Пример силового расчета группы 2-го класса третьего вида

Механизмы с подобной структурой применяются, например, в строгальных, долбежных станках.

Пусть это последняя группа шестизвенного механизма строгального станка, на звенья которой действуют сила резания F_5 , сила инерции F_{i5} и сила тяжести F_{G5} ползуна 5 – группа 4–5 [B_{3,4}–П_{4,5}–B_{5,0}] (рис. 3.18,а).

Группа Ассура 4–5 [B_{3,4}–П_{4,5}–П_{5,0}]

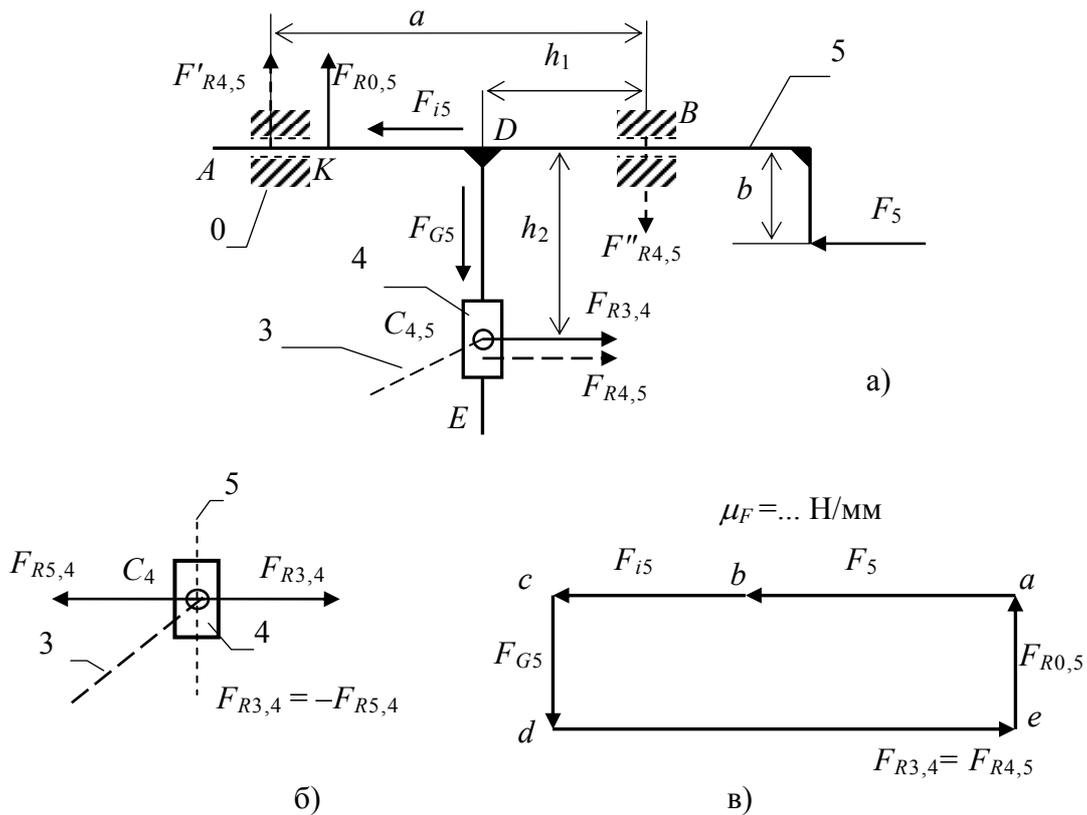


Рис. 3.18. Механизм строгального станка:

а – схема; б – фрагмент нагружения звена 4; в – план сил группы 4–5

Как уже было показано в первом примере, реакция $F_{R3,4}$ будет приложена в точке C шарнира и перпендикулярна направляющей камня ED , а реакция $F_{0,5}$ перпендикулярна AB и приложена в некоторой точке K .

Уравнение равновесия группы 4–5:

$$\sum \bar{F} = \bar{F}_{R3,4} + \bar{F}_5 + \bar{F}_{i5} + \bar{F}_{G5} + \bar{F}_{R0,5} = 0. \quad (3.52)$$

Строим план сил (рис. 3.18,в). Начало плана – точка a , из которой откладываем вектор F_5 , затем F_{i5} , F_{G5} , из точки d проводим направление вектора $F_{R3,4}$, а из начала плана – направление вектора $F_{R0,5}$. В точ-

ке e многоугольник сил замкнулся, следовательно, реакция $F_{R3,4}$ на плане представлена отрезком de , а реакция $F_{R0,5}$ – отрезком ea .

Из условия равновесия камня 4 (рис. 3.18 б)

$$F_{R5,4} = -F_{R3,4}, \quad (3.53)$$

$$F_{R4,5} = -F_{R5,4} = F_{R3,4}. \quad (3.54)$$

Точку приложения реакции $F_{R0,5}$ можно найти из уравнения моментов сил звена 5 (например, относительно точки D).

Но для расчета направляющих и опорных поверхностей ползуна целесообразнее определить реакции в конечных точках A и B направляющих $F'_{R0,5}$ и $F''_{R0,5}$ ($\bar{F}_{R0,5} = \bar{F}'_{R0,5} + \bar{F}''_{R0,5}$).

Рассмотрим звено 5:

$$M_B = -F'_{R0,5} \cdot a + F_{G5} \cdot h_1 + F_{R4,5} \cdot h_2 - F_5 \cdot b = 0, \quad (3.55)$$

отсюда найдем $F'_{R0,5}$;

$$M_A = -F''_{R0,5} \cdot a + F_{G5} \cdot (a - h_1) + F_{R4,5} \cdot h_2 - F_5 \cdot b = 0, \quad (3.56)$$

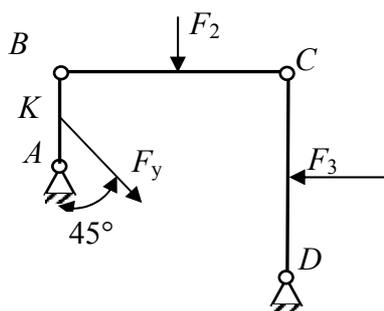
отсюда найдем $F''_{R0,5}$.

ЗАДАЧИ 115–122

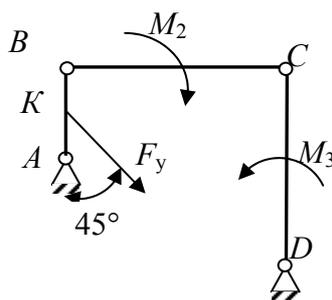
Силовой анализ выполняется методом планов. Силами трения, тяжести и инерции пренебречь. В задачах 115–120 ответы сравнить с задачами 110–114.

115. Определить реакции во всех кинематических парах и величину уравновешивающей силы. $L_{AB}=100$ мм, $F_2=F_3=200$ Н, $L_{BC}=L_{CD}=200$ мм, $AK=50$ мм.

116. Определить реакции во всех кинематических парах и величину уравновешивающей силы. $L_{AB}=100$ мм, $M_2=M_3=200$ Нм, $L_{BC}=L_{CD}=200$ мм, $AK=50$ мм.



К задаче 115



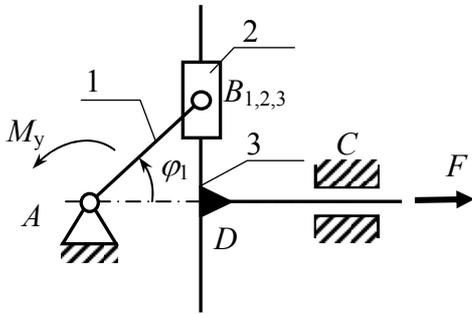
К задаче 116

117. Найти величину уравновешивающего момента, приложенного к звену 1 синусного механизма. Известно: $F=500$ Н, $\varphi_1=45^\circ$, $l_{AB}=250$ мм.

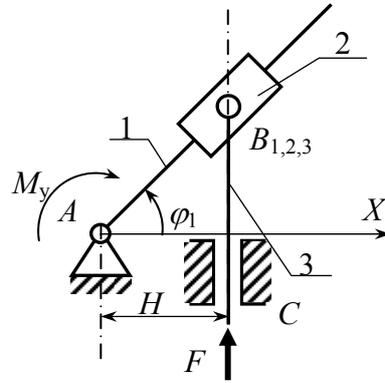
118. В тангенсном механизме найти величину уравнивающего момента. Известно: $F=5$ кН, $\varphi_1=30^\circ$, $H=250$ мм.

119. Найти наибольшую величину уравнивающего момента M_y . Полезная нагрузка постоянна по величине и направлению в течение всего цикла работы (сила $F=1$ кН) и приложена в точке D кривошипного механизма с качающимся ползуном. Известно: $l_{AB}=30$ мм, $l_{AC}=60$ мм, $l_{BD}=120$ мм.

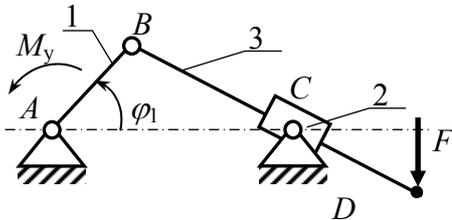
120*. Найти уравнивающий момент M_y , приложенный к звену 1, и мощность P_1 , требуемую для приведения механизма в движение, если: $l_{AB}=100$ мм, $l_{BC}=500$ мм, $\varphi_1=120^\circ$, $\omega_1=1$ сек⁻¹, $F=10$ кН, $l_{BD}=0,5l_{BC}$. В данной задаче силами тяжести кривошипа и ползуна, силами инерции всех звеньев можно пренебречь. Масса шатуна 50 кг. Центр масс шатуна принять в точке D .



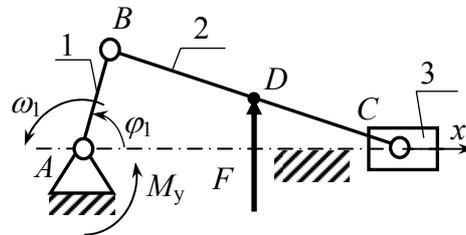
К задаче 117



К задаче 118



К задаче 119



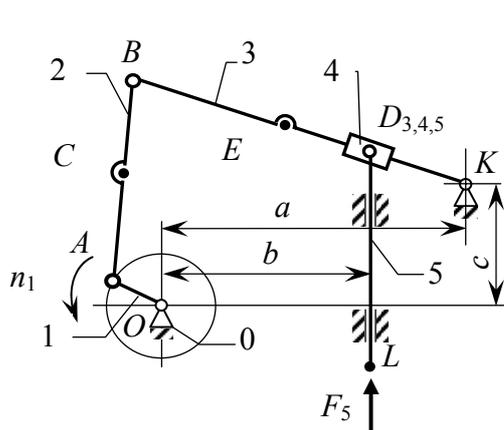
К задаче 120

121. Найти уравнивающий момент M_y , приложенный к звену 1, и мощность P_1 , требуемую для приведения механизма в движение, если:

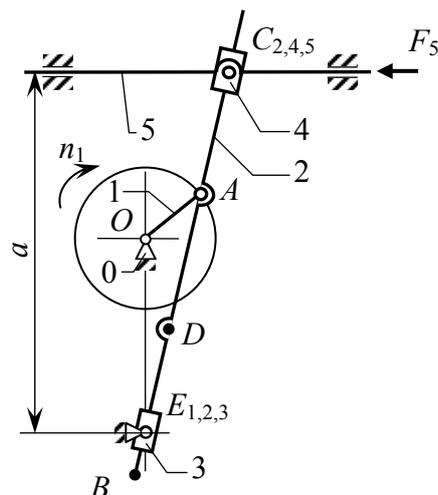
Вариант	a	b	c	l_{OA}	l_{AB}	L_{KB}	l_{AC}	L_{BT}	n_1	F_5
					мм				об/мин	Н
1	720	480	250	160	460	800	$1/3l_{AB}$	$1/3l_{KB}$	150	500
2	630	450	220	140	400	700			120	1000
3	540	380	1900	120	340	600			200	1400

122. Найти уравновешивающий момент M_y , приложенный к звену 1, и мощность P_1 , требуемую для приведения механизма в движение, если:

Вариант	a	l_{OE}	l_{OA}	L_{AD}	L_{AB}	n_1	F_5
	мм					об/мин	Н
1	320	200	60	70	300	200	1000
2	330	220	60	100	320	150	1200
3	340	220	70	100	330	250	1400



К задаче 121



К задаче 122

ЗАДАЧИ 123–126

Силовой анализ выполняется методом планов. Силами трения и массой камня кулисы пренебречь, силы тяжести и инерции учитываются. Расчетные массы звеньев округлить. При решении можно использовать решения задач 87–89 соответственно.

123*. Найти реакции в кинематических парах и уравновешивающий момент M_y , приложенный к звену 1, а также мощность P_1 , требуемую для приведения механизма в движение, если: $m_1 \approx 15$ кг/м, $m_2 \approx 10$ кг/м, $m_3 \approx 20$ кг/м, $m_5 \approx 50W$, где W – полный ход звена, моменты инерции звеньев относительно центра масс определить как $J_S = 0,1ml^2$, кгм², m и l соответствующие масса и длина звена. Центр масс звена 3 – в точке K , звено 2 – линейное однородное.

Вариант	a	b	c	l_{OA}	l_{AB}	l_{AC}	l_{BK}	n_1	F_5
	мм							об/мин	Н
1	400	600	400	150	600	300	620	150	500
2	500	550	500	175	600	200	750	120	1000
3	400	900	500	250	1000	400	780	200	1400

124*. Найти реакции в кинематических парах и уравновешивающий момент M_y , приложенный к звену 1, а также мощность P_1 , требуемую для приведения механизма в движение, если: $m_1 \approx 15$ кг/м, $m_3 \approx 20$ кг/м, $m_4 \approx 10$ кг/м, $m_5 \approx 40W$, где W – полный ход звена, моменты инерции звеньев относительно центра масс определить как $J_S = 0,1ml^2$, кгм², m и l соответствующие масса и длина звена. Центр масс звена 4 – в точке E , звено 3 – линейное однородное.

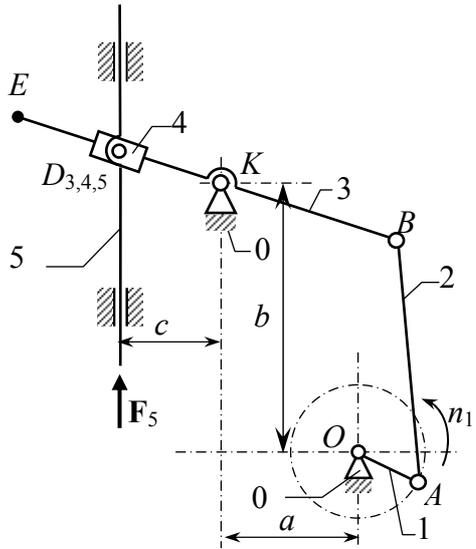
Вариант	a	b	c	l_{OA}	l_{KB}	l_{BD}	l_{BE}	n_1	F_5
	мм							об/мин	Н
1	80	310	550	110	480	250	150	200	1000
2	45	400	640	100	500	350	160	150	1200
3	35	300	580	100	480	270	130	250	1400

125*. Найти реакции в кинематических парах и уравновешивающий момент M_y , приложенный к звену 1, а также мощность P_1 , требуемую для приведения механизма в движение, если: $m_1 \approx 15$ кг/м, $m_2 \approx 10$ кг/м, $m_5 \approx 20$ кг/м, массами m_3 и m_4 пренебречь, моменты инерции звеньев относительно центра масс определить как $J_S = 0,1ml^2$, кгм², m и l соответствующие масса и длина звена. Центр масс звена 2 – в точке E , звено 5 – линейное однородное.

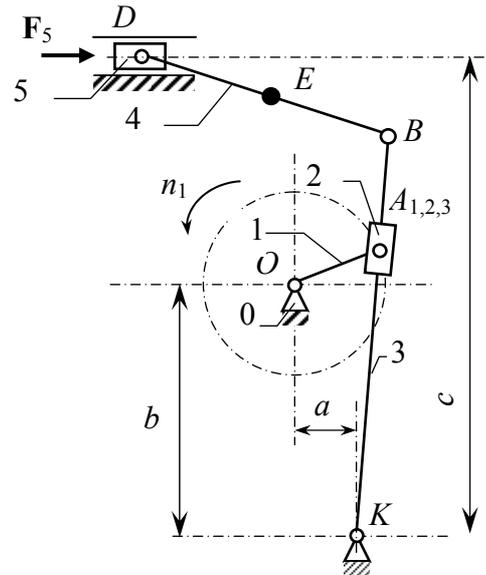
Вариант	a	b	l_{OA}	l_{AB}	l_{AC}	l_{FD}	l_{AE}	n_1	M_5
	мм							об/мин	Н
1	40	180	40	240	120	280	90	300	40
2	80	200	50	240	110	320	90	280	50
3	100	220	80	300	180	320	100	250	60

126. Найти реакции в кинематических парах и уравновешивающий момент M_y , приложенный к звену 1, а также мощность P_1 , требуемую для приведения механизма в движение, если: $m_1 \approx 15$ кг/м, $m_2 \approx 10$ кг/м, $m_3 \approx 20$ кг/м, $m_5 \approx 20$ кг/м, моменты инерции звеньев относительно центра масс определить как $J_S = 0,1ml^2$, кгм², m и l соответствующие масса и длина звена. Центр масс звена 2 – в точке K , звенья 4 и 5 – линейные однородные.

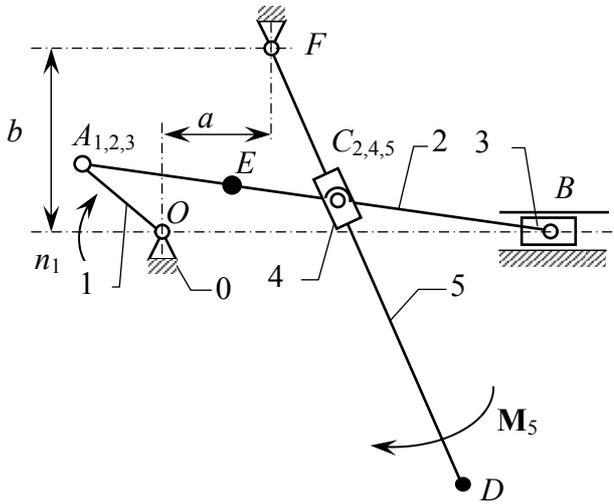
Вариант	a	b	c	d	l_{OA}	l_{AB}	l_{FB}	l_{EC}	n_1	M_5
	мм								об/мин	Н·м
1	570	75	150	110	160	750	530	420	100	1500
2	460	60	120	85	130	630	430	350	120	1300
3	360	50	95	70	100	470	340	280	140	900



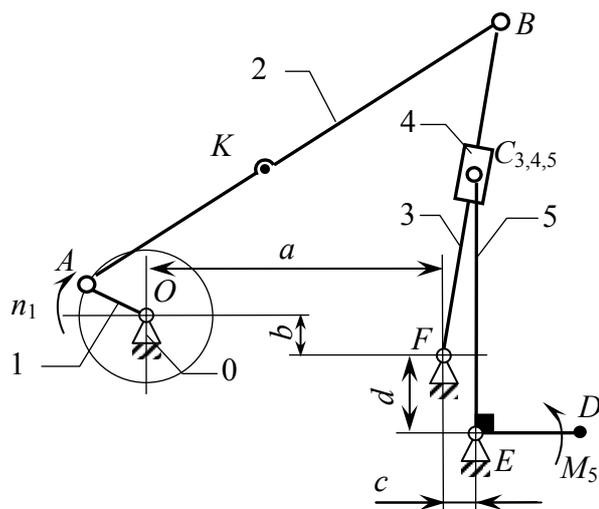
К задаче 123



К задаче 124



К задаче 125



К задаче 126

Контрольные вопросы

1. Перечислите, какие силы действуют в механизмах.
2. Для чего рассчитывается, чему равна и как направлена сила инерции?
3. Для чего рассчитывается, чему равен и как направлен момент сил инерции?
4. Для какой цели необходимо знать реакции во всех кинематических парах?
5. Опишите методы силового расчета механизмов.
6. В чем отличие силового расчета групп Ассура и начального механизма?
7. Чем отличается определение реакций в двухповодковой группе с внешней поступательной и двумя вращательными парами от двухповодковой группы с внутренней поступательной парой?
8. Как направлены реакции в высших и низших кинематических парах?
9. Опишите план силового расчета многозвенного рычажного механизма.
10. Что такое уравновешивающий момент или уравновешивающая сила?
11. Когда целесообразно применять метод «рычага Жуковского»?
12. В чем суть метода «рычага Жуковского»?

ГЛАВА 4. ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ

Изучение закона движения механизма под действием заданных сил является одной из основных задач *динамики* машин.

При решении задач кинематики и кинетостатики механизмов в первом приближении предполагают, что закон движения ведущего звена известен, и обычно принимают скорость его постоянной. В действительности кинематические параметры являются функцией действующих внешних сил и масс подвижных звеньев и определение истинного закона движения механизма (машины) требует эксперимента или специального расчета. При конструировании машины знание истинного закона движения необходимо для учета динамических нагрузок. Скоростные машины, рассчитанные по усредненным нагрузкам, будут работать с перегрузками элементов конструкции, что приведет к снижению ее надежности.

Точное определение действительных перемещений, скоростей, ускорений и времени движения механизма требует рассмотрения второй основной задачи динамики установления закона движения по заданным внешним силам и массам. Для решения этой задачи необходимо составить уравнение движения системы и решить его относительно неизвестного кинематического параметра. При определении закона движения механизма (машины) задача может быть упрощена, если массы всех подвижных звеньев, перемещающихся каждое по своему закону, заменить динамически эквивалентной расчетной массой *звена приведения*, к которому привести также все внешние силы и моменты сил.

4.1. Приведение масс и моментов инерции в механизмах

В динамике механизмов и машин широкое применение находит метод приведения сил и масс для решения задач об определении закона движения механизма, находящегося под действием приложенных к нему сил, с учетом масс звеньев.

Этот метод сводит динамическую задачу о движении всей системы подвижных звеньев механизма к динамической задаче о движении одного его звена, которое называется звеном приведения сил и масс, или одной точки этого звена, называемой точкой приведения сил и масс.

За звено приведения удобно выбирать то звено, которое совершает вращательное движение относительно стойки. Обычно за такое звено выбирают ведущее звено, т. е. звено, по *обобщенной координате* которого проводится исследование движения механизма.

Приведение масс

Замена системы масс подвижных звеньев механизма приведенной массой, сосредоточенной в произвольно выбранной точке, или приведенным моментом инерции звена приведения производится на основе эквивалентности мгновенных значений кинетической энергии.

В общем случае плоскопараллельного движения кинетическая энергия определяется формулой

$$E_i = \frac{1}{2} (m_i v_{S_i}^2 + I_{S_i} \omega_i^2), \quad (4.1)$$

где m_i – масса i -го звена;

v_{S_i} – скорость центра тяжести i -го звена;

I_{S_i} – момент инерции звена относительно центра тяжести;

ω_i – угловая скорость i -го звена.

Общая кинетическая энергия механизма для любого его положения равна кинетической энергии всех подвижных звеньев. Если механизм имеет одну степень подвижности, то его кинетическая энергия может быть выражена через кинетическую энергию приведенной массы m_{Π} или приведенного момента инерции:

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (m_i v_{S_i}^2 + I_{S_i} \omega_i^2) = \frac{1}{2} m_{\Pi} v_{\Pi}^2 = \frac{1}{2} I_{\Pi} \omega_{\Pi}^2, \quad (4.2)$$

где n – число подвижных звеньев;

v_{Π} – скорость точки приведения;

ω_{Π} – угловая скорость звена приведения.

Из уравнения (4.2) получаются выражения для приведенной массы и приведенного момента инерции механизма:

Приведенной массой называется такая условная масса, сосредоточенная в точке приведения, кинетическая энергия E_{Π} которой равняется сумме $\sum E_k$ кинетических энергий тех звеньев, массы которых приводятся к этой точке.

Согласно этому приведенная масса равна

$$m_{\Pi} = \frac{\sum m_k v_k^2 + \sum I_k \omega_k^2}{v_{\Pi}^2}, \quad (4.3)$$

где v_{Π} – скорость точки приведения.

В случае, когда массы звеньев приводятся к звену, совершающему вращательное движение относительно стойки, целесообразно пользоваться понятием приведенного момента инерции I_{Π} этих масс относительно оси вращения звена приведения.

Приведенный момент инерции равен

$$I_{\Pi} = \frac{2\sum E_k}{\omega_{\Pi}^2} = \frac{\sum m_K v_K^2 + \sum I_k \omega_k^2}{\omega_{\Pi}^2}, \quad (4.4)$$

где ω_{Π} – угловая скорость звена приведения. Величины I_{Π} и m_{Π} связаны равенством

$$I_{\Pi} = m_{\Pi} l^2, \quad (4.5)$$

где l – расстояние между точкой приведения и осью вращения звена приведения.

Приведение сил и моментов в механизмах

Приведение сил и моментов в механизмах выполняют из условия эквивалентности элементарных работ или мощностей.

Приведенной силой называют условную силу, которая, будучи приложена к звену приведения:

а) развивает мощность P_{Π} , равную сумме мощностей $\sum P_k$, развиваемых приводимыми силами и моментами.

Величина приведенной силы, направленной по скорости точки приведения, равна

$$F_{\Pi} = \frac{\sum P_k}{v_{\Pi}} = \frac{\sum F_K v_K \cos \alpha_K + \sum M_k \omega_k}{v_{\Pi}}, \quad (4.6)$$

F_K – величина приводимой силы, приложенной к точке K механизма;

v_K – величина скорости точки K ;

α_K – угол между векторами F_K и v_K ;

M_k – момент, приложенный к k -му звену;

ω_k – угловая скорость k -го звена;

v_{Π} – скорость точки приведения.

б) совершает такую же элементарную работу, что и все замещающие ею силы и моменты:

$$F_{\Pi} ds = \sum_{i=1}^n F_i ds_i \cos \alpha_i + \sum_{i=1}^n M_i d\varphi_i,$$

откуда

$$F_{\Pi} = \sum_{i=1}^n F_i \frac{ds_i}{ds} \cos \alpha_i + \sum_{i=1}^n M_i \frac{d\varphi_i}{ds}. \quad (4.7)$$

Приведенным моментом называют момент (пары сил), который, будучи приложен к звену приведения:

а) развивает мощность N_{Π} , равную сумме мощностей $\sum N_k$, развиваемых приводимыми силами и моментами.

Приведенный момент равен

$$M_{\Pi} = \frac{\sum N_k}{\omega_{\Pi}} = \frac{\sum F_K v_K \cos \alpha_K + \sum M_k \omega_k}{\omega_{\Pi}}, \quad (4.8)$$

где ω_{Π} – угловая скорость звена приведения;

б) совершает такую же элементарную работу, что и все замещающие им силы и моменты:

$$M_{\Pi} = \sum_{i=1}^n F_i \frac{ds_i}{d\varphi_{\Pi}} \cos \alpha_i + \sum_{i=1}^n M_i \frac{d\varphi_i}{d\varphi_{\Pi}}. \quad (4.9)$$

Приведенная сила и приведенный момент связаны равенством

$$M_{\Pi} = F_{\Pi} \cdot l, \quad (4.10)$$

где l – расстояние от точки приведения силы до оси вращения звена приведения.

Из формул (4.3), (4.4), (4.6) и (4.8) следует, что приведенная сила и приведенный момент сил зависят от отношения скоростей ведомых звеньев к скорости звена приведения, приведенная масса и приведенный момент инерции зависят от отношения квадратов этих же скоростей, которые, в свою очередь, для конкретного механизма зависят только от его положения, т. е. от обобщенной координаты звена приведения. Поэтому приведенная сила или приведенный момент и приведенная масса или приведенный момент инерции зависят от положения звена приведения, т. е. они являются функцией обобщенной координаты.

В общем случае приведенная масса или момент инерции есть величина переменная и всегда положительная. В механизмах с постоянными передаточными отношениями (например, зубчатые редукторы) приведенный момент инерции постоянен. В практике инженерных расчетов используются три варианта приведения сил и масс:

1. Когда в качестве звена приведения удобно принять поступательно движущееся звено, то определяют приведенную массу и приведенную силу.

2. При выборе вращающегося звена приведения все массы и моменты инерции звеньев заменяют приведенным моментом инерции, а действующие на механизм внешние силы и моменты выражают приведенным моментом сил.

3. Для вращающегося звена приведения можно также рассчитать приведенную массу, сосредоточенную, например, в центре пальца кривошипа. К этой точке следует приложить и приведенные силы механизма.

При использовании приведенной массы для расчета сил инерции механизма учитывают зависимость этой массы от положения системы. Расчетные формулы для определения силы инерции F_{Π} приведенной

массы m_{Π} и инерционного момента M_{Π} приведенного момента инерции I_{Π} механизма имеют вид

$$F_{\Pi} = -\left(\frac{dv}{dt}m_{\Pi} + \frac{1}{2}\frac{dm_{\Pi}}{ds}v_{\Pi}^2\right),$$

$$M_{\Pi} = -\left(\frac{d\omega}{dt}I_{\Pi} + \frac{1}{2}\frac{dI_{\Pi}}{d\varphi}\omega_{\Pi}^2\right).$$

где s_{Π} и v_{Π} — перемещение и скорость точки приведения; φ и ω — угловые перемещение и скорость звена приведения. В некоторых случаях, когда в состав механизма входят гидравлические связи, требуется учитывать переменную приведенную массу $m_{\text{ж}}$ жидкой среды¹

$$m_{\text{ж}} = \psi\rho\sum_{i=1}^k A_i l_i \left(\frac{D}{D_i}\right)^4,$$

здесь ψ — коэффициент потерь в гидросистеме;

ρ — плотность жидкости;

A_i и l_i — площадь сечения и длина рассматриваемого участка трубопровода;

D — диаметр поршня;

D_i — гидравлические диаметры сечения трубопровода;

k — число участков с разным сечением неразрывного объема жидкой среды.

Примеры на приведение сил и масс

Пример 1. Для кривошипно-ползунного механизма (рис. 4.1,а) найти приведенную к оси шарнира B силу F_{Π} , перпендикулярную линии AB , от силы $F_3=1000$ Н, приложенной к звену 3 (поршню), а также приведенную к той же точке массу m_{Π} от масс всех звеньев механизма.

Расчет провести для положения звена приведения, когда угол $\varphi_1=45^\circ$. Размеры звеньев и положения центров масс их: $l_{AB} = 65$ мм, $l_{BC} = 320$ мм, координата l_{BS_2} центра масс звена 2 равна $l_{BS_2} = 60$ мм, центр масс звена 1 лежит на оси шарнира A . Масса звена 2 $m_2 = 0,4$ кг, момент инерции звена 2 относительно оси, проходящей через его центр масс, равен $I_2 = 6 \cdot 10^{-3}$ кгм², масса звена 3 равна $m_3 = 0,5$ кг, момент инерции звена 1 относительно оси, проходящей через центр масс, $I_1 = 12 \cdot 10^{-3}$ кгм².

¹ Л.В. Петрокас. Вопросы теории и расчета кулачковых механизмов литейных машин низкого давления. Тр. МИХМ, т. XVII, М., 1958.

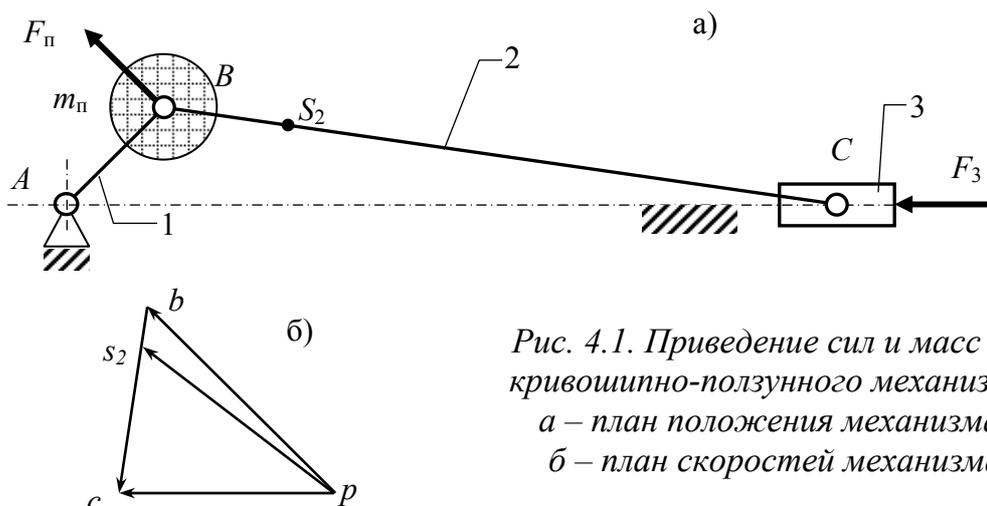


Рис. 4.1. Приведение сил и масс для кривошипно-ползунного механизма:
 а – план положения механизма;
 б – план скоростей механизма

Решение. 1) Строим план положения механизма (рис. 4.1,а) в масштабе $\mu_l = 0,005$ м/мм.

2) Строим план скоростей механизма (рис. 4.1,б) по уравнению

$$\vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{v}_{C/B}.$$

Следует заметить, что, поскольку приведенная сила зависит только от отношения скоростей точек механизма, нет необходимости задавать действительные скорости движения звеньев, достаточно построить условный план скоростей (все направления и пропорции соблюдены) – масштаб может быть выбран следующим образом: скорость точки B механизма, известная из закона движения ведущего звена механизма, будет отображаться на плане отрезком pb длиной XXX мм, например, 25 мм.

3) Приведенная сила определяется по формуле (4.5):

$$F_{\pi} = \frac{P_3}{v_B} = \frac{F_3 \cdot v_C}{v_B} = \frac{F_3 \cdot pc \cdot \mu_v}{pb \cdot \mu_v} = F_3 \frac{pc}{pb} = 1000 \frac{20}{25} = 800 \text{ Н},$$

где $pc=20$ мм, $pb=25$ мм – отрезки на плане скоростей.

Приведенную массу можно определить, используя формулу (4.3):

$$m_{\pi} = \frac{2(E_1 + E_2 + E_3)}{v_B^2}.$$

Здесь E_1, E_2, E_3 – кинетические энергии звеньев 1, 2 и 3, которые могут быть записаны следующим образом:

$$E_1 = \frac{I_1 \omega_1^2}{2} = \frac{I_1 v_B^2}{2l_{AB}^2},$$

$$E_2 = \frac{I_2 \omega_2^2}{2} + \frac{m_2 v_{S2}^2}{2} = \frac{I_1 v_B^2}{2l_{AB}^2} + \frac{m_2 v_{S2}^2}{2},$$

$$E_3 = \frac{m_3 v_C^2}{2}.$$

В последних выражениях угловые скорости звеньев выражены через линейные скорости характерных точек этих звеньев. Заменяя далее в выражениях для m_{Π} , E_1 , E_2 , E_3 линейные скорости через отрезки планов скоростей, получим

$$m_{\Pi} = \frac{I_1}{l_{AB}^2} + \frac{I_2}{l_{BC}^2} \left(\frac{bc}{pb} \right) + m_2 \left(\frac{ps_2}{pb} \right)^2 + m_3 \left(\frac{pc}{pb} \right)^2.$$

Можно заметить, что приведенная масса не зависит непосредственно от значений скоростей, а только от отношения скоростей точек механизма к скорости точки приведения, следовательно, приведенная масса является функцией положения механизма. В последней формуле это нашло отражение в том, что сами скорости заменены отрезками плана скоростей.

С плана скоростей определены длины отрезков, пропорциональных скоростям: $pb=50$ мм, $bc=36$ мм, $ps_2=46$ мм, $pc=40$ мм.

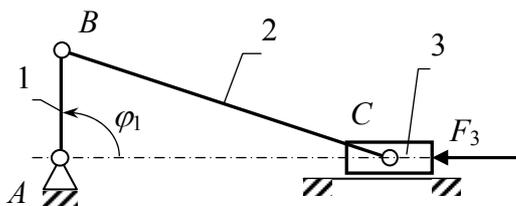
Подставляя численные значения, получим:

$$\begin{aligned} m_{\Pi} &= \frac{0,012}{0,065^2} + \frac{0,006}{0,32^2} \left(\frac{36}{50} \right)^2 + 0,4 \left(\frac{46}{50} \right)^2 + 0,5 \left(\frac{40}{80} \right)^2 = \\ &= 2,84 + 0,03 + 0,339 + 0,32 = 3,529 \text{ кг}. \end{aligned}$$

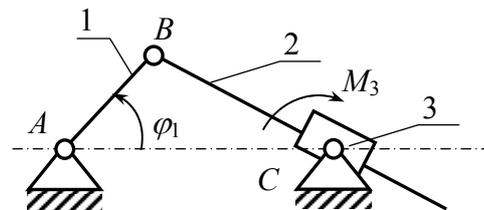
ЗАДАЧИ 127–134

127. Определить приведенный к валу A звена 1 момент M_{Π} от силы $F_3=1000$ Н, приложенной к ползуну 3, и приведенный к этому же валу момент инерции I_{Π} от массы ползуна 3. $m_3=4$ кг, $L_{AB}=100$ мм, $L_{BC}=400$ мм, в двух положениях: $\varphi_1=90^\circ$ и $\varphi_1=0^\circ$.

128. Определить приведенный к валу A звена 1 момент M_{Π} от момента $M_3=10$ Нм, приложенного к коромыслу 3, и приведенный к этому же валу момент инерции I_{Π} от массы качающегося ползуна 3, если его момент инерции относительно оси C $I_C=0,04$ кгм², $L_{AB}=100$ мм, $L_{AC}=300$ мм в двух положениях: $\varphi_1=90^\circ$ и $\varphi_1=180^\circ$.



К задаче 127



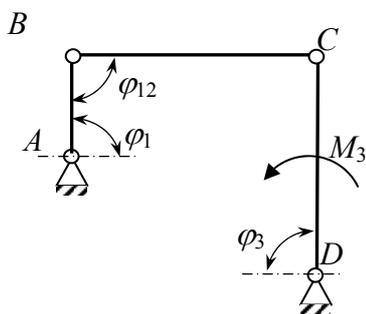
К задаче 128

129. Определить приведенный к валу A звена 1 момент M_{Π} от момента $M_3 = 40$ Нм, приложенного к коромыслу 3, и приведенный к этому же валу момент инерции I_{Π} от массы коромысла, если момент инерции коромысла относительно оси D равен $I_D = 0,0016$ кгм², $L_{AB} = 100$ мм, $L_{BC} = L_{CD} = 400$ мм, углы $\varphi_1 = \varphi_{12} = \varphi_3 = 90^\circ$.

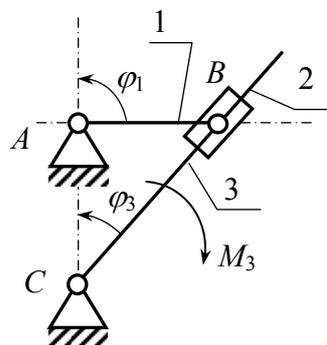
130. Определить приведенный к валу A звена 1 момент M_{Π} от момента $M_3 = 10$ Нм, приложенного к кулисе 3, и приведенный к этому же валу момент инерции I_{Π} от массы кулисы, если момент инерции кулисы относительно оси C равен $I_D = 0,0016$ кгм², $L_{AB} = 100$ мм, $L_{BC} = L_{CD} = 400$ мм, углы $\varphi_1 = 90^\circ$, $\varphi_3 = 30^\circ$.

131. Определить и построить графики в зависимости от угла φ_1 приведенного к валу A звена 1 момента M_{Π} от силы $F_3 = 20$ Н, приложенной к звену 3, и приведенного к этому же валу момента инерции I_{Π} от массы звена 3. $m_3 = 0,4$ кг, $L_{AB} = 50$ мм.

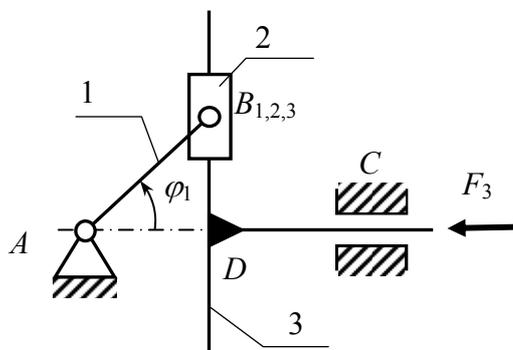
132. Для механизма муфты Ольдгейма определить и построить графики в зависимости от угла φ_1 приведенного к валу A звена 1 момента M_{Π} от момента $M_3 = 5$ Нм, приложенного к звену 3, и приведенного к этому же валу момента инерции I_{Π} от массы звена 3, если момент инерции кулисы относительно оси C равен $I_C = 0,001$ кгм², $L_{AC} = 100$ мм.



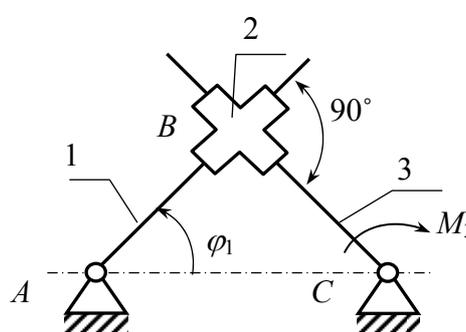
К задаче 129



К задаче 130



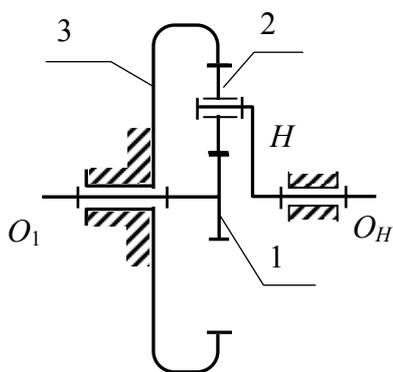
К задаче 131



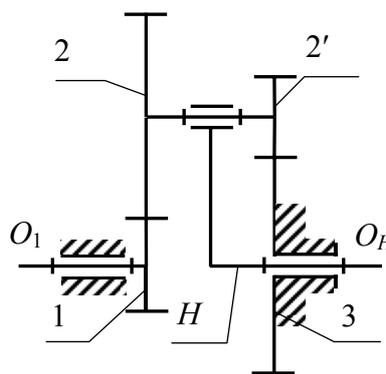
К задаче 132

133. Для одноступенчатого планетарного редуктора определить приведенный к валу O_1 колеса 1 момент M_n от момента $M_H = 5$ Нм, приложенного к водилу H , и приведенный к этому же валу момент инерции I_n от массы водила, если момент инерции системы водило-сателлиты относительно оси O_H равен $I_H = 0,04$ кгм², числа зубьев $z_1 = z_2 = 20$, $z_3 = 60$.

134. Для планетарного редуктора определить приведенный к валу O_1 колеса 1 момент инерции I_n от масс всех звеньев, если центры масс всех звеньев лежат на их осях вращения, $I_1 = 0,001$ кгм², $I_2 = 0,004$ кгм², $I_2' = 0,001$ кгм², $I_H = 0,018$ кгм², массы сателлитов $m_2 = 0,4$ кг, $m_2' = 0,05$ кг, модуль зацепления $m = 10$ мм, числа зубьев $z_1 = z_2' = 20$, $z_2 = z_3 = 40$.



К задаче 133



К задаче 134

4.2. Общее уравнение движения

Режимы движения машины. Для большинства механизмов различают три стадии движения: пуска (разбега), установившегося движения и выбега. В первом периоде скорость движения ведущего звена растет от нуля до максимума и, следовательно, работа движущих сил должна быть больше работы сил сопротивления ($A_n > A_c$), в последнем скорость снижается до нуля и работа движущих сил меньше работы сил сопротивления ($A_n < A_c$). При установившемся движении работа движущих сил за полный цикл по абсолютной величине равна работе сил сопротивления ($A_n = A_c$), однако за отдельные части цикла эти работы могут быть неодинаковы ($A_n \neq A_c$).

Уравнение движения Лагранжа. Для составления уравнений движения механизмов можно применить дифференциальные уравнения движения Лагранжа второго рода в обобщенных координатах. В качестве последних должны приниматься независимые параметры, определяющие положение механизма, к примеру, углы поворота ведущих звеньев или перемещения некоторых их точек. Число уравнений Ла-

гранжа будет равно числу степеней подвижности механизма, т. е. числу ведущих звеньев.

Уравнение движения удобно представить в следующей форме:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E}{\partial q_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = Q_i, \quad (4.11)$$

где E – кинетическая энергия механизма, зависящая от масс его звеньев, скоростей ведущих звеньев и их положения; q_i – обобщенная координата; \dot{q}_i – обобщенная скорость; Π – потенциальная энергия системы; Q_i – обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате q_i .

Третий член в уравнении Лагранжа $\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}$ учитывает действие на механизм сил тяжести, сил упругости звеньев и др. Этими силами можно пренебречь, когда их влияние на закон движения невелико (в случае малого веса деталей по сравнению с другими действующими внешними силами и большой жесткости звеньев). В дальнейших расчетах будем считать, что $\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0$, тогда уравнение Лагранжа примет вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E}{\partial q_i} = Q_i. \quad (4.12)$$

Для механизмов с пружинами и другими подобными звеньями (например, регуляторы скорости) необходимо учитывать изменение энергии деформации.

В случае вращательного движения звена приведения уравнение Лагранжа примет вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial E}{\partial \varphi} = M_{\Pi}, \quad (4.13)$$

а если в качестве звена приведения принять ползун в неподвижной направляющей, то

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{s}} \right) - \frac{\partial E}{\partial s} = F_{\Pi}, \quad (4.14)$$

Уравнение движения механизма в форме уравнения моментов и уравнения сил. Для практического применения уравнение (4.13) удобно преобразовать.

Учитывая (4.2) и принимая во внимание, что приведенный момент инерции I_{Π} в общем случае переменный и является функцией координаты φ , после дифференцирования получаем

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}} = I_{\Pi} \dot{\varphi},$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \frac{d}{dt} (I_{\Pi} \dot{\varphi}) = I_{\Pi} \ddot{\varphi} + \frac{dI_{\Pi}}{d\varphi} \dot{\varphi}^2,$$

$$\frac{dE}{d\varphi} = \frac{1}{2} \frac{dI}{d\varphi} \dot{\varphi}^2.$$

После подстановки этих величин в уравнение (4.13) получим

$$I_{\Pi} \varepsilon + \frac{1}{2} \frac{dI_{\Pi}}{d\varphi} \omega^2 = M_{\Pi}. \quad (4.15)$$

Уравнение (4.15) называется *дифференциальным уравнением движения механизма в форме уравнения моментов*.

Если в качестве звена приведения принято звено, совершающее поступательное движение, то по аналогии с выполненным выше преобразованием уравнению (4.14) для приведенной силы можно придать вид

$$m_{\Pi} a + \frac{1}{2} \frac{dm_{\Pi}}{ds} v^2 = F_{\Pi}. \quad (4.16)$$

Уравнение (4.16) называется *дифференциальным уравнением движения механизма в форме уравнения сил*.

В уравнениях (4.15) и (4.16) $M_{\Pi} = M_{\text{д}} - M_{\text{с}}$ и $F_{\Pi} = F_{\text{д}} - F_{\text{с}}$ могут быть известными функциями положения механизма (например, угла поворота φ или перемещения s) $M_{\text{д}}(\varphi), \dots$; скорости движения ($M_{\text{д}}(\omega), \dots$); времени ($M_{\text{д}}(t), \dots$).

4.3. Определение истинной скорости движения звена приведения

Аналитический метод. Для установления истинного закона движения звена приведения необходимо проинтегрировать уравнения (4.15) и (4.16). Если моменты движущих сил $M_{\text{д}}$ и сил сопротивления $M_{\text{с}}$ являются функциями разных переменных $M_{\Pi} = M_{\Pi}(\varphi, \omega t)$, то уравнения движения (4.15) и (4.16) являются нелинейными дифференциальными. Общих методов решения таких уравнений не существует, в связи с чем чаще всего нельзя получить решение в конечных функциях. Поэтому задача по интегрированию этих уравнений решается приближенным методом.

В случаях, когда $M_{\text{д}} = M_{\text{д}}(\varphi)$ и $M_{\text{с}} = M_{\text{с}}(\varphi)$, можно представив разности приведенных моментов $M_{\text{д}} - M_{\text{с}} = M_{\Pi}$ и приведенных сил $F_{\text{д}} - F_{\text{с}} = F_{\Pi}$, определить значения истинной угловой (или линейной) скорости звена приведения по следующим зависимостям:

$$\omega_i = \sqrt{\frac{2}{I_{\pi i}} \int_{\varphi_0}^{\varphi_i} (M_{\text{д}} - M_{\text{с}}) d\varphi + \frac{I_{\pi 0}}{I_{\pi i}} \omega_0^2}, \quad (4.17)$$

$$v_i = \sqrt{\frac{2}{m_{\pi i}} \int_{s_0}^{s_i} (F_{\text{д}} - F_{\text{с}}) ds + \frac{m_{\pi 0}}{m_{\pi i}} v_0^2}, \quad (4.18)$$

где ω_i и v_i – угловая и линейная скорости в i -м положении звена приведения; $I_{\pi 0}$ и $m_{\pi 0}$ – приведенный момент инерции и приведенная масса звена приведения в начальном положении; ω_0 и v_0 – угловая и линейная скорости звена приведения в начальном положении.

Этими зависимостями удобно пользоваться, если исследование машины начинается с момента пуска ее в ход, т. е. когда $\omega_0 = 0$ ($v_0 = 0$).

Для определения времени t движения механизма можно воспользоваться зависимостью:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}, \text{ или } v = \frac{ds}{dt}, \text{ откуда}$$

$$\int_{t_0}^{t_i} dt = t_i - t_0 = \int_{\varphi_0}^{\varphi_i} \frac{d\varphi}{\omega(\varphi)} \text{ или } \int_{t_0}^{t_i} dt = t_i - t_0 = \int_{s_0}^{s_i} \frac{ds}{v(s)} \text{ и}$$

$$t_i = t_0 + \int_{\varphi_0}^{\varphi_i} \frac{d\varphi}{\omega(\varphi)}, \quad (4.19)$$

или

$$t_i = t_0 + \int_{s_0}^{s_i} \frac{ds}{v(s)}. \quad (4.20)$$

В частном случае, когда приведенные моменты инерции постоянны (что характерно, например, для зубчатых механизмов с круглыми колесами), уравнения движения (4.15) могут быть решены в квадратурах:

$$1. M_{\pi} = M_{\text{д}}(\omega) - M_{\text{с}}(\omega) = I_{\pi} \frac{d\omega}{dt},$$

$$\int_{t_0}^{t_i} dt = I_{\pi} \int_{\omega_0}^{\omega_i} \frac{d\omega}{M_{\text{д}}(\omega) - M_{\text{с}}(\omega)}, \text{ откуда}$$

$$t_i = t_0 + I_{\pi} \int_{\omega_0}^{\omega_i} \frac{d\omega}{M_{\text{д}}(\omega) - M_{\text{с}}(\omega)}.$$

$$2. M_{\pi} = M_{\text{д}}(t) - M_{\text{с}}(t) = I_{\pi} \frac{d\omega}{dt},$$

$$\int_{\omega_0}^{\omega_i} d\omega = \frac{1}{I_{\Pi}} \int_{t_0}^{t_i} [M_{\text{д}}(t) - M_{\text{с}}(t)] dt, \text{ откуда}$$

$$\omega_i = \omega_0 + \frac{1}{I_{\Pi}} \int_{t_0}^{t_i} [M_{\text{д}}(t) - M_{\text{с}}(t)] dt.$$

Графоаналитический метод. Если приведенная сила или приведенный момент сил, зависящие от положения механизма $M_{\Pi} = M_{\Pi}(\varphi)$, $F_{\Pi} = F_{\Pi}(s)$ заданы в виде графиков, то уравнения движения при установившемся движении механизма удобнее представить в форме уравнения кинетической энергии

$$A_{M_{\text{д}}} - A_{M_{\text{с}}} = \frac{I_{\Pi 2} \omega_2^2}{2} - \frac{I_{\Pi 1} \omega_1^2}{2} \quad (4.21)$$

или

$$A_{F_{\text{д}}} - A_{F_{\text{с}}} = \frac{m_{\Pi 2} v_2^2}{2} - \frac{m_{\Pi 1} v_1^2}{2}, \quad (4.22)$$

где $A_{F_{\text{д}}}$ и $A_{M_{\text{д}}}$ – работы приведенных движущих сил и моментов на рассматриваемом перемещении (далее будем обозначать $A_{\text{д}}$); $A_{F_{\text{с}}}$ и $A_{M_{\text{с}}}$ – работы приведенных сил и моментов сопротивления (далее – $M_{\text{с}}$); $I_{\Pi 1}$ и $I_{\Pi 2}$; $m_{\Pi 1}$ и $m_{\Pi 2}$ – соответственно приведенные моменты инерции и приведенные массы в начале и конце рассматриваемого перемещения; ω_1 и ω_2 , v_1 и v_2 – угловые скорости звена приведения и линейные скорости точки приведения, соответствующие началу и концу рассматриваемого промежутка времени.

Используя указанные уравнения, можно графическим методом найти скорость ведущего звена в любом положении кривошипа.

Рассмотрим этот метод на примере некоторого условного механизма. График изменения приведенного момента в зависимости от угла поворота звена приведения можно получить, определив предварительно значение этих моментов для каждого положения в соответствии с уравнениями (4.8), используя теорему Жуковского. В виде графика удобно также представить изменение приведенного момента инерции $I_{\Pi} = I_{\Pi}(\varphi)$ согласно уравнению (4.4) (рис. 4.2,а).

Проинтегрировав (возможно графически) кривые изменения приведенных моментов (движущих и сопротивления), можно получить графики изменения работ сил движущих $A_{\text{д}} = A_{\text{д}}(\varphi)$ и сил сопротивления $A_{\text{с}} = A_{\text{с}}(\varphi)$ в функции угла поворота при установившемся движении.

Исключив из графиков $\Delta E(\varphi)$ и $I_{\Pi}(\varphi)$ аргумент φ , получают функциональную зависимость кинетической энергии от приведенного момента инерции $\Delta E = \Delta E(I_{\Pi})$ – диаграмму Виттенбауэра (рис. 4.2,в).

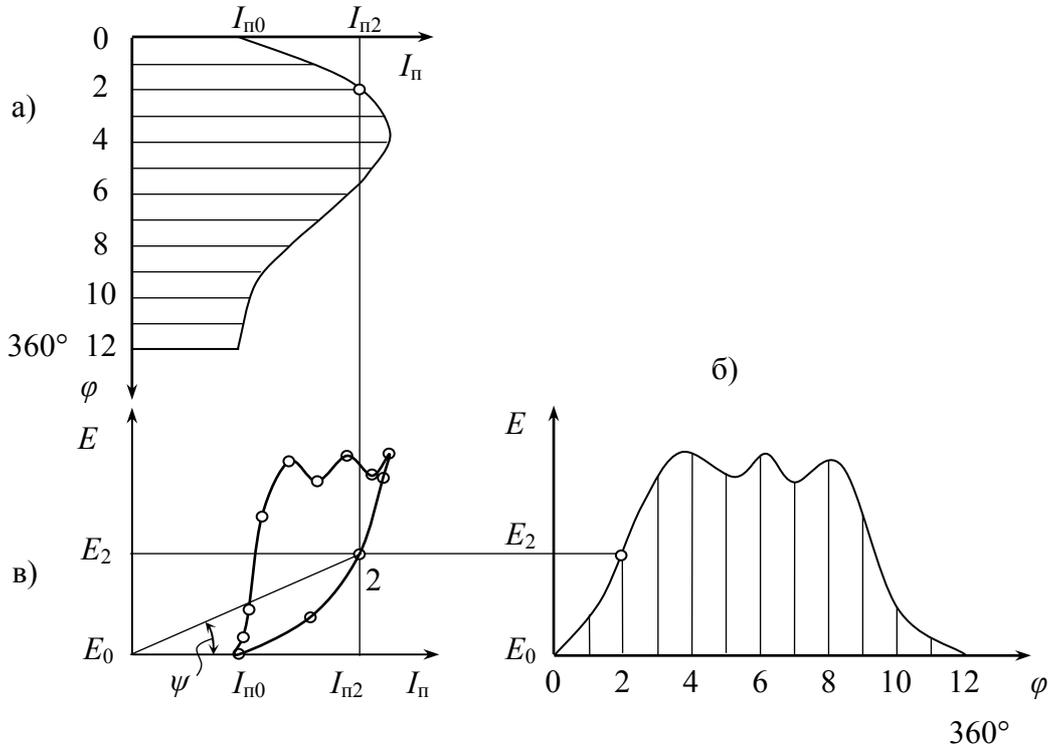


Рис. 4.2. К определению истинной скорости звена приведения:
 а – момент инерции; б – кинетическая энергия; в – диаграмма Виттенбауэра

Поскольку $E = \frac{1}{2} I_{\Pi} \omega_{\Pi}^2$, то

$$\omega = \sqrt{2 \frac{E}{I_{\Pi}}}. \quad (4.23)$$

Учитывая масштабы построения графиков

$$\omega = \sqrt{2 \frac{\mu_E}{\mu_I} \operatorname{tg} \psi}, \quad (4.24)$$

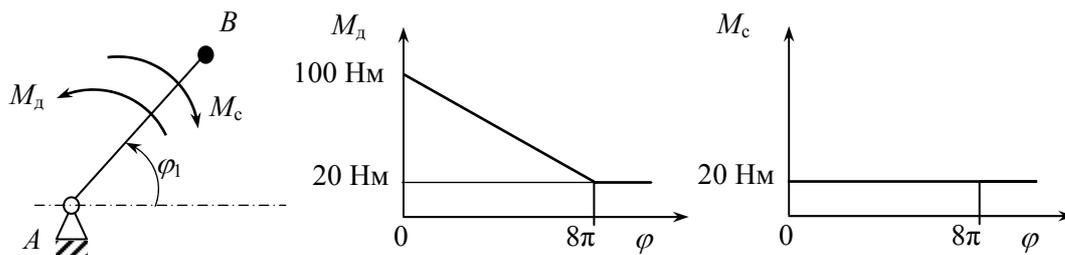
здесь ψ – угол, образованный между осью абсцисс (момента инерции I_{Π}) и прямой, соединяющей интересующую точку (2) и начало координат. Таким образом, из диаграммы Виттенбауэра можно определить величину истинной скорости звена приведения в любом положении механизма.

ЗАДАЧИ 135–143

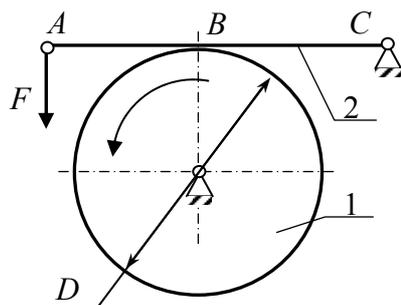
135. Силы и массы машины приведены к звену AB . Момент движущих сил изменяется согласно графику $M_d(\varphi)$, момент сил сопротивления – согласно графику $M_c(\varphi)$, приведенный момент инерции $I_{\pi} = \text{const} = 0,314 \text{ кгм}^2$. При $\varphi = 0$ угловая скорость звена приведения $\omega = 0$. Определить угловую скорость звена при его установившемся движении.

136. Маховик 1 тормозится стержнем 2, прижимаемым к ободу маховика силой $F = 20 \text{ Н}$, перпендикулярной стержню 2 (AD). Угловая скорость ω маховика перед началом торможения равна $\omega = 100 \text{ с}^{-1}$. Пренебрегая трением в подшипниках вала маховика, определить, сколько оборотов сделает маховик до полной остановки. $D = 0,2 \text{ м}$, $L_{AB} = L_{BD}$, коэффициент трения обода маховика о стержень $f = 0,2$.

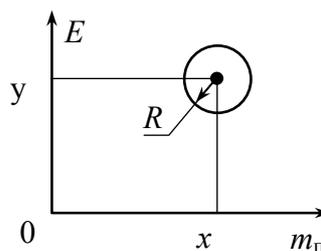
137. В установившемся движении машинного агрегата диаграмма Виттенбауэра представляет собой окружность радиуса $R = 20 \text{ мм}$. Координаты центра O этой окружности $x = 90 \text{ мм}$, $y = 80 \text{ мм}$. Определить максимальную и минимальную скорости движения, если масштабы по осям координат диаграммы Виттенбауэра равны $\mu_E = 20 \text{ Нм/мм}$, $\mu_m = 0,5 \text{ кг/мм}$.



К задаче 135



К задаче 136



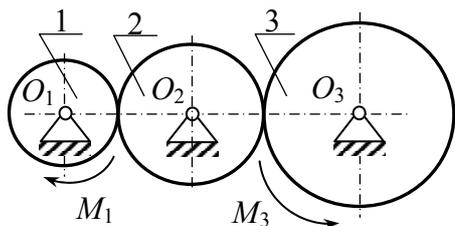
К задаче 137

138. К зубчатым колесам 1 и 3 редуктора приложены моменты $M_1 = 8 \text{ Нм}$ и $M_3 = 10 \text{ Нм}$. Моменты инерции колес равны $I_1 = 0,01 \text{ кгм}^2$, $I_2 = 0,0225 \text{ кгм}^2$, $I_3 = 0,04 \text{ кгм}^2$, числа зубьев колес $z_1 = 20$, $z_2 = 30$, $z_3 = 40$. В начальный момент времени угловая скорость ω_1 первого колеса равна нулю. Определить угловую скорость ω_1 и угловое ускорение ε_1 колеса 1 через $0,5 \text{ с}$ после начала движения.

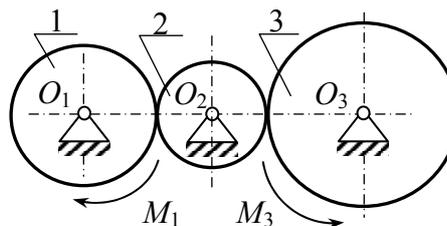
139. К зубчатым колесам 1 и 3 редуктора приложены моменты $M_1=8$ Нм и $M_3=10$ Нм. Моменты инерции колес равны $I_1=0,01$ кгм², $I_2=0,064$ кгм², $I_3=0,04$ кгм², числа зубьев колес $z_1=20$, $z_2=16$, $z_3=40$. В начальный момент времени угловая скорость ω_1 первого колеса равна нулю. Определить угловую скорость ω_1 и угловое ускорение ε_1 колеса 1 через 0,5 с после начала движения.

140. К валу A кривошипа AB синусного механизма приложен момент сопротивления $M_c=62$ Нм, а к звену 3 – движущая сила $F_3=1000$ Н. В положении, когда угол $\varphi_1=45^\circ$, угловая скорость $\omega_1=10$ с⁻¹. Момент инерции кривошипа AB относительно оси A равен $I_1=0,0025$ кгм², масса звена 3 равна $m_3=0,5$ кг, длина кривошипа $L_{AB}=0,1$ м. Определить угловое ускорение кривошипа AB в заданном положении.

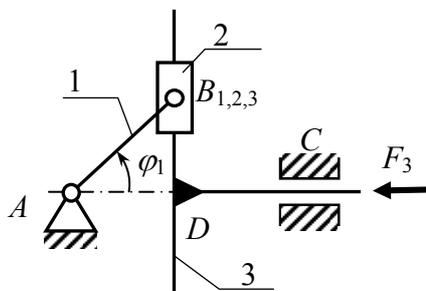
141. Определить число n (об/мин) установившегося движения машинного агрегата, состоящего из двигателя, механическая характеристика которого определяется зависимостью $M_d=100-0,1n$ Нм, и рабочей машины, приведенный к валу двигателя момент сопротивления которой определяется равенством $M_c=0,000001n^2$.



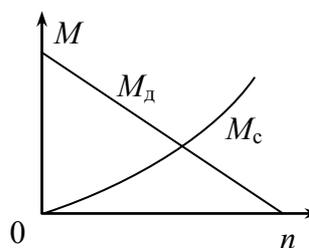
К задаче 138



К задаче 139



К задаче 140

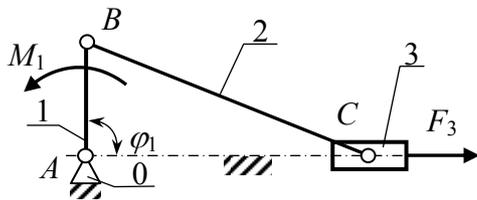


К задаче 141

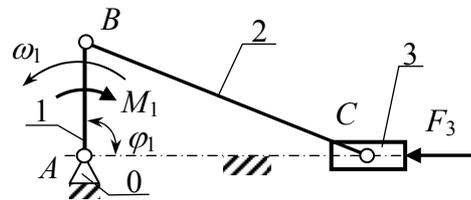
142. К ползуну кривошипно-ползунного механизма приложена сила $F_3=100$ Н, а к кривошипу AB – момент $M_1=9$ Нм. Вращение кривошипа начинается из положения $\varphi_1=90^\circ$. Длина кривошипа $L_{AB}=0,1$ м, масса ползуна 3 равна $m_3=1,0$ кг. Пренебрегая массами кривошипа и шатуна, определить, с каким угловым ускорением начнет двигаться кривошип AB .

143. К валу A кривошипа AB кривошипно-ползунного механизма приложен момент сопротивления $M_c=60$ Нм, а к звену 3 – движущая сила

$F_3=500$ Н. В положении, когда угол $\varphi_1=90^\circ$, угловая скорость $\omega_1=50$ с⁻¹. Момент инерции кривошипа AB относительно оси A равен $I_1=0,002$ кгм², масса звена 3 равна $m_3=0,5$ кг, длина кривошипа $L_{AB}=0,1$ м, длина шатуна $L_{BC}=0,2$ м. Пренебрегая массой шатуна 2, определить угловое ускорение ε_1 кривошипа AB в заданном положении.



К задаче 142



К задаче 143

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте определение приведенной массы и приведенного момента инерции механизма. Что такое звено приведения?
2. Расскажите методику расчета приведенной массы и приведенного момента инерции.
3. Почему величина приведенной массы или момента инерции механизма не зависит от скорости точки или звена приведения?
4. В каких механизмах приведенный момент инерции постоянен, а в каких зависит от положения механизма?
5. В каких случаях целесообразно пользоваться методом приведения масс?
6. Что такое уравнение движения машины? Какие формы уравнения движения вы знаете?
7. Запишите уравнение движения машины в энергетической форме для периодов: а) разгона, б) установившегося движения, в) останова.
8. Запишите уравнение движения в дифференциальной форме.
9. Как рассчитать действительное время срабатывания механизма?
10. Что такое диаграмма Виттенбауэра? Какие параметры работы механизма можно определить с ее помощью?

ЧАСТЬ 2. СИНТЕЗ МЕХАНИЗМОВ

ГЛАВА 5. СИНТЕЗ МЕХАНИЗМОВ С НИЗШИМИ КИНЕМАТИЧЕСКИМИ ПАРАМИ

Плоские рычажные механизмы, содержащие лишь низшие кинематические пары, находят широкое применение в машиностроении вследствие ряда присущих им достоинств.

При метрическом синтезе (проектировании) механизмов необходимо произвести выбор кинематической схемы и определить ее основные размеры. Последние рассчитываются по заданным условиям работы, определяемым в результате изучения механизмируемого технологического процесса.

При проектировании новых механизмов приходится учитывать условия геометрии, кинематики, динамики, технологичности, надежности и т. п.

Удовлетворение всех этих условий представляет весьма сложную задачу, которая требует различного подхода к механизмам и особой методики их расчета. Поэтому единой теории синтеза механизмов не существует, и кинематические схемы проектируют по отдельным группам механизмов (рычажных, кулачковых, зубчатых и др.), а также по различным условиям их работы.

Основной задачей синтеза является осуществление заданного движения рабочего органа механизма. Решение этой задачи многовариантно, т. е. одну и ту же форму движения можно осуществить механизмами различных типов.

Конструктор обычно проектирует несколько вариантов схем и после их всестороннего изучения и сравнения выбирает наилучший – оптимальный для заданных условий.

Научные методы выбора оптимального варианта схемы механизма из их множества весьма сложны. Методы определения метрических параметров (основных размеров звеньев) по уже выбранной кинематической схеме развиты в достаточной степени.

Большое распространение вследствие их надежности, технологичности и способности передавать большие усилия получили рычажные механизмы, сочленения звеньев которых образуют низшие кинематические пары. Точная обработка плоскостей и цилиндрических поверхностей элементов низших пар возможна на обыкновенных металлорежу-

щих станках, что приводит к малой стоимости изготовления деталей этих механизмов.

Простейшие четырехзвенные механизмы имеют четыре звена, одно из которых служит стойкой (на схемах рис. 5.1 подштриховано, не пронумеровано).

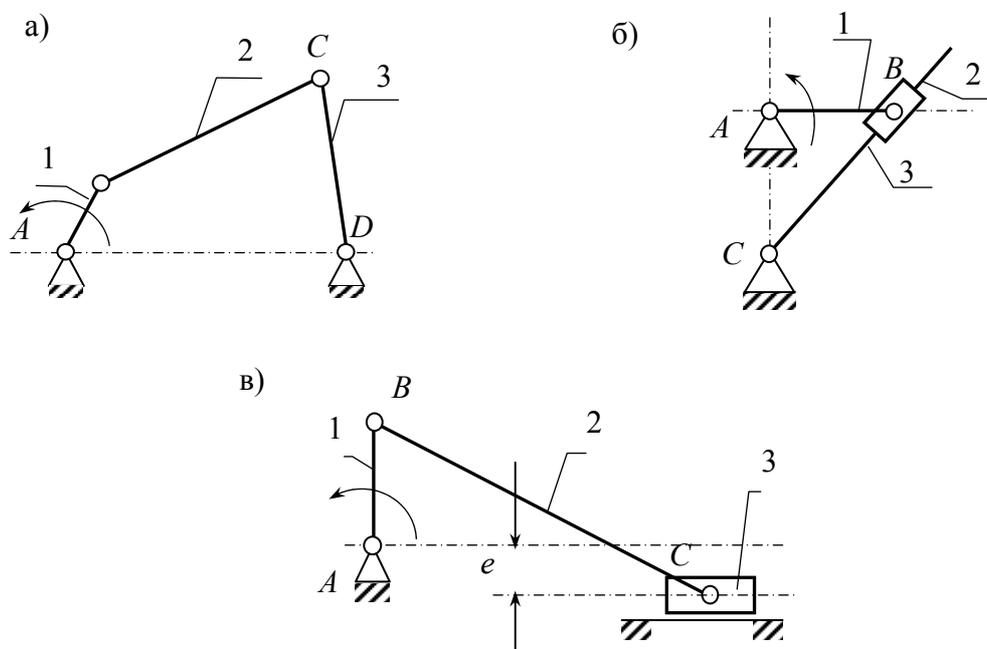


Рис. 5.1. Четырехзвенные механизмы

Эти механизмы могут преобразовывать равномерное вращательное движение кривошипа в неравномерное вращательное, возвратно-поступательное или в сложное плоское движение шатуна 2, а также преобразовывать поступательное движение во вращательное. Наиболее распространены шарнирный четырехзвенник (рис. 5.1,а), кривошипно-кулисный механизм (рис. 5.1,б) и кривошипно-ползунный механизм (рис. 5.1,в).

Многозвенные рычажные механизмы с числом звеньев более четырех позволяют осуществить такие законы движения ведомых звеньев, которые нельзя получить в четырехзвенных механизмах. Часто применяют *шестизвенные* механизмы, воспроизводящие требуемую закономерность движения рабочего органа или обеспечивающие необходимые условия передачи мощности. Эти механизмы могут быть образованы последовательным или параллельным присоединением двух двухпроводковых групп или же одной трехпроводковой группы Ассур к начальному механизму, например к кривошипу.

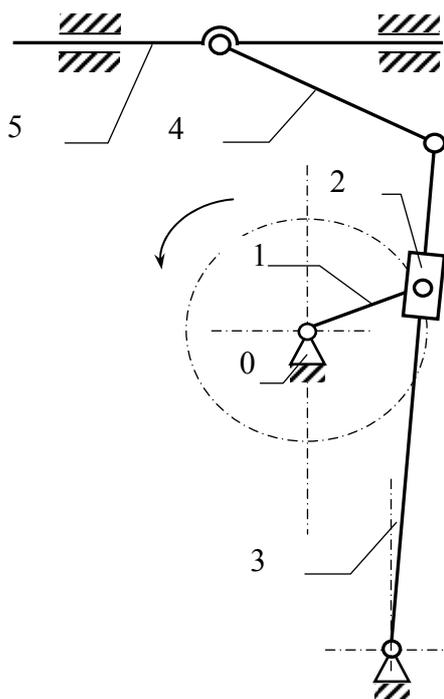


Рис. 5.2. Шестизвенный механизм

В частности, шестизвенный кривошипно-кулисный механизм (рис. 5.2) применяется в металлорежущих станках в качестве привода главного движения резания. Такая система дает значительную разницу в средних скоростях при прямом и обратном ходах ведомого ползуна 5.

Метрический синтез рычажных механизмов относится к числу наиболее сложных проблем теории механизмов и машин.

Задачи синтеза этих механизмов две:

- 1) проектирование по положениям звеньев;
- 2) проектирование по воспроизведению непрерывной функции на заданном отрезке.

Вторую задачу обычно ставят при синтезе функциональных механизмов приборов и систем автоматического контроля и управления. Сущность этих задач можно пояснить следующим примером.

В рычажном механизме связь между ведущим звеном AB (рис. 5.3) и ведомым CD можно осуществить либо кинематической цепью, либо одним шатуном BC . Независимую координату φ ведущего звена отсчитывают от оси I , координату ψ ведомого звена – от оси II . Положения осей I и II относительно линии центров AD определяются постоянными углами α и β . Зависимость $\psi(\varphi)$ есть функция положения механизма. Форма задания этой функции зависит от назначения механизма.

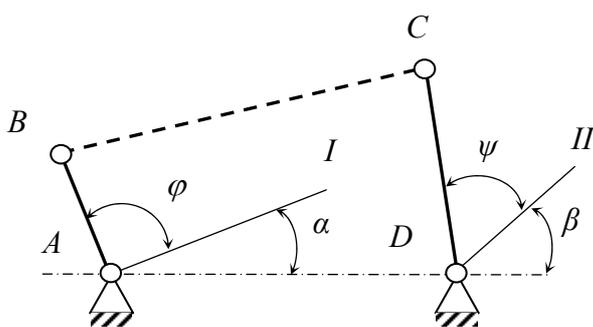


Рис. 5.3. К синтезу механизмов

При синтезе по положениям звеньев параметры схемы определяют согласно следующим условиям: задан ряд точек с координатами ψ и φ , определяющими положения ведущего и ведомого звеньев. Требуется, чтобы график $\psi(\varphi)$ проходил через все заданные точки.

Ход графика между точками иногда уточняют заданием передаточной функции $f'(\varphi) = \frac{d\psi}{d\varphi}$ или ее производной $f''(\varphi) = \frac{d^2\psi}{d\varphi^2}$.

Синтез механизма по положениям звеньев с математической точки зрения представляет задачу интерполирования с наперед заданными узлами U . При синтезе по воспроизведению непрерывной функции на заданном отрезке задают функцию $F(\varphi)$, непрерывную на отрезке $\varphi_i - \varphi_k$, которая должна быть осуществлена механизмом. Вследствие неизбежных производственных погрешностей при изготовлении звеньев и монтаже, а также свойств самой схемы механизм воспроизводит заданную функцию с некоторыми отклонениями. Поэтому функцию положения механизма $f(\varphi)$ приближают на отрезке $\varphi_i - \varphi_k$ с требуемой точностью к заданной функции $F(\varphi)$ методами теории приближения функций, в том числе методом интерполирования.

В практике машиностроения научные методы синтеза механизмов применяют еще недостаточно, однако их внедрение все более расширяется, чему способствует применение быстродействующих счетных машин. При практическом синтезе задают определенные условия, которым должен соответствовать проектируемый механизм. К таким условиям метрического синтеза, часто встречаемым в конструкторской практике, относятся следующие: условие существования кривошипа; осуществление заданной траектории точки исполнительного звена; условия передачи сил звеньями механизма; отношение времени прямого и обратного ходов механизма; ход или размах движения ведомого звена; величины и закономерности изменения скоростей (или ускорений) и др. Эти условия рассмотрены ниже.

Условие существования кривошипа в шарнирном четырехзвеннике выражает теорема Грасгофа: «*Наименьшее звено является кривошипом, если сумма длин наименьшего и любого другого звена меньше суммы длин остальных двух звеньев*».

Рассмотрим шарнирный четырехзвенник (рис. 5.4).

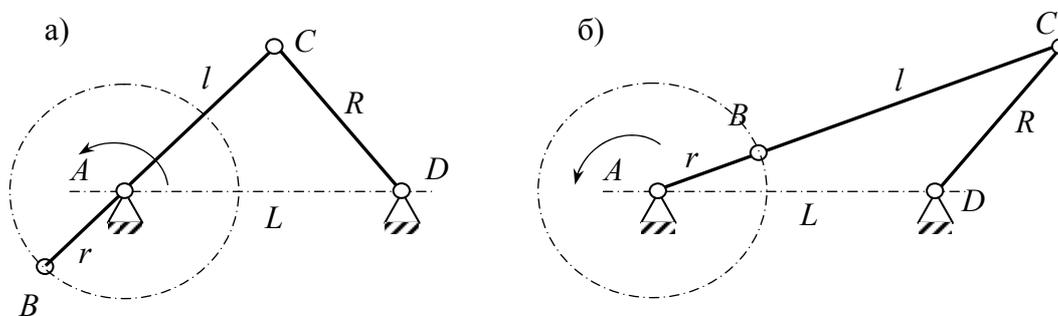


Рис. 5.4. Шарнирный четырехзвенник. К теореме Грасгофа

Если кривошип AB – ведущее звено, то за один цикл механизм имеет два крайних положения, в которых кривошип оказывается на одной прямой с шатуном BC (рис. 5.4,а и 5.4,б). Так как длина любой стороны треугольника меньше суммы длин двух других его сторон, то, согласно рис. 5.4,а (где r , l , R и L – длины кривошипа, шатуна, коромысла и стойки), имеют место неравенства:

$$R < (l - r) + L \quad \text{и} \quad L < (l - r) + R,$$

откуда $r + R < l + L$, $r + L < l + R$, $r + l < R + L$.

В том случае, когда сумма длин кривошипа и шатуна равна сумме длин коромысла и стойки

$$r + l = R + L,$$

получается двухкривошипный механизм, в котором ведомое звено CD также будет проворачиваться. Если сумма длин наименьшего и наибольшего звеньев больше суммы длин остальных звеньев, то четырехшарнирник оказывается двухкоромысловым, т. е. ни одно звено не может совершать полный оборот.

В кривошипно-ползунном механизме (см. рис. 5.1,в) условия существования кривошипа определяются очевидным неравенством

$$r + e \leq l,$$

где e — эксцентриситет.

Траектории точек звеньев. В тех случаях, когда исполнительным звеном служит шатун BC , характеристикой движения являются траектории его точек – шатунные кривые.

На рис. 5.5 показаны траектории точек B , E , C , F и G шатуна шарнирного четырехзвенника.

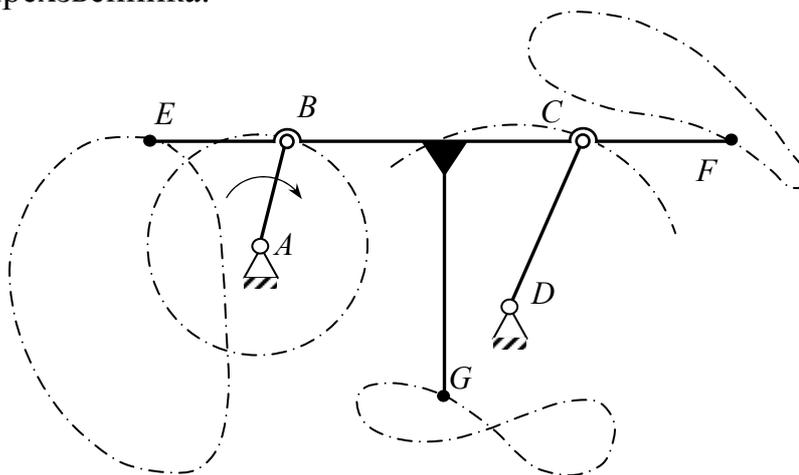


Рис. 5.5. Шатунные кривые

Очерченные штрихпунктирной линией *шатунные кривые* иллюстрируют многообразие их форм даже в одном механизме. Движение по траекториям, описанным шатунными кривыми, применяют для рабочих

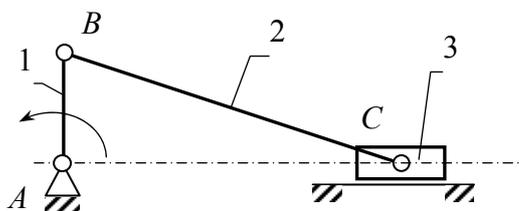
процессов, например для перемешивания теста, ворошения сена, перемещения фильма и т. д. В последнем случае требуется, чтобы шатунная кривая на некотором участке проходила по прямой, в других случаях необходимо, чтобы часть шатунной кривой проходила по дуге окружности. Для решения таких задач метрического синтеза академиком П.Л. Чебышевым была разработана теория особых функций – полиномов Чебышева и создан ряд прямолинейно направляющих механизмов – «прямил».

Разнообразие условий синтеза механизмов (например, по двум заданным положениям коромысла и кривошипа, по предельной величине угла давления на ведомое звено, по заданному размаху движения и длине коромысла, и т.д.) определяет большое разнообразие применяемых методов решения задачи проектирования. В данном пособии ограничимся задачами о существовании кривошипа и некоторыми задачами о положениях.

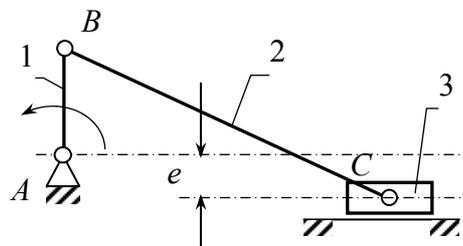
ЗАДАЧИ 144–153

144. Для центрального кривошипно-ползунного механизма найти минимальную длину l_{BC} шатуна BC , при которой звено AB может совершать полный оборот вокруг своей оси A .

145. Для дезаксиального кривошипно-ползунного механизма найти минимальную длину BC , при которой звено AB может совершать полный оборот вокруг своей оси A .



К задаче 144

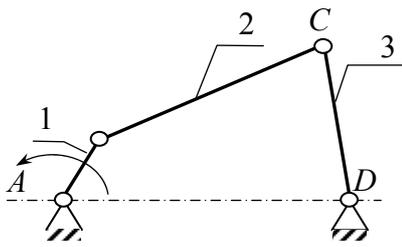


К задаче 145

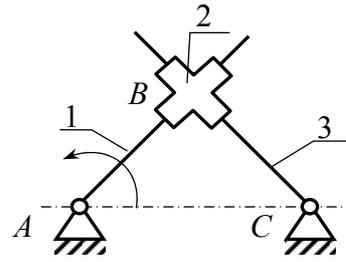
146. В механизме шарнирного четырехзвенника известны длины всех его звеньев $l_{AB}=20$ мм, $l_{BC}=100$ мм, $l_{CD}=60$ мм, $l_{AD}=120$ мм. Ответить, сможет ли звено AB совершать полный оборот вокруг своей оси A ?

147. В механизме шарнирного четырехзвенника известны длины всех его звеньев $l_{AB}=20$ мм, $l_{BC}=90$ мм, $l_{CD}=40$ мм, $l_{AD}=120$ мм. Ответить, существует ли в этом механизме кривошип?

148. Для кулисного механизма муфты Ольдгейма указать, на какой угол повернется кулиса 3 при повороте звена 1 на угол 360° ?



К задачам 146, 147



К задаче 148

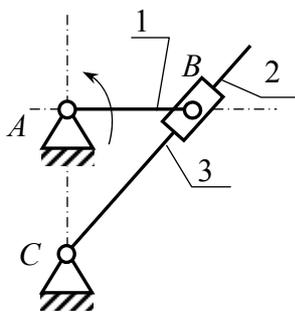
149. Для кулисного механизма Витворта указать, какой размер должно иметь звено AB , чтобы кулиса 3 не проворачивалась бы на полный оборот при повороте звена AB на 360° ?

150. В кулисном механизме Витворта размер звена AB больше расстояния AC . Указать, на какой угол повернется кулиса 3, если звено AB совершит полный поворот вокруг своей оси A ?

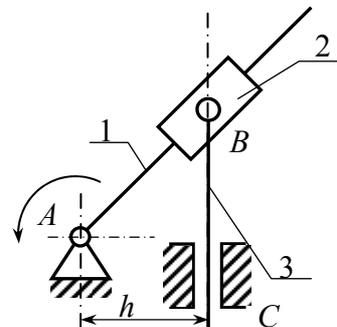
151. Указать, может ли существовать кривошип в тангенсном механизме, если размер h не равен нулю?

152. Спроектировать механизм шарнирного четырехзвенника, у которого коромысло CD в своих крайних положениях наклонено к стойке AD под углами $\varphi_3(1)=45^\circ$ и $\varphi_3(2)=120^\circ$. Длина стойки AD равна $l_{AD}=100$ мм, длина коромысла CD равна $l_{CD}=75$ мм. Определить длины кривошипа AB и шатуна BC .

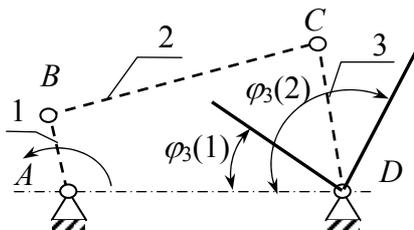
153. Для механизма шарнирного четырехзвенника найти максимальный угол размах коромысла CD , если длины звеньев $l_{AB}=30$ мм, $l_{BC}=l_{AD}=100$ мм, $l_{CD}=60$ мм.



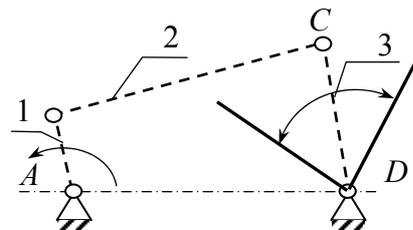
К задачам 149, 150



К задаче 151



К задаче 152



К задаче 153

Контрольные вопросы

1. Какова основная задача метрического синтеза кинематической схемы механизма?
2. В чем сущность проектирования рычажных механизмов по положениям звеньев и по воспроизведению непрерывной функции на заданном отрезке?
3. В чем заключаются достоинства и недостатки аналитического и геометрического методов синтеза рычажных механизмов?
4. В чем состоят достоинства и недостатки рычажных механизмов с одними низшими кинематическими парами?
5. Сформулируйте теорему Грасгофа для шарнирного четырехзвенника.
6. Что называют углом давления и как он влияет на работу рычажного механизма?
7. В чем заключаются преимущества шестизвенных рычажных механизмов по сравнению с четырехзвенными?
8. Начертите шестизвенный рычажный механизм, образованный последовательным присоединением двух групп Ассура.

ГЛАВА 6. СИНТЕЗ МЕХАНИЗМОВ С ВЫСШИМИ КИНЕМАТИЧЕСКИМИ ПАРАМИ

6.1. Проектирование трехзвенных зубчатых передач

Общие сведения о структуре и кинематике зубчатых передач считаем известными для читателя (см. учебники по теории механизмов и машин, а также гл. 1 и 2 данного пособия). В этой главе приводятся примеры на определение размеров трехзвенных зубчатых механизмов с цилиндрическими колесами эвольвентного профиля. Во всех случаях считается, что нарезание колес осуществляется методом обкатки.

Режущий инструмент определяется следующими параметрами:

1) модулем m (выбирается по ГОСТу 9563–88, измеряется в миллиметрах);

2) высотой головки зуба $h_f = fm$, где f – коэффициент высоты головки, который может быть равен $f=1$ (полнопрофильный зуб) или $f=0,8$ (укороченный зуб);

3) профильным углом α_0 (существует несколько стандартов – $\alpha_0=14,5^\circ, 20^\circ, 22,5^\circ, 25^\circ$). Наибольшее распространение (основной стандарт) получил угол $\alpha_0=20^\circ$;

4) радиальным зазором между головкой зуба одного колеса и основанием ножки зуба другого колеса $c=c^*m$, где $c^*=0,25$ при $f=1$ и $c^*=0,3$ при $f=0,8$.

Основным методом изготовления эвольвентных зубчатых колес, особенно ответственных быстроходных силовых передач, является нарезание методом обкатки (огибания) инструментом реечного типа или долбяком. Одним из важнейших достоинств этого метода нарезания является то, что при нарезании зубчатого колеса со смещением режущего инструмента (рейки, долбяка) изменяются размеры зуба – высота, толщина, изменяется межосевое расстояние, изменяются такие показатели зацепления, как удельное скольжение, удельное давление, а это означает, что может быть повышена изгибная и контактная прочность зубьев, повышена износостойкость, можно «вписаться» в заданное межосевое расстояние (коробки скоростей), а также влиять на другие параметры.

При нарезании зубчатых колес с числом зубьев менее 17 методом обкатки инструментом реечного типа происходит *подрезание ножки зуба*, которого можно избежать, применяя смещение инструмента (нарезанные таким образом колеса называют *исправленными* или *корригированными*). Относительный сдвиг (смещение) инструмента обозначают x

или ξ (исчисляется в долях модуля зацепления), абсолютный сдвиг инструмента

$$X = x m \quad (X = \xi m).$$

Для исключения подрезания ножки зубьев на шестерне минимальное значение коэффициента смещения принимают равным

$$x = \frac{17 - z}{17},$$

где z – нарезаемое число зубьев.

Применение смещения инструмента при нарезании используют не только для устранения подрезания, не только на колесах с малым числом зубьев, но и в других случаях:

а) для вписывания в заданное межосевое расстояние (как правило, при отличии расчетного межосевого расстояния некорректированной пары от требуемого межосевого расстояния не более чем на 1...1,5 величины модуля) – в данном случае может применяться и отрицательное смещение для колеса с достаточно большим числом зубьев;

б) для оптимизации геометрии зубчатой пары по условию максимального повышения контактной прочности зубьев;

в) для оптимизации геометрии зубчатой пары по условию максимального повышения прочности зубьев на изгиб;

г) для оптимизации геометрии зубчатой пары по условию наибольшего повышения износостойкости и сопротивления заеданию.

Если сумма коэффициентов смещения для шестерни и колеса равна нулю $x_1 + x_2 = 0$, пару называют *равносмещенной*, в противном случае – *неравносмещенной*.

Выбор значений коэффициентов смещения для пары зубчатых колес выбирают в зависимости от требований, предъявляемых к передаче, по таблицам В.Н. Кудрявцева, ЦКБР (Центральное конструкторское бюро редукторостроения) [9, 12, 14] или по блокирующим контурам [13]. В приложении П1 приведена таблица рекомендуемых коэффициентов смещения по критериям наибольшего повышения: контактной прочности, прочности на изгиб, износостойкости и сопротивления заеданию.

Геометрические параметры зубчатой пары, нарезанной со смещением инструмента (столбец значений А) и без смещения (столбец значений Б), а также формулы для расчета приведены в табл. 6.1 с численными значениями, соответствующими паре $z_1=14, z_2=32$.

Для выполнения расчетов геометрических параметров эвольвентного зацепления в приложении П2 приведена таблица значений эвольвентной функции.

Таблица 6.1

**Геометрические параметры внешнего эвольвентного зацепления
цилиндрических прямозубых колес,
нарезанных инструментом реечного типа**

ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ					
ПАРАМЕТРЫ			Обозначение	Величина	
Число зубьев	шестерни	колеса	Z_1	14	
			Z_2	32	
Модуль зацепления, мм			m	10	
Исходный контур по ГОСТу 13755–68	Угол профиля, град		α	20	
	Коэффициент высоты головки		h_a^*	1	
	Коэффициент радиального зазора		c^*	0,25	
	Коэффициент радиуса кривизны переходной кривой		ρ_f^*	0,4	
Коэффициент смещения (из условия максимального повышения износостойкости [12])			А	x_1	+0,62
				x_2	+0,68
			Б	x_1	0
				x_2	0
Расчет					
№	Наименование параметра	Формула и вычисления	А	Б	
1	2	3	4	5	
1	Передаточное число	$U = Z_2 / Z_1$	2,286		
2	Эвольвентный угол в точке на делительной окружности, рад	$\text{inv } \alpha = 0,014904$	$\text{tg } \alpha = 0,3639$		
			$\text{cos } \alpha = 0,9396$		
3	Эвольвентный угол в точке на начальной окружности, рад	$\text{inv } \alpha_w = \frac{2(x_1 + x_2)}{Z_1 + Z_2} \text{tg } \alpha + \text{inv } \alpha =$	0,03547	0,01490	
4	Угол зацепления, град	$\alpha_{wA} = 26,362^\circ = 26^\circ 21' 40''$	$\text{tg } \alpha_w$	0,4956	0,3639
		$\alpha_{wB} = \alpha = 20^\circ$	$\text{cos } \alpha_w$	0,8960	0,9396
5	Делительный шаг зубьев, мм	$p = \pi \cdot m$	31,416		
6	Основной шаг зубьев, мм	$p_b = p \cdot \text{cos } \alpha$	29,518		
7	Начальный шаг зубьев, мм	$p_w = p_b / \text{cos } \alpha_w$	32,944	31,416	

1	2	3	4	5
8	Межосевое расстояние, мм	$a_w = \frac{m(Z_2 + Z_1)}{2} \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_w}$	241,192	230
9	Радиус делительной окружности, мм	$r_1 = 0,5Z_1 \cdot m =$	70	
		$r_2 = 0,5Z_2 \cdot m =$	160	
10	Радиус основной окружности, мм	$r_{b1} = r_1 \cdot \cos \alpha =$	65,772	
		$r_{b2} = r_2 \cdot \cos \alpha =$	150,336	
11	Радиус начальной окружности, мм	$r_{w1} = r_{b1} / \cos \alpha_w$	73,406	70
		$r_{w2} = r_{b2} / \cos \alpha_w$	167,786	160
12	Радиус окружности впадин, мм	$r_{f1} = r_1 - m(h_a^* + C^* - x_1)$	63,7	57,5
		$r_{f2} = r_2 - m(h_a^* + C^* - x_2)$	154,3	147,5
13	Радиус окружности вершин, мм	$r_{a1} = a_w - r_{f2} - C^* m$	84,319	80
		$r_{a2} = a_w - r_{f1} - C^* m$	174,919	170
14	Угол профиля на окружности вершин, град	$\alpha_{a1} = \arccos(r_{b1}/r_{a1})$	38,73°	34,7°
		$\text{tg } \alpha_{a1}$	0,8020	0,6924
		$\alpha_{a2} = \arccos(r_{b2}/r_{a2})$	30,744°	27,831°
		$\text{tg } \alpha_{a2}$	0,5948	0,5279
15	Эвольвентный угол в точке на окружности вершин, град	$\text{inv } \alpha_{a1}$	0,126045	0,086804
		$\text{inv } \alpha_{a2}$	0,058211	0,042186
16	Толщина зуба по дуге делительной окружности, мм	$S_1 = m(0,5\pi + 2x_1 \text{tg } \alpha)$	20,220	15,708
		$S_2 = m(0,5\pi + 2x_2 \text{tg } \alpha)$	20,657	15,708
17	Толщина зуба по дуге основной окружности, мм	$S_{b1} = 2r_{b1}[(S_1/2r_1) + \text{inv } \alpha]$	20,960	16,719
		$S_{b2} = 2r_{b2}[(S_2/2r_2) + \text{inv } \alpha]$	23,690	19,240
18	Толщина зуба по дуге начальной окружности, мм	$S_{w1} = 2r_{w1}[(S_1/2r_1) + \text{inv } \alpha - \text{inv } \alpha_w]$	18,184	15,708
		$S_{w2} = 2r_{w2}[(S_2/2r_2) + \text{inv } \alpha - \text{inv } \alpha_w]$	14,760	15,708
19	Толщина зуба по дуге окружности вершин, мм	$S_{a1} = 2r_{a1}[(S_1/2r_1) + \text{inv } \alpha - \text{inv } \alpha_{a1}]$	5,614	6,448
		$S_{a2} = 2r_{a2}[(S_2/2r_2) + \text{inv } \alpha - \text{inv } \alpha_{a2}]$	7,432	7,414
20	Высота зуба, мм	$h = r_a - r_f$	20,619	22,5
21	Глубина захода, мм	$h_3 = h - C^* m$	18,119	20,0
22	Показатель заострения зуба	S_{a1}/m	0,561	0,645
		S_{a2}/m	0,743	0,741

1	2	3	4	5
23	Коэффициент воспринимаемого смещения	$Y = \frac{Z_2 + Z_1}{2} \left(\frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_w} - 1 \right)$	1,1192	0,0
24	Воспринимаемое смещение	$Y_m = Y \cdot m$	11,192	0,0
25	Коэффициент уравнивающего смещения	$\Delta Y = x_1 + x_2 - Y$	0,205	0,0
26	Радиус кривизны переходной кривой, мм	$\rho_f = \rho_f^* \cdot m$	4,0	4,0
27	Радиальный зазор, мм	$C = C^* m$	2,5	2,5
28	Коэффициент перекрытия	аналитически $\varepsilon = \frac{Z_1(\operatorname{tg} \alpha_{a1} - \operatorname{tg} \alpha_w)}{2\pi} + \frac{Z_2(\operatorname{tg} \alpha_{a2} - \operatorname{tg} \alpha_w)}{2\pi}$	1,19	1,57
	по чертежу (при графическом построении зацепления)	$\varepsilon = L_{P_1P_2} / P_b$ $L_{P_1P_2}$, мм ($L_{P_1P_2}$ – длина активной части линии зацепления)		

Чтобы убедиться в правильности выполненных расчетов, рекомендуем сделать ряд проверок:

а) сумма $r_{w1} + r_{w2}$ позиции 11 должна быть равна a_w позиции 8 (с той же степенью точности);

б) разность $a_{wA} - a_{wB}$ позиции 8 должна быть равна результату Y_m в позиции 24;

в) сумма толщины зубьев по начальной окружности $S_{w1} + S_{w2}$ позиции 18 должна быть равна шагу P_w по начальной окружности в позиции 7 (для А и Б);

г) высота зуба h (позиция 20) должна быть одинакова по расчетам, т. е. $r_{a1} - r_{f1}$ или $r_{a2} - r_{f2}$ (поэтому в позиции 20 индексы колес не указаны);

д) разность $h - h_3$ (позиции 20 и 21) должна быть одинаковой и равной величине радиального зазора C^*m (позиция 27);

е) с увеличением радиуса толщина зуба колеса с внешним зацеплением уменьшается, поэтому в этих расчетах должно соблюдаться условие

$$S_b > S > S_w > S_a;$$

ж) при правильно выбранных коэффициентах смещения не должно быть заострения зубьев, показатель заострения $S_a/m \geq 0,2$ (позиция 22);

з) для положительного зацепления $\alpha_w > \alpha$. Поэтому коэффициент перекрытия $\varepsilon_A < \varepsilon_B$ (и, как правило, он не должен быть менее 1,1...1,2). Заметим еще, что коэффициент перекрытия для прямозубых колес при $\alpha = 20^\circ$ и $h_a^* = 1$ не может быть больше 1,98, что соответствует теоретически возможному.

При проектных расчетах необходимо обратить внимание на межосевое расстояние корригированной пары (позиция 8А). Полученное значение межосевого расстояния следует округлить до ближайшего целого значения (в ряде случаев допускается до половины), пересчитать по формулам позиций 8, 4, 3 величину суммарного смещения и выбрать новую пару величин x_1 и x_2 для обеспечения технологичности и ремонтпригодности проектируемого редуктора в дальнейшем.

В качестве примера решения подобных задач см. табл. 6.1.

ЗАДАЧИ 154–160

154. Нарезание зубьев на колесе производилось без сдвига инструментальной рейки, модуль которой равен $m=10$ мм, профильный угол $\alpha=20^\circ$, высота головки рейки $h_r=m$. Определить толщину зуба по делительной окружности и по окружности головок (выступов), если число зубьев колеса $z=20$.

155. Определить межцентровое расстояние a_w корригированной пары, если $z_1=12$ и $z_2=20$, если модуль $m=10$ мм, профильный угол $\alpha=20^\circ$, высота головки $h_r=m$. Корригирование выполнялось минимальное, по отсутствию подрезания ножки шестерни.

156. Для трехзвенной зубчатой передачи с внешним зацеплением зубьев, у которой профили зубьев очерчены эвольвентами окружностей, определить коэффициент перекрытия ε , если числа зубьев колес $z_1=22$, $z_2=30$, модуль зацепления $m=10$ мм, угол зацепления в сборке $\alpha=20^\circ$ и высота головки $h_r=m$.

157. Для эвольвентного реечного зацепления определить коэффициент перекрытия ε , если число зубьев колеса $z_1=20$, модуль зацепления $m=10$ мм, угол зацепления $\alpha=20^\circ$ и высота головки $h_r=m$.

158. Для трехзвенной зубчатой передачи с внешним зацеплением зубьев, у которой профили зубьев очерчены эвольвентами окружностей, найти максимально допустимую высоту головки зуба h_{r2} на большем колесе из условия отсутствия подреза профиля зуба на меньшем колесе, если число зубьев колес $z_1=10$, $z_2=30$, модуль зацепления $m=10$ мм, угол зацепления в сборке $\alpha=20^\circ$.

159. Была спроектирована трехзвенная зубчатая передача с внешним зацеплением и эвольвентными профилями зубьев. Передача проектировалась как некорригированная, поэтому угол зацепления предполагался равным $\alpha=20^\circ$, модуль зацепления $m=10$ мм, числа зубьев колес $z_1=20$, $z_2=30$. При сборке межцентровое расстояние пришлось увеличить на 5 мм относительно расчетного. Определить получившийся угол зацепления $\alpha_{сб}$ и радиусы начальных окружностей.

160. Спроектировать трехзвенную прямозубую зубчатую передачу с внешним зацеплением зубьев, у которой модуль зацепления $m=1,0$ мм, передаточное отношение $i_{1,2}=1,5$, число зубьев на шестерне $z_1=14$. Корригирование минимальное, по условию отсутствия подрезания на шестерне.

6.2. Кинематический синтез типовых планетарных зубчатых передач

В учебной и научной литературе излагаются различные методы подбора чисел зубьев колес планетарных механизмов для обеспечения заданного передаточного отношения [2, 7–10]. Оптимальный вариант при этом может быть найден на основе сопоставления множества вариантов решения, полученных путем изменения тех или иных параметров.

При проектировании планетарного механизма по выбранной схеме и заданному передаточному отношению желательно с минимальным объёмом вычислений подобрать числа зубьев колес, при которых получились бы наименьшие размеры механизма. При прочих равных условиях наименьшие габариты механизма получаются при выборе минимально возможных чисел зубьев колес.

Выбранные числа зубьев колес планетарного механизма должны удовлетворять следующим основным условиям:

- а) обеспечению заданного передаточного отношения;
- б) *соосности* центральных зубчатых колес;
- в) возможности *сборки* механизма;
- г) *соседству* смежных сателлитов;
- д) правильному зацеплению каждой пары зубчатых колес.

От того, насколько удачно подобраны числа зубьев зубчатых колес, будут зависеть такие качественные характеристики проектируемого механизма, как компактность, масса, технологичность и др.

На схемах (рис. 6.1) обозначено:

- 1 и 3 – центральные зубчатые колеса;
- 2 и 2' – сателлиты;
- H – водило.

Элементы кинематических пар, принадлежащие неподвижному звену (стойке), подштрихованы.

Механизм с двумя внешними зацеплениями (см. рис. 6.1,а) обозначают AA ; механизм с одним внешним и одним внутренним зацеплениями (см. рис. 6.1,б) обозначают AJ ; однорядный механизм с одним внешним и одним внутренним зацеплениями (см. рис. 6.1,г) обозначают \overline{AJ} и механизм с двумя внутренними зацеплениями (см. рис. 6.1,в) обозначают JJ .

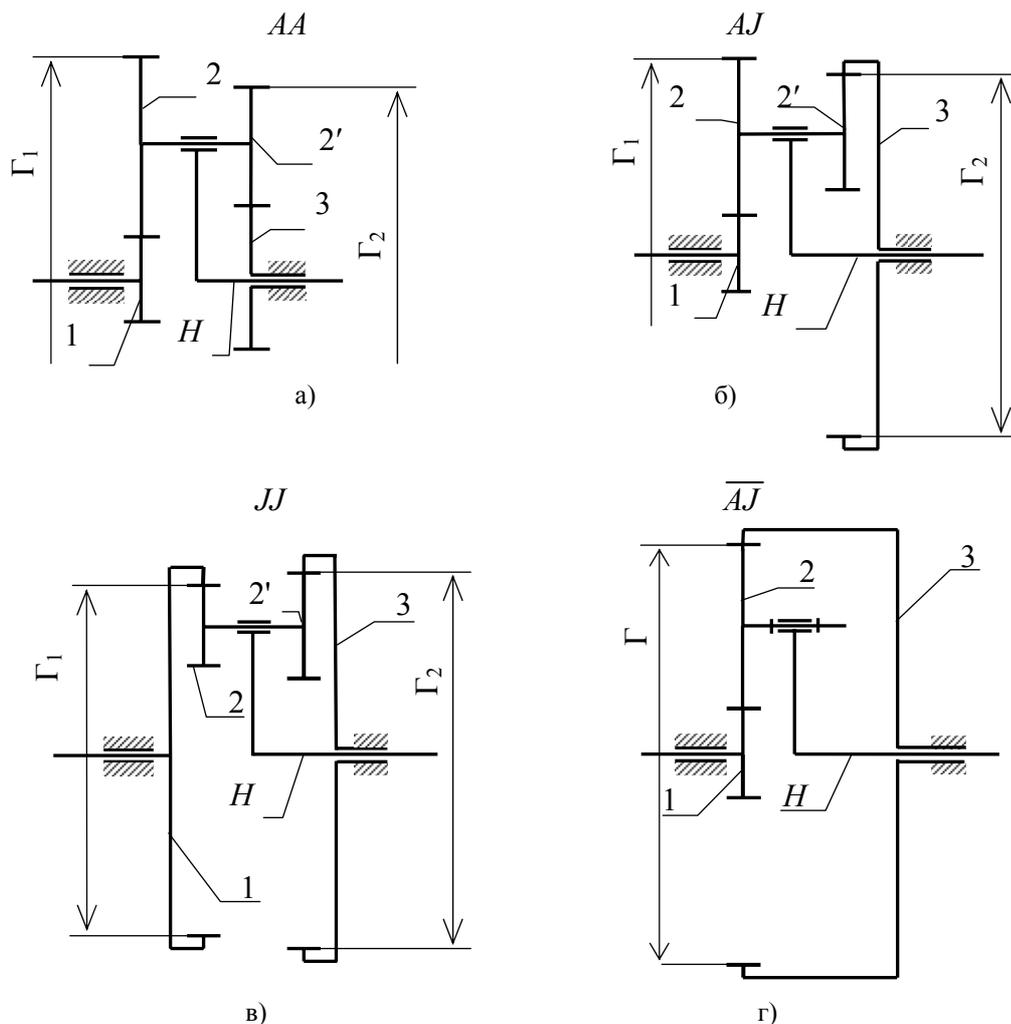


Рис. 6.1. Основные типы планетарных механизмов

Приведенные на схемах (рис. 6.1) механизмы могут обеспечить как понижение числа оборотов от ведущего звена к ведомому (редукторы), так и повышение числа оборотов (мультипликаторы). Однако вследствие возможного самоторможения или получения механизма с низким КПД планетарные механизмы в качестве мультипликаторов обычно не применяют.

В данном разделе излагается кинематический синтез наиболее распространенных планетарных зубчатых механизмов (AA , AJ , JJ) с цилиндрическими колесами методом разложения на сомножители передаточного отношения $i_{1,3}^{(H)}$ обращенного механизма [7, 11] и синтеза планетарного механизма \overline{AJ} методом генерального уравнения [9]. Эти методы позволяют в условиях учебного процесса быстро, с минимальным объемом вычислений получить решение поставленной задачи по кинематическому синтезу рассматриваемых планетарных механизмов и обеспечить при этом габариты проектируемых зубчатых передач, близкие к оптимальным.

Самостоятельное решение задач студентами при выполнении домашнего задания по теории механизмов и машин изложенными в пособии методами будет способствовать углубленной проработке и более прочному усвоению теоретического материала по кинематике зубчатых передач.

Рассмотрим кратко условия, которые необходимо выполнять при синтезе планетарных зубчатых механизмов.

6.2.1. Передаточное отношение

Определение передаточного отношения при известных значениях чисел зубьев рассмотрено в разд. 2.5.3.

Теоретически передаточные отношения показанных на схеме планетарных механизмов могут принимать значения, приведенные в табл. 6.2.

Таблица 6.2

Теоретически возможные передаточные отношения для типовых планетарных механизмов

Вид механизма	Передаточные отношения		
	$i_{1,3}^{(H)}$	$i_{1,H}^{(3)}$	$i_{H,1}^{(3)}$
AA, JJ	> 0	< 1	$< 0; > 1$
AJ, \overline{AJ}	< 0	> 1	> 0

На величину передаточного отношения накладывают ограничения технологические соображения, число сателлитов ($K_{2,2'}$), условие правильного зацепления, КПД механизма и некоторые другие факторы. Поэтому в сводной табл. 6.3 приведены рекомендуемые пределы передаточных отношений рассматриваемых механизмов, наиболее часто встречающиеся в практике.

Таблица 6.3

Основные кинематические и геометрические зависимости в планетарных механизмах
и рекомендуемые пределы передаточных отношений

Меха- низм	Формула передаточного отношения	Условие соосности	Условие сборки	Условие соседства	Рекомендуемые преде- лы передаточных от- ношений
1	2	3	4	5	6
<i>AA</i>	$i_{1,H}^{(3)} = 1 - \frac{Z_2 Z_3}{Z_1 Z_{2'}}$ $i_{H,1}^{(3)} = \frac{1}{1 - \frac{Z_2 Z_3}{Z_1 Z_{2'}}}$	$(Z_1 + Z_2) \cdot \mu_{1,2} =$ $= (Z_3 + Z_{2'}) \cdot \mu_{2',3}$	$\frac{Z_1 Z_{2'} - Z_2 Z_3}{K_{2,2'} D_{2,2'}} = E$	$\sin \frac{180}{K_{2,2'}} > \frac{Z_2 + 2f_2}{Z_1 + Z_2}$ $\sin \frac{180}{K_{2,2'}} > \frac{Z_{2'} + 2f_{2'}}{Z_3 + Z_{2'}}$	$-60 \leq i_{1,H}^{(3)} \leq -10$ $10 \leq i_{H,1}^{(3)} \leq 100$
<i>AJ</i>	$i_{1,H}^{(3)} = 1 + \frac{Z_2 Z_3}{Z_1 Z_{2'}}$ $i_{H,1}^{(3)} = \frac{1}{1 + \frac{Z_2 Z_3}{Z_1 Z_{2'}}}$	$(Z_1 + Z_2) \cdot \mu_{1,2} =$ $= (Z_3 - Z_{2'}) \cdot \mu_{2',3}$	$\frac{Z_1 Z_{2'} + Z_2 Z_3}{K_{2,2'} D_{2,2'}} = E$	$\sin \frac{180}{K_{2,2'}} > \frac{Z_2 + 2f_2}{Z_1 + Z_2}$ $\sin \frac{180}{K_{2,2'}} > \frac{Z_{2'} + 2f_{2'}}{Z_3 + Z_{2'}}$	$10 \leq i_{1,H}^{(3)} \leq 20$ $0,1 \leq i_{H,1}^{(3)} < 1$

Окончание табл. 6.3

1	2	3	4	5	6
\overline{AJ}	$i_{1,H}^{(3)} = 1 + \frac{Z_3}{Z_1}$ $i_{H,1}^{(3)} = \frac{1}{1 + \frac{Z_3}{Z_1}}$	$(Z_1 + Z_2) = (Z_3 - Z_2)$	$\frac{Z_1 + Z_3}{K_2} = E$	$\sin \frac{180}{K_2} > \frac{Z_2 + 2f_2}{Z_1 + Z_2}$ $\sin \frac{180}{K_2} > \frac{Z_2 + 2f_2}{Z_3 - Z_2}$	$3 \leq i_{1,H}^{(3)} \leq 10$ $0,15 \leq i_{H,1}^{(3)} < 1$
JJ	$i_{1,H}^{(3)} = 1 - \frac{Z_2 Z_3}{Z_1 Z_{2'}}$ $i_{H,1}^{(3)} = \frac{1}{1 - \frac{Z_2 Z_3}{Z_1 Z_{2'}}}$	$(Z_1 - Z_2) \cdot \mu_{1,2} =$ $= (Z_3 - Z_{2'}) \cdot \mu_{2',3}$	$\frac{Z_1 Z_{2'} - Z_2 Z_3}{K_{2,2'} D_{2,2'}} = E$	$\sin \frac{180}{K_{2,2'}} > \frac{Z_2 + 2f_2}{Z_1 - Z_2}$ $\sin \frac{180}{K_{2,2'}} > \frac{Z_{2'} + 2f_{2'}}{Z_3 - Z_{2'}}$	$20 \leq i_{1,H}^{(3)} \leq 100$ $(K_{2,2'} = 1, 2)$ $8 \leq i_{H,1}^{(3)} \leq 30$ $(K_{2,2'} = 3)$

Примечания: 1. Значения $\mu_{1,2}$ и $\mu_{2',3}$ – см. формулу (6.6).

2. Значения f_2 и $f_{2'}$ – см. формулы (6.10) и (6.11).

3. $K_{2,2'}$ – число сателлитов.

4. $D_{2,2'}$ – наибольший общий делитель чисел зубьев зубчатых колес Z_2 и $Z_{2'}$.

5. На практике известны механизмы типа AA , у которых $i_{H,1}^{(3)} = 1000$ и даже 10000, но при этом получается очень низкий КПД.

6.2.2. Условие соосности

Это условие обеспечивается при точном равенстве межосевых расстояний (a_w) соответствующих пар зубчатых колес:

– для AA , AJ , JJ механизмов

$$a_{w_{1,2}} = a_{w_{2',3}},$$

или

$$r_{w_1} \pm r_{w_2} = r_{w_3} \pm r_{w_{2'}}; \quad (6.1)$$

– для \overline{AJ} механизма

$$a_{w_{1,2}} = a_{w_{2,3}},$$

или

$$r_{w_1} + r_{w_2} = r_{w_3} - r_{w_{2'}}; \quad (6.2)$$

где r_{w_1} , r_{w_2} , $r_{w_{2'}}$, r_{w_3} – радиусы начальных окружностей соответствующих зубчатых колес.

В формуле (6.1) знак «плюс» – при внешнем зацеплении данной пары зубчатых колес, знак «минус» – при внутреннем зацеплении.

Радиусы начальных окружностей определяются по формулам:

$$r_{w_1} = \frac{Z_1 m_{1,2}}{2} \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_{w_{1,2}} \cdot \cos \beta_{w_{1,2}}}, \quad r_{w_2} = \frac{Z_2 m_{1,2}}{2} \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_{w_{1,2}} \cdot \cos \beta_{w_{1,2}}}, \quad (6.3)$$

$$r_{w_{2'}} = \frac{Z_2 m_{2',3}}{2} \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_{w_{2',3}} \cdot \cos \beta_{w_{2',3}}}, \quad r_{w_3} = \frac{Z_3 m_{2',3}}{2} \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_{w_{2',3}} \cdot \cos \beta_{w_{2',3}}}, \quad (6.4)$$

где $m_{1,2}$, $m_{2',3}$ – модули зацепления в нормальном сечении соответствующих пар зубчатых колес 1, 2 и 2', 3 (ГОСТ 9563–60 или СТ СЭВ 310–76);

α – угол профиля исходного контура инструментальной рейки согласно ГОСТ 13755–68 ($\alpha=20^\circ$);

$\alpha_{w_{1,2}}$, $\alpha_{2',3}$ – углы зацепления соответствующих пар зубчатых колес 1, 2 и 2', 3 (обычно $15^\circ < \alpha_w < 30^\circ$);

$\beta_{1,2}$, $\beta_{2',3}$ – углы наклона линии зуба на делительных цилиндрах соответствующих пар косозубых зубчатых колес (обычно $0 < \beta < 20^\circ$).

После подстановки в равенство (6.1) значений радиусов из формул (6.3) и (6.4) получим

$$(Z_1 \pm Z_2) \cdot \mu_{1,2} = (Z_3 \pm Z_{2'}) \cdot \mu_{2',3}, \quad (6.5)$$

где $\mu_{1,2}$ и $\mu_{2',3}$ – целые взаимно простые числа, отношение которых:

$$\frac{\mu_{1,2}}{\mu_{2,3}} = \frac{m_{1,2}}{m_{2,3}} \cdot \frac{\cos \alpha_{w2,3} \cdot \cos \beta_{2,3}}{\cos \alpha_{w1,2} \cdot \cos \beta_{1,2}}. \quad (6.6)$$

Обычно внутренние зацепления выполняются прямозубыми.

6.2.3. Условие сборки механизма

Это условие требует, чтобы во время сборки механизма зубья сателлитов свободно входили во впадины центральных зубчатых колес даже в случае отсутствия бокового зазора в зацеплении. Выполняется это условие при таком подборе чисел зубьев, количестве сателлитов и их взаимного расположения, при которых обеспечивается правильное зацепление во всех парах зубчатых колес.

Условие сборки можно записать следующим уравнением [11]:

$$\frac{Z_1 Z_{2'} \pm Z_2 Z_3}{K_{2,2'} \cdot D_{2,2'}} = E, \quad (6.7)$$

где $K_{2,2'}$ – число сателлитов;

$D_{2,2'}$ – наибольший общий делитель чисел зубьев Z_2 и $Z_{2'}$;

знак “минус” – для механизмов AA и JJ ,

знак “плюс” – для механизмов AJ и \overline{AJ} ;

E – целое число (критерий собираемости).

Если E не равно целому числу, то сборка невозможна.

Для механизма \overline{AJ} $Z_{2'} = Z_2 = D_{2,2'}$.

Следует иметь в виду, что при проверке условия сборки по уравнению (6.7) вычисления необходимо выполнять по правилам арифметики. Округление не допускается. Проверка по условию сборки проводится при числе сателлитов $K_{2,2'} > 1$.

6.2.4. Условие соседства

Условие соседства требует отсутствия задевания головок зубьев соседних (рядом расположенных) сателлитов. Это условие необходимо проверять при числе сателлитов $K_{2,2'} > 2$ при равномерном их распределении по окружности.

Условие соседства может быть записано следующими формулами [7]:

– для первого ряда

$$\sin \frac{180}{K_{2,2'}} > \frac{Z_2 + 2f_2}{Z_1 \pm Z_2}; \quad (6.8)$$

– для второго ряда

$$\sin \frac{180}{K_{2,2'}} > \frac{Z_{2'} + 2f_{2'}}{Z_3 \pm Z_{2'}}, \quad (6.9)$$

где $f_2, f_{2'}$ – коэффициенты высоты начальных головок зубьев зубчатых колес 2, 2':

$$f_2 = \frac{r_{a2} - r_{w2}}{m_{1,2}} \frac{\cos \alpha_{w2}}{\cos \alpha}, \quad (6.10)$$

$$f_{2'} = \frac{r_{a2'} - r_{w2'}}{m_{2',3}} \frac{\cos \alpha_{w2'}}{\cos \alpha}. \quad (6.11)$$

Знак «плюс» в знаменателе правой части неравенств (6.8) и (6.9) соответствует внешнему зацеплению данной пары зубчатых колес, знак «минус» – внутреннему.

Для нулевых зубчатых колес $f_2 = f_{2'} = h_a^*$, где h_a^* – коэффициент высоты делительной головки зуба, равный 1, если зуб нормальной высоты, и 0,8 – если зуб укороченный.

6.2.5. Условие правильного зацепления

Выполнение условия правильного зацепления обеспечивает отсутствие заклинивания передачи и достаточно надежную величину коэффициента перекрытия во всех парах зубчатых колес, выполненных без подреза и среза зубьев.

Во избежание подреза зубьев эвольвентных нулевых колес для передачи внешнего зацепления [7] при $\alpha = 20^\circ$ и $h_a^* = 1$ принимают $Z \geq 17$, при $h_a^* = 0,8$ $Z \geq 14$.

Для внутреннего зацепления в источнике [2] приводятся дифференцированные значения допустимых чисел зубьев (табл. 6.4).

Таблица 6.4

Минимально допустимые числа зубьев на колесе (Z_k) с внутренними зубьями в зависимости от числа зубьев на шестерне (Z_w) прямозубых нулевых зубчатых колес при $f=1$ [1]

Z_w	Z_k	Z_w	Z_k
17	∞	23	≥ 41
18	≥ 144	24	≥ 38
19	≥ 81	25	≥ 36
20	≥ 60	26	≥ 35
21	≥ 50	27...79	$\geq Z_w + 8$
22	≥ 44	80 и выше	$\geq Z_w + 7$

Примечание: числа зубьев более 170...180 назначать не рекомендуется

Планетарные механизмы, как правило, проектируются и изготавливаются с нулевыми колесами, но их можно составлять и из ненулевых колес с прямыми или косыми зубьями [7]. Число зубьев малого колеса при этом может быть значительно снижено и тем самым могут быть уменьшены габариты механизма.

6.2.6. Коэффициент полезного действия

Коэффициент полезного действия является важным показателем качества планетарного механизма. Он может быть вычислен приближенно по формулам, приведенным в табл. 6.5 [8].

Как видно из формул, приведенных в табл. 6.5, КПД планетарного механизма зависит от передаточного отношения $i_{1,H}^{(3)}$ планетарной передачи и от величины потерь в парах зубчатых колес. Анализ формул показывает, что при некоторых значениях $i_{1,H}^{(3)}$ в случае ведущего колеса Z_1 возможно самоторможение механизма, так как КПД может получиться отрицательным. Самоторможение может быть, когда $i_{1,H}^{(3)}$ заключено в пределах

$$1 - \frac{1}{\eta_{1,3}^{(H)}} < i_{1,H}^{(3)} < 1 - \eta_{1,3}^{(H)},$$

т. е. находится в области передаточных чисел, смежных с нулем.

Таблица 6.5

Зависимости для расчета коэффициента полезного действия планетарных механизмов

Передача	$0 < i_{1,H}^{(3)} < 1$	$i_{1,H}^{(3)} > 1, \quad i_{1,H}^{(3)} < 0$
От колеса Z_1 к водилу H	$\eta_{1,H}^{(3)} = \frac{1}{i_{1,H}^{(3)}} \left[1 - \frac{1}{\eta_{1,3}^{(H)}} (1 - i_{1,H}^{(3)}) \right]$	$\eta_{1,H}^{(3)} = \frac{1}{i_{1,H}^{(3)}} \left[1 - \eta_{1,3}^{(H)} (1 - i_{1,H}^{(3)}) \right]$
От водила H к колесу Z_1	$\eta_{H,1}^{(3)} = \frac{i_{1,H}^{(3)}}{1 - \eta_{1,3}^{(H)} (1 - i_{1,H}^{(3)})}$	$\eta_{H,1}^{(3)} = \frac{i_{1,H}^{(3)}}{1 - \frac{1}{\eta_{1,3}^{(H)}} (1 - i_{1,H}^{(3)})}$

Примечания: 1. $\eta_{1,3}^{(H)}$ – КПД простой передачи (обращенного механизма),

определяется по формуле $\eta_{1,3}^{(H)} = \eta_{1,2} \cdot \eta_{2,3}$.

2. Для пары зубчатых колес можно принимать $\eta_{1,2} = \eta_{2,3} = 0,98$.

Однако при передаточном отношении $i_{1,H}^{(3)}$, близком к нулю, или при $-1 < i_{1,H}^{(3)} < 0,5$ передача от водила H к колесу Z_1 будет иметь низкий коэффициент полезного действия. КПД планетарной передачи от водила H к колесу Z_1 при $i_{1,H}^{(3)}=0$ будет иметь $\eta_{1,3}^{(H)}=0$. Однако применение такого механизма не имеет смысла. Вследствие этого планетарные механизмы как при передаче от водила H к колесу Z_1 , так и при передаче от колеса Z_1 к водилу H в качестве мультипликаторов обычно не применяются.

6.2.7. Подбор чисел зубьев AA , AJ и JJ механизмов по методу сомножителей

Если задано передаточное отношение планетарного механизма $i_{1H}^{(3)}$, то передаточное отношение обращенного механизма можно найти из формулы (2.13):

$$i_{1,3}^{(H)} = 1 - i_{1,H}^{(3)}, \quad (6.12)$$

где числовое значение $i_{1,H}^{(3)}$ берется со своим знаком.

Если передача осуществляется от водила H к колесу 1 и задано передаточное отношение $i_{1,H}^{(3)}$, то передаточное отношение обращенного механизма можно определить из формулы (2.14):

$$i_{1,3}^{(H)} = \frac{i_{H,1}^{(3)} - 1}{i_{H,1}^{(3)}}, \quad (6.13)$$

где числовое значение $i_{H,1}^{(3)}$ берётся со своим знаком.

Известно, что передаточное отношение обращенного механизма можно представить как

$$\left| i_{1,3}^{(H)} \right| = \frac{Z_2}{Z_1} \cdot \frac{Z_3}{Z_2}. \quad (6.14)$$

Если $i_{1,3}^{(H)}$ – величина дробная, то её сокращают до получения неделимой дроби A/B , в которой числитель и знаменатель – целые взаимно простые числа, т. е.

$$\left| \frac{A}{B} \right| = \frac{Z_2}{Z_1} \cdot \frac{Z_3}{Z_2}. \quad (6.15)$$

Если $i_{1,3}^{(H)}$ – целое число, то его также представляют в виде дроби, где $B=1$. В правой части равенства (6.15) в числителе и знаменателе

стоят произведения двух сомножителей. Разложив числа A и B на сомножители, можно и левую часть этого равенства представить в виде отношения двух пар сомножителей C_2C_3 и $C_1C_{2'}$, где $C_1, C_2, C_{2'}, C_3$ – сомножители, пропорциональные числам зубьев $Z_1, Z_2, Z_{2'}, Z_3$.

Следовательно,

$$|i_{1,3}^{(H)}| = \frac{Z_2}{Z_1} \cdot \frac{Z_3}{Z_{2'}} = \frac{C_2}{C_1} \cdot \frac{C_3}{C_{2'}}. \quad (6.16)$$

Полагая каждый из сомножителей C_n ($n=1, 2, 2', 3$) пропорциональным соответствующему числу зубьев Z_n , можем записать условие соосности, справедливое для любой из рассматриваемых схем, в следующем виде:

$$P\mu_{1,2}(C_1 \pm C_2) = Q\mu_{2',3}(C_3 \pm C_{2'}), \quad (6.17)$$

откуда

$$\frac{P}{Q} = \frac{\mu_{2',3}}{\mu_{1,2}} \cdot \frac{C_3 \pm C_{2'}}{C_1 \pm C_2}, \quad (6.18)$$

где P и Q – целые взаимно простые числа.

В уравнениях (6.17) и (6.18) знак «плюс» берется при внешнем зацеплении данной пары зубчатых колес, знак «минус» – при внутреннем зацеплении.

Подставив в уравнение (6.18) вместо C_n числовые значения, отвечающие какому-либо из вариантов разложения $i_{1,3}^{(H)}$ на сомножители, определяем P и Q и затем значения чисел зубьев зубчатых колес по следующим формулам:

$$\begin{aligned} Z_1 &= C_1 P \gamma, & Z_{2'} &= C_{2'} Q \gamma, \\ Z_2 &= C_2 P \gamma, & Z_3 &= C_3 Q \gamma, \end{aligned} \quad (6.19)$$

где γ – произвольное положительное число, позволяющее получить значение чисел зубьев, удовлетворяющее условию зацепления (Z – целые числа).

Полученные значения чисел зубьев подвергаются проверке по условию сборки и условию соседства и определяются габариты Γ_1 и Γ_2 .

Если при выборе варианта разложения учтены рекомендуемые пределы отношений C_2/C_1 и $C_3/C_{2'}$, указанные в табл. 6.6, то условие соседства будет всегда выполнено.

6.2.8. Подбор чисел зубьев \overline{AJ} механизма по методу генерального уравнения

Для \overline{AJ} механизма, приняв $Z_{2'} = Z_2$, формулу передаточного отношения (2.12) можно записать в следующем виде:

$$Z_3 = (i_{1,H}^{(3)} - 1)Z_1. \quad (6.20)$$

Таблица 6.6

Рекомендуемые пределы отношения сомножителей C_2/C_1 и C_3/C_2 , при которых выполняется условие соседства смежных сателлитов

Механизмы	Передача	Пределы отношения		Число сателлитов
		C_2/C_1	C_3/C_2'	
AA	От колеса 1 к водилу H	<10	<10	1, 2
		<5,5	<10	3
		<2,1	<10	4
		<1,1	<10	5
AA	От водила H к колесу 1	$\frac{1}{3} < \frac{C_2}{C_1} < \frac{3}{2}$	$\frac{2}{3} < \frac{C_3}{C_2'} < 3$	1, 2, 3, 4
		$\frac{1}{3} < \frac{C_2}{C_1} < \frac{10}{9}$	$\frac{9}{10} < \frac{C_3}{C_2'} < 3$	5
AJ	От колеса 1 к водилу H	<10	$2,3 < \frac{C_3}{C_2'} < 10$	1, 2, 3, 4
		<2,1	$2,6 < \frac{C_3}{C_2'} < 10$	4
		<1,1	$2,9 < \frac{C_3}{C_2'} < 10$	5
JJ	От водила H к колесу 1	$\frac{1}{10} < \frac{C_2}{C_1} < \frac{1}{2,3}$	$2,3 < \frac{C_3}{C_2'} < 10$	1, 2, 3, 4
		$\frac{1}{10} < \frac{C_2}{C_1} < \frac{1}{2,6}$	$2,6 < \frac{C_3}{C_2'} < 10$	4
		$\frac{1}{10} < \frac{C_2}{C_1} < \frac{1}{2,9}$	$2,9 < \frac{C_3}{C_2'} < 10$	5

Подставив в уравнение соосности (6.2) вместо радиусов их выражение через числа зубьев и модуль, после простейших преобразований получим

$$Z_2 = \frac{Z_3 - Z_1}{2}. \quad (6.21)$$

Подставив в уравнение (6.21) Z_3 из (6.20), после преобразований получим

$$Z_2 = \frac{(i_{1,H}^{(3)} - 2)Z_1}{2}. \quad (6.22)$$

После подстановки в уравнение сборки (6.7) Z_3 из (6.20), учитывая, что для \overline{AJ} механизма $Z_{2'} = Z_2 = D_{2,2'}$, получим

$$E = \frac{Z_1 i_{1,H}^{(3)}}{K_2}. \quad (6.23)$$

Соединяя уравнение соосности (6.22), уравнение передаточного отношения (6.20) и уравнение сборки (6.23), получим генеральное уравнение подбора чисел зубьев \overline{AJ} механизма [9]:

$$Z_1 : Z_2 : Z_3 : E = Z_1 : \frac{Z_1 (i_{H,1}^{(3)} - 2)}{2} : Z_1 (i_{H,1}^{(3)} - 1) : \frac{Z_1 i_{H,1}^{(3)}}{K_2}, \quad (6.24)$$

где K_2 – число сателлитов, или

$$Z_1 : Z_2 : Z_3 : E = Z_1 \left[1 : \frac{i_{1,H}^{(3)} - 2}{2} : (i_{1,H}^{(3)} - 1) : \frac{i_{1,H}^{(3)}}{K_2} \right]. \quad (6.25)$$

Приняв число зубьев Z_1 , получим

$$Z_2 = \frac{(i_{1,H}^{(3)} - 2)Z_1}{2}, \quad Z_3 = (i_{1,H}^{(3)} - 1)Z_1, \quad E = \frac{i_{1,H}^{(3)}}{K_2} Z_1. \quad (6.26)$$

В целях получения минимальных габаритов механизма число зубьев Z_1 следует принять возможно меньшим, обеспечивая при этом целые значения Z_2 , Z_3 и E (условие сборки).

Для некорригированного зацепления (при $f = h_a^* = 1$) должно быть $Z_{\min} \geq 17$.

После этого проверяются выполнение заданного передаточного отношения и условие соседства по соответствующим формулам (см. табл. 6.3).

6.2.9. Порядок определения чисел зубьев по методу сомножителей и выбор варианта разложения на сомножители

1. Определяется величина передаточного отношения обращенного механизма $i_{1,3}^{(H)}$.

2. Записываются возможные варианты (не менее 10–12) разложения на сомножители дроби $A/B = \left| i_{1,3}^{(H)} \right|$. Если $i_{1,3}^{(H)}$ представляет собой

простое число (например, 13), то варианты отношения двух пар сомножителей можно получить путем введения дополнительных множителей (см. примеры).

3. Из всех возможных вариантов разложения на сомножители сразу же отбрасываются те варианты, в которых отношение C_2/C_1 или C_3/C_2 выходит за пределы, указанные в табл. 6.6.

4. Определяются значения P и Q по формуле (6.18), а также сумма $P+Q$.

5. Определяются значения чисел зубьев по формуле (6.19) по 2–3 вариантам, в которых сумма $P+Q$ наименьшая и отношение P/Q по сравнению с другими вариантами ближе к единице.

6. Определяются габариты Γ_1 и Γ_2 механизмов, полученных по этим вариантам, и в результате сравнения выбирается тот, который обеспечивает наименьшие габариты.

7. Проверяется выполнение заданного передаточного отношения и условий соосности, сборки, соседства. После чего принимается решение о выборе варианта синтезируемого механизма.

6.2.10. Примеры

Пример 1. Для механизма AA (см. рис. 6.1,а) определить числа зубьев зубчатых колес при следующих данных:

$$i_{1,H}^{(3)} = -\frac{55}{2}, \quad K_{2,2'} = 3, \quad m_{1,2} = 4 \text{ мм}, \quad m_{2',3} = 5 \text{ мм}.$$

Зубчатые колеса прямозубые, некорректированные.

Решение.

1. Определяем передаточное отношение обращенного механизма по формуле (6.12):

$$i_{1,3}^{(H)} = 1 - i_{1,H}^{(3)}.$$

Подставив заданное значение $i_{1,H}^{(3)}$, получим

$$i_{1,3}^{(H)} = 1 - \left(-\frac{55}{2}\right) = \frac{57}{2}.$$

2. Представим $|i_{1,3}^{(H)}|$ в виде дроби A/B и запишем в таблицу (табл. 6.7) возможные варианты её разложения на сомножители:

$$|i_{1,3}^{(H)}| = \frac{A}{B} = \frac{57}{2} = \frac{C_2}{C_1} \cdot \frac{C_3}{C_2'}.$$

В соответствии с рекомендациями (см. табл. 6.6) варианты 2, 4, 6, 7, 9, 12...15 необходимо исключить из рассмотрения.

Таблица 6.7

Варианты разложения на сомножители

№ варианта разложения	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\frac{C_2}{C_1} \cdot \frac{C_3}{C_2'}$	$\frac{3}{1} \cdot \frac{19}{2}$	$\frac{19}{2} \cdot \frac{3}{1}$	$\frac{3}{2} \cdot \frac{19}{1}$	$\frac{19}{1} \cdot \frac{3}{2}$	$\frac{4}{1} \cdot \frac{57}{8}$	$\frac{57}{8} \cdot \frac{4}{1}$	$\frac{5}{1} \cdot \frac{57}{10}$	$\frac{57}{10} \cdot \frac{5}{1}$	$\frac{6}{1} \cdot \frac{19}{4}$
№ варианта разложения	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$\frac{C_2}{C_1} \cdot \frac{C_3}{C_2'}$	$\frac{19}{4} \cdot \frac{6}{1}$	$\frac{7}{1} \cdot \frac{57}{14}$	$\frac{57}{14} \cdot \frac{7}{1}$	$\frac{7}{2} \cdot \frac{57}{7}$	$\frac{57}{7} \cdot \frac{7}{2}$	$\frac{9}{2} \cdot \frac{19}{3}$	$\frac{19}{3} \cdot \frac{9}{2}$	$\frac{11}{2} \cdot \frac{57}{11}$	$\frac{57}{11} \cdot \frac{11}{2}$

3. Определим P , Q и $P+Q$ для оставшихся вариантов (1, 3, 5, 8, 10, 11, 13, 16) по формуле (6.18):

$$\frac{P}{Q} = \frac{\mu_{2,3}}{\mu_{1,2}} \cdot \frac{C_3 + C_2'}{C_1 + C_2'}$$

где $\frac{\mu_{2,3}}{\mu_{1,2}} = \frac{m_{2,3}}{m_{1,2}} = \frac{5}{4}$, а значения C_1, C_2, C_2', C_3 берутся из табл. 6.7 для

соответствующего варианта.

Например, для варианта 1 ($C_1 = 1, C_2 = 3, C_2' = 2, C_3 = 19$) получим

$$\frac{P}{Q} = \frac{5}{4} \cdot \frac{19+2}{1+3} = \frac{105}{16}$$

Тогда имеем $P=105, Q=16, P+Q=105+16=121$.

Аналогично определяем значения $P, Q, P+Q$ для других вариантов и результаты записываем в табл. 6.8.

Таблица 6.8

Значения коэффициентов P и Q

№ варианта разложения	1	3	5	8	10	11	13	16
P	105	65	335	35	10	80	5	65
Q	16	4	24	92	71	9	2	172
$P+Q$	121	69	359	127	91	89	7	237

Из табл. 6.8 видим, что вариант 13 имеет наименьшую сумму ($P+Q$) по сравнению с другими вариантами. Кроме того, для этого варианта отношение $P/Q = 5/2 = 2,5$ по сравнению с другими ближе всех к единице.

Поэтому вариант 13 должен обеспечить наименьшие числа зубьев. Следовательно, и габариты механизма должны получиться наименьшими.

4. Определяем числа зубьев колес для варианта 13 по формулам (6.19):

$$\begin{aligned} Z_1 &= C_1 P \gamma, & Z_{2'} &= C_{2'} Q \gamma, \\ Z_2 &= C_2 P \gamma, & Z_3 &= C_3 Q \gamma, \end{aligned}$$

где $C_1 = 2$, $C_2 = 9$, $C_{2'} = 3$, $C_3 = 19$, $P=5$, $Q=2$.

$$\text{Имеем } Z_1 = 2 \cdot 5 \gamma = 10 \gamma, \quad Z_{2'} = 3 \cdot 2 \gamma = 6 \gamma,$$

$$Z_2 = 9 \cdot 5 \gamma = 45 \gamma, \quad Z_3 = 19 \cdot 2 \gamma = 38 \gamma.$$

Приняв $\gamma = 3$, получим

$$Z_1 = 30, \quad Z_2 = 135, \quad Z_{2'} = 18, \quad Z_3 = 144.$$

5. Определим габариты Γ_1 и Γ_2 (см. рис. 6.1,а):

$$\Gamma_1 = m_{1,2}(Z_1 + 2Z_2),$$

$$\Gamma_2 = m_{2',3}(Z_3 + 2Z_{2'}).$$

После подстановки значений $m_{1,2}$, $m_{2',3}$ и чисел зубьев имеем

$$\Gamma_1 = 4 \cdot (30 + 2 \cdot 135) = 1200 \text{ мм},$$

$$\Gamma_2 = 5 \cdot (144 + 2 \cdot 18) = 750 \text{ мм}.$$

Для сравнения аналогичные расчеты проводим также для вариантов разложения 3 и 11 и результаты записываем в табл. 6.9.

Таблица 6.9

Сводная таблица результатов расчета

№ варианта разложения	Сомножители				Z_1	Z_2	$Z_{2'}$	Z_3	Условие сборки	Габариты, мм	
	C_1	C_2	$C_{2'}$	C_3						Γ_1	Γ_2
3	1	4	8	57	65	260	32	228	Не вып.	2340	1460
11	2	7	7	57	160	560	63	513	Вып.	5120	3191
13	2	9	3	19	30	135	18	114	Вып.	1200	750

Из табл. 6.9 видим, что вариант 13 разложения на сомножители с использованием дополнительного множителя, равного 3, как имеющий наименьшую сумму $P + Q$ и отношение P/Q , наиболее близкое к единице, обеспечивает минимальные габариты. Поэтому принимаем

$$Z_1 = 30, \quad Z_2 = 135, \quad Z_{2'} = 18, \quad Z_3 = 114.$$

6. Проверяем выполнение заданного передаточного отношения

$$i_{1,H}^{(3)} = -\frac{55}{2} \text{ при принятом числе зубьев по формуле (2.15):}$$

$$i_{1,H}^{(3)} = 1 - (-1)^n \frac{Z_2}{Z_1} \cdot \frac{Z_3}{Z_{2'}},$$

где n – число пар внешнего зацепления для механизма AA , равное 2.

Тогда

$$i_{1,H}^{(3)} = 1 - (-1)^2 \cdot \frac{135}{30} \cdot \frac{114}{18} = -\frac{55}{2}.$$

Заданное передаточное отношение выполняется.

7. Проверяем выполнение условия соосности по формуле (см. табл. 6.3):

$$\mu_{1,2}(Z_1 + Z_2) = \mu_{2',3}(Z_3 + Z_{2'}),$$

где $\mu_{1,2} = m_{1,2} = 4$ мм, $\mu_{2',3} = m_{2',3} = 5$ мм.

После подстановки значений $\mu_{1,2}$ и $\mu_{2',3}$ и чисел зубьев получим

$$4 \cdot (30 + 135) = 5 \cdot (114 + 18), \text{ или } 660 = 660.$$

Условие соосности выполняется.

8. Проверяем условие сборки по формуле (6.7):

$$\frac{Z_1 Z_{2'} - Z_2 Z_3}{K_{2,2'} \cdot D_{2,2'}} = E,$$

где $K_{2,2'} = 3$, $D_{2,2'} = 9$. Тогда

$$E = \frac{30 \cdot 18 - 135 \cdot 114}{3 \cdot 9} = -550 \text{ (целое число).}$$

Условие сборки выполняется.

Поскольку выполнены рекомендации табл. 6.6, условие соседства можно не проверять.

Пример 2. Для механизма \overline{AJ} (см. рис. 6.1,г) определить числа зубьев колес при следующих данных:

$$i_{1,H}^{(3)} = 7, \quad K_2 = 3.$$

Зубчатые колеса прямозубые, некорригированные.

Решение. Применяя генеральное уравнение, определяем числа зубьев колес механизма по формуле (6.24):

$$Z_1 : Z_2 : Z_3 : E = Z_1 \left[1 : \frac{i_{1,H}^{(3)} - 2}{2} : (i_{1,H}^{(3)} - 1) : \frac{i_{1,H}^{(3)}}{K_2} \right].$$

Подставив сюда заданные значения $i_{1,H}^{(3)} = 7$ и $K_2 = 3$, получим

$$Z_1 : Z_2 : Z_3 : E = Z_1 \left(1 : \frac{5}{2} : 6 : \frac{7}{3} \right).$$

Следовательно,

$$Z_2 = \frac{5}{2}Z_1, \quad Z_3 = 6Z_1, \quad E = \frac{7}{3}Z_1.$$

Для получения целых значений чисел зубьев Z_2 и критерия собираемости (E), а также минимальных размеров механизма и обеспечения правильного зацепления ($Z_{\min} \geq 17$), принимаем $Z_1 = 18$.

Тогда получим $Z_1 = 18$, $Z_2 = 45$, $Z_3 = 108$.

При этом условие сборки обеспечивается, так как

$$E = \frac{7}{3} \cdot 18 = 42 \text{ (целое).}$$

Проверяем выполнение заданного передаточного отношения по формуле (см. табл. 6.4):

$$i_{1,H}^{(3)} = 1 + \frac{Z_3}{Z_1}; \quad i_{1,H}^{(3)} = 1 + \frac{108}{18} = 7.$$

Заданное передаточное отношение обеспечивается.

Проверяем условие соседства по формуле (6.8), где $K_2=3$, $f_2 = h_a^* = 1$ (нулевые колеса).

$$\text{Тогда } \sin \frac{180}{3} > \frac{45 + 2 \cdot 1}{18 + 45}, \text{ или } 0,866 > 0,746.$$

Условие соседства выполняется.

Таким образом, принимаем $Z_1 = 18$, $Z_2 = 45$, $Z_3 = 108$.

ЗАДАЧИ 161–168

161. Спроектировать одноступенчатый однорядный планетарный редуктор типа Джемса (\overline{AJ} , рис. 6.1,г) при условии, что зацепление колес некорригированное, угол зацепления $\alpha=20^\circ$ и высота головки $h_r=m$, должно отсутствовать заклинивание колес, передаточное отношение от колеса 1 к водилу H $i_{1,H}^{(3)} = 4,5$ и модуль $m=2$ мм. Найти числа зубьев всех колес (z_1, z_2, z_3), максимальное число сателлитов k и радиусы начальных окружностей всех колес R_1, R_2, R_3 .

162. Спроектировать одноступенчатый однорядный планетарный редуктор типа Джемса (\overline{AJ} , рис. 6.1,г) при условии, что зацепление колес некорригированное, угол зацепления $\alpha=20^\circ$ и высота головки $h_r=m$, должно отсутствовать заклинивание колес, передаточное отношение от колеса 1 к водилу H $i_{1,H}^{(3)} = 5$ и модуль $m=4$ мм. Найти числа зубьев всех колес (z_1, z_2, z_3), максимальное число сателлитов k и радиусы начальных окружностей всех колес R_1, R_2, R_3 .

163. Спроектировать одноступенчатый однорядный планетарный редуктор типа Джемса (\overline{AJ} , рис. 6.1,г) при условии, что зацепление колес некорригированное, угол зацепления $\alpha=20^\circ$ и высота головки $h_r=m$, должно отсутствовать заклинивание колес, передаточное отношение от водила H к колесу 1 $i_{H,1}^{(3)} = 0,3$ и модуль $m=4$ мм. Найти числа зубьев всех колес ($z_1 \dots z_3$), максимальное число сателлитов k и радиусы начальных окружностей всех колес R_1, R_2, R_3 .

164. Спроектировать одноступенчатый однорядный планетарный редуктор типа Джемса (\overline{AJ} , рис. 6.1,г) при условии, что зацепление колес некорригированное, угол зацепления $\alpha=20^\circ$ и высота головки $h_r=m$, должно отсутствовать заклинивание колес, передаточное отношение от водила H к колесу 3 $i_{H,3}^{(1)} = 5$ и модуль $m=1$ мм. Найти числа зубьев всех колес (z_1, z_2, z_3), максимальное число сателлитов k и радиусы начальных окружностей всех колес R_1, R_2, R_3 .

165. Спроектировать одноступенчатый планетарный редуктор типа Давида (AA , рис. 6.1,а) при условии, что зацепление колес некорригированное, угол зацепления $\alpha=20^\circ$ и высота головки $h_r=m$, передаточное отношение от колеса 1 к водилу H $i_{1,H}^{(3)} = -25$ и модули всех колес $m=1$ мм. Найти числа зубьев всех колес ($z_1 \dots z_3$).

166. Спроектировать одноступенчатый планетарный редуктор типа Давида (AA , рис. 6.1,а) при условии, что зацепление колес некорригированное, угол зацепления $\alpha=20^\circ$ и высота головки $h_r=m$, передаточное отношение от водила H к колесу 1 $i_{H,1}^{(3)} = 43$ и модули всех колес $m=1$ мм. Найти числа зубьев всех колес ($z_1 \dots z_3$).

167. Спроектировать одноступенчатый планетарный редуктор типа Давида (JJ , рис. 6.1,в) при условии, что зацепление колес некорригированное, угол зацепления $\alpha=20^\circ$ и высота головки $h_r=m$, передаточное отношение от колеса 1 к водилу H $i_{1,H}^{(3)} = 50$ и модули колес $m_{1,2}=1$ мм, $m_{2,3}=1,5$ мм. Найти числа зубьев всех колес ($z_1 \dots z_3$).

168. Спроектировать одноступенчатый планетарный редуктор типа Давида (AJ , рис. 6.1,б) при условии, что зацепление колес некорригированное, угол зацепления $\alpha=20^\circ$ и высота головки $h_r=m$, передаточное отношение от колеса 1 к водилу H $i_{1,H}^{(3)} = 15$ и модули колес $m_{1,2}=2$ мм, $m_{2,3}=3$ мм. Найти числа зубьев всех колес ($z_1 \dots z_3$).

ЗАДАЧИ 169–172

Эти задачи можно использовать в качестве индивидуальных заданий.

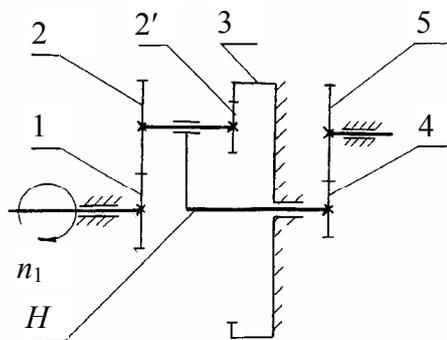
Спроектировать многоступенчатую передачу по заданному *передаточному числу*. Распределить передаточное отношение между рядовыми ступенями и планетарной, подобрать числа зубьев всех колес, найти частоту вращения ведомого звена.

169.

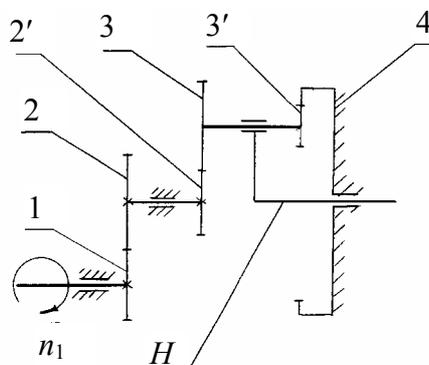
	1	2	3	4	5
Передаточное число $U_{1,5}$	30	24	32	26	28
Число сателлитов K	2–3	2–3	3–4	2–3	3–4
Модуль зацепления	$m_{1,2,2',3}$, мм	2	4	3	2
	$m_{4,5}$, мм	4	6	5	6
Частота вращения n_1 , об/мин	1500	1000	1000	900	1400

170.

	1	2	3	4	5	
Передаточное число $U_{1,H}$	35	40	30	36	38	
Число сателлитов K	3–4	2–3	2–3	2–3	3–4	
Модуль зацепления	$m_{1,2}$, мм	5	4	4	6	2,5
	$m_{2',3,3',4}$, мм	2	2	2	4	1
Частота вращения n_1 , об/мин	500	1000	2000	1500	1400	



К задаче 169



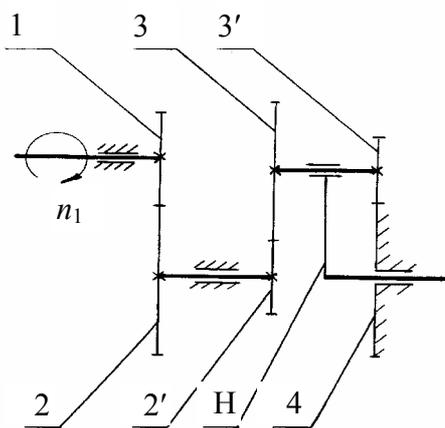
К задаче 170

171.

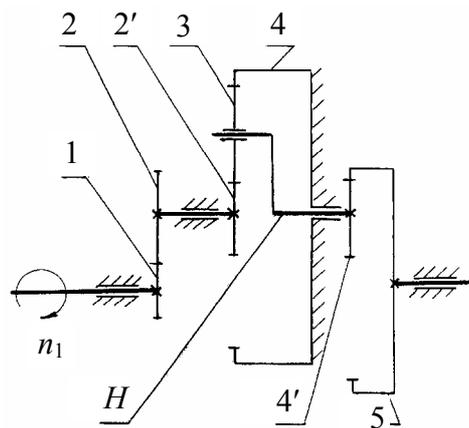
	1	2	3	4	5	
Передаточное число $U_{1,H}$	80	70	65	85	60	
Число сателлитов K	3–4	2–3	2–3	3–4	2–3	
Модуль зацепления	$m_{1,2}$, мм	4	6	5	4	2,5
	$m_{2',3,3',4}$, мм	2	3	3	2	1
Частота вращения n_1 , об/мин	1500	1000	2000	800	1400	

172.

		1	2	3	4	5
Передаточное число $U_{1,5}$		40	50	60	70	80
Число сателлитов K		3–4	2–3	3–4	3–4	3–4
Модуль зацепления	$m_{1,2,4',5}$, мм	2	2,5	2	3	4
	$m_{2',3,4}$, мм	1	2	1	2,5	3
Частота вращения n_1 , об/мин		800	900	1000	1400	1200



К задаче 171



К задаче 172

6.3. Синтез кулачковых механизмов с вращающимся кулачком с поступательно движущимся и коромысловым толкателями

Поясняющий текст изложен в предположении, что студент знаком с теорией кулачковых механизмов, поэтому доказательства теоретических выкладок не приводятся, а используются только результаты и даются рекомендации по их применению, т. е. дано решение конкретной задачи – определение размеров кулачка и построение его профиля, обеспечивающего заданный закон движения.

6.3.1. Назначение кулачковых механизмов

Кулачковые механизмы относятся к механизмам с высшими кинематическими парами. Они классифицируются по целому ряду признаков (характеру движения кулачка, характеру движения толкателя, по конструкции толкателя, по типу замыкания высшей кинематической пары и др.), представляют весьма большое разнообразие и применяются в различных отраслях техники. Кулачковые механизмы используются в системах газораспределения двигателей внутреннего сгорания, стан-

ках-автоматах для синхронизации движения различных звеньев, в системах управления и других устройствах.

Одним из основных достоинств кулачковых механизмов является легкость синтеза, т. е. получение профиля кулачка с большой степенью точности, удовлетворяющему заданному закону движения ведомого звена (толкателя). Выполнение этого условия в механизмах с низшими парами (например, рычажных) приводит к чрезмерному усложнению механизма и, как правило, к приближенному решению поставленной задачи. Кроме этого, используя сменные кулачки, получают другие законы движения толкателя в том же механизме. Кулачковые механизмы применяются в широком диапазоне скоростей. Так, в быстроходных двигателях внутреннего сгорания кулачковые валы вращаются со скоростью 3...4 тысячи оборотов в минуту и выше. В кулачковом механизме легко осуществить движение ведомого звена (толкателя) с остановками, т. е. прерывистое, при непрерывном движении кулачка.

Недостатком кулачковых механизмов является повышенное удельное давление и, как следствие, повышенный износ элементов высшей кинематической пары, особенно в механизмах с игольчатым толкателем, что, в свою очередь, приводит к искажению закона движения толкателя. Эти недостатки могут быть уменьшены применением плоских (тарельчатых) толкателей и толкателей с роликом.

6.3.2. Определение радиуса ролика

При синтезе кулачкового механизма с роликовым толкателем находят профиль теоретический, или центровый, соответствующий точке (острию) толкателя или центру ролика. Действительный, или практический (конструктивный), профиль кулачка получается как огибающая к семейству окружностей радиуса ролика r_p с центром на центровом профиле. (Профилем кулачка может быть как внутренняя, так и внешняя огибающая.)

Из рис. 6.2 видно, что радиус ролика r_p не может быть больше минимального радиуса кривизны профиля ρ_{\min} кулачка. При $r_p = \rho_{\min}$ действительный (конструктивный) кулачок будет иметь заострение ($r_k=0$), а при $r_p > \rho_{\min}$ (рис. 6.2,б) будет иметь место явление самопересечения конструктивного профиля. Поэтому практически принимают

$$r_p = (0,7...0,8)\rho_{\min}$$

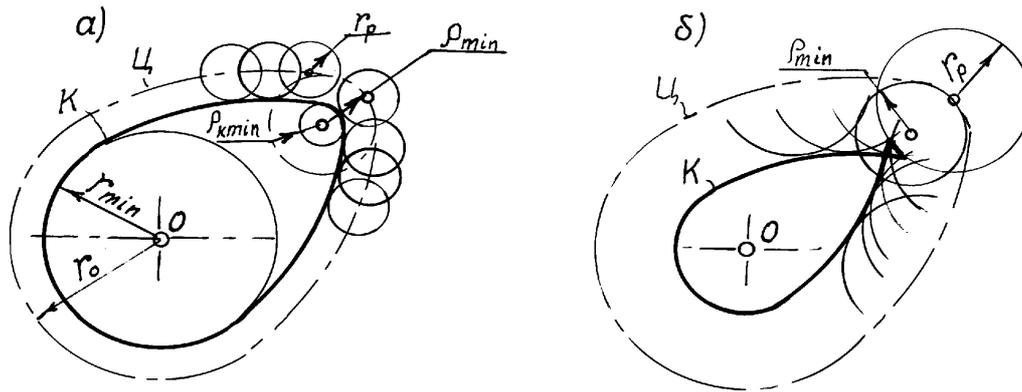


Рис. 6.2. К определению радиуса ролика

Если минимальный радиус профиля кулачка ρ_{\min} больше начального радиуса центрального профиля r_0 (радиус r_0 является наименьшим радиус-вектором профиля кулачка), то на радиус ролика накладывается еще одно условие, а именно – он не может быть больше r_0 , так как кулачок помещается на валу определенного диаметра. Практически принимают

$$r_p = (0,4 \dots 0,5) r_0.$$

Таким образом, радиус ролика принимают меньшим из двух значений:

$$r_p = (0,7 \dots 0,8) \rho_{\min}$$

и

$$r_p = (0,4 \dots 0,5) r_0.$$

Кроме того, размер ролика должен быть увязан с величиной радиуса цапфы $r_{ц}$, который определяется из расчета на прочность. Для размещения оси цапфы конструктивно принимают

$$r_p \geq (1,6 \dots 2,0) r_{ц}.$$

Наконец, размер ролика просчитывается на контактное напряжение. И если оно оказывается больше допустимого, то конструктивно увеличивают начальный радиус кулачка r_0 , а следовательно увеличивается и ρ_{\min} . Минимальный радиус кулачка (кулачковой шайбы) r_{\min} (см. рис. 6.2,а):

$$r_{\min} = r_0 - r_p.$$

(Заметим, что часто в качестве ролика применяются стандартные шарикоподшипники.)

Определение наименьшего радиуса теоретического профиля кулачка показано в следующих параграфах.

6.3.3. Определение координат профиля кулачка аналитическим методом

Координаты точек профиля кулачка могут задаваться в полярной или декартовой системах координат [15]. В данном пособии приведены координаты профиля в полярной системе.

Кулачковый механизм с поступательно движущимся толкателем

В полярной системе координат с началом в центре вращения кулачка O координаты любой точки c_i определяются двумя параметрами: радиус-вектором (r_i) (см. рис. 6.3,а) и полярным углом (δ_i), отсчитываемым от радиус-вектора (r_0) в начале профиля (точка c_0). При этом должны быть заданы:

- а) закон движения толкателя S по углу поворота кулачка φ (аналитически или графически): $S = S(\varphi)$;
- б) начальный радиус кулачка r_0 ;
- в) величина и направление смещения e .

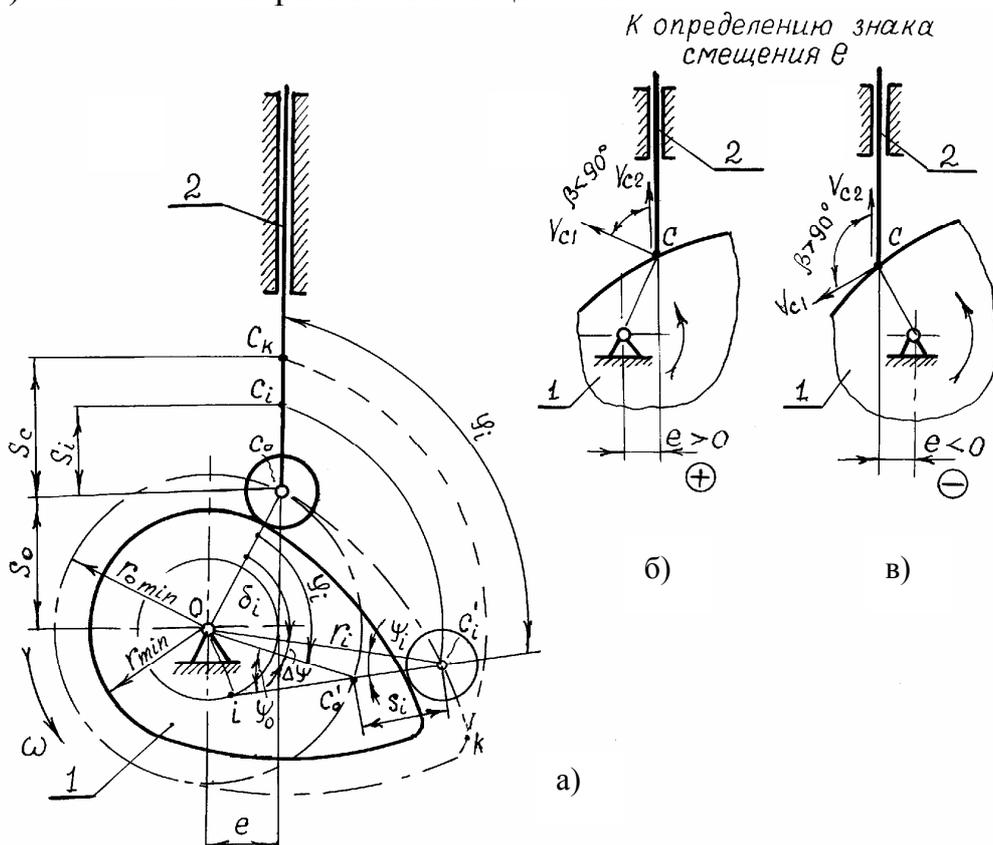


Рис. 6.3. К определению геометрических параметров кулачка

Тогда получаем:

Радиус-вектор r_i определяется:

$$r_i = \sqrt{e^2 + \left(S_i + \sqrt{r_0^2 - e^2} \right)^2}. \quad (6.27)$$

Так как $\sqrt{r_0^2 - e^2} = S_0$,

тогда $r_i = \sqrt{e^2 + (S_i + S_0)^2}$. (6.28)

Полярный угол $\delta_i = \varphi_i \mp \Delta\psi = \varphi_i \mp (\psi_0 - \psi_i)$. (6.29)

Здесь $\psi_0 = \arcsin \frac{e}{r_0} = \text{const}$, (6.30)

$$\psi_i = \arcsin \frac{e}{r_i}. \quad (6.31)$$

Знак минус в формуле (6.29) принимается при положительном смещении и знак плюс – при отрицательном смещении. За положительное смещение принимают такое, когда угол между векторами скорости точек кулачка и толкателя V_{C1} и V_{C2} $\beta < 90^\circ$, и отрицательное, когда угол $\beta > 90^\circ$ (рис. 6.3,б, в). (При изменении направления движения толкателя или направления вращения кулачка знак смещения изменяется на противоположный.)

Для центрального кулачкового механизма $e = 0$, тогда

$$r_i = r_0 + S_i, \quad (6.32)$$

$$\delta_i = \varphi_i. \quad (6.33)$$

Координаты профиля кулачка, определенные по формулам (6.28), (6.29), (6.31) и (6.32), соответствуют центральному (теоретическому) профилю. Если при изготовлении кулачка диаметр фрезы равен диаметру ролика, то это обеспечит получение и практического профиля кулачка. Если диаметр фрезы отличается от диаметра ролика, то при определении координат профиля учитывается диаметр фрезы.

Кулачковый механизм с коромысловым толкателем

На рис. 6.4 показан кулачковый механизм с вращающимся кулачком и коромысловым толкателем, снабженным роликом радиусом r_p .

Полагаем заданными:

а) закон движения толкателя – угол поворота коромысла θ по углу поворота кулачка φ :

$$\theta = \theta(\varphi)$$

или линейное перемещение точки C конца толкателя:

$$S_C = S_C(\varphi),$$

где $S_C = l \cdot \theta$; (6.34)

б) длину коромысла l (определяется конструктивно);

в) начальный радиус кулачка r_0 ;

г) начальный угол θ_0 ;

д) межосевое расстояние l_0 (AO).

6.3.4. Угол давления как один из критериев работоспособности кулачкового механизма

Кулачок, спрофилированный по заданным параметрам (r_0 , e , l , l_0), может оказаться неработоспособным, если при назначении минимального радиуса не был учтен угол давления. Как известно, углом *давления* называется угол между вектором *силы* и вектором *скорости* ведомого звена (в данном случае – толкателя). Так как в кулачковом механизме вектор силы направлен по нормали (высшая пара), то угол давления есть угол между *нормалью* в высшей паре и вектором скорости толкателя. Угол, дополняющий угол давления до 90° , называется углом *передачи движения* (сокращенно – углом передачи), то есть угол передачи – это угол между вектором скорости и *касательной*.

Обозначим:

α – угол давления;

γ – угол передачи движения.

Так как $\alpha + \gamma = 90^\circ$, следовательно, углы α и γ – острые.

На рис. 6.5 показаны три кулачка для одного и того же закона движения толкателя

$$S = S(\varphi)$$

с разными радиусами r_0 .

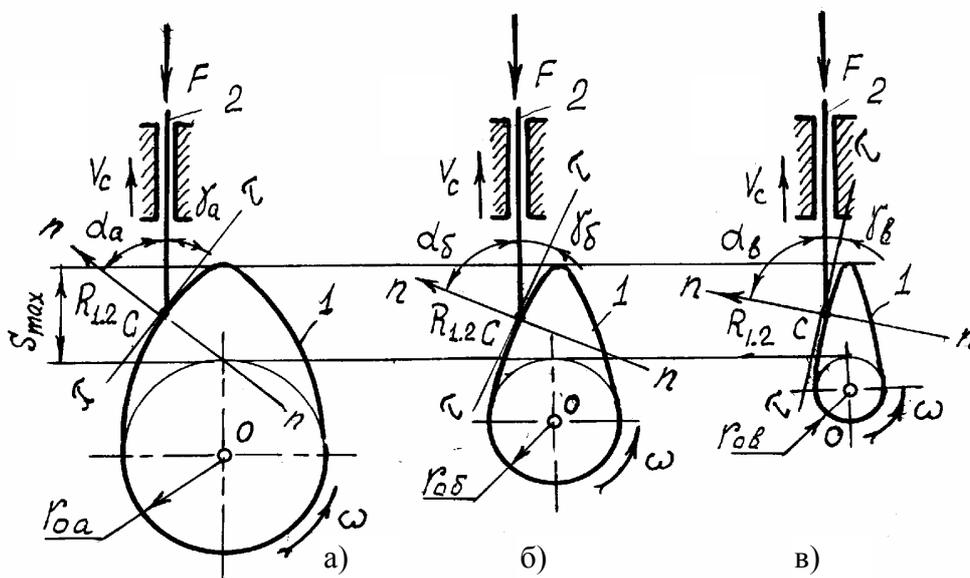


Рис. 6.5. К определению угла давления

Как видно из рисунка, угол давления для одного и того же положения толкателя зависит от r_0 . С уменьшением наименьшего радиуса кулачка угол давления увеличивается и может достигнуть значения, когда движение станет невозможным – произойдет заклинивание.

Здесь $r_{0a} > r_{0б} > r_{0в}$, а углы давления $\alpha_a > \alpha_б > \alpha_в$ (или $\gamma_a > \gamma_б > \gamma_в$).

Угол давления для любой точки профиля α_i можно определить аналитически, не прибегая к построению [2; 7; 14; 16; 17 и др.].

Для механизма с поступательно движущимся толкателем

$$\operatorname{tg} \alpha_i = \frac{(ds/d\varphi)_i \mp e}{S_i + \sqrt{r_0^2 - e^2}}, \quad (6.40)$$

для механизма с коромысловым толкателем

$$\operatorname{tg} \alpha_i = \frac{l \cdot (d\theta/d\varphi)_i \mp [l - l_0 \cdot \cos(\theta_0 + \theta_i)]}{l_0 \cdot \sin(\theta_0 + \theta_i)}. \quad (6.41)$$

(Относительно знаков см. указания к формулам (6.29) и (6.37)).

Следовательно, кулачковый механизм будет работоспособным, если будут выполняться условия:

$$\alpha_i \leq \alpha_{\max} \text{ или } r_i \geq r_{\min},$$

где α_{\max} и r_{\min} – допустимые углы давления и передачи движения, которые зависят от материалов кулачка и толкателя (ролика), степени обработки деталей, условий работы (смазки), а это определяет трение в кинематических парах и другие условия.

Для предварительных расчетов принимают:

$$\alpha_{\max} \approx 30^\circ \dots 40^\circ \quad (\gamma_{\min} \approx 50^\circ \dots 60^\circ)$$

– для механизмов с поступательно движущимся толкателем;

$$\alpha_{\max} \approx 45^\circ \dots 50^\circ \quad (\gamma_{\min} \approx 40^\circ \dots 45^\circ)$$

– для механизмов с коромысловым толкателем.

В кулачковых нереверсивных механизмах с силовым замыканием угол давления на фазе приближения (опускания) толкателя может быть значительно больше и определяется динамикой.

В кулачковых механизмах с поступательно движущимся плоским толкателем угол давления остается постоянным, и если плоскость тарелки толкателя перпендикулярна его оси, то $\alpha = 0^\circ$ ($\gamma = 90^\circ$), что обеспечивает наиболее благоприятные условия работы. В этом случае коэффициент возрастания усилий $\nu = 1$.

Коэффициент возрастания усилий определяется:

$$\nu = \frac{R_{1,2}}{F}, \quad (6.42)$$

где $R_{1,2}$ – величина реакции со стороны кулачка или ролика на толкатель;

F – сила сопротивления, действующая на толкатель (включая и силу инерции).

6.3.5. О выборе закона движения толкателя

Кулачковый механизм, входящий в состав той или иной машины, может выполнять либо основную, либо вспомогательные операции. В одних случаях движение ведомого звена (в данном случае – толкателя) вполне определяется технологическим процессом, для выполнения которого предназначена машина, в других случаях необходимо лишь за определенный промежуток времени перевести ведомое звено из одной позиции в другую. Если в первом случае закон движения ведомого звена можно полагать заданным, то во втором – его можно выбирать. Для периода холостого хода (если таковой имеется) выбор закона движения часто определяется динамикой проектируемого механизма и производительностью машины.

Основным требованием, предъявляемым к конструкции кулачка, является условие износостойкости, или долговечности, его профиля.

Из бесконечно большого числа возможных законов движения толкателя необходимо выбрать наиболее благоприятный с точки зрения динамики работы механизма и его долговечности.

Наиболее распространенными законами движения толкателя являются *параболический, косинусоидальный, синусоидальный, трапецеидальный*. Более универсальным является *полидинамический* закон, при котором ускорение ведомого звена описывается некоторым полиномом. Для быстроходных машин с практически упругими звеньями этот закон наилучший в динамическом отношении [8, 14].

Динамика работы механизма определяется законом изменения ускорения (сила инерции пропорциональна ускорению). Если в отдельных точках ускорение мгновенно изменяется на конечную величину, то при работе механизма будут иметь место так называемые *мягкие удары*. В точках, где ускорения теоретически равны бесконечности (при линейном законе движения), имеют место *жесткие удары*, и это означает, что силы инерции будут равны бесконечности, чего не сможет выдержать ни один механизм. Практически ускорения не могут быть равны бесконечности, благодаря амортизирующему эффекту упругости звеньев. Тем не менее, в закон движения вводятся переходные кривые, позволяющие осуществить плавный переход на участках сопряжения двух линейных законов движения.

Жесткие удары допустимы только в тихоходных механизмах и при малых массах толкателя и связанных с ним частей. Мягкие удары допускаются для кулачков, совершающих менее 2000 об/мин.

При заданном законе перемещения толкателя (линейного или углового для коромыслового толкателя), определяемом технологическим

процессом, скорости и ускорения получают дифференцированием закона движения толкателя.

Часто кулачковые механизмы проектируются по заданному закону изменения аналога ускорения. Тогда интегрированием этого закона, и исходя из начальных условий, определяют аналог скорости и закон движения ведомого звена.

Уравнения наиболее часто используемых законов движения толкателя, а также аналогов скорости и ускорения приведены в работах [2, 7, 8, 12, 18, 19].

На рис. 6.6 показан пример графика движения толкателя S или θ по углу поворота кулачка φ и ниже приведены уравнения для некоторых его законов [20].

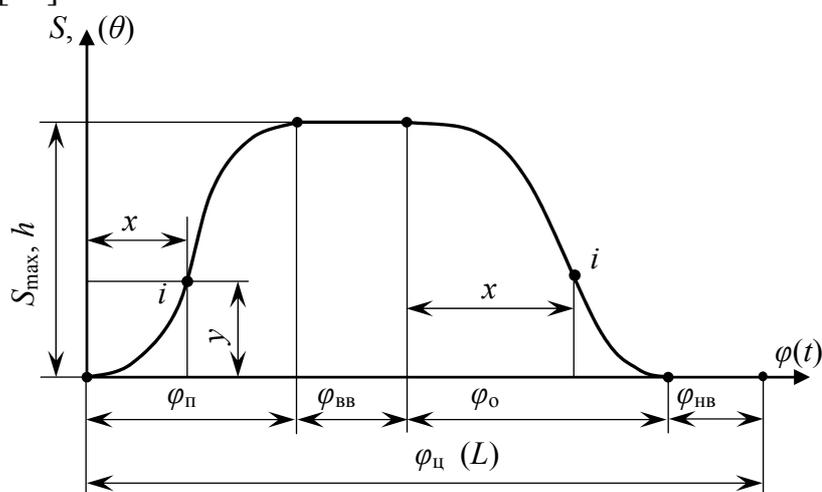


Рис. 6.6. Типовой закон движения толкателя

Закон движения толкателя – *прямая линия*:

$$S = \frac{S_{\max}}{2} \pm S_{\max} \left(\frac{x}{\varphi} - \frac{1}{2} \right). \quad (6.43)$$

Закон движения толкателя – *квадратичная парабола*:

$$S = \frac{S_{\max}}{2} \pm 2S_{\max} \left(\frac{x}{\varphi} - \frac{1}{2} \right) \left(1 - \left| \frac{x}{\varphi} - \frac{1}{2} \right| \right). \quad (6.44)$$

В этих формулах знак «+» – на фазе подъема ($\varphi_{\text{п}}$), знак «-» – на фазе опускания ($\varphi_{\text{о}}$).

Закон движения толкателя – *косинусоида*:

$$S = \frac{S_{\max}}{2} \left[1 \mp \cos \left(\pi \frac{x}{\varphi} \right) \right]. \quad (6.45)$$

Здесь на фазе подъема ($\varphi_{\text{п}}$) знак «-», на фазе опускания ($\varphi_{\text{о}}$) знак «+». В зависимостях (6.43–6.45) приняты следующие обозначения:

S – представляет собой текущие значения S_i (или θ_i);
 S_{\max} – максимальный ход толкателя S или θ (см. рис. 6.6);
 x – текущее значение угла поворота кулачка φ_{1i} :

на фазе подъема $x = \varphi_{1i}$,

на фазе опускания $x = \varphi_{1i} - (\varphi_{\Pi} - \varphi_{\text{ВВ}})$,

φ – численное значение соответствующего фазового угла. (Парабола или косинусоида могут быть построены графически. Графики аналогов скорости и ускорения могут быть построены методом графического дифференцирования.)

6.3.6. Определение размеров, профилирование и силовой расчет кулачкового механизма

Основными размерами кулачковых механизмов рассматриваемого типа являются радиус кулачковой шайбы r_0 , величина смещения e (см. рис. 6.3), межосевое расстояние l_0 (для коромыслового толкателя, рис. 6.4), длина коромысла l (назначается конструктивно).

Максимальный радиус кулачка $r_{0\min}$ (из условия недопущения на фазе подъема заклинивания) может быть определен аналитически [7–9, 15 и др.] или графически [2, 4, 7, 8, 12, 15–19]. Для этого необходимо иметь закон движения толкателя по углу поворота кулачка $S = S(\varphi)$ или $\theta = \theta(\varphi)$, длину коромысла l (для коромыслового толкателя, рис. 6.4).

Минимальный радиус кулачка $r_{0\min}$ (из условия недопущения на фазе подъема заклинивания) может быть определен аналитически [7–9, 15 и др.] или графически [2, 4, 7, 8, 12, 15–19]. Для этого необходимо иметь закон движения толкателя по углу поворота кулачка $S = S(\varphi)$ или $\theta = \theta(\varphi)$, длину коромысла l (для коромыслового толкателя) и минимальные углы передачи движения на фазах подъема и опускания ($\gamma_{\Pi\min}, \gamma_{\text{ОП}\min}$).

Порядок определения $r_{0\min}$ при графическом решении задачи:

1. Вычерчивается в масштабе график $S_C = S_C(\varphi)$.

(Точкой C обозначен конец толкателя – центр ролика, как показано на рис. 6.3 и 6.4).

Для коромыслового толкателя линейное перемещение точки C конца толкателя

$$S_C = l \cdot \theta, \text{ мм}, \quad (6.46)$$

где l – длина коромысла, мм;

θ – размах (ход) коромысла в радианах:

$$\theta = \frac{\theta^\circ \cdot \pi}{180^\circ}. \quad (6.47)$$

В зависимости от формата выбирается линейный масштаб перемещения μ_S [мм/мм]. Тогда высота графика h (см. рис. 6.6):

$$h_C = S_C / \mu_S, \text{ мм}. \quad (6.48)$$

(Линейный масштаб выбирается из ряда *стандартных* значений: 1; 2; 2,5; 4; 5; 10 и т. д.; или 0,1; 0,2; 0,25; 0,5 и т. д.).

Этот график одновременно будет являться и графиком углового перемещения коромысла θ по углу поворота кулачка, т. е. $\theta = \theta(\varphi)$ в масштабе

$$\mu_\theta = \theta / h = S_c / L \cdot h, \text{ 1/мм (рад/мм)}. \quad (6.49)$$

Масштабы по оси абсцисс:

угловой масштаб
$$\mu_\varphi = \frac{2\pi}{L}, \text{ 1/мм}; \quad (6.50)$$

масштаб времен (при заданной частоте вращения кулачка n об/мин)

$$\mu_t = \frac{60}{n \cdot L}, \text{ с/мм}, \quad (6.51)$$

где L – длина графика $S(\varphi)$ (принимается в зависимости от формата чертежа).

Примечания:

1. На графике закона перемещения толкателя, на основании которого в дальнейшем будет построен профиль кулачка, должно быть не менее 8-ми точек, как на фазе подъема, так и на фазе опускания.

2. Если закон движения построен графически (косинусоида, парабола), то на листе необходимо показать метод построения этих кривых.

2. Размеры кулачка (наименьший радиус, величина смещения, расстояние между центрами вращения кулачка и коромысла) определяются из графика $Z_i = Z_i(S)$ в прямоугольной системе координат для поступательно движущегося толкателя или $Z_i = Z_i(\theta)$ в полярной системе координат для коромыслового толкателя (S – линейное перемещение толкателя, θ – угол поворота коромысла).

Отрезки Z_i пропорциональны первой производной $S' = dS/d\varphi$ или $\theta' = d\theta/d\varphi$ (аналоги скорости толкателя), поэтому необходимо построить графики первой производной S' или θ' и на основании теории определить их следующим образом:

– при поступательно движущемся толкателе

$$Z_i = S' / \mu_l = A \cdot \bar{y}_i, \text{ мм}, \quad (6.52)$$

– при коромысловом толкателе

$$Z_i = l \cdot \theta' / \mu_l = B \cdot \overline{y_i}, \text{ мм.} \quad (6.53)$$

Здесь $\overline{y_i}$ – ординаты графика $S'(\varphi)$ или $\theta'(\varphi)$.

Коэффициенты A и B определяются из выражений:

$$A = \mu_{S'} / \mu_l = \frac{\mu_S}{\mu_l \cdot \mu_\varphi \cdot H_1}, \quad (6.54)$$

$$B = L \cdot \mu_{\theta'} / \mu_l = \frac{L \cdot \mu_\theta}{\mu_l \cdot \mu_\varphi \cdot H_1}, \quad (6.55)$$

где $\mu_{S'}$, $\mu_{\theta'}$ – масштабы графиков $S'(\varphi)$ или $\theta'(\varphi)$;

μ_S , μ_θ , μ_φ – масштабы перемещения толкателя, угла поворота коромысла, угла поворота кулачка графиков $S(\varphi)$ или $\theta(\varphi)$;

μ_l – масштаб перемещения толкателя на графике $Z_i(S)$ или изображения коромысла на графике $Z_i(\theta)$ (это масштаб, в котором будут получены размеры кулачка. Удобнее принимать $\mu_l = \mu_S$);

l – длина коромысла;

H_1 – полюсное расстояние при графическом дифференцировании графиков $S(\varphi)$ или $\theta(\varphi)$.

Если коэффициенты A или B будут равны единице, тогда $Z_i = \overline{y_i}$, что значительно упрощает построение графиков $Z_i = S$ или $Z_i = \theta$. Приняв $A=1$ или $B=1$, из выражений (6.54, 6.55) получим величины полюсных расстояний:

$$H_{A1} = \mu_S / \mu_l \cdot \mu_\varphi, \quad \text{мм}, \quad (6.56)$$

$$H_{B1} = L \cdot \mu_\theta / \mu_l \cdot \mu_\varphi, \quad \text{мм}.$$

Приняв полюсное расстояние H , методом графического дифференцирования (метод касательной или метод хорд) строятся графики первой производной $S' = dS/d\varphi$ или $\theta' = d\theta/d\varphi$ – аналоги скоростей. Масштабы графиков:

$$\mu_{S'} = \mu_{ds/d\varphi} = \frac{\mu_S}{\mu_\varphi \cdot H_{A1}}, \quad \frac{\text{мм}}{\text{мм}};$$

$$\mu_{\theta'} = \mu_{d\theta/d\varphi} = \frac{\mu_\theta}{\mu_\varphi \cdot H_{B1}}, \quad \frac{\text{мм}}{\text{мм}}. \quad (6.57)$$

Масштабы линейной и угловой (для коромыслового толкателя) скоростей этих графиков определяются из выражений:

$$\mu_v = \frac{\mu_S}{\mu_\varphi \cdot H_{A1}}, \quad \frac{\text{мм/с}}{\text{мм}} \quad \text{или} \quad \frac{\text{м/с}}{\text{мм}}, \quad (6.58)$$

$$\mu_\omega = \frac{\mu_\theta}{\mu_t \cdot H_{B1}}, \quad \frac{1/\text{с}}{\text{мм}}.$$

3. На основании графиков $S' - \varphi$ или $\theta' - \varphi$ определяются значения отрезков Z по формулам (6.52), (6.53) и строятся графики $Z = Z_i(S)$ в прямоугольной системе координат для поступательно движущегося толкателя (рис. 6.7) или $Z = Z_i(\theta)$ в полярной системе координат для коромыслового толкателя.

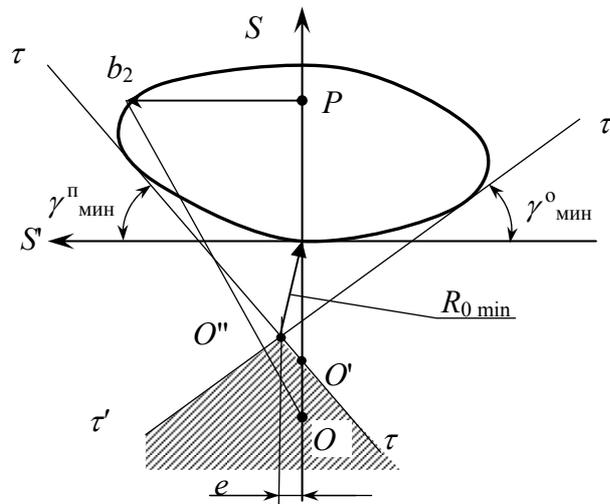


Рис. 6.7. К определению минимального размера кулачка

При построении этих графиков следует иметь в виду, что направление отрезков Z определяется по следующему правилу: необходимо вектор скорости толкателя повернуть на 90° по направлению вращения кулачка.

По заданным углам давления или углам передачи движения находится область возможных положений центра вращения кулачка, и определяются размеры кулачкового механизма: радиус кулачка, величина смещения, расстояние между центрами вращения кулачка и коромысла. Для нахождения области возможных положений центра вращения кулачка под заданными углами передачи движения γ на фазах подъема и опускания проводятся касательные к графику $Z_i = Z_i(\varphi)$ или лучи к графику $Z_i = Z_i(\theta)$.

4. При выбранных размерах кулачка и заданном законе движения толкателя, используя метод обращения движения, строят теоретический профиль кулачка.

5. Выбрав (определив) радиус ролика r_p , строят практический профиль кулачка.

6. Для определения линейного или углового ускорения (необходимых при определении силы или момента инерции толкателя и связанных с ним деталей для силового расчета, для подбора пружины при силовом замыкании) строится график $a = a(t)$ или $\varepsilon = \varepsilon(t)$, для чего следует продифференцировать график $v = v(t)$ или $\omega = \omega(t)$. Масштабы этих графиков будут следующими:

$$\begin{aligned}\mu_a &= \frac{\mu_v}{\mu_t \cdot H_2}, \frac{\text{м/с}^2}{\text{мм}}, \\ \mu_\varepsilon &= \frac{\mu_\omega}{\mu_t \cdot H_2}, \frac{1/\text{с}^2}{\text{мм}}.\end{aligned}\tag{6.59}$$

Здесь H_2 – полюсное расстояние при вторичном дифференцировании.

Масштабы аналогов ускорений:

$$\begin{aligned}\mu_{S''} &= \mu_{d^2s/d\varphi^2} = \frac{\mu_{S'}}{\mu_\varphi \cdot H_2}, \frac{\text{мм}}{\text{мм}}; \\ \mu_{\theta''} &= \mu_{d^2\theta/d\varphi^2} = \frac{\mu_{\theta'}}{\mu_\varphi \cdot H_2}, \frac{\text{мм}}{\text{мм}}.\end{aligned}\tag{6.60}$$

7. Выбрав положение центра вращения кулачка (в области возможных его положений) и соединив его с концами отрезков Z_i на графиках $Z_i = Z_i(S)$ или $Z_i = Z_i(\theta)$, определяют углы передачи движения γ_i и строят график $\gamma = \gamma(\varphi)$.

8. Как было указано ранее, для 2–3 точек на фазе подъема и опускания толкателя определяются координаты профиля аналитически (разд. 6.3.3).

9. Для дальнейшего расчета на прочность деталей кулачкового механизма выполняется силовой расчет – определяются силы, действующие на звенья механизма, реакции в кинематических парах $F_{R0,1}$, $F_{R1,2}$, $F_{R0,2}$ и величина уравновешивающего момента (M_b), приложенного к кулачку.

Силовой расчет методом планов сил выполняется в обычном порядке: расставляются внешние силы, приложенные к звеньям механизма (силы и моменты сопротивления, силы тяжести и силы инерции, если они существенны и др.), реакции в кинематических парах; составляется уравнение равновесия для толкателя, представляющего группу Ассура, и кулачка (начального механизма), в форме сил или моментов и определяются искомые величины из планов сил и уравнений.

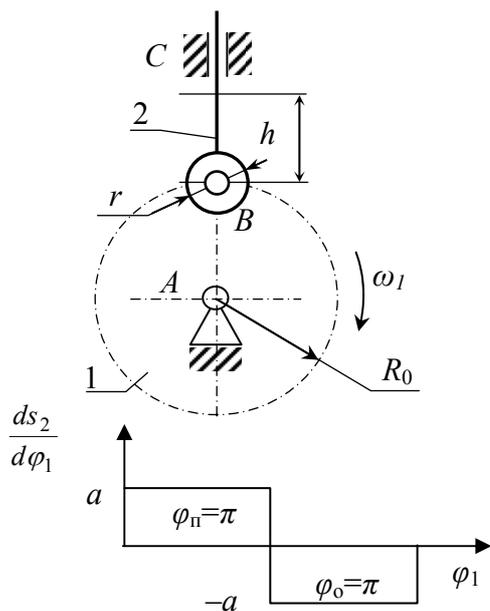
ЗАДАЧИ 173–180

173. Спроектировать несмещенный кулачковый механизм с поступательно движущимся толкателем, снабженным роликом. Построение провести для 12 положений механизма. Известно, что полный ход толкателя $h=42$ мм; закон изменения первой производной от функции положения толкателя задан графиком $\frac{ds_2}{d\varphi_1} = \Phi(\varphi_1)$, радиус ролика

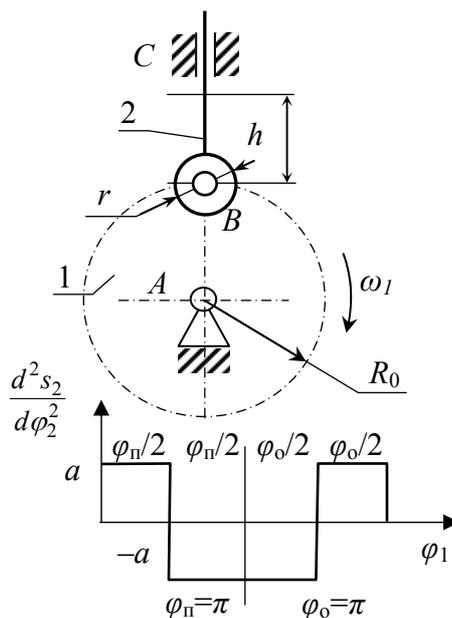
$r=10$ мм, минимальный радиус кулачка $R_0=25$ мм, фазовый угол подъема $\varphi_{\pi}=\pi$, фазовый угол опускания $\varphi_0=\pi$.

174. Спроектировать несмещенный кулачковый механизм с поступательно движущимся толкателем, снабженным роликом. Построение провести для 12 положений механизма. Известно, что полный ход толкателя $h=36$ мм; закон изменения второй производной от функции положения толкателя задан графиком $\frac{d^2s_2}{d\varphi_2^2} = \Phi(\varphi_1)$, радиус ролика $r=10$

мм, минимальный радиус кулачка $R_0=25$ мм, фазовый угол подъема $\varphi_{\pi}=\pi$, фазовый угол опускания $\varphi_0=\pi$.



К задаче 173



К задаче 174

175. Для несмещенного кулачкового механизма с поступательно движущимся толкателем определить величины углов давления для семи положений на фазе подъема. Известно, что полный ход толкателя $h=42$ мм; закон изменения первой производной от функции положения толка-

теля задан графиком $\frac{ds_2}{d\varphi_1} = \Phi(\varphi_1)$, минимальный радиус кулачка $R_0=24$

мм, фазовый угол подъема $\varphi_{\pi}=\pi$, фазовый угол опускания $\varphi_o=\pi$.

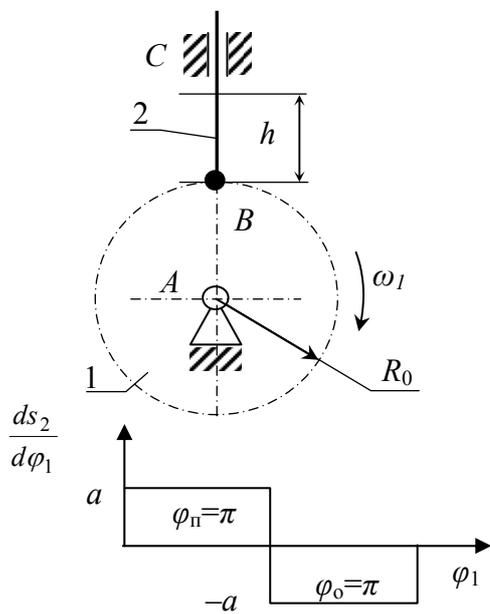
176. Для несмещенного кулачкового механизма с поступательно движущимся толкателем определить величины углов давления для семи положений на фазе подъема. Известно, что полный ход толкателя $h=36$ мм; закон изменения второй производной от функции положения толка-

теля задан графиком $\frac{d^2s_2}{d\varphi_2^2} = \Phi(\varphi_1)$, минимальный радиус кулачка $R_0=20$

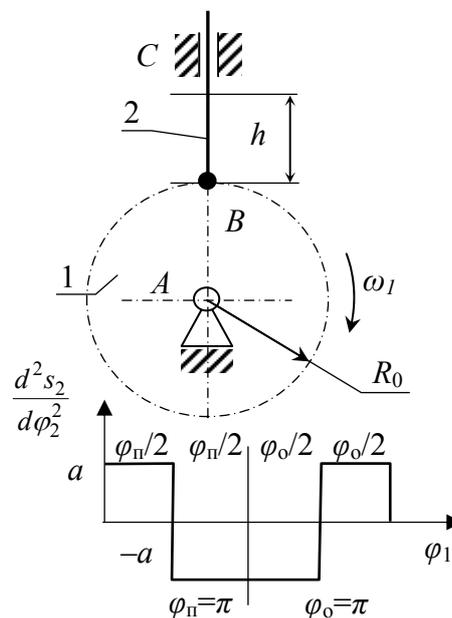
мм, фазовый угол подъема $\varphi_{\pi}=\pi$, фазовый угол опускания $\varphi_o=\pi$.

177. Для кулачкового механизма с несмещенным поступательным толкателем определить радиус кривизны профиля кулачка в месте его касания с толкателем, получаемое при повороте кулачка на угол 45° из положения, показанного на чертеже. Известно, что полный ход толкателя $h=40$ мм; закон изменения второй производной от функции положения толкателя задан графиком $\frac{d^2s_2}{d\varphi_2^2} = \Phi(\varphi_1)$, минимальный радиус ку-

лачка $R_0=40$ мм, фазовый угол подъема $\varphi_{\pi}=\pi$.



К задаче 175

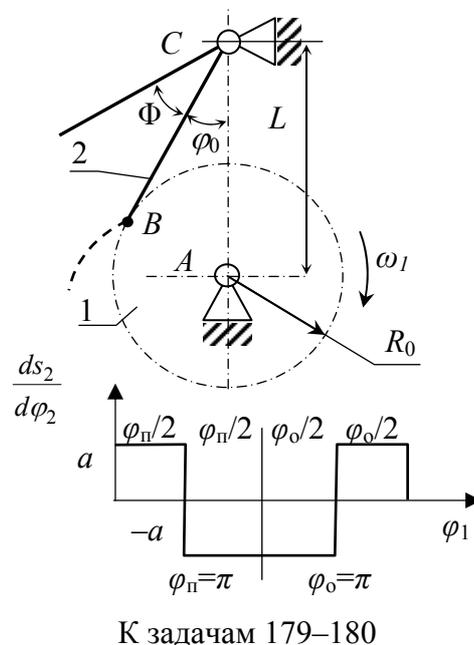
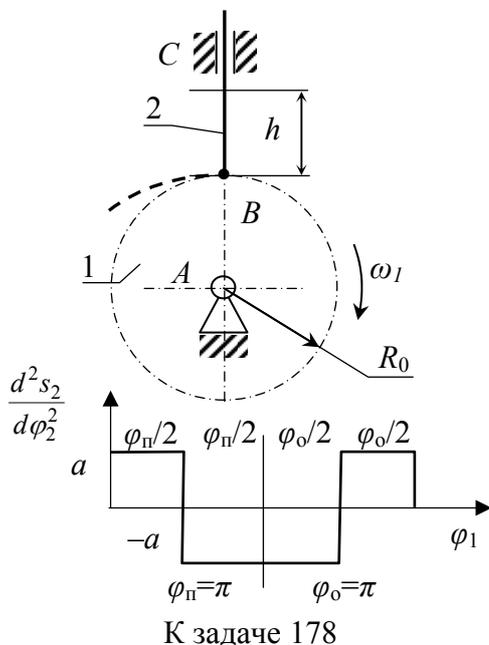


К задачам 176–177

178. Для кулачкового механизма найти полярные координаты точки профиля кулачка, которая находится в месте касания кулачка с концом толкателя при повороте кулачка на угол $\varphi_1=30^\circ$ из положения, указанного на чертеже, если полный ход толкателя $h=40$ мм; закон из-

менения второй производной от функции положения толкателя задан графиком $\frac{d^2 s_2}{d\varphi_2^2} = \Phi(\varphi_1)$, фазовый угол подъема $\varphi_{\pi} = 120^\circ$.

179. Для кулачкового механизма с коромысловым толкателем определить угол давления α в том положении механизма, которое получается в результате поворота кулачка на угол $\varphi_1 = 45^\circ$. Известно, что расстояние между осями вращения кулачка и толкателя $L = 120$ мм; длина толкателя $l = 90$ мм, начальный угол отклонения толкателя от линии центров AC $\varphi_0 = 30^\circ$, ход толкателя $\Phi_{\max} = 30^\circ$, закон изменения первой производной от функции положения представлен графиком $\frac{d^2 s_2}{d\varphi_2^2} = \Phi(\varphi_1)$, фазовый угол подъема $\varphi_{\pi} = 0,5\pi$.



180. Для кулачкового механизма с коромысловым толкателем найти радиус-вектор точки профиля кулачка, которая находится в месте касания профиля кулачка с концом толкателя при повороте кулачка на угол $\varphi_1 = 60^\circ$ из положения, указанного на чертеже, если начальный угол отклонения толкателя от линии центров AC равен $\varphi_0 = 30^\circ$, ход толкателя $\Phi = 30^\circ$, расстояние между осями вращения кулачка и толкателя $L = 80$ мм; длина толкателя $l = 60$ мм, закон изменения первой производной от функции положения представлен графиком $\frac{d^2 s_2}{d\varphi_2^2} = \Phi(\varphi_1)$, фазовый угол подъема $\varphi_{\pi} = 120^\circ$.

ЗАДАЧИ 181, 182

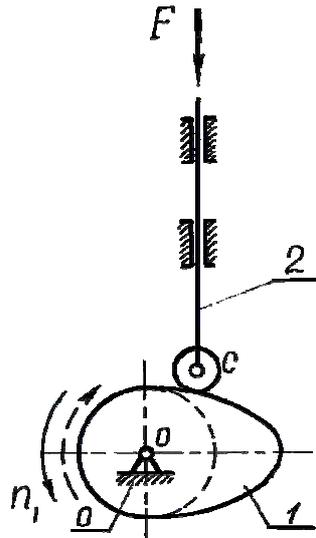
Спроектировать кулачковый механизм минимальных размеров по заданному закону движения толкателя при заданных ограничениях на величину угла передачи движения. Решение задач может быть аналитическим или графическим (по указанию преподавателя). Варианты закона движения толкателя представлены в табл. 6.9, одинаковы для обеих задач. Варианты исходных данных представлены в таблицах к каждой задаче. Предусмотрены возможность выполнения силового анализа.

Данные задания являются многовариантными, могут использоваться для индивидуальных семестровых заданий или в качестве заданий для курсового проектирования.

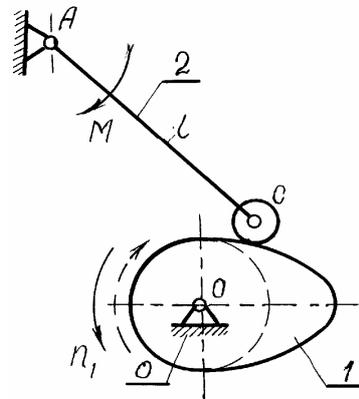
Таблица 6.9

Законы движения толкателя

1		2	
3		4	
5		6	
7		8	



К задаче 181



К задаче 182

181.

Параметры	Вариант				
	1	2	3	4	5
Ход толкателя S , мм	30	32	35	40	42
Мин. угол передачи движения:					
при подъеме $\gamma_{\text{мин}}^{\text{п}}$	65	60	50	60	55
при опускании $\gamma_{\text{мин}}^{\text{о}}$	45	50	40	45	40
Полезное усилие на толкателе F , Н	250	300	350	400	420
Частота вращения кулачка n , 1/мин	100	90	80	70	60
Фазовые углы (градусы):					
подъема $\varphi_{\text{п}}$	180	180	150	120	120
верхнего выстоя $\varphi_{\text{вв}}$	90	60	70	70	80
опускания $\varphi_{\text{о}}$	90	90	100	120	100
Направление вращения кулачка («+» по часовой стрелке, «-» против часовой стрелки)	+	-	+	-	+

182.

Параметры	Вариант				
	1	2	3	4	5
Угол поворота коромыслового толкателя θ	25	28	30	30	32
Длина коромысла l , мм	90	100	110	115	120
Мин. угол передачи движения:					

при подъеме $\gamma_{\text{мин}}^{\text{п}}$	55	50	55	50	45
при опускании $\gamma_{\text{мин}}^{\text{о}}$	50	45	40	50	40
Полезный момент сопротивления M , Нм	300	350	400	450	500
Частота вращения кулачка n , 1/мин	100	90	80	70	60
Фазовые углы (градусы):					
подъема $\varphi_{\text{п}}$	180	180	150	120	120
верхнего выстоя $\varphi_{\text{вв}}$	90	60	90	90	90
опускания $\varphi_{\text{о}}$	90	90	100	120	90
Направление вращения кулачка («+» по часовой стрелке «-» против часовой стрелки)	+	-	+	-	+

Контрольные вопросы

1. Перечислите типы плоских и пространственных зубчатых передач.
2. Сформулируйте и изложите основной закон зацепления (теория Виллиса).
3. Что такое основная окружность?
4. От чего зависят радиусы эвольвенты?
5. Что такое параметры зубчатого зацепления? Перечислите основные параметры.
6. Что такое радиусы начальной и делительной окружности? Чем они различаются?
7. По каким условиям определяется наименьшее число зубьев?
8. В чем заключается метод сдвига режущего инструмента и когда возникает необходимость им воспользоваться?
9. Какие основные размеры корригированного зубчатого колеса изменяются при нарезании со сдвигом режущего инструмента?
10. По каким условиям определяются наименьший и наибольший сдвиги режущего инструмента?
11. В каких случаях при нарезании применяется рейка, а в каких случаях необходимо применять долбяк?
12. Какое наименьшее число зубьев может быть нарезано рейкой без сдвига режущего инструмента?
13. Перечислите основные качественные показатели зубчатого зацепления.

14. Каковы особенности косозубых зубчатых колес, и какие достоинства имеет косозубое зацепление?
15. Что называют рядовым зубчатым редуктором?
16. Что называют планетарным редуктором?
17. Что называют дифференциальным механизмом?
18. Составьте схему двухступенчатого рядового редуктора и запишите формулу для определения его передаточного отношения.
19. Составьте схему планетарного редуктора и сделайте расчет его передаточного отношения.
20. Какова цель применения метода обращения движения при кинематическом анализе планетарных передач?
21. Какова цель применения планетарных редукторов, их достоинства и недостатки?
22. В чем заключаются условия соосности и соседства? Когда они применяются?
23. Назовите основные причины, обусловившие широкое применение кулачковых механизмов.
24. Изобразите основные типы толкателей.
25. Изобразите схемы кулачковых механизмов с плоским и роликовым толкателями.
26. Изобразите схему кулачкового механизма и покажите на ней угол давления.
27. Что такое мягкий и жесткий удары? Когда они возникают?
28. Как определить положение центра вращения кулачка и его наименьший радиус в механизме с поступательным толкателем?
29. При каком размере радиуса ролика может образоваться заостренный профиль кулачка?
30. Сформулируйте цель применения метода обращения движения при профилировании кулачка.

Приложение П1

Значения коэффициентов смещения исходного контура из условий: а – наибольшего повышения контактной прочности; б – прочности на изгиб; в – износостойкости и сопротивления заеданию

Z ₂	x	Z ₁																													
		12						15						18						22						28					
		а	б	в	а	б	в	а	б	в	а	б	в	а	б	в	а	б	в	а	б	в	а	б	в						
12	x ₁	0,38	0,47	0,36																											
	x ₂	0,38	0,23	0,36																											
15	x ₁	0,30	0,53	0,43	0,45	0,58	0,44																								
	x ₂	0,50	0,22	0,34	0,45	0,28	0,44																								
18	x ₁	0,30	0,57	0,49	0,34	0,64	0,48	0,54	0,72	0,54																					
	x ₂	0,61	0,25	0,35	0,64	0,29	0,46	0,54	0,34	0,54																					
22	x ₁	0,30	0,62	0,53	0,38	0,73	0,55	0,60	0,81	0,60	0,68	0,95	0,67																		
	x ₂	0,66	0,28	0,38	0,75	0,32	0,54	0,64	0,38	0,63	0,68	0,39	0,67																		
28	x ₁	0,30	0,70	0,57	0,26	0,79	0,60	0,40	0,89	0,63	0,59	1,04	0,71	0,86	1,26	0,85															
	x ₂	0,88	0,26	0,48	1,04	0,35	0,63	1,02	0,38	0,72	0,94	0,40	0,81	0,86	0,42	0,85															
34	x ₁	0,30	0,76	0,60	0,13	0,83	0,63	0,30	0,93	0,67	0,48	1,08	0,74	0,80	1,30	0,86															
	x ₂	1,03	0,22	0,53	1,42	0,34	0,72	1,30	0,37	0,82	1,20	0,38	0,90	1,08	0,36	1,00															
42	x ₁	0,30	0,75	0,63	0,20	0,92	0,68	0,29	1,02	0,68	0,40	1,18	0,76	0,72	1,24	0,88															
	x ₂	1,30	0,21	0,67	1,53	0,32	0,88	1,48	0,36	0,94	1,48	0,38	1,03	2,33	0,31	1,12															
50	x ₁	0,30	0,58	0,63	0,25	0,97	0,66	0,32	1,05	0,70	0,43	1,22	0,76	0,64	1,22	0,91															
	x ₂	1,43	0,16	0,77	1,65	0,31	1,02	1,63	0,36	1,11	1,60	0,42	1,17	1,60	0,25	1,26															

Приложение П2

Значения эвольвентной функции $\operatorname{inv}(\alpha) = \operatorname{tg}(\alpha) - \alpha$

α°	Пор.	0'	5'	10'	15'	20'	25'	30'	35'	40'	45'	50'	55'
1	0,000	00117	00225	00281	00346	00420	00504	00598	00704	00821	00950	01092	01242
2	0,000	01418	01603	01804	02020	02253	02503	02771	03058	03364	03689	04035	04402
3	0,000	04790	05201	05634	06091	06573	07078	07610	08157	08751	09362	10000	10668
4	0,000	11364	12090	12847	13634	14453	15305	16189	17107	18059	19045	20067	21125
5	0,000	22220	23352	24552	25731	26978	28266	29594	30953	32394	33827	35324	36864
6	0,000	03845	04008	04175	04347	04524	04706	04892	05083	05280	05481	05687	05898
7	0,000	06115	06337	06564	06797	07035	07279	07528	07783	08044	08310	08582	08861
8	0,000	09145	09485	09732	10034	10343	10659	10980	11308	11643	11984	12332	12687
9	0,000	13048	13416	13792	14174	14563	14960	15363	15774	16193	16618	17051	17492
10	0,000	17941	18397	18860	19332	19812	20299	20795	21229	21810	22330	22859	23396
11	0,000	23941	24495	25057	25628	26208	26797	27394	28001	28016	29241	29875	30518
12	0,000	31171	31832	32504	33185	33875	34555	35285	36005	36735	37474	38224	38984
13	0,000	39754	40534	41325	42126	42938	43760	44593	45437	46291	47157	48033	48921
14	0,000	49819	50729	51650	52582	53526	54482	55448	56427	57417	58420	59434	60460
15	0,000	61488	62548	63611	64686	65773	66873	67985	69110	70248	71398	72561	73738
16	0,000	07493	07613	07735	07857	07982	08107	08234	08362	08492	08623	08756	08889
17	0,000	09025	09161	09299	09439	09580	09722	09866	10012	10158	10307	10456	10608
18	0,000	10760	10915	11071	11228	11387	11547	11709	11873	12038	12205	12373	12543
19	0,000	12715	12888	13063	13240	13418	13598	13779	13963	14148	14334	14523	14713
20	0,000	14904	15098	15293	15490	15689	15890	16092	16295	16502	16710	16920	17132
21	0,000	17345	17560	17777	17996	18217	18440	18665	18891	19120	19350	19583	19817
22	0,000	20054	20292	20533	20775	21019	21266	21514	21765	22018	22272	22529	22788

Приложение П2 (продолжение)

Значения эвольвентной функции $\operatorname{inv}(\alpha) = \operatorname{tg}(\alpha) - \alpha$

α°	Пор.	0'	5'	10'	15'	20'	25'	30'	35'	40'	45'	50'	55'
23	0,0	23044	23312	23577	23845	24114	24386	24660	24936	25214	25495	25778	26062
24	0,0	26350	26639	26931	27255	27521	27820	28121	28424	28729	29037	29348	29660
25	0,0	29975	30293	30613	30935	31260	31587	31917	32249	32583	32920	33260	33602
26	0,0	33947	34294	34644	34997	35352	35709	36069	36432	36798	37166	37537	37910
27	0,0	38287	38666	39047	39432	39819	40209	40609	40997	41395	41797	42201	42607
28	0,0	43017	43430	43845	44264	44685	45110	45537	45967	46400	46837	47279	47718
29	0,0	48164	48512	49064	49518	49976	50437	50901	51363	51838	52312	52788	53268
30	0,0	53751	54238	54728	55221	55717	56217	56720	57225	57736	58249	58765	59285
31	0,0	58809	60353	60856	61400	61937	62478	63022	63570	64122	64677	65236	65798
32	0,0	66364	66934	67507	68084	68665	69250	69838	70430	71026	71626	72230	72838
33	0,0	73449	74064	74684	75307	75934	76565	77200	77839	78483	79130	79781	80137
34	0,0	81097	81760	82428	83100	83777	84457	85142	85832	86525	87223	87925	88631
35	0,0	89342	90058	90777	91502	92230	92963	93701	94443	95190	95942	96698	97459
36	0,0	09822	09899	09977	10055	10133	10212	10292	10371	10452	10533	10614	10696
37	0,0	10778	10861	10944	11028	11113	11197	11283	11369	11455	11542	11630	11718
38	0,0	11806	11895	11985	12075	12165	12257	12348	12441	12534	12627	12721	12815
39	0,0	12911	13006	13102	13199	13297	13395	13493	13592	13692	13792	13893	13995
40	0,0	14096	14200	14303	14407	14511	14616	14722	14829	14936	15043	15152	15261
41	0,0	15370	15480	15591	15703	15815	15928	16041	16156	16270	16386	16502	16619
42	0,0	16737	16855	16974	17093	17214	17335	17457	17579	17702	17826	17951	18076
43	0,0	18202	18329	18537	18585	18714	18844	18975	19106	19238	19371	19505	19639
44	0,0	19774	19910	20047	20185	20323	20463	20603	20743	20885	21028	21171	21315

Приложение П2 (окончание)

Значения эвольвентной функции $\text{inv}(\alpha) = \text{tg}(\alpha) - \alpha$

α°	Пор.	0'	5'	10'	15'	20'	25'	30'	35'	40'	45'	50'	55'
45	0,	21460	21606	21753	21900	22049	22198	22348	22499	22651	22804	22958	23112
46	0,	23268	23424	23582	23740	23899	24059	24220	24382	24545	24709	24874	25040
47	0,	25206	25374	25543	25713	25883	26055	26228	26401	26576	26752	26929	27107
48	0,	27285	27465	27646	27828	28012	28196	28381	28567	28755	28943	29133	29324
49	0,	29516	29709	29903	30098	30295	30492	30691	30891	31092	31295	31498	31703
50	0,	31909	32116	32324	32534	32745	32957	33171	33385	33601	33818	34037	34257
51	0,	34578	34700	34924	35149	35376	35604	35833	36063	36295	36529	36763	36999
52	0,	37237	37476	37716	37958	38202	38446	38693	38941	39190	39441	39693	39947
53	0,	40202	40459	40717	40977	41239	41502	41767	42034	42302	42571	42843	43116
54	0,	43390	43667	43945	44225	44506	44789	45074	45361	45650	45940	46232	46526
55	0,	46822	47119	47419	47720	48023	48323	48635	48944	49255	49568	49882	50199
56	0,	50518	50838	51161	51486	51813	52141	52472	52805	53141	53478	53817	54159
57	0,	54503	54849	55197	55547	55900	56255	56612	56972	57333	57698	58064	58433
58	0,	58804	59178	59554	59933	60314	60697	61083	61472	61868	62257	62653	63052
59	0,	63454	63858	64265	64674	65086	65501	65913	66340	66763	67189	67619	68050

Пример пользования таблицей: 1. Найти inv угла $\alpha=14^\circ 30'$. По таблице находим $\text{inv}14^\circ 30' = 0,0055448$.

2. Найти inv угла $\alpha=22^\circ 18' 25''$. Поскольку такого табличного значения нет, проводим линейную интерполяцию, для чего находим значения функции на ближайшем большем и ближайшем меньшем табличных значениях аргумента $\text{inv}22^\circ 15' = 0,020775$, $\text{inv}22^\circ 20' = 0,021019$. Табличная разность на $5'$ равна $0,000244$. $\Delta\alpha=3'25''=205''$, следовательно, $\Delta\text{inv}\alpha=0,000244 \cdot 205/300=0,000171$ и $\text{inv}22^\circ 18' 25''=0,020775+0,000171=0,020946$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сборник задач по теории механизмов и машин./ И.И. Артоболевский, Б.В. Эдельштейн. – М.: Наука. Глав. ред. физико-математической литературы, 1975. – 256 с.
2. *Артоболевский И. И.* Теория механизмов и машин. – М.: Наука, 1988. – 639 с.
3. Теория механизмов и машин / К.В. Фролов, С.А. Попов, А.К. Мусатов и др.; Под ред. К.В. Фролова. – М.: Высш. шк., 1987. - 496 с.
4. *Юдин В.А., Петрокас Л.В.* Теория механизмов и машин. – М.: Высш. шк., 1977. – 527 с.
5. Теория механизмов и машин. Курсовое проектирование: Учеб. пособие / В.Т. Горбенко, М.В. Горбенко. – Изд. 2-е, испр. и дополн. – Томск: Изд-во Том. политехн. ун-та, 2007. – 144 с.
6. *Крайнев А.Ф.* Словарь-справочник по механизмам. – М.: Машиностроение, 1981. – 438 с.
7. Теория механизмов / Под ред. В.А. Гавриленко. – М.: Высш. шк., 1973. – 510 с.
8. *Кожевников С.Н.* Теория механизмов и машин. – М.: Машиностроение, 1973. – 591 с.
9. Курсовое проектирование по теории механизмов и машин / А.С. Кореняко, Л.И. Кременштейн, С.Д. Петровский и др. – Киев: Высш. шк., 1970. – 330 с.
10. *Кудрявцев В.Н.* Планетарные передачи. – М.; Л.: Машиностроение, 1966. – 308 с.
11. *Никоноров В.А., Карягина В.В.* Подбор чисел зубьев планетарных редукторов типа 2К–Н со сдвоенными сателлитами // Известия МВТУ им. Баумана. Сер. Машиностроение. – 1971. – № 11. – С. 45–50.
12. *Попов С.А.* Курсовое проектирование по теории механизмов и машин. – М.: Высш. шк., 1986. – 295 с.
13. Справочник по корригированию зубчатых колес / Т.П. Болотовская, И.А. Болотовский, Г.С. Бочаров и др. – М.: Машиностроение, 1967. – 215 с.
14. *Юдин В.А., Барсов Г.А., Чупин Ю.Н.* Сборник задач по теории механизмов и машин. – М.: Высш. шк., 1982. – 215 с.
15. *Баранов Г.Г.* Курс теории механизмов и машин. – М.: Машиностроение, 1975. – 494 с.

16. *Левитская О.Н., Левитский Н.И.* Курс теории механизмов и машин. –М.: Высш. шк. 1985. –279 с.
17. *Левитский Н.И.* Теория механизмов и машин. –М.: Наука, 1979. – 574 с.
18. *Попов Н.Н.* Расчет и проектирование кулачковых механизмов. – М.: Машиностроение. 1965. – 304 с.
19. Курсовое проектирование по теории механизмов и машин / под ред. Девойно Г.Н. –Минск: Высш. шк. 1986. –285 с.
20. *Абрамов Б.М.* Типовые задачи по теории механизмов и машин. – Харьков: Вища шк., 1976. –207 с.

Учебное издание

ГОРБЕНКО Михаил Владимирович
ГОРБЕНКО Татьяна Ивановна

СБОРНИК ЗАДАЧ И УПРАЖНЕНИЙ
ПО ТЕОРИИ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН

Учебное пособие

Компьютерная верстка М.В. Горбенко
Дизайн обложки

Подписано к печати 2011. Формат 60x84/16. Бумага «Классика».

Печать RISO. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. .

Заказ . Тираж 250 экз.



Национальный исследовательский Томский политехнический
университет
Система менеджмента качества
Томского политехнического университета сертифицирована
NATIONAL QUALITY ASSURANCE по стандарту ISO 9001:2008



ИЗДАТЕЛЬСТВО  ТПУ. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30.