ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №3
# «ОЦЕНКА КАЧЕСТВА РЕГУЛИРОВАНИЯ И АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ»

Цель работы: освоить основные методы оценки качества работы систем автоматического управления и анализа их устойчивости.

Задачи:

1) задать на свое усмотрение передаточную функцию неизменяемой части исследуемой системы не ниже второго порядка; получить передаточную функцию замкнутой системы, состоящей из П-регулятора и неизменяемой части;

2) с помощью критерия Гурвица определить критическое значение передаточного коэффициента регулятора;

3) задать три значения коэффициента П-регулятора, приводящие систему в устойчивое, граничное и неустойчивое состояния;

4) для каждого из заданных значений исследовать систему:

– по переходной характеристике;

– по корням характеристического уравнения;

– по критерию Михайлова;

– по критерию Найквиста;

5) оценить качество работы исследуемой системы в устойчивом состоянии:

– определить значения прямых показателей качества;

– определить значения корневых показателей качества;

6) оформить отчет.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ СПРАВКА

1 Оценка устойчивости систем автоматического управления средствами ППП Mathcad

Предположим, что поставлена задача оценить устойчивость системы автоматического управления, состоя, передаточная функция которой имеет вид:

$$W(s) = \frac{100}{s^3 + 5 \cdot s^2 + 28 \cdot s + 110}.$$

На примере этой задачи последовательно рассмотрим оценку устойчивости системы по переходной характеристике, корням характеристического уравнения, критерию Гурвица, критерию Михайлова и критерию Найквиста.

1.1 Оценка устойчивости системы по переходной характеристике

Для оценки устойчивости системы можно воспользоваться ее переходной характеристикой. Согласно определению, устойчивость системы – это ее способность возвращаться в устойчивое состояние при отсутствии внешних возмущений, выводящих систему из него. Следовательно, ***переходная характеристика устойчивой системы сходится к установившемуся значению*** с течением времени; переходная характеристика неустойчивой системы – расходится. На границе устойчивости система выходит на режим автоколебаний.

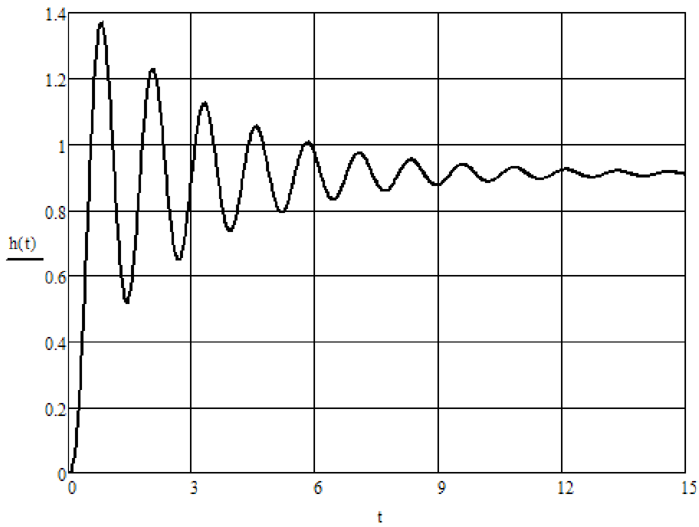


Рисунок 1 – Построение переходной характеристики исследуемой системы с помощью Mathcad

На рисунке 1 изображена переходная характеристика исследуемой системы, построенная с помощью функции *invlaplace* из состава Mathcad. Очевидно, что она сходится к установившемуся значению, следовательно, исследуемая система устойчива.

## 1.2 Оценка устойчивости системы по корням характеристического уравнения

Устойчивость системы автоматического управления также можно оценить по корням ее характеристического уравнения. Известно, что ***все корни характеристического уравнения устойчивой системы расположены в левой полуплоскости***. Наличие хотя бы одного корня в правой полуплоскости означает, что система неустойчива. Расположение хотя бы одного корня на мнимой оси означает, что система находится на границе устойчивости.

Характеристическое уравнение системы можно получить, приравняв к нулю знаменатель передаточной функции замкнутой системы. В рассматриваемом случае характеристическое уравнение системы имеет вид:

$$s^3 + 5 \cdot s^2 + 28 \cdot s + 110 = 0.$$

На рисунке 2 изображен фрагмент листа Mathcad, позволяющий выделить характеристический полином исследуемой системы с помощью функции *denom*, приравнять его к нулю и решить полученное характеристическое уравнение с помощью функции *solve*, записав корни в матрицу-столбец. Для большей наглядности корни характеристического уравнения выведены на комплексную плоскость.

$$D(s) := \mathrm{denom}(W(s)) \rightarrow s^3 + 5 \cdot s^2 + 28 \cdot s + 110$$

$$R := D(s) \left| \begin{matrix} \mathrm{solve}, s \\ \mathrm{float}, 6 \end{matrix} \right. \rightarrow \begin{pmatrix} -4.36208 \\ -0.318961 + 5.01155i \\ -0.318961 - 5.01155i \end{pmatrix} \qquad i := 0..\mathrm{last}(R)$$

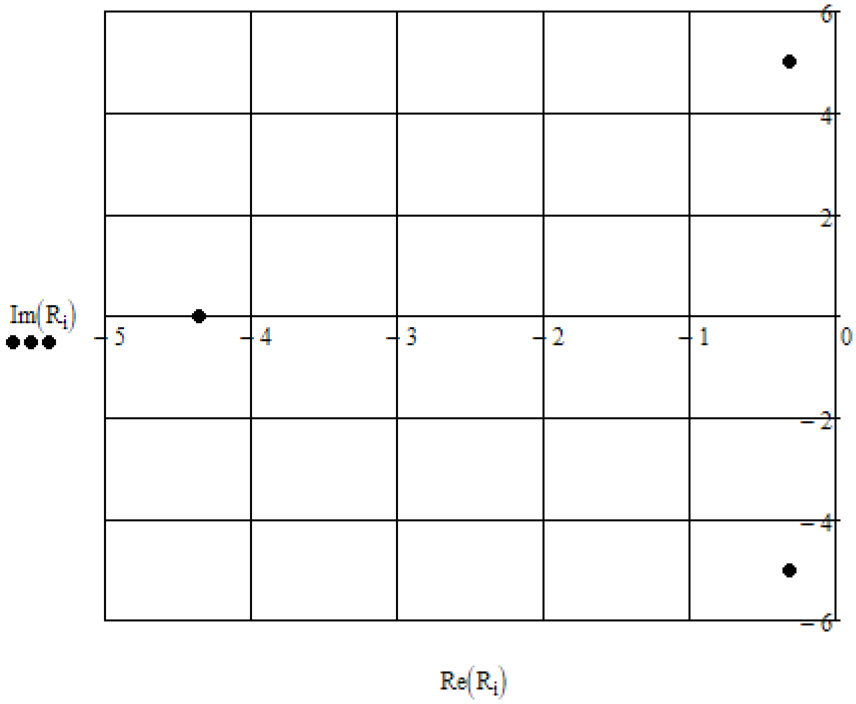


Рисунок 2 – Расчет корней характеристического уравнения исследуемой системы и отображение их на комплексную плоскость с помощью Mathcad

Исходя из рисунка 2, можно утверждать, что система устойчива, так как все корни ее характеристического уравнения имеют отрицательные вещественные части и, следовательно, расположены в левой полуплоскости.

### 1.3 Оценка устойчивости системы по критерию Гурвица

Рассмотрим далее критерий Гурвица – один из алгебраических критериев устойчивости. Согласно критерию Гурвица ***система устойчива, если все ее определители Гурвица и старший коэффициент характеристического полинома положительны.*** Если хотя бы один из определителей Гурвица отрицателен, то система неустойчива. Если определитель Гурвица равен нулю, то система находится на границе устойчивости.

Для того чтобы составить определители Гурвица, необходимо привести характеристический полином к форме

$$D(s) = a_0 \cdot s^n + a_1 \cdot s^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \cdot s + a_n,$$

где $n$ – порядок характеристического полинома, $a_i$ – его коэффициенты.

В рассматриваемом случае верно следующее:

$$D(s) = a_0 \cdot s^3 + a_1 \cdot s^2 + a_2 \cdot s + a_3,$$
$$a_0 = 1;\ a_1 = 5;\ a_2 = 28;\ a_3 = 110.$$

Затем необходимо составить коэффициенты полинома в главную диагональ матрицы $n \times n$, начиная с $a_1$. После этого выше главной диагонали нужно записать коэффициенты характеристического полинома с увеличением индекса; ниже главной диагонали – с уменьшением индекса. При этом заменить нулями коэффициенты со значениями индекса больше $n$ или меньше нуля. В рассматриваемом случае получим:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 110 & 0 \\ 1 & 28 & 0 \\ 0 & 5 & 110 \end{vmatrix} = 3300.$$

Далее необходимо получить определители Гурвица меньших порядков. Для этого запишем отдельно его главные миноры:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 110 \\ 1 & 28 \end{vmatrix} = 30;$$
$$\Delta_1 = a_1 = 5.$$

Таким образом, все определители Гурвица положительны, старший коэффициент характеристического полинома $a_0$ также положителен, следовательно, система устойчива.

## 1.4 Оценка устойчивости системы по критерию Михайлова

Критерий Михайлова основа на годографе Михайлова, показывающем зависимость значений характеристического полинома от частоты. Известно, что ***годограф Михайлова устойчивой системы начинается на положительной вещественной полуоси при частоте*** $\omega = 0$ ***и с увеличением частоты до*** $+\infty$ ***проходит против часовой стрелки*** $n$ ***квадрантов***, где $n$ – порядок характеристического полинома. Нарушение формулировки критерия означает, что система неустойчива, либо находится на границе устойчивости. Годограф Михайлова неустойчивых систем проходит квадранты в противоположном направлении; годограф систем на границе устойчивости проходит через начало координат.

Воспользуемся Mathcad для построения годографа Михайлова. Соответствующий фрагмент листа представлен на рисунке 3.

$$D(s) := \mathrm{denom}(W(s)) \rightarrow s^3 + 5 \cdot s^2 + 28 \cdot s + 110 \qquad \omega := 0, 0.01..6$$

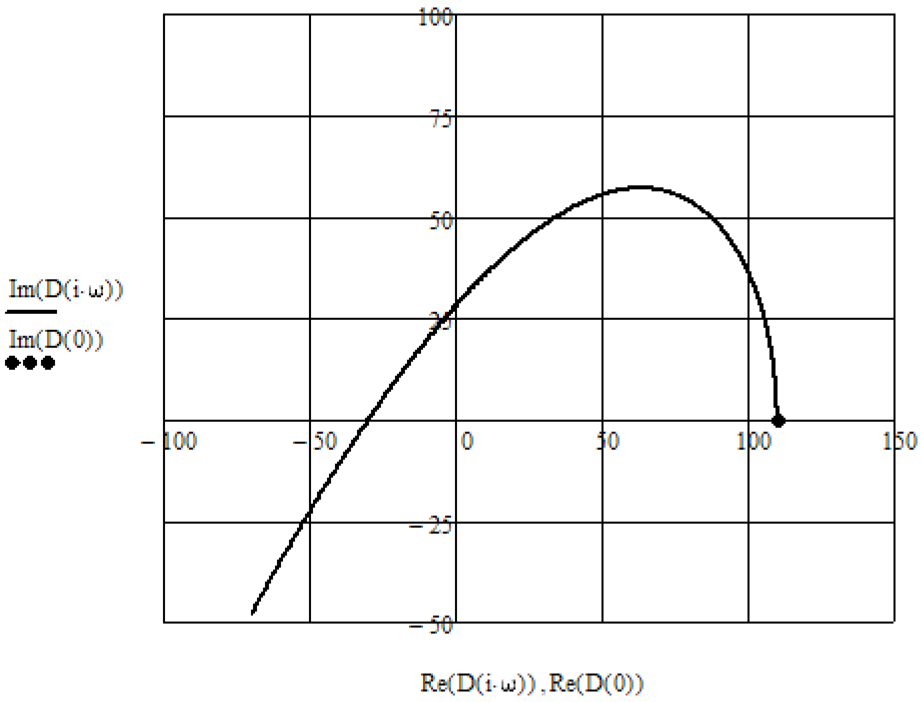


Рисунок 3 – Построение годографа Михайлова с помощью Mathcad

Уравнение годографа Михайлова было получено подстановкой $s \rightarrow j \cdot \omega$ для характеристического полинома исследуемой системы. Верхний предел изменения частоты был подобран эмпирически.

Очевидно, что годограф Михайлова, изображенный на рисунке 3, соответствует формулировке критерия, а именно начинается на положительной вещественной полуоси и с увеличением частоты проходит против часовой стрелки 3 квадранта комплексной плоскости. Следовательно, система устойчива.

### 1.5 Оценка устойчивости системы по критерию Найквиста

Критерий Найквиста позволяет судить об устойчивости замкнутых систем по АФЧХ разомкнутых систем. Согласно критерию Найквиста замкнутая ***система устойчива, если АФЧХ разомкнутой системы, иначе говоря – диаграмма Найквиста, не охватывает точку комплексной плоскости с координатами*** $(-1; j0)$. Данная формулировка подходит для тех случаев, когда характеристическое уравнение разомкнутой системы не имеет правых корней. Более сложные случаи в этой работе рассматриваться не будут.

Предположим, что рассматриваемая раньше передаточная функция принадлежит разомкнутой системе. Воспользуемся Mathcad для построения диаграммы Найквиста, соответствующий фрагмент листа приведен на рисунке 4.

$$W(s) \rightarrow \frac{100}{s^3 + 5\cdot s^2 + 28\cdot s + 110} \qquad \omega := 0, 0.01 .. 15$$

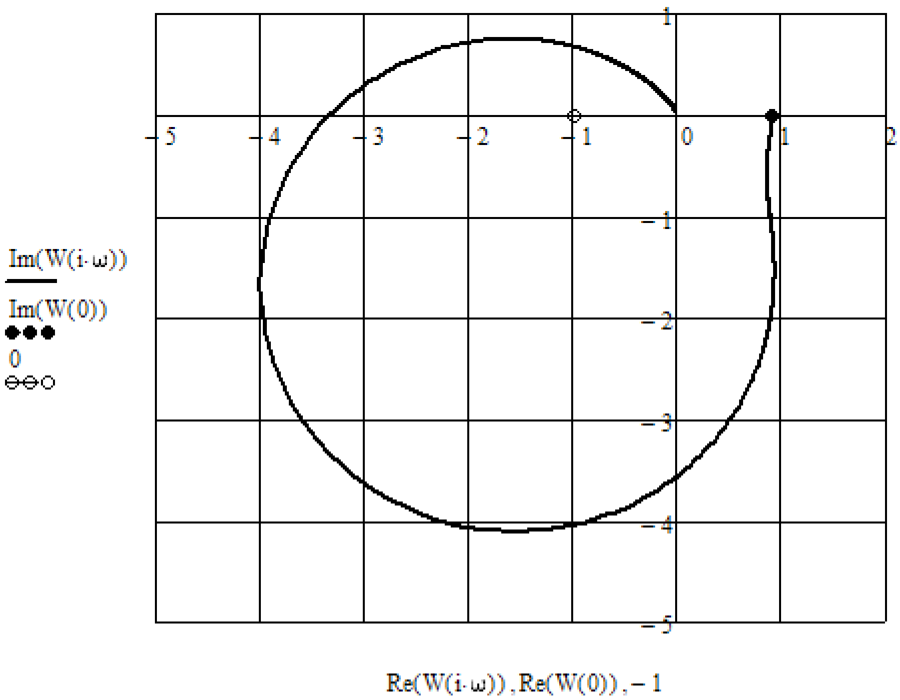


Рисунок 4 – Построение диаграммы Найквиста с помощью Mathcad

Диаграмма Найквиста на рисунке 4 охватывает точку $(-1; j0)$, следовательно, соответствующая замкнутая система будет неустойчива. В этом можно убедиться, оценив устойчивость замкнутой системы, состоящей из звена с ранее описанной передаточной функцией, охваченного единичной отрицательной обратной связью. Пример таких расчетов приведен на рисунке 5.

$$W(s) \rightarrow \frac{100}{s^3 + 5\cdot s^2 + 28\cdot s + 110}$$

$$W_1(s) := \frac{W(s)}{1 + W(s)} \text{ collect}, s \rightarrow \frac{100}{s^3 + 5\cdot s^2 + 28\cdot s + 210}$$

$$R_1 := \text{denom}(W_1(s)) \left| \begin{matrix} \text{solve}, s \\ \text{float}, 6 \end{matrix} \right. \rightarrow \begin{pmatrix} -6.0779 \\ 0.538951 + 5.85328i \\ 0.538951 - 5.85328i \end{pmatrix}$$

Рисунок 5 – Исследование устойчивости замкнутой системы по корням характеристического уравнения

Исходя из рисунка 5, можно утверждать, что если разомкнутая система задана передаточной функцией (1), то замкнутая система неустойчива, а критерий Найквиста применен верно.

## 2 Оценка качества работы систем автоматического управления

### 2.1 Расчет прямых показателей качества

Прямые показатели качества измеряются с помощью дополнительных построений на переходной характеристике исследуемой системы. Список основных прямых показателей качества включает в себя:

– тип переходного процесса;

– установившееся значение переходной характеристики $y_{уст}$;

– статическая ошибка регулирования $\varepsilon_{ст}$;

– время переходного процесса $t_{пп}$;

– перерегулирование $\sigma$;

– время нарастания переходной характеристики $t_{н}$;

– время достижения первого максимума переходной характеристики $t_{м}$.

Для колебательных процессов определяют также частоту $\omega$, период $T$ и количество $N$ колебаний, а также степень затухания $\kappa$.

Выделяют три типа переходных процессов: монотонный, апериодический и колебательный. Переходный процесс называется

***монотонным***, если знак производной выходного сигнала системы не изменяется за время переходного процесса. Переходный процесс называется ***апериодическим***, если знак производной выходного сигнала системы меняется за время переходного процесса один раз. Переходный процесс называется ***колебательным***, если знак производной выходного сигнала системы меняется с некоторой периодичностью.

***Установившееся значение переходной характеристики*** $y_{уст}$ определяется как ее предел при времени, стремящемся в бесконечность, а ***статическая ошибка*** $\varepsilon_{ст}$ определяется как разность установившегося значения входного сигнала и установившегося значения выходного сигнала:

$$y_{уст} = \lim_{t \to \infty}(y(t));$$
$$\varepsilon_{ст} = x_{уст} - y_{уст}.$$

***Время переходного процесса*** $t_{пп}$ определяется как время последнего вхождения переходной характеристики в пятипроцентную зону вокруг ее установившегося значения.

***Перерегулирование*** $\sigma$ определяется как отношение в процентах разности максимального и установившегося значения переходной характеристики к ее установившемуся значению:

$$\sigma = \frac{h_{\max} - h_{уст}}{h_{уст}} \cdot 100\% .$$

***Время нарастания переходной характеристики*** $t_н$ определяется как время первого достижения установившегося значения переходной характеристики. ***Время достижения максимального значения*** $t_м$, очевидно, определяется как время достижения максимума переходной характеристики.

***Количество*** $N$ и ***период*** $T$ ***колебаний*** измеряется напрямую, на основе периода колебаний может быть рассчитана их ***циклическая частота*** $\omega$:

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T}.$$

***Степень затухания колебаний*** $\kappa$ определяется как отношение разности между амплитудой первой и третьей полуволн переходной характеристики к амплитуде первой полуволны:

$$\kappa = \frac{h_1 - h_3}{h_1}.$$

На рисунке 6 изображена переходная характеристика некоторой системы. На ее примере рассмотрим определение прямых показателей качества.

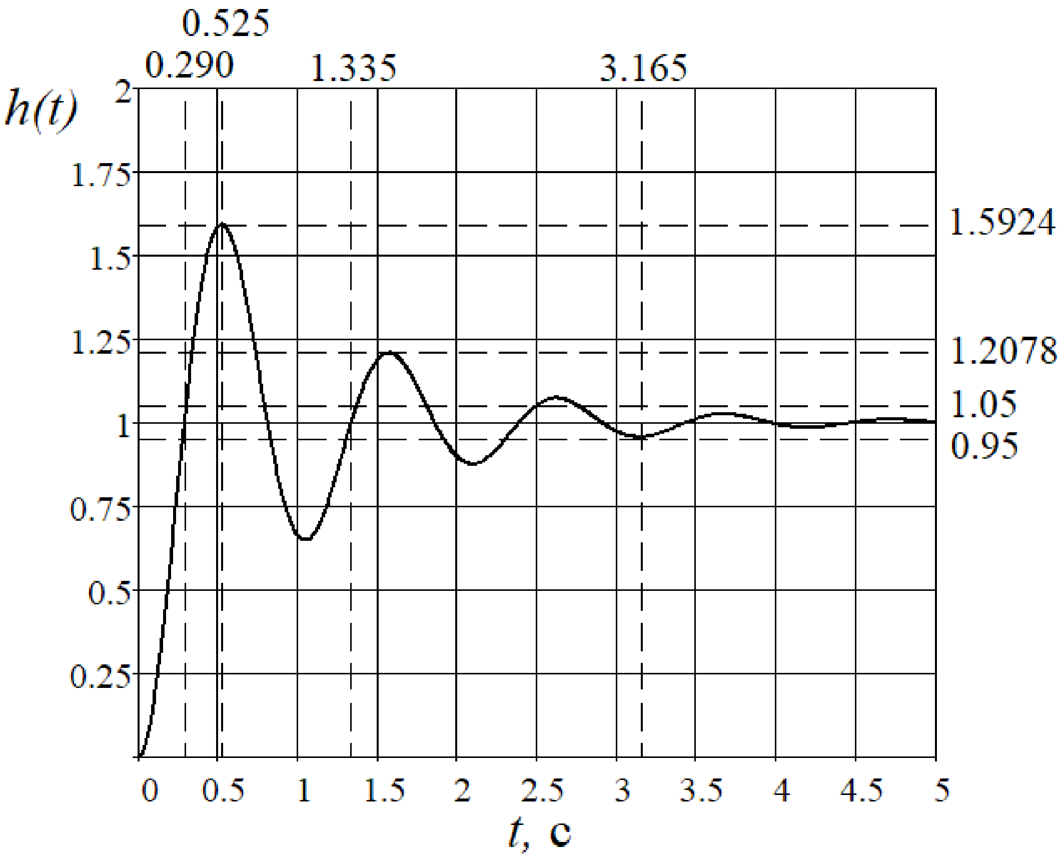


Рисунок 6 – Пример переходной характеристики для оценки значений прямых показателей качества

Переходный процесс, изображенный на рисунке 6, имеет колебательный тип. Установившееся значение переходной характеристики $y_{уст} = 1$; следовательно, $\varepsilon_{ст} = 0$. Время переходного процесса составило $t_{пп} = 3.165$ с, перерегулирование составило $\sigma = \frac{1.5924 - 1}{1} \cdot 100\% = 59.24\%$, время достижения максимума составило $t_м = 0.525$ с, время нарастания переходной характеристики составляет $t_н = 0.290$ с. За время переходного процесса переходная характеристика совершает $N = 2$ полных колебания с периодом $T = 1.045$ с и циклической частотой $\omega = 6.013$ рад/с; степень затухания колебаний составила $\kappa = \dfrac{1.5924 - 1.2078}{1.5924} = 0.242$.

## 2.2 Расчет корневых показателей качества

Корневые показатели качества работы систем автоматического управления определяются расположением корней знаменателя передаточной функции замкнутой системы или, иначе говоря, полюсами системы.

Выделяют два корневых показателя качества: степень устойчивости и степень колебательности. ***Степень устойчивости*** $\eta$ системы определяется как расстояние между мнимой осью и ближайшим к ней полюсом системы. ***Степень колебательности*** $\mu$ определяется как коэффициент наклона в уравнении луча, исходящего из начала координат комплексной плоскости и ограничивающего сектор комплексной плоскости, в котором располагаются все полюсы системы. Пример расположения полюсов системы автоматического управления показан на рисунке 7.

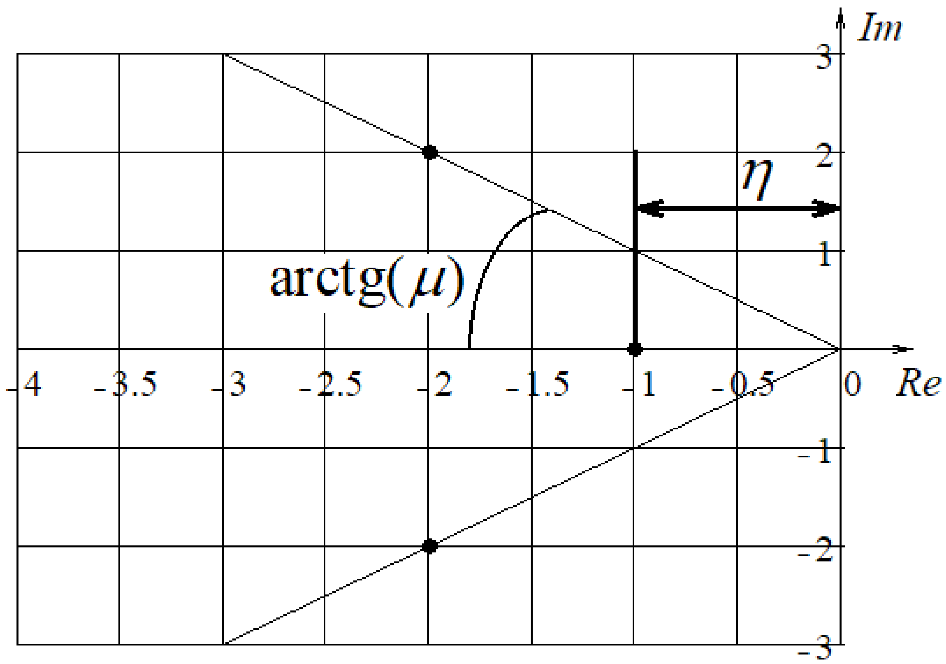


Рисунок 7 – Пример расположение полюсов системы автоматического управления для расчета корневых показателей качества

На рисунке 7 показано расположение трех полюсов на комплексной плоскости: $(-1; j0)$, $(-2; j2)$ и $(-2; -j2)$. Очевидно, что ближайшим к мнимой оси является полюс $(-1; j0)$, следовательно, степень устойчивости системы равно расстоянию от этого полюса до мнимой оси: $\eta = 1$.

Для определения степени колебательности проведем из начала координат лучи, которые ограничивали бы минимальный сектор комплексной плоскости, в котором разместились бы все три полюса исследуемой системы. Очевидно, что такие лучи проходят через два остальных полюса. Коэффициент наклона этих лучей равен модулю отношения мнимой координаты любой точки, лежащей на них, к действительной ее координате. В рассматриваемом случае степень колебательности $\mu = \frac{2}{2} = 1$.

Следует также упомянуть, что существуют формулы, позволяющие приблизительно оценить значения времени переходного процесса и перерегулирования по корневым показателям качества. Известно, что время переходного процесса зависит от степени устойчивости следующим образом:

$$t_{nn} = \frac{[3;4]}{\eta}.$$

Так, например, степени устойчивости $\eta = 1$ соответствует диапазон времени переходного процесса $t_{nn} = [3;4]$ с.

В свою очередь перерегулирование связано со степенью колебательности следующим неравенством:

$$\sigma \le e^{-\frac{\pi}{\mu}}.$$

Исходя из этого выражения, в системе со степенью колебательности $\mu = 1$ можно ожидать, что перерегулирование не превысит $\sigma_{\max} = 0.043 = 4.3\%$.