ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №4
«СИНТЕЗ РЕГУЛЯТОРОВ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ»

Цель работы: освоить основы работы с типовыми и модальными регуляторами систем автоматического управления.

Задачи:

– синтез типовых регуляторов:

1) задать на свое усмотрение передаточную функцию неизменяемой части исследуемой системы четвертого порядка;

2) настроить ПИД-регулятор для исследуемой системы любым известным методом;

3) увеличить и уменьшить каждый из коэффициентов ПИД-регулятора, построить переходные характеристики системы, оценить влияние изменения коэффициентов регулятора на время переходного процесса, перерегулирование и время нарастания переходной характеристики;

4) скорректировать полученные ранее настройки регулятора на основе найденных в предыдущем пункте закономерностей, привести переходную характеристику системы со скорректированным регулятором;

– синтез модального регулятора полного порядка:

1) задать модель объекта управления в форме передаточной функции третьего порядка, преобразовать модель к форме Коши, получить передаточную функцию системы с модальным регулятором полного порядка;

2) задать желаемое значение времени переходного процесса;

3) рассчитать коэффициенты регулятора с помощью составления желаемого характеристического полинома;

4) рассчитать коэффициенты регулятора с помощью характеристического полинома, нормированного по распределению Баттерворта;

5) рассчитать коэффициенты регулятора с помощью характеристического полинома, нормированного по биномиальному распределению.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ СПРАВКА

1 Аппроксимация объекта управления апериодическим звеном первого порядка с транспортной задержкой

Очевидно, что перед расчетом параметров регулятора необходимо получить математическую модель объекта управления. В том случае, если переходная характеристика объекта управления имеет выраженный апериодический характер, удобно строить математическую модель в форме апериодического звена первого порядка с транспортной задержкой. Изображение переходной характеристики такого звена имеет вид:

$$H(s) = \frac{K \cdot e^{-L \cdot s}}{s \cdot (T \cdot s + 1)},$$

где K – статический коэффициент передачи звена; L – время запаздывания; T – постоянная времени. Найти значения параметров такого звена можно, проведя дополнительные построения на переходной характеристике объекта управления. Пример таких построений для переходной характеристики звена четвертого порядка приведен на рисунке 1.

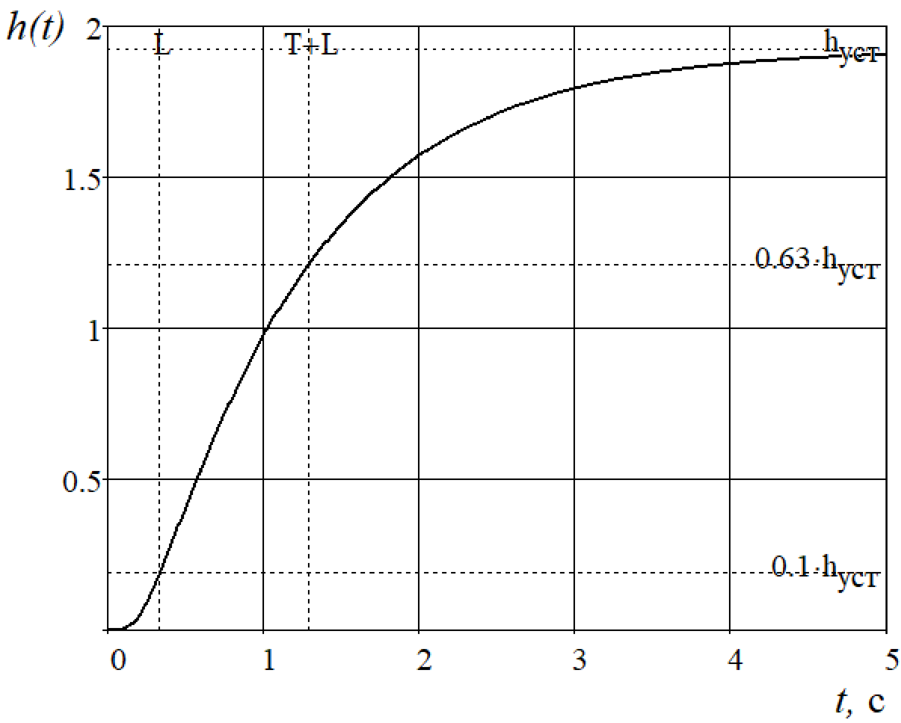


Рисунок 1 – Параметрическая идентификация объекта управления по переходной характеристике

Как показано на рисунке 1, для расчета параметров искомого звена необходимо отметить на переходной характеристике моменты времени, в которые она достигает 10% и 63% от своего установившегося значения. В таком случае, время запаздывания L принимается равным времени достижения переходной характеристикой 10% от установившегося значения. Сумма постоянной времени T и времени запаздывания L определяется временем достижения переходной характеристикой 63% от своего установившегося значения. Статический коэффициент передачи звена K равен отношению установившегося значения переходной характеристики исследуемого объекта и значения подаваемого на вход объекта сигнала. В случае, показанном на рисунке 1, время запаздывания L равно 0.33 с, сумма постоянной времени и времени запаздывания равна 1.29 с, соответственно постоянная времени T равна 0.96 с; статический коэффициент передачи K при этом равен 1.92. Результат такой аппроксимации показан на рисунке 2.

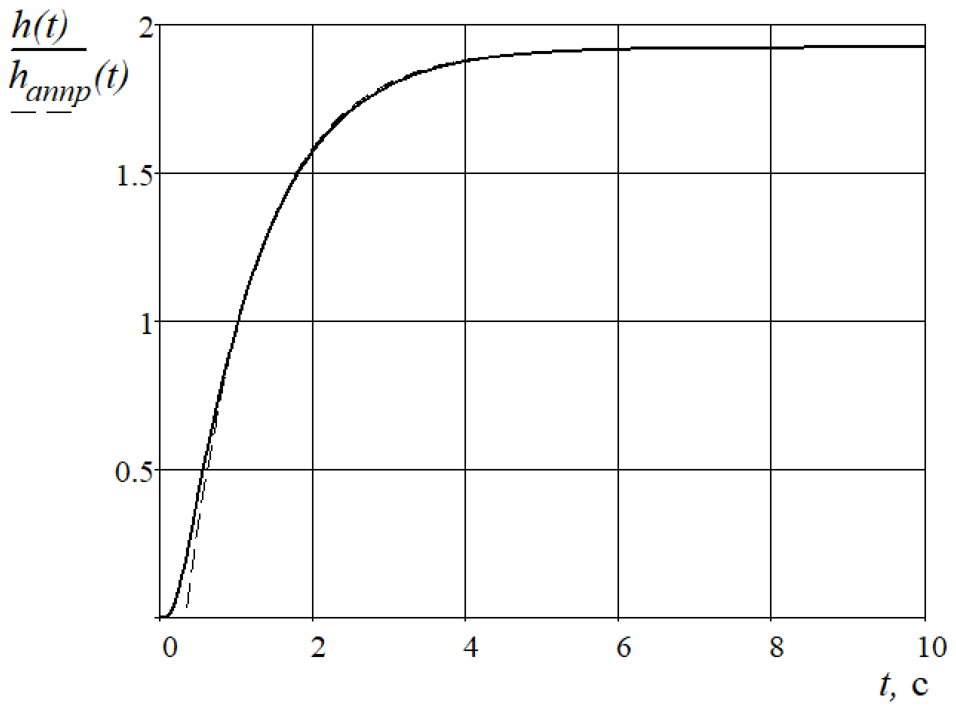


Рисунок 2 – Исходная и аппроксимированная переходные характеристики объекта управления

Из рисунка 2 очевидно, что аппроксимация звена четвертого порядка моделью первого порядка проведена успешно. Рассмотрим далее методы настройки П-, ПИ- и ПИД-регуляторов на основе параметров переходной характеристики объекта управления.

2 Метод Циглера-Никольса

Для настройки регуляторов по методу Циглера-Никольса необходимо дополнить построения, показанные на рисунке 1, как показано на рисунке 3.

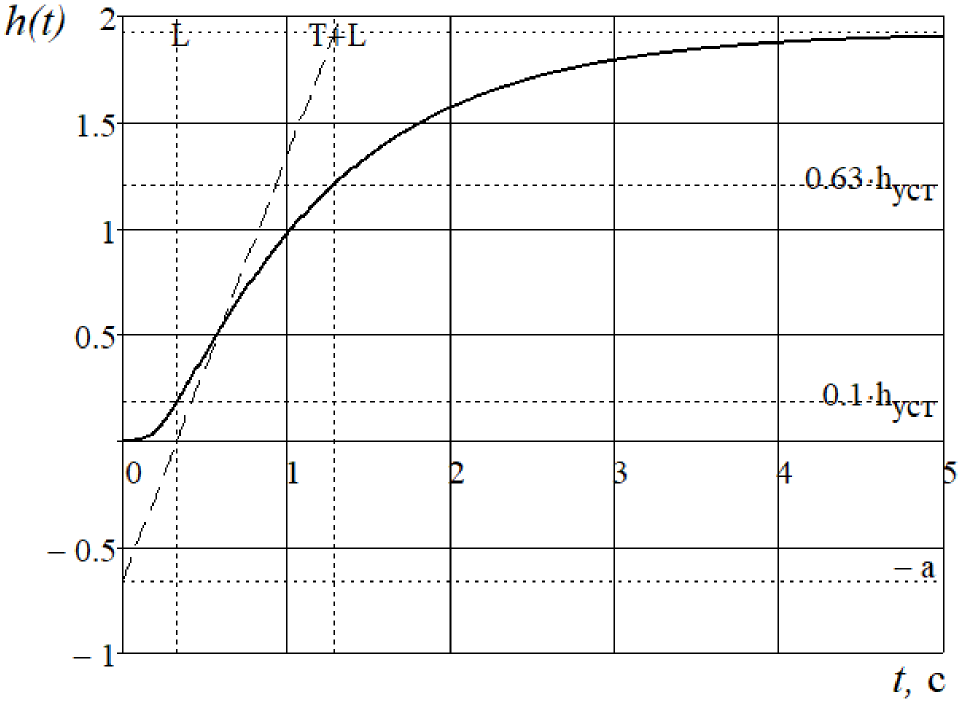


Рисунок 3 – Поиск параметров звена для настройки регуляторов по методу Циглера-Никольса

В частности, необходимо провести прямую через точки с координатами $(L;0)$ и $(L+T;h_{уст})$ и отметить параметр a, который равен расстоянию между осью времени и точкой пересечения построенной прямой и оси ординат. В показанном на рисунке 3 случае параметр a равен 0.66.

Далее будем считать, что передаточные функции П-, ПИ- и ПИД-регулятора имеют следующий вид:

$$W_P(s) = K_P,$$

$$W_{PI}(s) = K_P \cdot \left(1 + \frac{1}{T_I \cdot s}\right),$$

$$W_{PID}(s) = K_P \cdot \left(1 + \frac{1}{T_I \cdot s} + T_D \cdot s\right).$$

Ранее был рассмотрен метод Циглера-Никольса, позволяющий рассчитать настройки регулятора на основе параметров автоколебаний в системе. Существует также модификация метода Циглера-Никольса, позволяющая находить настройки регулятора по параметрам переходной характеристики объекта. Очевидно, использование модифицированного метода упрощает работу с объектом, так как не требует вывода системы на границу устойчивости. Формула настроек П-, ПИ- и ПИД-регулятора приведена в таблице 1. В приведенных формулах использованы те же обозначения, что в рисунке 3.

Таблица 1 – Формулы для расчета параметров регулятора по методу Циглера-Никольса

	K_P	T_I	T_D
П-регулятор	$\frac{1}{a}$	–	–
ПИ-регулятор	$\frac{0.9}{a}$	$3 \cdot L$	–
ПИД-регулятор	$\frac{1.2}{a}$	$2 \cdot L$	$0.5 \cdot L$

ХОД РАБОТЫ

1 Синтез ПИД-регулятора методом Циглера-Никольса

Предположим, что объект управления описан следующей передаточной функцией:

$$W(s) = \frac{4000}{s^4 + 25 \cdot s^3 + 606 \cdot s^2 + 2620 \cdot s + 3000}.$$

Построим переходную характеристику исследуемого объекта и аппроксимируем этот объект моделью первого порядка.

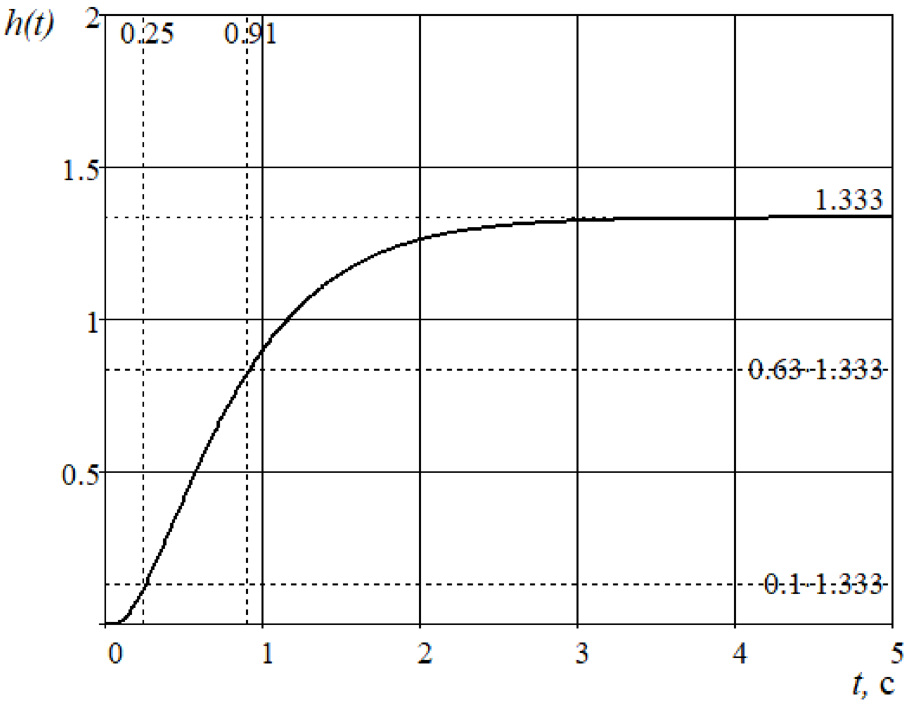


Рисунок 1.1 – Переходная характеристика объекта управления

Из рисунка 1.1 видно, что статический коэффициент передачи K равен 1.333; время запаздывания L равно 0.25 с, постоянная времени T равна 0.66 с. В таком случае изображение аппроксимированной переходной характеристики имеет вид:

$$H(s) = \frac{1.333 \cdot e^{-0.25 \cdot s}}{0.66 \cdot s + 1} \cdot \frac{1}{s}.$$

Точность аппроксимации можно оценить, построив в одних координатах исходную и аппроксимированную переходные характеристики (см. рисунок 1.2).

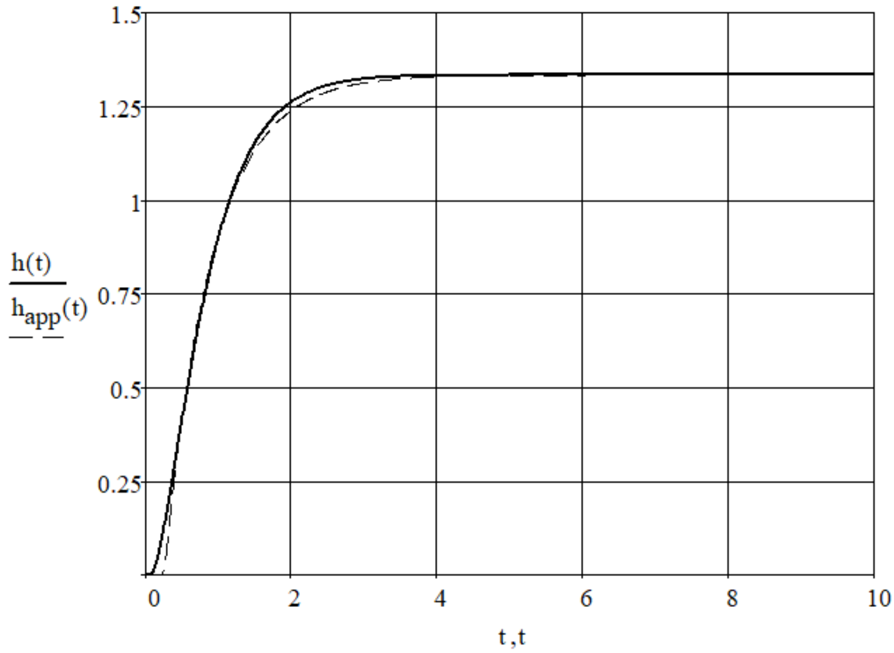


Рисунок 1.2 – Исходная и аппроксимированная переходные характеристики исследуемого объекта

Рассмотрим далее настройку ПИД-регулятора для управления данным объектом с помощью метода Циглера-Никольса и метода Чина-Хронеса-Ресвика. Выполним дополнительные построения на переходной характеристике объекта (см. рисунок 1.3).

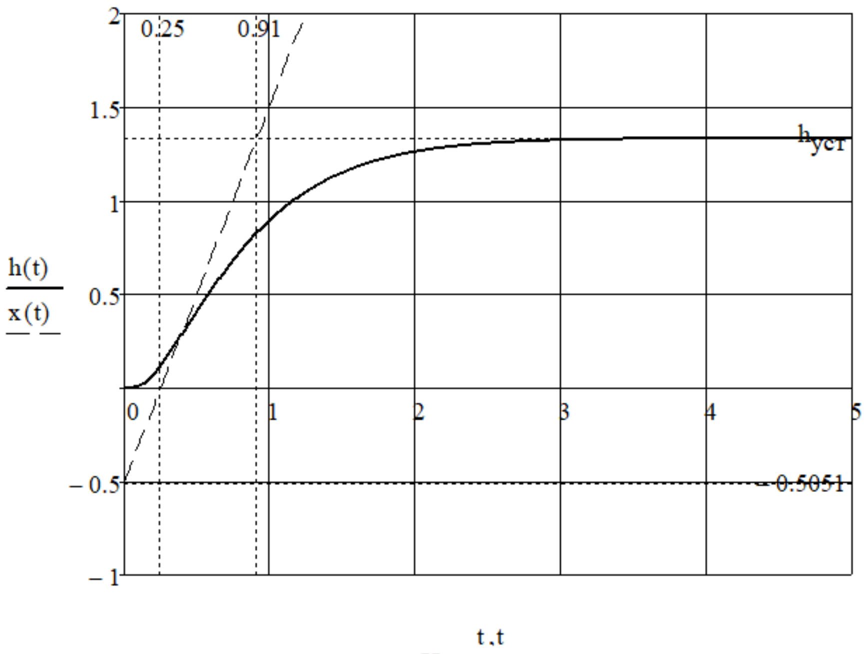


Рисунок 1.3 – Дополнительные построения на переходной характеристике объекта управления

Исходя из рисунка 1.3, можно утверждать, что параметр a равен 0.5051. С учетом того, что время запаздывания L найдено ранее и принятого равным 0.25 с, можно утверждать, что все необходимые параметры для настройки ПИД-регулятора найдены. Воспользовавшись формулами из Таблицы 1, найдем значения параметров регулятора.

$$a = 0.505 \qquad T = 0.66 \qquad L = 0.25$$

$$W_{PID}(s, K_p, T_i, T_d) := K_p \cdot \left(1 + \frac{1}{T_i \cdot s} + T_d \cdot s\right)$$

$$W_{ZN}(s) := W_{PID}\left(s, \frac{1.2}{a}, 2 \cdot L, 0.5 \cdot L\right) \text{ float}, 6 \ \rightarrow 0.296971 \cdot s + \frac{4.75153}{s} + 2.37577$$

Рисунок 1.4 – Расчет параметров регулятора и его передаточной функции средствами Mathcad

Для оценки качества регулирования построим переходную характеристику исследуемой системы с синтезированным регулятором.

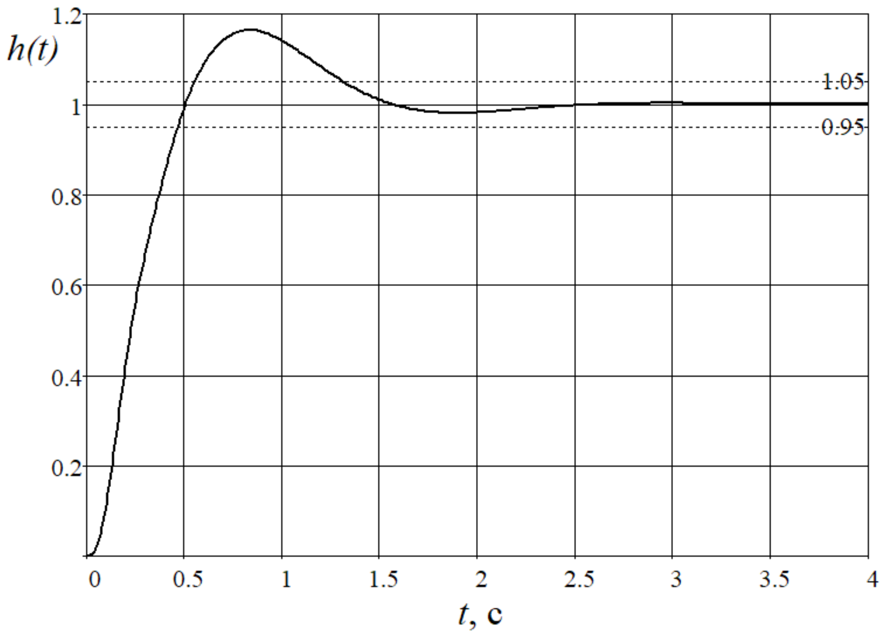


Рисунок 1.5 – Переходная характеристика системы с синтезированным ПИД-регулятором

Скорректируем вручную найденные значения параметров регулятора для улучшения динамических свойств системы, а именно для уменьшения перерегулирования и уменьшения времени переходного процесса. Уменьшим пропорциональный коэффициент регулятора до 2.5, а интегральный коэффициент – до 2.2. Передаточная функция скорректированного регулятора и переходная характеристика системы с ним показаны ниже.

$$W_{PID}(s) = 2.5 + \frac{2.2}{s} + 0.296971 \cdot s$$

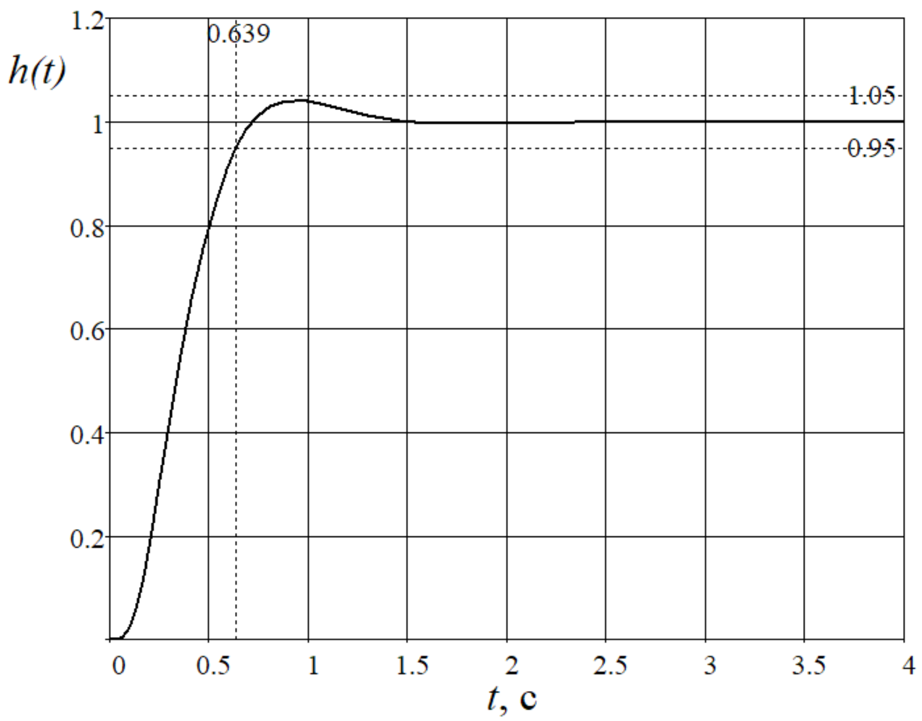


Рисунок 1.6 – Переходная характеристика системы со скорректированным ПИД-регулятором

Исходя из рисунка 1.6, можно утверждать, что за счет корректировки параметров ПИД-регулятора удалось сократить время переходного время переходного процесса в два раза, а перерегулирование – более чем в три раза.

2 Синтез модального регулятора полного порядка

2.1 Вывод математической модели синтезируемой системы

Известно, что обобщенный объект управления исследуемой системы описывается следующей передаточной функцией:

$$W_O(s) = \frac{25}{0.1 \cdot s^3 + 2 \cdot s^2 + 10 \cdot s + 35}.$$

Указанная передаточная функция соответствует следующему дифференциальному уравнению:

$$0.1 \cdot \frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{dt}^3} + 2 \cdot \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{dt}^2} + 10 \cdot \frac{\mathrm{d}\, y}{\mathrm{dt}} + 35 \cdot y = 25 \cdot u.$$

Перейдем к системе дифференциальных уравнений первого порядка. Для этого введем замены переменных так, чтобы:

$$x_1 = y,$$

$$x_2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} y,$$

$$x_3 = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dt}^2} y.$$

В таком случае система дифференциальных уравнений первого порядка, описывающая объект исследуемой системы, может быть записана следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} x_1 = x_2, \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} x_2 = x_3, \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} x_3 = -20 \cdot x_3 - 100 \cdot x_2 - 350 \cdot x_1 + 250 \cdot u. \end{cases}$$

На основе полученной системы дифференциальных уравнений первого порядка изобразим структурную схему исследуемого объекта на рисунке ниже.

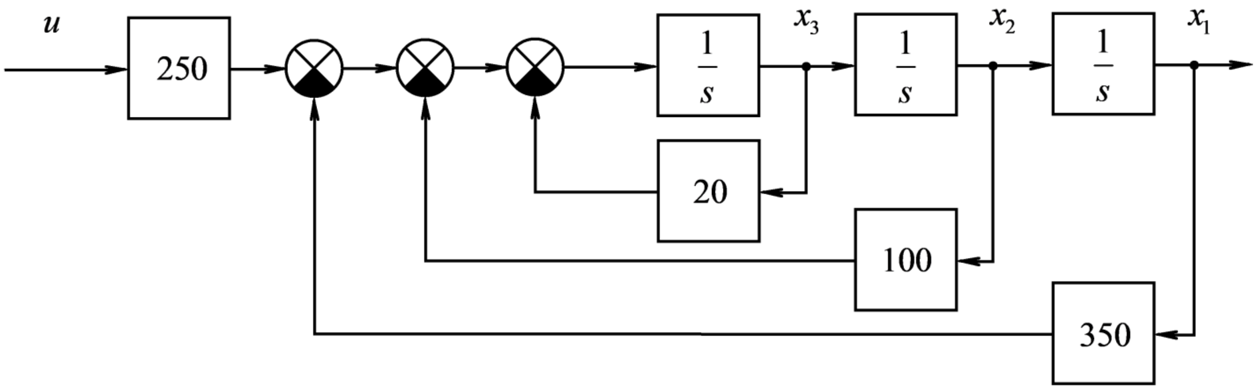


Рисунок 2.1 – Структурная схема обобщенного объекта управления исследуемой системы

Добавим в обратные связи настраиваемые коэффициенты k_1, k_2, k_3. Структурная схема такой системы показана на рисунке ниже.

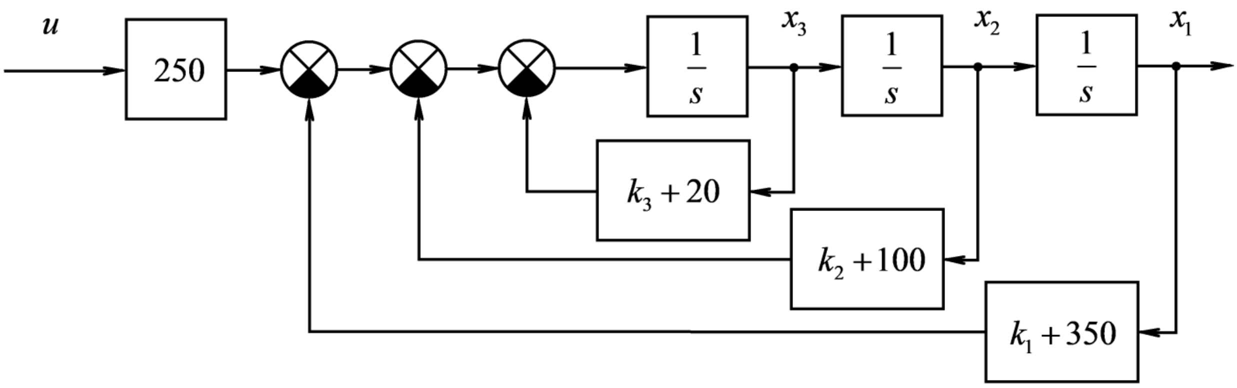


Рисунок 2.2 – Структурная схема системы с регулятором

Воспользовавшись правилами преобразования структурных схем, найдем эквивалентную передаточную функцию исследуемой системы:

$$W(s,k_1,k_2,k_3) = \frac{250}{s^3 + (k_3+20)\cdot s^2 + (k_2+100)\cdot s + k_1 + 350}.$$

Из приведенной передаточной функции очевидно, что регулятор позволяет влиять на коэффициенты характеристического полинома системы и, соответственно, двигать полюсы системы. Далее будем работать с характеристическим полиномом системы.

2 Синтез модального регулятора по желаемому характеристическому полиному

Перед расчетом параметров регулятора необходимо определить цель синтеза, задав желаемые значения прямых показателей качества и определив по ним соответствующие значения корневых показателей качества.

Известно, что время переходного процесса t_n зависит от степени устойчивости системы η следующим образом:

$$t_n \approx \frac{3 \div 4}{\eta}.$$

В свою очередь перерегулирование σ определяется степенью колебательности системы μ. Указанные параметры связаны между собой следующей формулой:

$$\sigma \le e^{-\frac{\pi}{\mu}}.$$

Предположим, что необходимо обеспечить в синтезируемой системе переходный процесс длительностью в 5 с и перерегулированием менее 10%. Такому качеству регулирования соответствует степень устойчивости системы $\eta \approx 0.800$ и степень колебательности системы $\mu \le 1.364$. Зададим желаемый характеристический полином, обеспечивающий найденные значения корневых показателей качества:

$$\begin{aligned} D(s) &= (s + 0.8 + j \cdot 0.8) \cdot (s + 0.8 - j \cdot 0.8) \cdot (s + 5) = \\ &= s^3 + 6.600 \cdot s^2 + 9.280 \cdot s + 6.400. \end{aligned}$$

С учетом того, что характеристический полином исследуемой системы имеет следующий вид:

$$D(s, k_1, k_2, k_3) = s^3 + (k_3 + 20) \cdot s^2 + (k_2 + 100) \cdot s + k_1 + 350,$$

можем найти значения коэффициентов модального регулятора, обеспечивающего желаемое расположение полюсов:

$$\begin{aligned} k_1 &= -343.600, \\ k_2 &= -90.720, \\ k_3 &= -13.400. \end{aligned}$$

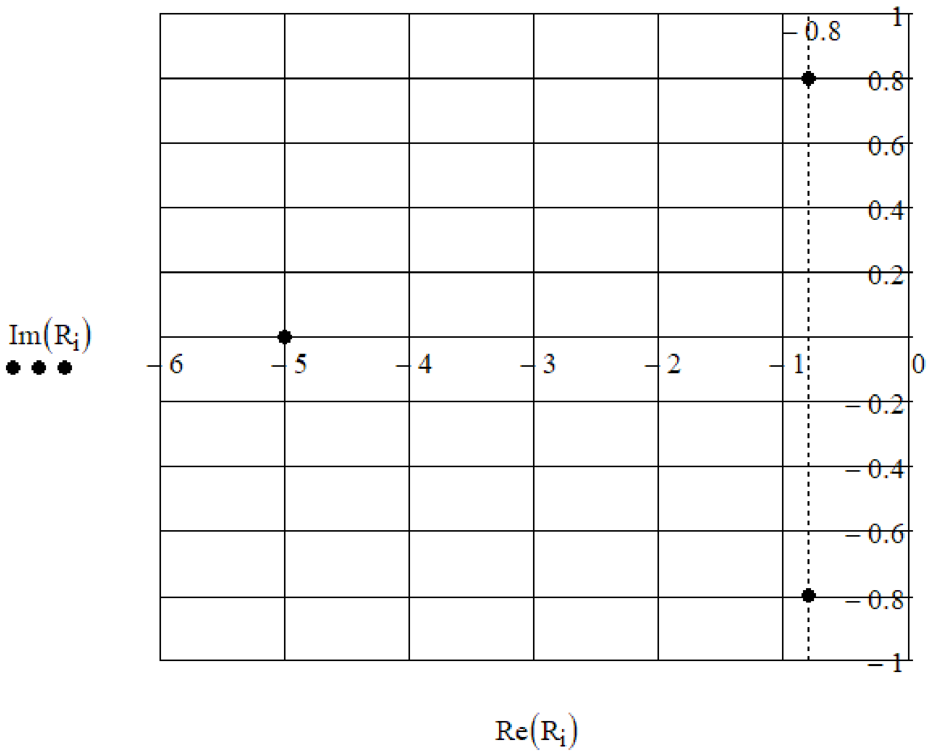


Рисунок 2.3 – Расположение полюсов системы с регулятором, синтезированным по желаемому характеристическому полиному

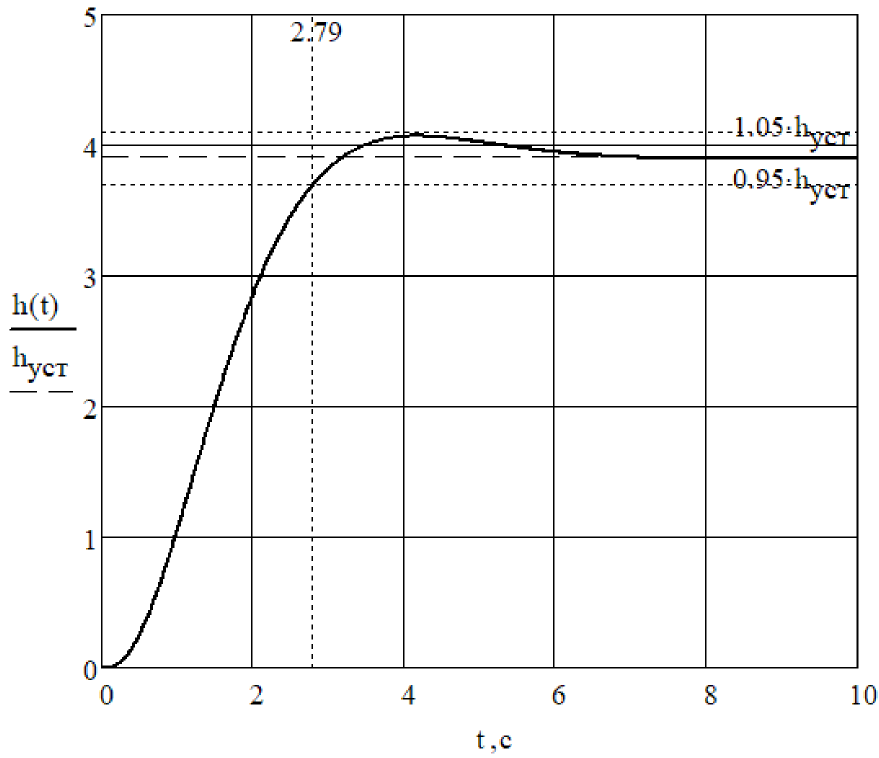


Рисунок 2.4 – Переходная характеристика исследуемой системы

2.3 Синтез модального регулятора по распределению Баттерворта

Нормированные полиномы Баттерворта задаются в соответствии с таблицей 2.1.

Таблица 2.1 – Полиномы Баттерворта для системы различного порядка

Порядок системы n	Нормированный полином
1	$s+\omega_0$
2	$s^2+1.4\cdot\omega_0\cdot s+\omega_0^2$
3	$s^3+2\cdot\omega_0\cdot s^2+2\cdot\omega_0^2\cdot s+\omega_0^3$
4	$s^4+2.6\cdot\omega_0\cdot s^3+3.4\cdot\omega_0^2\cdot s^2+2.6\cdot\omega_0^3\cdot s+\omega_0^4$
5	$s^5+3.24\cdot\omega_0\cdot s^4+5.24\cdot\omega_0^2\cdot s^3+5.24\cdot\omega_0^3\cdot s^2+3.24\cdot\omega_0^4\cdot s+\omega_0^5$

Значения коэффициентов полинома выбираются в соответствии со значением среднегеометрического корня ω_0, которое в свою очередь рассчитывается по формуле

$$\omega_0=\frac{\tau_n}{t_n},$$

где τ_n – безразмерная величина, характеризующая время переходного процесса; t_n – желаемое время переходного процесса. Значение τ_n выбирается в соответствии с порядком системы из таблицы 2.2.

Таблица 2.2 – Показатели универсальных переходных функций для распределения полюсов по Баттерворту

Порядок системы n	1	2	3	4	5
τ_n	3	3	6	6.9	7.6
σ, %	–	4.6	8.1	11.1	12.7

Таким образом, для обеспечения длительности переходного процесса равно 10 с в исследуемой системе третьего порядка нужно выбрать по таблице

2.2 $\tau_n = 6$, тогда $\omega_0 = 0.6$, а желаемый характеристический полином будет иметь следующий вид:

$$D(s) = s^3 + 1.2 \cdot s^2 + 0.72 \cdot s + 0.216.$$

Для обеспечения найденных значений коэффициентов характеристического полинома коэффициенты регулятора должны принять следующие значения:

$$k_1 = -349.784,$$
$$k_2 = -99.280,$$
$$k_3 = -18.800.$$

Расположение полюсов синтезированной системы показано на рисунке ниже.

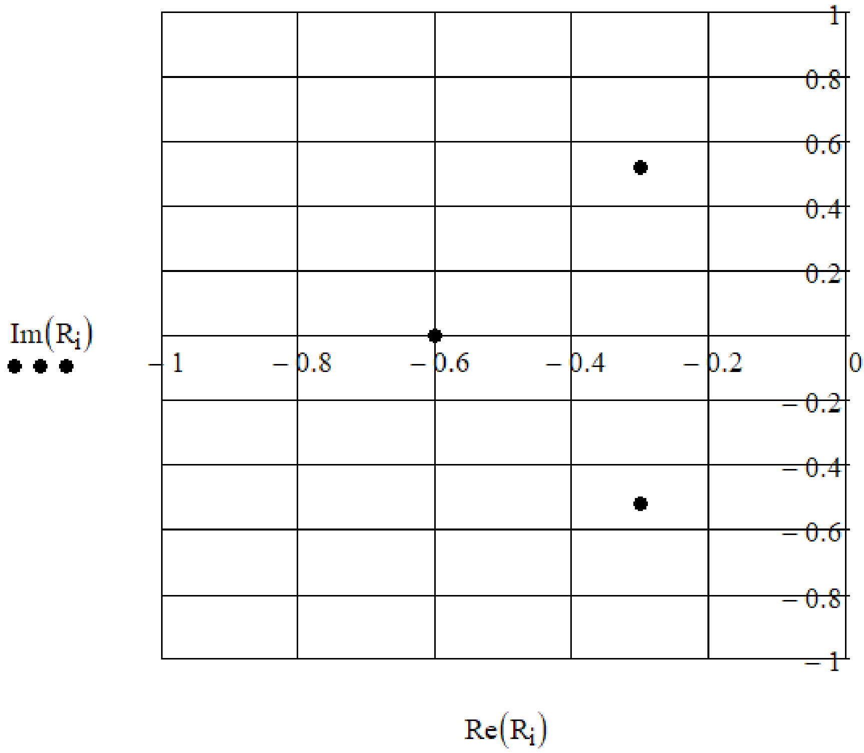


Рисунок 2.5 – Расположение полюсов системы с модальным регулятором, синтезированным по распределению Баттерворта

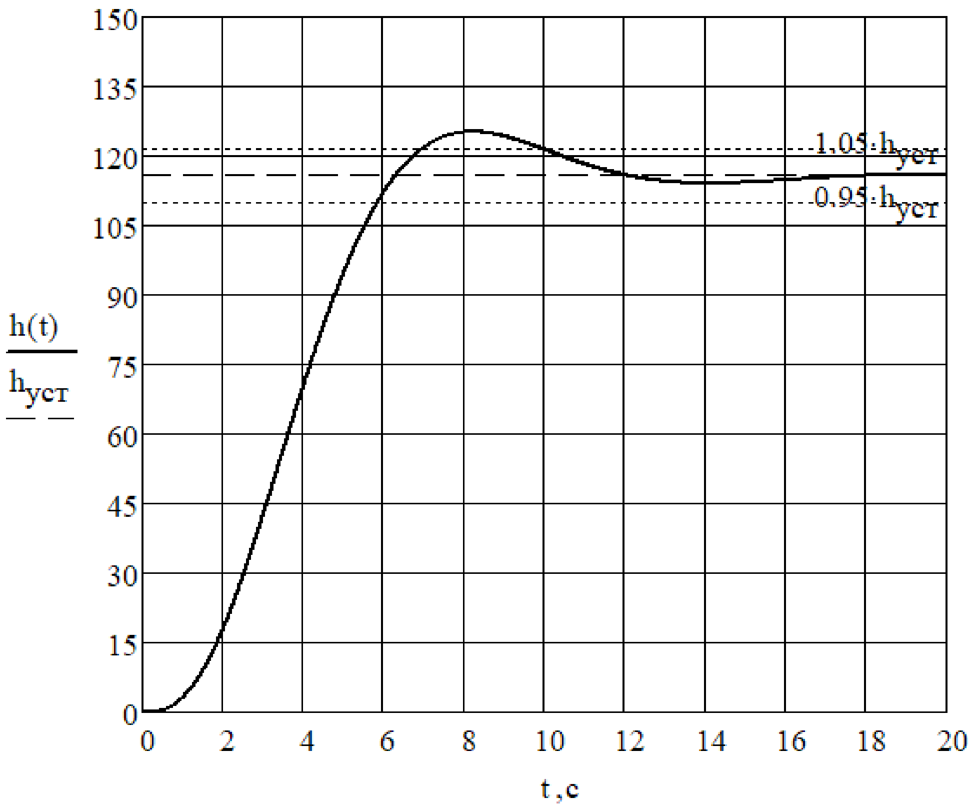


Рисунок 2.6 – Переходная характеристика системы с модальным регулятором, синтезированным по распределению Баттерворта

2.4 Синтез модального регулятора полного порядка по биномиальному распределению

Полиномы с биномиальным распределением задаются следующим выражением:

$$D(s) = (s + \omega_0)^n,$$

где ω_0 – среднегеометрический корень, n – порядок системы.

В свою очередь, значения среднегеометрического корня определяются по ранее приведенной формуле, значения τ_n приведены в таблице 2.3.

Таблица 2.3 – Значения среднегеометрического корня для биномиального распределения

Порядок системы n	1	2	3	4	5
τ_n	3	4.75	6.3	7.8	9.1

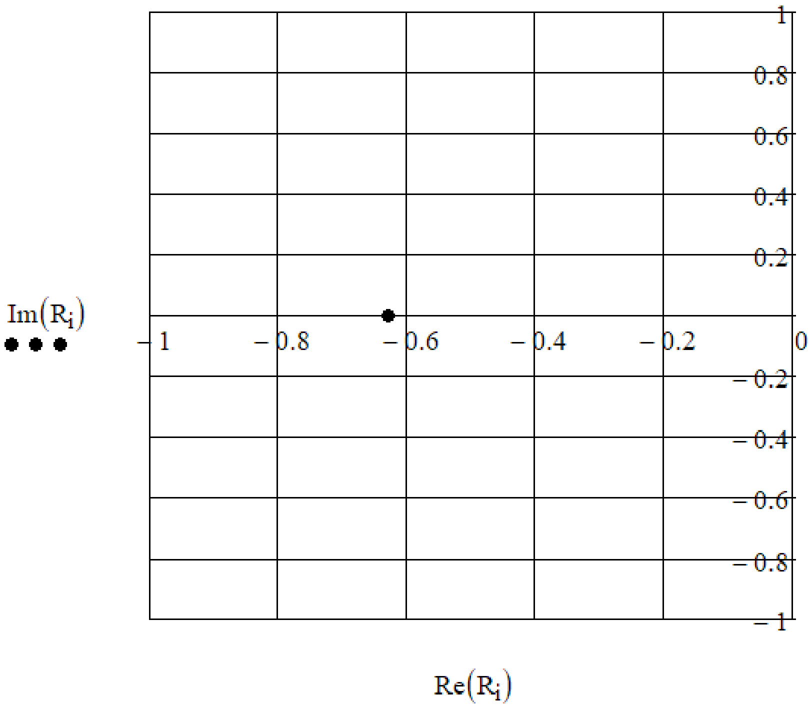
Таким образом, для обеспечения переходного процесса длительностью в 10 с в системе третьего порядка необходимо выбрать $\tau_n = 6.3$. В таком случае $\omega_0 = 0.63$, а желаемый характеристический полином задан следующим выражением:

$$D(s) = s^3 + 1.8900 \cdot s^2 + 1.1907 \cdot s + 0.2501.$$

Для обеспечения таких значений коэффициентов характеристического полинома значения коэффициентов регулятора должны принять следующие значения:

$$k_1 = -349.74995,$$
$$k_2 = -98.80930,$$
$$k_3 = -18.11000.$$

Синтезированная система имеет три кратных полюса, расположение которых показано на рисунке 2.7. Переходная характеристика такой системы показана на рисунке 2.8.



$$R = \begin{pmatrix} -0.63 \\ -0.63 \\ -0.63 \end{pmatrix}$$

Рисунок 2.7 – Расположение полюсов системы с модальным регулятором, синтезированным по биномиальному распределению

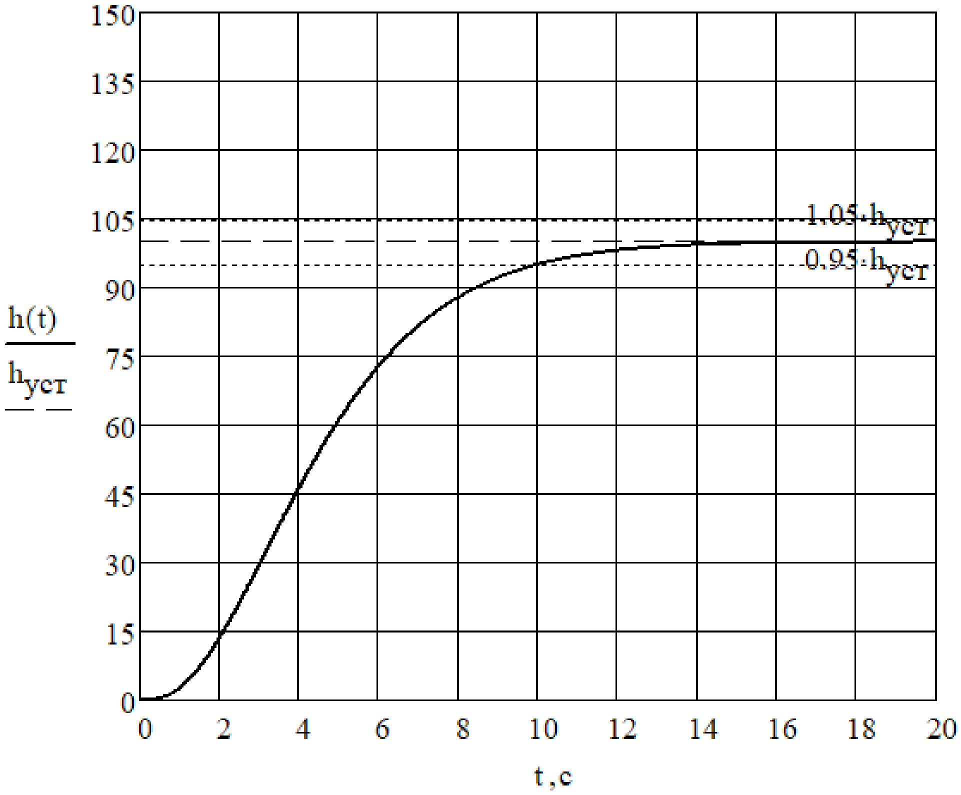


Рисунок 2.8 – Переходная характеристика системы с модальным регулятором, синтезированным по биномиальному распределению