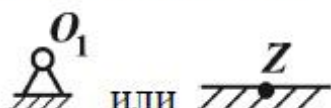


2.4.3. Определение скоростей и ускорений точек многозвенного механизма

Механизмом называется система тел, предназначенная для преобразования движения одного или нескольких тел в требуемые движения других тел.

Механизм состоит из деталей, называемыми *звеньями механизма*.

Звено механизма не совершающее движения называется *неподвижной стойкой* и изображается на схеме:



Для определения скоростей и ускорений точек многозвенного механизма применяют метод графоаналитического исследования, основанный на построении планов положений, скоростей и ускорений.

- **планом механизма** называется графическое изображение взаимного расположения звеньев. Построение плана механизма следует начинать с изображения по заданным координатам неподвижных элементов звеньев: неподвижных точек и направляющих. Затем чертится начальное звено для заданного угла поворота. Положения остальных звеньев находятся элементарным методом засечек с помощью циркуля и линейки.

- **планом скоростей (ускорений) механизма** называется графическое построение, представляющее собой пучок, лучи которого изображают абсолютные скорости (ускорения) точек звеньев механизма, а отрезки, соединяющие концы лучей - относительные скорости (ускорения) соответствующих точек при заданном положении звена. На плане скоростей полюс обозначается символом p_v , на плане ускорений символом p_a .

При решении задачи принимается, что вращательное и поступательное движения тела в плоскости рассматриваются как частные случаи плоского движения, когда полюс является неподвижной точкой.

При построении плана механизма, а также планов скоростей и ускорений применяют масштабы, под которыми понимают отношение числового значения изображаемой величины к отрезку на планах в миллиметрах. Обозначаются масштабы буквой μ с соответствующим индексом:

$$\mu_l - \text{масштаб длин, } \frac{\text{м}}{\text{мм}};$$

$$\mu_v - \text{масштаб линейных скоростей, } \frac{\text{м/с}}{\text{мм}};$$

$$\mu_a - \text{масштаб линейных ускорений, } \frac{\text{м/с}^2}{\text{мм}}.$$

Определение скоростей и ускорений точек многосвязного механизма

Для заданного положения механизма определить:

- 1) скорости точек A, B, C, \dots механизма и угловые скорости всех звеньев при помощи плана скоростей;
- 2) ускорения точек A и B , а также угловое ускорение звена AB ;
- 3) ускорение точки M , делящей звено AB пополам;
- 4) скорости точек A, B, C, \dots механизма и угловые скорости звеньев при помощи мгновенного центра скоростей;
- 5) положение мгновенного центра ускорений звена AB .

Схемы механизмов помещены в табл. 25, необходимые для расчёта данные приведены в табл. 24.

Пример. Задана схема механизма в заданном положении (рис. 14) при $\varphi = 60^\circ$; исходные данные: $l_{O_1A} = 0,12$ м, $l_{O_2D} = 0,19$ м, $l_{AB} = 0,55$ м, $l_{BC} = 0,19$ м, $l_{CD} = 0,23$ м, $l_{DE} = 0,27$ м, $l_{EF} = 0,22$ м, $a = 0,19$ м, $b = 0,19$ м, $c = 0,1$ м, $d = 0,22$ м. Угловая скорость звена $O_1A - \omega_1 = 2$ рад/с.

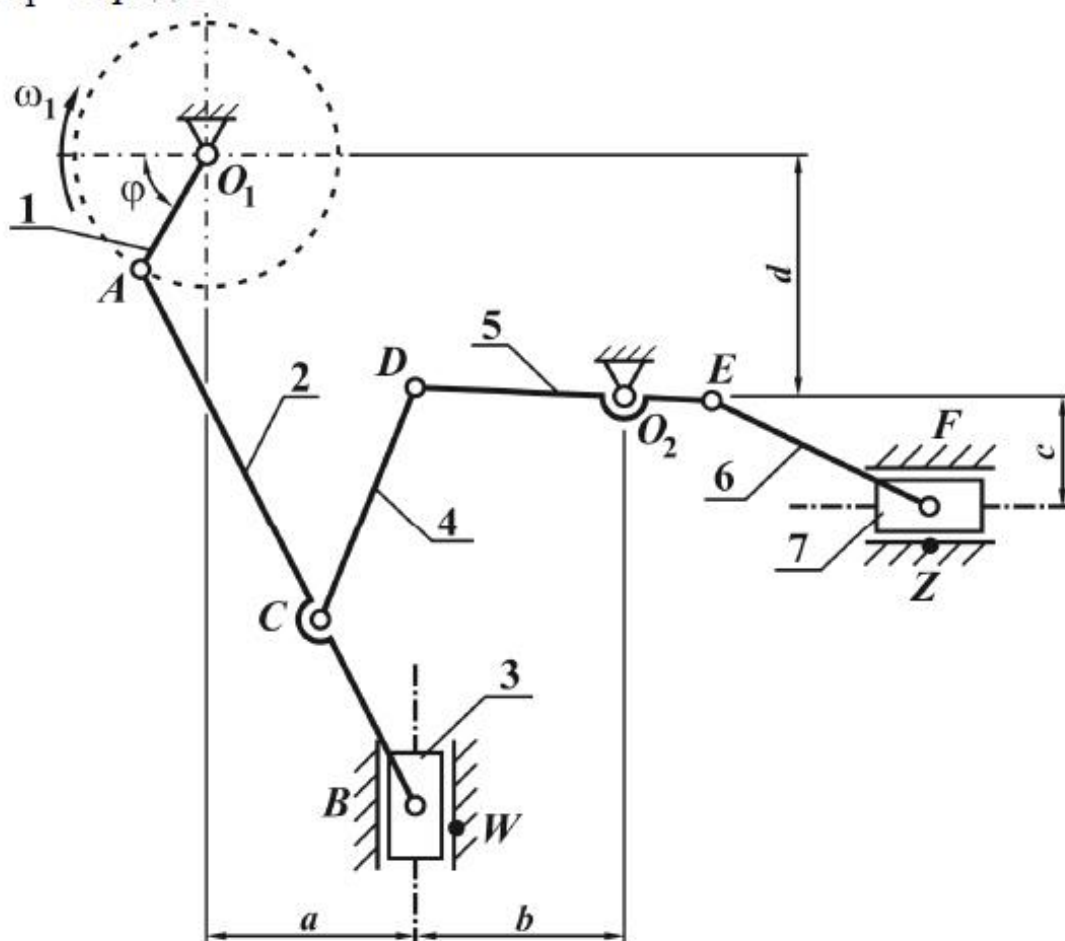


Рис. 14

Решение.

1. Построение положения механизма.

Выбираем масштаб плана положений $\mu_l = 0,008 \frac{\text{м}}{\text{мм}}$ и вычисляем

длины отрезков, изображающих звенья на плане механизма:

$$O_1A = \frac{l_{O_1A}}{\mu_l} = \frac{0,12}{0,008} = 15 \text{ мм}, \quad AB = \frac{l_{AB}}{\mu_l} = \frac{0,55}{0,008} = 68,75 \text{ мм},$$

$$CD = \frac{l_{CD}}{\mu_l} = \frac{0,23}{0,008} = 28,75 \text{ мм}, \quad O_2D = \frac{l_{O_2D}}{\mu_l} = \frac{0,19}{0,008} = 23,75 \text{ мм и т.д.}$$

С помощью масштаба μ_l определяем расстояния a , b , c и d на плане:

$$a = b = \frac{0,19}{0,008} = 23,75 \text{ мм}, \quad c = \frac{0,1}{0,008} = 12,5 \text{ мм}, \quad d = \frac{0,22}{0,008} = 27,5 \text{ мм}.$$

План механизма строим методом засечек. Сначала вычерчиваем звено **1** длиной O_1A в заданном положении, а затем определяем положения других звеньев механизма.

2. Определение линейных скоростей точек и угловых скоростей звеньев механизма.

Вычисляем скорость точки A звена **1** при заданном положении механизма:

$$V_A = \omega_1 \cdot l_{O_1A} = 2 \cdot 0,12 = 0,24 \text{ м/с}.$$

Вектор скорости точки A перпендикулярен к звену O_1A (см. рис. 15).

Строим план скоростей. Выбираем масштаб плана скоростей $\mu_v = 0,002 \frac{\text{м/с}}{\text{мм}}$. Из произвольно выбранного полюса p_v проводим луч $p_v a$, изображающий в выбранном масштабе скорость точки A (рис. 15):

$$p_v a = \frac{V_A}{\mu_v} = \frac{0,24}{0,002} = 120 \text{ мм}.$$

Для определения скорости точки B , рассмотрим движение этой точки относительно точек, скорости которых нам известны (точка A и неподвижная стойка).

Обозначим неподвижную стойку дополнительной точкой W ($V_W = 0$, на плане скоростей точка w находится в полюсе p_v) и составим систему уравнений, описывающих движение точки B :

$$\begin{cases} \vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA} \\ \vec{V}_B = \vec{V}_W + \vec{V}_{BW} \end{cases}$$

Вектор скорости \vec{V}_{BA} направлен перпендикулярно отрезку AB , а вектор скорости \vec{V}_{BW} направлен параллельно движению ползуна относительно неподвижной стойки.

Проводим через полюс p_v вертикальную прямую, а через точку a прямую, перпендикулярную отрезку AB . На пересечении прямых линий получаем точку b (рис. 15). Отрезок $p_v b$ показывает направление и величину скорости точки B . Измеряем длину отрезка $p_v b$ и, пользуясь масштабом плана скоростей, находим:

$$V_B = V_{BW} = p_v b \cdot \mu_v = 113 \cdot 0,002 = 0,226 \text{ м/с}.$$

Отрезок ab плана скоростей изображает скорость \vec{V}_{BA} точки B при вращении звена **2** вокруг полюса A :

$$V_{BA} = ab \cdot \mu_v = 116,5 \cdot 0,002 = 0,233 \text{ м/с}.$$

Следовательно, угловая скорость звена AB :

$$\omega_2 = \frac{V_{BA}}{l_{AB}} = \frac{0,233}{0,55} \approx 0,423 \frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

Для определения скорости точки C , лежащей на звене AB (шатун), составим пропорцию, выражающую равенство отношений длин отрезков:

$$\frac{l_{AB}}{l_{BC}} = \frac{ab}{bc} \Rightarrow bc = \frac{l_{BC} \cdot ab}{l_{AB}} = \frac{0,19 \cdot 116,5}{0,55} = 40,245 \text{ мм}.$$

Определив положение точки c на отрезке ab плана скоростей, соединяем точку c с полюсом p_v . Измеряем длину отрезка $p_v c$ и, пользуясь масштабным коэффициентом плана скоростей, находим:

$$V_C = p_v c \cdot \mu_v = 101 \cdot 0,002 = 0,202 \text{ м/с}$$

Для определения скорости точки D воспользуемся тем, что она принадлежит звену **4**, совершающему плоское движение, и звену **5**, вращающемуся вокруг неподвижной оси O_2 ($V_{O_2} = 0$, на плане скоростей точка o_2 находится в полюсе p_v). Составим систему уравнений, описывающих движение точки D :

$$\begin{cases} \vec{V}_D = \vec{V}_C + \vec{V}_{DC} \\ \vec{V}_D = \vec{V}_{O_2} + \vec{V}_{DO_2} \end{cases}$$

Вектор скорости \vec{V}_{DC} направлен перпендикулярно отрезку DC ; вектор скорости \vec{V}_{DO_2} направлен перпендикулярно отрезку O_2D .

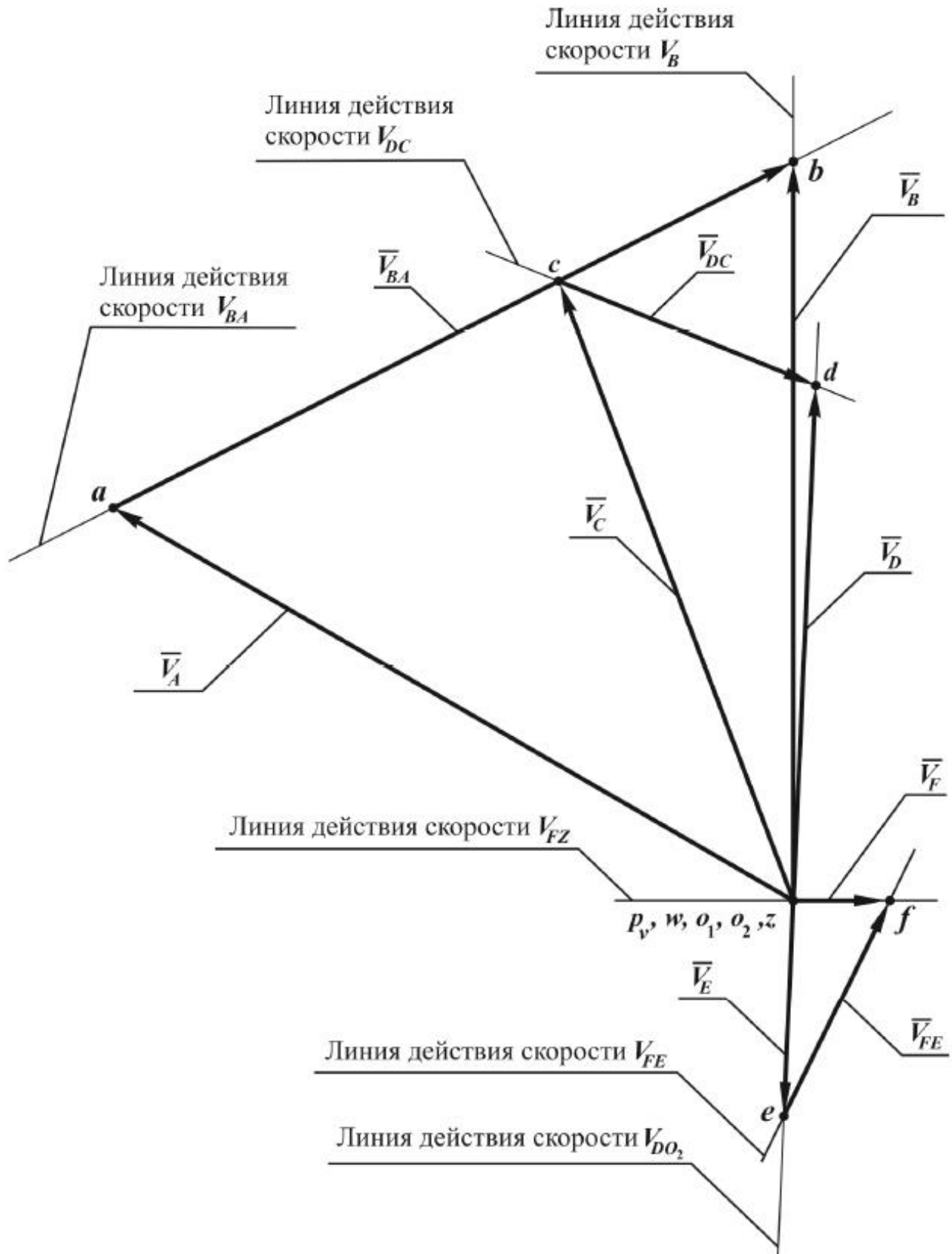


Рис. 15

Проводим через точку c прямую, перпендикулярную отрезку DC , а через полюс p_v – прямую, перпендикулярную отрезку O_2D . На пересечении прямых линий получаем точку d (см. рис. 15). Отрезок p_vd показывает направление и величину скорости точки D . Измеряем длину отрезка p_vd и, пользуясь масштабом плана скоростей, находим:

$$V_D = V_{DO_2} = p_vd \cdot \mu_v = 79 \cdot 0,002 = 0,158 \text{ м/с}.$$

Угловая скорость звена **5**:

$$\omega_5 = \frac{V_D}{l_{O_2D}} = \frac{0,158}{0,19} \approx 0,831 \frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

Отрезок cd плана скоростей изображает скорость \vec{V}_{DC} точки D при вращении звена **4** вокруг полюса C :

$$V_{DC} = cd \cdot \mu_v = 42,4 \cdot 0,002 = 0,085 \text{ м/с}.$$

Следовательно, угловая скорость звена CD :

$$\omega_4 = \frac{V_{DC}}{l_{CD}} = \frac{0,085}{0,23} \approx 0,37 \frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

Для определения скорости точки E , принадлежащей звену DE (коромысло), составим пропорцию, выражающую равенство отношений длин отрезков:

$$\frac{l_{O_2E}}{l_{O_2D}} = \frac{p_v e}{p_v d} \Rightarrow p_v e = \frac{p_v d \cdot l_{O_2E}}{l_{O_2D}} = \frac{79 \cdot 0,08}{0,19} = 33,26 \text{ мм}.$$

Точка e на плане скоростей находится на линии действия скорости V_{DO_2} с обратной стороны полюса p_v . Зная длину отрезка $p_v e$ и, пользуясь масштабным коэффициентом плана скоростей, находим:

$$V_E = p_v e \cdot \mu_v = 33,26 \cdot 0,002 = 0,066 \text{ м/с}.$$

Определим скорость точки F . Точка F принадлежит звену **6**, совершающему плоское движение, и ползуну **7**, движущемуся поступательно в горизонтальном направлении. Составим систему уравнений, описывающих движение точки F :

$$\begin{cases} \vec{V}_F = \vec{V}_E + \vec{V}_{FE} \\ \vec{V}_F = \vec{V}_Z + \vec{V}_{FZ} \end{cases}.$$

Здесь $V_Z = 0$ (на плане скоростей точка z находится в полюсе p_v), вектор скорости \vec{V}_{FE} направлен перпендикулярно отрезку EF , а вектор скорости \vec{V}_{FZ} направлен параллельно движению ползуна относительно неподвижной стойки (точка Z).

Проводим через полюс p_v прямую, параллельную скорости \bar{V}_{FZ} , а через точку e прямую, перпендикулярную отрезку EF . На пересечении прямых линий получаем точку f (см. рис. 15). Отрезок $p_v f$ показывает направление и величину скорости точки F . Измеряем длину отрезка $p_v f$ и, пользуясь масштабом плана скоростей, находим:

$$V_F = V_{FZ} = p_v f \cdot \mu_v = 14,7 \cdot 0,002 = 0,0294 \text{ м/с}$$

Отрезок ef плана скоростей изображает скорость \bar{V}_{FE} точки F при вращении звена **6** вокруг полюса E :

$$V_{FE} = ef \cdot \mu_v = 37 \cdot 0,002 = 0,074 \text{ м/с.}$$

Следовательно, угловая скорость звена EF :

$$\omega_6 = \frac{V_{FE}}{l_{EF}} = \frac{0,074}{0,22} \approx 0,336 \frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

3. *Определение линейных ускорений точек и угловых ускорений звеньев механизма.*

Определяем ускорение точки A звена O_1A при помощи теоремы об ускорениях точек плоской фигуры:

$$\bar{a}_A = \bar{a}_{O_1} + \bar{a}_{AO_1}^n + \bar{a}_{AO_1}^\tau.$$

Ускорение точки \bar{a}_{O_1} равно 0 (точка O_1 принадлежит неподвижному звену). Так как звено O_1A вращается равномерно ($\omega_1 = \text{const}$), следовательно, ускорение $\bar{a}_{AO_1}^\tau$ равно 0. В этом случае имеем:

$$\begin{aligned} a_A &= a_{AO_1}^n = \omega_1^2 \cdot l_{O_1A} = \\ &= 2^2 \cdot 0,12 = 0,48 \text{ м/с}^2 \end{aligned}$$

Вектор нормального ускорения $\bar{a}_{AO_1}^n$ направлен параллельно звену O_1A от точки A к центру O_1 .

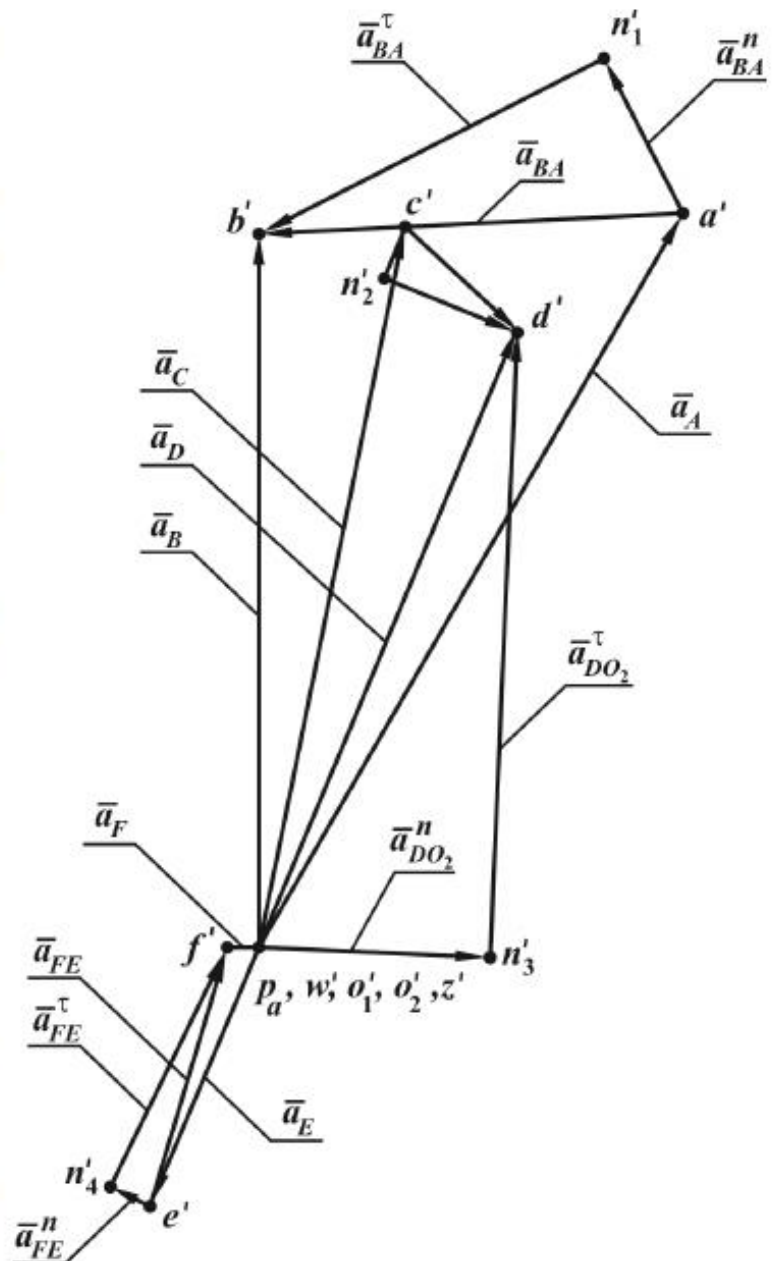


Рис. 16

Строим план ускорений. Выбираем масштаб плана ускорений $\mu_a = 0,005 \frac{\text{м/с}^2}{\text{мм}}$. Из произвольно выбранного полюса p_a проводим луч $p_a a'$, изображающий в выбранном масштабе ускорение точки A (рис. 16):

$$p_a a' = \frac{a_A}{\mu_a} = \frac{0,48}{0,005} = 96 \text{ мм.}$$

Для определения ускорения точки B , рассмотрим движение этой точки относительно точек, ускорения которых нам известны (точка A и W , на плане ускорений точка w' находится в полюсе p_a).

Составим систему уравнений, описывающих движение точки B :

$$\begin{cases} \bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^\tau \\ \bar{a}_B = \bar{a}_W + \bar{a}_{BW} \end{cases}$$

Вектор \bar{a}_{BA}^n нормального ускорения точки B , возникающий при рассмотрении движения относительно точки A , направлен параллельно AB от точки B к точке A . Величина этого ускорения равна:

$$a_{BA}^n = \omega_2^2 \cdot l_{AB} = 0,423^2 \cdot 0,55 = 0,0984 \text{ м/с}^2.$$

Вектор \bar{a}_{BA}^τ тангенциального ускорения точки B в ее движении относительно точки A направлен перпендикулярно к звену AB .

Вектор \bar{a}_{BW} ускорения точки B направлен параллельно движению звена 3 относительно точки W .

Чтобы решить графически составленные векторные уравнения ускорений необходимо:

На плане ускорений из точки a' провести отрезок $a'n'_1$, показывающий направление и величину нормального ускорения точки B относительно точки A . Длина отрезка $a'n'_1$ с учетом масштабного коэффициента:

$$a'n'_1 = \frac{a_{BA}^n}{\mu_a} = \frac{0,0984}{0,005} = 19,7 \text{ мм.}$$

Из точки n'_1 проводим линию действия вектора тангенциального ускорения \bar{a}_{BA}^τ . Из полюса p_a (так как точка w' лежит в полюсе) проводим линию действия вектора ускорения \bar{a}_{BW} .

На пересечении линий действия получаем точку b' . Соединяем точку b' с полюсом p_a . Отрезок $p_a b'$ показывает величину и направление ускорения a_B :

$$a_B = p_a b' \cdot \mu_a = 81 \cdot 0,005 = 0,405 \text{ м/с}^2.$$

Из плана ускорений находим величину тангенциального ускорения a_{BA}^τ и полного ускорения a_{BA} :

$$a_{BA}^\tau = n_1' b' \cdot \mu_a = 44 \cdot 0,005 = 0,22 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{BA} = a' b' \cdot \mu_a = 48 \cdot 0,005 = 0,24 \text{ м/с}^2$$

Определяем величину углового ускорения ε_2 звена 2:

$$\varepsilon_2 = \frac{a_{BA}^\tau}{l_{AB}} = \frac{0,22}{0,55} \approx 0,4 \text{ с}^{-2}.$$

Направление ε_2 определяем по направлению вектора \bar{a}_{BA}^τ переносом его в точку B плана механизма. Угловое ускорение ε_2 направлено по часовой стрелке.

Для определения ускорения точки C , лежащей на звене AB (шатун), составим пропорцию, выражающую равенство отношений длин отрезков:

$$\frac{l_{AB}}{l_{BC}} = \frac{a' b'}{b' c'} \Rightarrow b' c' = \frac{l_{BC} \cdot a' b'}{l_{AB}} = \frac{0,19 \cdot 48}{0,55} = 16,58 \text{ мм}.$$

Определив положение точки c' на отрезке $a' b'$ плана ускорений, соединяем точку c' с полюсом p_a . Измеряем длину отрезка $p_a c'$ и, пользуясь масштабным коэффициентом плана ускорений, находим:

$$a_C = p_a c' \cdot \mu_a = 83,2 \cdot 0,005 = 0,416 \text{ м/с}^2.$$

Для определения ускорения точки D , рассмотрим движение этой точки относительно точек C и O_2 (на плане ускорений точка o_2' находится в полюсе p_a).

Составим систему уравнений, описывающих движение точки D :

$$\begin{cases} \bar{a}_D = \bar{a}_C + \bar{a}_{DC}^n + \bar{a}_{DC}^\tau \\ \bar{a}_D = \bar{a}_{O_2} + \bar{a}_{DO_2}^n + \bar{a}_{DO_2}^\tau \end{cases}$$

Вектор \bar{a}_{DC}^n нормального ускорения точки D , возникающий при рассмотрении движения относительно точки C , направлен параллельно CD от точки D к точке C . Величина этого ускорения равна:

$$a_{DC}^n = \omega_4^2 \cdot l_{CD} = 0,37^2 \cdot 0,23 = 0,0315 \text{ м/с}^2.$$

Вектор \bar{a}_{DC}^τ тангенциального ускорения точки D в ее движении относительно точки C направлен перпендикулярно к звену CD .

Вектор $\bar{a}_{DO_2}^n$ нормального ускорения точки D , возникающий при рассмотрении движения относительно точки O_2 , направлен параллельно O_2D от точки D к точке O_2 . Величина этого ускорения равна:

$$a_{DO_2}^n = \omega_5^2 \cdot l_{O_2D} = 0,831^2 \cdot 0,19 = 0,131 \text{ м/с}^2.$$

Вектор $\bar{a}_{DO_2}^t$ тангенциального ускорения точки D в ее движении относительно точки O_2 направлен перпендикулярно к звену O_2D .

На плане ускорений из точки c' следует провести отрезок $c'n'_2$, показывающий направление и величину нормального ускорения точки D относительно точки C . Длина отрезка $c'n'_2$ с учетом масштабного коэффициента:

$$c'n'_2 = \frac{a_{DC}^n}{\mu_a} = \frac{0,0315}{0,005} = 6,3 \text{ мм.}$$

Из точки n'_2 проводим линию действия вектора тангенциального ускорения \bar{a}_{DC}^t .

Из полюса p_a (так как точка o'_2 лежит в полюсе) проводим отрезок $p_an'_3$, показывающий направление и величину нормального ускорения точки D относительно точки O_2 . Длина отрезка $p_an'_3$ с учетом масштабного коэффициента:

$$p_an'_3 = \frac{a_{DO_2}^n}{\mu_a} = \frac{0,131}{0,005} = 26,2 \text{ мм.}$$

Из точки n'_3 проводим линию действия вектора тангенциального ускорения $\bar{a}_{DO_2}^t$.

На пересечении линий действия получаем точку d' . Соединяем точку d' с полюсом p_a . Отрезок p_ad' показывает величину и направление ускорения a_D :

$$a_D = p_ad' \cdot \mu_a = 75,5 \cdot 0,005 = 0,3775 \text{ м/с}^2.$$

Из плана ускорений находим величины тангенциальных ускорений a_{DC}^t и $a_{DO_2}^t$, а также полного ускорения a_{DC} :

$$a_{DC}^t = n'_2d' \cdot \mu_a = 16 \cdot 0,005 = 0,08 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{DC} = c'd' \cdot \mu_a = 17,5 \cdot 0,005 = 0,0875 \text{ м/с}^2$$

$$a_{DO_2}^{\tau} = n'_3 d' \cdot \mu_a = 71 \cdot 0,005 = 0,355 \text{ м/с}^2.$$

Определяем величину углового ускорения ε_4 звена **4**:

$$\varepsilon_4 = \frac{a_{DC}^{\tau}}{l_{DC}} = \frac{0,08}{0,23} \approx 0,35 \text{ с}^{-2}.$$

Направление ε_4 определяем по направлению вектора \bar{a}_{DC}^{τ} переносом его в точку D плана механизма. Угловое ускорение ε_4 направлено по часовой стрелке.

Определяем величину углового ускорения ε_5 звена **5**:

$$\varepsilon_5 = \frac{a_{DO_2}^{\tau}}{l_{DC}} = \frac{0,355}{0,19} \approx 1,87 \text{ с}^{-2}.$$

Направление ε_5 определяем по направлению вектора $\bar{a}_{DO_2}^{\tau}$ переносом его в точку D плана механизма. Угловое ускорение ε_5 направлено по часовой стрелке.

Для определения ускорения точки E , принадлежащей звену DE (коромысло), составим пропорцию, выражающую равенство отношений длин отрезков:

$$\frac{l_{O_2E}}{l_{O_2D}} = \frac{p_a e'}{p_a d'} \Rightarrow p_a e' = \frac{p_a d' \cdot l_{O_2E}}{l_{O_2D}} = \frac{75,5 \cdot 0,08}{0,19} = 31,8 \text{ мм}.$$

Точка e' на плане ускорений находится на линии действия ускорения a_D с обратной стороны полюса p_a . Зная длину отрезка $p_a e'$ и, пользуясь масштабным коэффициентом плана ускорений, находим:

$$a_E = p_a e' \cdot \mu_v = 31,8 \cdot 0,005 = 0,159 \text{ м/с}^2.$$

Определение ускорения точки F проводим по аналогии определения ускорения точки B , рассматривая движение этой точки относительно точек E и Z .

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} \bar{a}_F = \bar{a}_E + \bar{a}_{FE}^n + \bar{a}_{FE}^{\tau} \\ \bar{a}_F = \bar{a}_Z + \bar{a}_{FZ} \end{cases}$$

$$a_{FE}^n = \omega_6^2 \cdot l_{EF} = 0,336^2 \cdot 0,22 = 0,025 \text{ м/с}^2.$$

$$e' n'_4 = \frac{a_{FE}^n}{\mu_a} = \frac{0,025}{0,005} = 5 \text{ мм}.$$

Из плана ускорений находим:

$$a_F = p_a f' \cdot \mu_a = 3,5 \cdot 0,005 = 0,0175 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{FE}^{\tau} = n'_4 f' \cdot \mu_a = 30 \cdot 0,005 = 0,15 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{FE} = e' f' \cdot \mu_a = 30,5 \cdot 0,005 = 0,1525 \text{ м/с}^2.$$

Определяем величину углового ускорения ε_2 звена 2:

$$\varepsilon_6 = \frac{a_{FE}^{\tau}}{l_{EF}} = \frac{0,15}{0,22} \approx 0,68 \text{ с}^{-2}.$$

Направление ε_6 определяем по направлению вектора \bar{a}_{FE}^{τ} переносом его в точку F плана механизма. Угловое ускорение ε_6 направлено против хода часовой стрелки.

Направления угловых скоростей и ускорений звеньев механизма представлены на рис. 17.

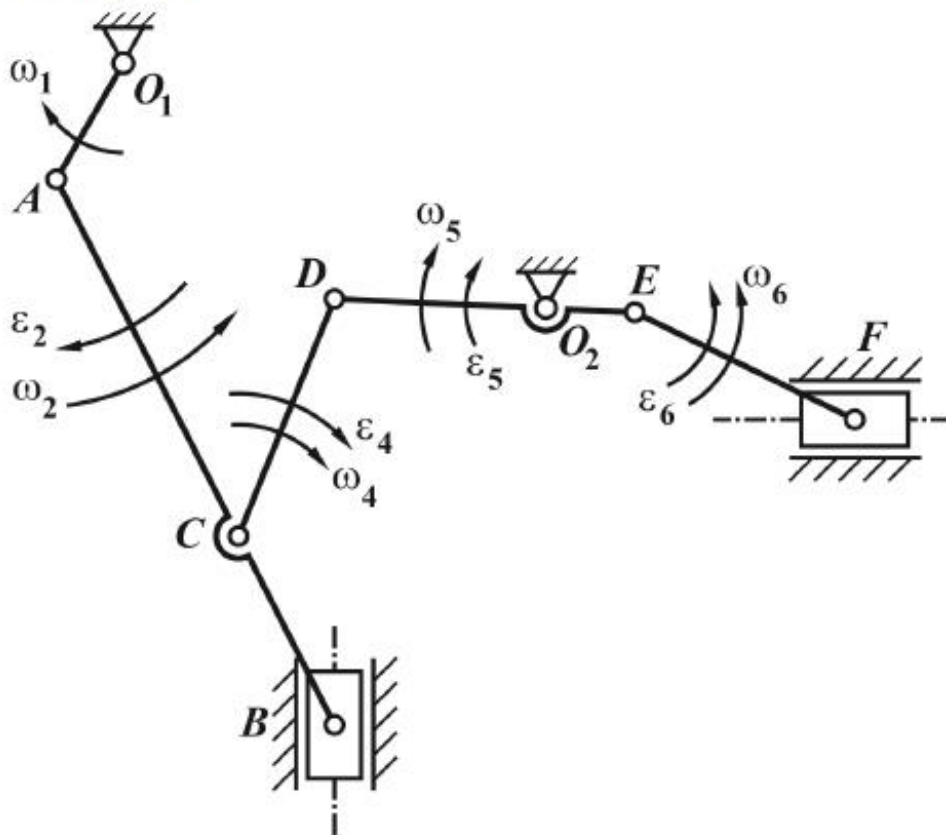


Рис. 17