

М.В. Горбенко

**КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ  
ПО ТЕОРИИ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН**

# СИЛОВОЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ. КОЭФФИЦИЕНТ ПОЛЕЗНОГО ДЕЙСТВИЯ МЕХАНИЗМОВ

## 3.1. Общие положения

Силовой анализ включает в себя:

– изучение влияния *внешних сил*, сил веса звеньев, сил трения и сил инерции на звенья механизма, на элементы звеньев, кинематические пары и неподвижные опоры;

– установление способов уменьшения динамических нагрузок, возникающих при движении механизма.

Все силы, действующие на механизм, можно разделить на две группы:

1. *Внешние силы* – силы, приложенные к механизму, не зависящие от строения, массо-габаритных характеристик самого механизма:

а) движущие силы –  $F_d$  – силы, вызывающие движение. Передаются механизму ведущим звеном, их работа принимается положительной

$$A_d > 0;$$

б) силы производственного сопротивления –  $F_{пс}$ , – силы, для преодоления которых предназначен механизм, работа этих сил

$$A_{пс} < 0.$$

2. Силы, присущие самому механизму:

а) силы вредного сопротивления –  $F_{вс}$ , например, силы трения в кинематических парах.

Все силы сопротивления  $F_c$ :

$$F_c = F_{пс} + F_{вс};$$

б) силы тяжести –  $F_G \equiv (G)$

$$G = mg;$$

в) силы инерции –  $F_i = -ma_s$ .

Аналогично силам классифицируются и моменты.

Силовой анализ механизмов может быть:

- Статический – не учитываются силы инерции звеньев, дополнительные силы, возникающие в процессе движения (например, кориолисовы).
- Динамический – учитываются как статические, так и динамические нагрузки.

Методы, применяемые при выполнении силового анализа можно разделить на две основные группы:

1. Аналитические.

## 2. Графоаналитические.

Типичные задачи, решаемые при выполнении силового анализа, следующие:

1. Определение усилий, действующих на звенья механизма.
2. Определение реакций в кинематических парах.
3. Определение уравновешивающей силы или уравновешивающего момента.
4. Определение КПД механизма.

Кратко охарактеризуем некоторые методы.

Среди аналитических методов широкое распространение получил метод расчета на основе обыкновенных дифференциальных уравнений равновесия твердых тел.

Сущность метода: применение к решению задач динамики плоских механизмов уравнений статики – уравнений равновесия в форме Даламбера:

$$\begin{cases} \sum F_X = 0, \\ \sum F_Y = 0, \\ \sum M_Z = 0. \end{cases}$$

В приведенных уравнениях под силами  $F$  и моментами  $M$  понимаются все внешние силы и моменты, силы тяжести и реакции в кинематических парах, подлежащие определению. Подобные уравнения должны быть составлены для всех звеньев механизма и решены совместно. В результате для механизма с  $n$  подвижными звеньями решается система  $3n$  уравнений. В исходном виде такая система применяется для механизмов с малыми (или мало меняющимися) скоростями движения звеньев, когда можно пренебречь инерциальными составляющими.

Для того чтобы механизм находился в равновесии под воздействием внешних сил, к одному из звеньев механизма должна быть приложена уравновешивающая сила  $F_y$  или уравновешивающая пара сил, характеризующая ее моментом  $M_y$  – уравновешивающим моментом. Эту силу или момент обычно считают приложенными к ведущему звену, которое либо получает энергию, требуемую для движения механизма, извне, как это имеет место у механизмов рабочих машин, либо отдает ее, как это имеет место у механизмов двигателей.

Если же в каждом уравнении добавить инерциальные составляющие, то каждое звено и механизм в целом можно считать находящимся в мгновенном равновесном состоянии (иногда называют *замороженное состояние, квазиравновесное*). В таком случае эта система уравнений рав-

новесия называется *системой уравнений кинестатики*. Для выполнения кинестатических расчетов необходимо знать законы движения звеньев, поскольку в уравнения входят инерционные нагрузки, т. е. кинематический анализ должен быть выполнен.

Решение систем уравнений кинестатики в общем случае, когда необходимо получить зависимости реакций от времени или положения механизма, может быть весьма затруднительным, поскольку инерциальные составляющие сил зависят от линейных ускорений, а моменты – от угловых ускорений, которые, в свою очередь, являются достаточно сложными тригонометрическими нелинейными функциями. В результате для простейшего шарнирного четырехзвенного механизма (с одной присоединенной группой Ассур 2-го класса) необходимо решить систему 9 нелинейных уравнений.

Оказывается, что решение приведенных систем можно упростить. Для этого рассмотрим реакции в кинематических парах:

– в каждой кинематической паре 5 класса подлежат определению две неизвестных величины (рис. 3.1):

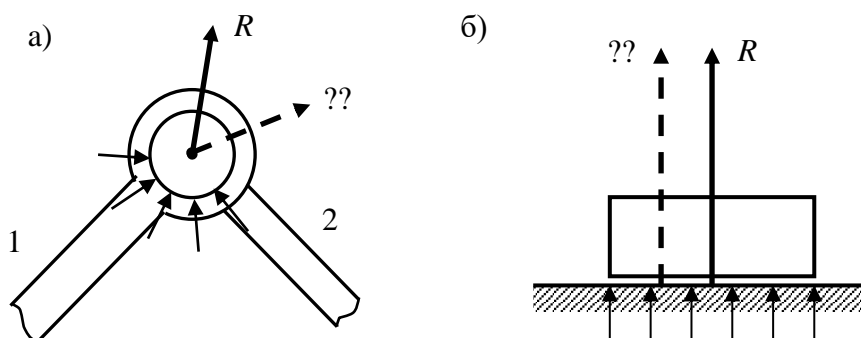


Рис. 3.1. К определению реакций в кинематических парах 5-го класса

– во вращательной паре (рис. 3.1,а) известна точка приложения силы – центр вращательной пары, но неизвестны величина и направление;

– в поступательной паре (рис. 3.1,б) известна линия действия (направление) – перпендикулярно поверхности контакта, но неизвестны величина и точка приложения;

– в каждой кинематической паре 4-го класса (рис. 3.2) подлежит определению одна неизвестная величина – численное значение реакции, так как точка приложения известна (точка контакта поверхностей или

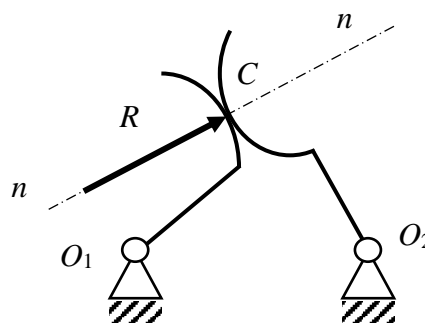


Рис. 3.2. К определению реакций в кинематических парах 4-го класса

кривых) и линия действия также известна (вдоль общей нормали к контактирующим поверхностям).

Таким образом, общее число неизвестных, подлежащих определению  $2P_5 + P_4$ . Общее количество линейно-независимых уравнений, которые могут быть составлены  $3n$ , где  $n$  – число подвижных звеньев. Известно, что система решается, если количество неизвестных равно числу уравнений:

$$3n = 2P_5 + P_4,$$

но это уравнение Чебышева для группы Ассура:

$$W = 3n - 2P_5 - P_4 = 0.$$

Следовательно, группы Ассура являются статически определимыми системами, и полную систему уравнений статики или кинетостатики для механизма можно разбить на ряд подсистем, которые решаются последовательно.

### 3.2. Силовой расчет методом планов

Рассмотрим общий порядок выполнения силового расчета рычажных механизмов методом планов сил на примере силового расчета шестизвенного кулисного механизма (построения даны в общем виде).

Целью силового расчета является определение усилий, действующих на звенья механизма (внешние силы), давлений (реакций) в кинематических парах (внутренние силы), определение уравновешивающего момента (или силы), приложенного к начальному механизму, определение коэффициента полезного действия механизма.

Рассмотрим силовой расчет кулисно-рычажного механизма (рис. 3.3).

По заданным размерам в масштабе вычерчивается механизм.

Силовому расчету всегда предшествуют структурный и кинематический анализ.

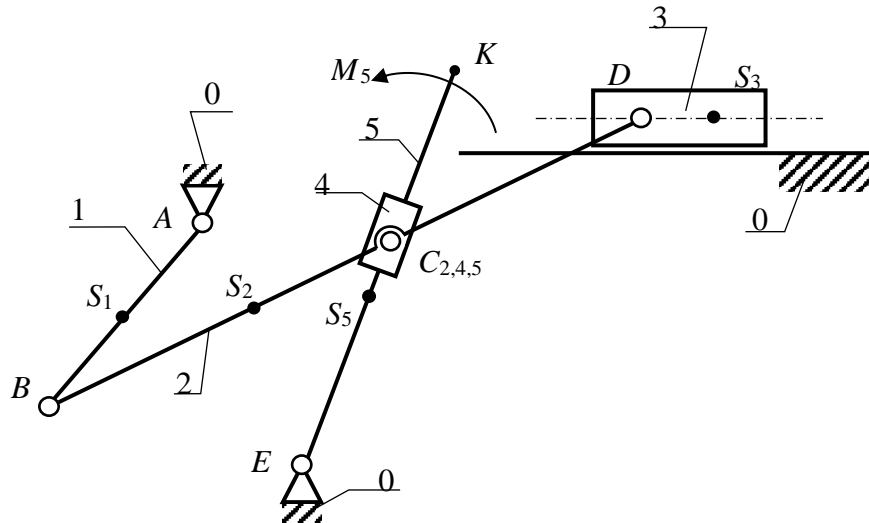


Рис. 3.3. Схема кулисно-рычажного механизма

Данный механизм содержит:

- пять подвижных звеньев: 1 – кривошип, 2 – шатун, 3 – ползун, 4 – камень, 5 – кулиса-коромысло;
- семь кинематических пар пятого класса: пять вращательных –  $V_{0,1}$ ,  $V_{1,2}$ ,  $V_{2,3}$ ,  $V_{4,2}$ ,  $V_{5,0}$  и две поступательные –  $П_{3,0}$ ,  $П_{4,5}$ .

Начальный механизм с вращательной кинематической парой  $V_{0,1}$  состоит из звена 1 и стойки 0.

Механизм содержит две структурные группы (группы Ассур) 2-го класса:

- группа 2–3 [ $V_{1,2} - V_{2,3} - П_{3,0}$ ] (второго вида);
- группа 4–5 [ $V_{2,4} - П_{4,5} - V_{5,0}$ ] (третьего вида).

Силовой расчет начинают с *последней* группы и заканчивают расчетом *начального механизма*. В данном примере силовой расчет должен быть проведен в такой последовательности: расчет группы 4–5, затем группы 2–3 и расчет начального механизма 1–0.

Рассмотрим порядок силового расчета без учета трения в кинематических парах.

### 3.2.1. Силы, действующие на звенья механизма

Рабочим звеном данного механизма является звено 5, к которому приложено полезное (производственное) сопротивление  $M_5$ , определяющееся из графика для данного положения механизма. Помимо заданного момента полезного сопротивления (или заданных сил), учтем силы тяжести, силы и моменты инерции звеньев.

Пусть массы звеньев будут  $m_1, m_2, m_3, m_5$ . Массой камня кулисы  $m_4$  пренебрегаем, так как она мала по сравнению с массами остальных звеньев. Отдельными силами и моментами в оценочных расчетах можно пренебрегать, если в суммарной нагрузке они не превышают 5%.

Вес звеньев:

$$F_{G1} = g \cdot m_1 = 9,81 \cdot m_1 \text{ Н}, \quad F_{G2} = g \cdot m_2 = 9,81 \cdot m_2 \text{ Н},$$

$$F_{G3} = g \cdot m_3 = 9,81 \cdot m_3 \text{ Н}, \quad F_{G5} = g \cdot m_5 = 9,81 \cdot m_5 \text{ Н}.$$

Величины сил инерции звеньев:

$$F_{i1} = m_1 \cdot a_{S1} = \dots \text{ Н}, \quad F_{i2} = m_2 \cdot a_{S2} = \dots \text{ Н},$$

$$F_{i3} = m_3 \cdot a_{S3} = \dots \text{ Н}, \quad F_{i5} = m_5 \cdot a_{S5} = \dots \text{ Н},$$

где  $a_{S1}, a_{S2}, a_{S3}, a_{S5}$  – ускорения центров масс, определяемые из *плана ускорений*.

Силы тяжести и силы инерции приложены в центрах масс звеньев, т. е. в точках  $S_1, S_2, S_3, S_5$ . Силы тяжести всегда направлены к центру Земли, т. е. вертикально вниз. Силы инерции направлены противоположно ускорениям центров масс (это главные векторы сил инерции). Поэтому для большей точности и наглядности на листе, где выполняется силовой расчет, следует привести планы скоростей и ускорений.

Главные моменты сил инерции определяются по формуле

$$M_i = J_S \cdot \varepsilon \text{ Нм},$$

где  $J_S$  – момент инерции массы звена относительно оси, проходящей через центр масс,  $\text{кг} \cdot \text{м}^2$ ;

$\varepsilon$  – угловое ускорение звена, определенное ранее из кинематического исследования,  $1/\text{с}^2$ .

В рассматриваемом примере  $M_{i1}=0$ , так как при  $\omega_1=\text{const}$   $\varepsilon_1=0$ , а также  $M_{i3}=0$  – поступательное движение звена 3 ( $\varepsilon_3=0$ ), остальные:

$$M_{i2} = J_{S2} \cdot \varepsilon_2 \text{ Нм},$$

$$M_{i5} = J_{S5} \cdot \varepsilon_5 \text{ Нм}.$$

Моменты сил инерции направлены противоположно угловым ускорениям.

**Порядок силового расчета методом планов сил можно свести к следующему:**

1. Вычерчивается в масштабе группа Ассур в положении, для которого выполняется силовой расчет.
2. Расставляются учитываемые при силовом расчете внешние силы и моменты, действующие на звенья группы.

3. Расставляются неизвестные реакции во внешних кинематических парах.

4. Составляется уравнение равновесия группы в форме сил, после анализа которого, а в некоторых случаях дополнительного нахождения составляющих реакций, строится план сил.

### 3.2.2. Силовой расчет группы 4–5 [В<sub>2,4</sub> – П<sub>4,5</sub> – В<sub>5,0</sub>]

К звеньям группы (рис. 3.4) приложены:

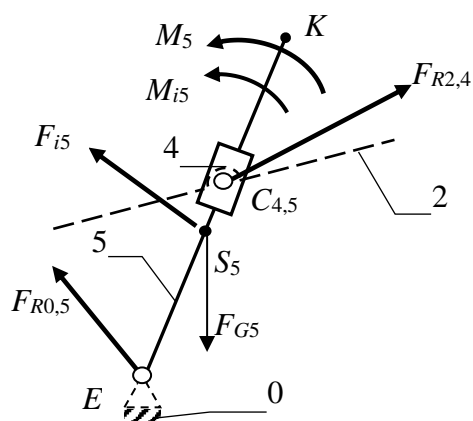


Рис. 3.4. Схема нагружения группы 4-5

$M_5 = \dots$  Нм – момент производственного сопротивления;

$M_{i5} = \dots$  Нм – момент сил инерции звена 5;

$F_{i5} = \dots$  Н – сила инерции звена 5;

$F_{G5} = \dots$  Н – сила тяжести звена 5;

$F_{R2,4}$  и  $F_{R0,5}$  – реакции во внешних кинематических парах (рис. 3.4).

Так как внешние кинематические пары вращательные, то реакции будут проходить через центры шарниров С и Е. (Это один из параметров реакции как силы, два же других – модуль и направление – неизвестны и подлежат определению).

Записываем уравнение равновесия группы в форме сил:

$$\sum \bar{F} = \bar{F}_{R2,4} + \bar{F}_{G5} + \bar{F}_{i5} + \bar{F}_{R0,5} = 0. \quad (3.1)$$

При составлении уравнения равновесия в форме сил рекомендуется придерживаться следующих правил:

- а) начинать уравнение и заканчивать его неизвестными реакциями;
- б) записать силы, действующие на одно звено, а затем – на другое.

Так как реакции  $F_{R2,4}$  и  $F_{R0,5}$  неизвестны ни по величине, ни по направлению, поступим следующим образом.

Рассмотрим отдельно взятое звено 4 (камень кулисы).

На него действуют две силы: реакция со стороны звена 2 –  $F_{R2,4}$  и со стороны звена 5 –  $F_{R5,4}$ . реакция  $F_{R2,4}$  во вращательной кинематической паре проходит через центр шарнира  $C_4$  (давление второго звена на четвертое). Реакция  $F_{R5,4}$  в поступательной кинематической паре (давление пятого на четвертое) перпендикулярна направляющей (рис. 3.5,а). Звено 4 находится в равновесии под действием двух сил, это означает, что силы равны по величине, противоположны по направлению и проходят через одну и ту же точку, т. е.  $F_{R2,4} = -F_{R5,4}$ , приложены к точке  $C_4$  и перпендикулярны звену 5 (рис. 3.5,б).



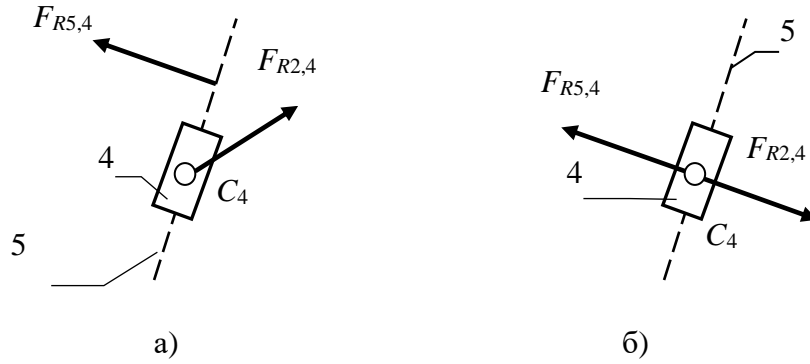


Рис. 3.5. Силовые факторы, действующие на камень кулисы

Теперь рассмотрим звено 5 (рис. 3.6). В точке  $C_5$  звена будет приложена реакция  $F_{R4,5}$ , перпендикулярная к звену ( $F_{R4,5} = -F_{R5,4}$ ), которую найдем из уравнения равновесия звена 5:

$$M_E = M_5 + M_{i5} - F_{R4,5} \cdot l_{CE} - F_{G5} \cdot h_1 + F_{i5} \cdot h_2 = 0, \quad (3.2)$$

отсюда

$$F_{R4,5} = \frac{M_5 + M_{i5} - F_{G5} \cdot h_1 + F_{i5} \cdot h_2}{l_{CE}}. \quad (3.3)$$

Здесь  $l_{CE}$  – действительное расстояние от С до Е;

$h_1, h_2$  – плечи сил, определяются по чертежу с учетом масштаба

$$(h_1 = \bar{h}_1 \cdot \mu_l, \quad h_2 = \bar{h}_2 \cdot \mu_l).$$

Если при решении уравнения (3.3)  $F_{R4,5}$  получится отрицательной, следовательно, её направление противоположно.

Так как  $F_{R4,5} = -F_{R5,4}$ , а  $F_{R5,4} = -F_{R2,4}$ , то  $F_{R4,5} = F_{R2,4}$ .

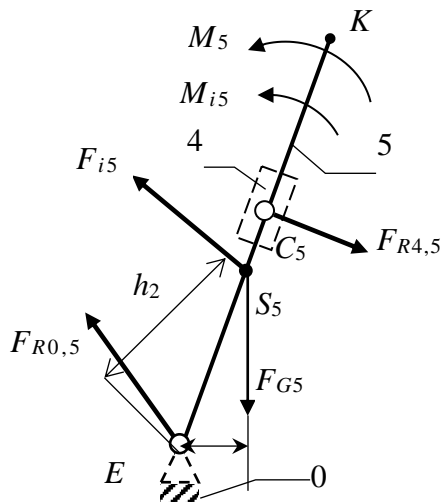


Рис. 3.6. Схема нагружения звена 5

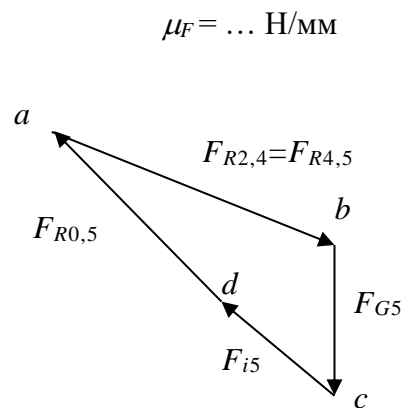


Рис. 3.7. План сил группы 4–5

На основании уравнения (3.1) строится план сил группы 4–5 (рис. 3.7) в масштабе  $\mu_F = \dots \text{Н/мм}$ .

Из плана сил найдем  $\bar{F}_{R0,5} = -F_{R0,5} \cdot \mu_F = \dots \text{Н}$ .

Силовой расчет этой группы можно выполнить и по-другому. Разложить реакцию  $F_{R0,5}$  на составляющие, направленные по звену  $F_{R0,5}^n$  и перпендикулярно ему:  $F_{R0,5}^\tau$ , т. е.  $\bar{F}_{R0,5} = \bar{F}_{R0,5}^n + \bar{F}_{R0,5}^\tau$ . Тогда уравнение (3.1) примет вид

$$\sum \bar{F} = \bar{F}_{R2,4} + \bar{F}_{G5} + \bar{F}_{i5} + \bar{F}_{R0,5}^\tau + \bar{F}_{R0,5}^n = 0. \quad (3.4)$$

Тангенциальная составляющая  $F_{R0,5}^\tau$  определяется из уравнения моментов относительно точки  $C$ . Зная направление реакции  $F_{R2,4}$ , как было доказано выше, на основании уравнения (3.4) строится план сил, из которого определится реакция  $F_{R0,5}$  и  $F_{R2,4}$ .

### 3.2.3. Силовой расчет группы 2–3 [В<sub>1,2</sub> – В<sub>2,3</sub> – П<sub>3,0</sub>]

На рис. 3.8 представлена группа Ассура 2–3. К звеньям группы приложены:

- $F_{i2} = \dots \text{Н}$  – сила инерции звена 2;
- $F_{G2} = \dots \text{Н}$  – сила тяжести звена 2;
- $F_{R4,2} = \dots \text{Н}$  – реакция в кинематической паре со стороны звена 4;
- $M_{i2} = \dots \text{Нм}$  – момент сил инерции звена 2;
- $F_{G3} = \dots \text{Н}$  – вес звена 3;
- $F_{i3} = \dots \text{Н}$  – сила инерции звена 3.

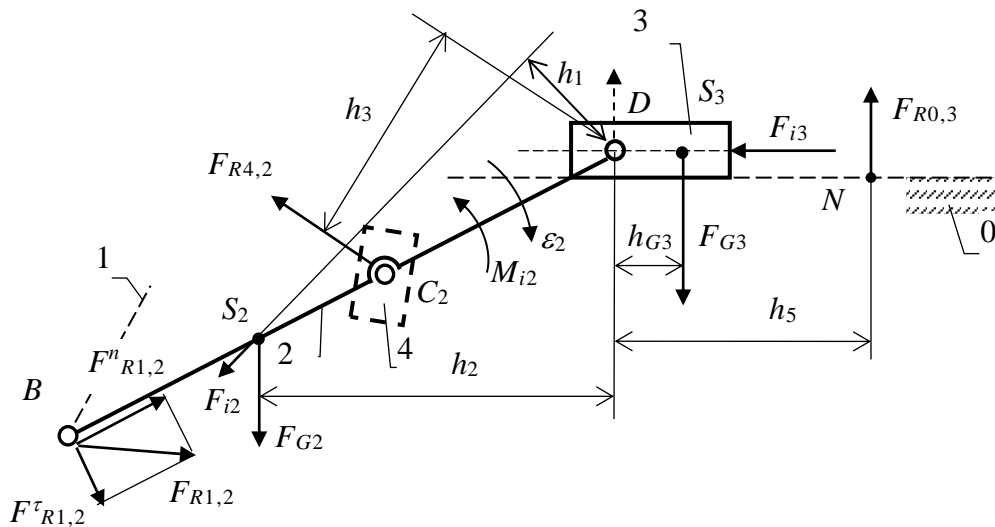


Рис. 3.8. Схема нагружения группы 2–3

Это внешние силовые факторы, известные по величине, направлению и точкам приложения (для сил). Внешней силой для этой группы будет теперь  $F_{R4,2}$  – реакция в кинематической паре  $B_{4,2}$ , найденная при расчете предыдущей группы.

Проставим неизвестные реакции во *внешних* кинематических парах:  $F_{R1,2}$  проходит через центр шарнира  $B$  (направление неизвестно) и  $F_{R0,3}$  перпендикулярна направляющей (точка приложения  $N$  неизвестна).

Уравнение равновесия группы 2–3 в форме сил

$$\sum \bar{F} = \bar{F}_{R1,2} + \bar{F}_{i2} + \bar{F}_{G2} + \bar{F}_{R4,2} + \bar{F}_{G3} + \bar{F}_{i3} + \bar{F}_{R0,3} = 0. \quad (3.5)$$

Разложим реакцию  $F_{R1,2}$  на составляющие, направленные вдоль звена ( $F_{R1,2}^n$ ) и перпендикулярно ему ( $F_{R1,2}^\tau$ ), т. е.

$$\bar{F}_{R1,2} = \bar{F}_{R1,2}^n + \bar{F}_{R1,2}^\tau. \quad (3.6)$$

Тогда уравнение (3.5) примет вид

$$\sum \bar{F} = \bar{F}_{R1,2}^n + \bar{F}_{R1,2}^\tau + \bar{F}_{i2} + \bar{F}_{G2} + \bar{F}_{R4,2} + \bar{F}_{G3} + \bar{F}_{i3} + \bar{F}_{R0,3} = 0. \quad (3.7)$$

Реакцию  $F_{R1,2}$  найдем из уравнения равновесия звена 2:

$$M_D = F_{R1,2}^\tau \cdot l_{BD} + F_{i2} \cdot h_1 + F_{G2} \cdot h_2 - F_{R4,2} \cdot h_3 + M_{i2} = 0, \quad (3.8)$$

отсюда

$$F_{R1,2}^\tau = \frac{-F_{i2} \cdot h_1 - F_{G2} \cdot h_2 + F_{R4,2} \cdot h_3 - M_{i2}}{l_{BD}}. \quad (3.9)$$

В соответствии с уравнением (3.7), учитывая направления  $F_{R0,3}$  и  $F_{R1,2}$  в выбранном масштабе  $\mu_F$  (Н/мм), строим план сил (рис. 3.9).

Точка  $a$  – начало построения плана, из которой откладывается век-

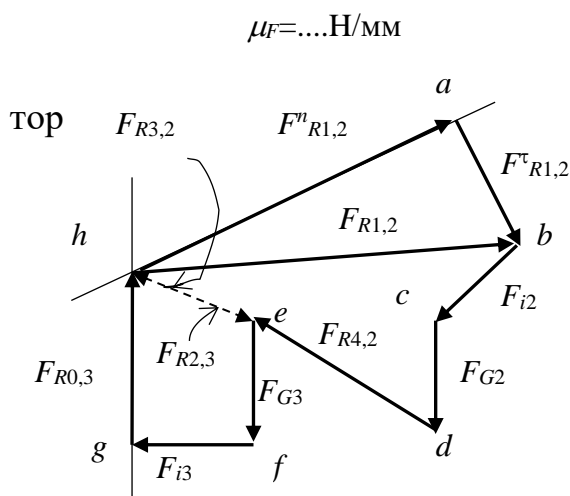


Рис. 3.9. План сил группы 2–3

$F_{R1,2}^r$ , затем  $F_{i2}$ ,  $F_{G2}$ ,  $F_{R4,2}$ ,  $F_{G3}$ ,  $F_{i3}$ . Из конца вектора  $F_{i3}$  проводим направление вектора  $F_{R0,3}$ , а из точки  $a$  проводим направление вектора  $F_{R1,2}^n$ . Так как  $\Sigma F=0$ , многоугольник сил должен быть замкнутым, точка  $h$  пересечения линий действия даст положение конца вектора  $F_{R0,3}$  и определит величину вектора  $F_{R1,2}^n$ .

Соединив точки  $h$  и  $b$ , получим полный вектор  $F_{R1,2}$ .

Из плана сил получим

$$F_{R1,2} = \bar{F}_{R1,2} \cdot \mu_F = \bar{hb} \cdot \mu_F \quad \text{и} \quad F_{R0,3} = \bar{F}_{R0,3} \cdot \mu_F = \bar{gh} \cdot \mu_F.$$

Для определения реакции  $F_{R2,3}$  или  $F_{R3,2}$  во внутренней кинематической паре  $B_{2,3}$  (шарнир  $D$ ) составим уравнение равновесия звена 2. Со стороны звена 3 на звено 2 будет действовать сила  $F_{R3,2}$ , тогда

$$\Sigma \bar{F} = \bar{F}_{R1,2} + \bar{F}_{i2} + \bar{F}_{G2} + \bar{F}_{R4,2} + \bar{F}_{R3,2} = 0. \quad (3.10)$$

На плане сил это будет отрезок  $eh$  (см. рис. 3.9):

$$F_{R3,2} = \bar{eh} \cdot \mu_F = \dots \text{Н.}$$

(Получим тот же результат, если рассмотреть звено 3:

$$\Sigma \bar{F} = \bar{F}_{G3} + \bar{F}_{i3} + \bar{F}_{R0,3} + \bar{F}_{R3,2} = 0; \quad F_{R2,3} = -F_{R3,2}.)$$

Таким образом, из плана сил найдены реакции во всех кинематических парах группы 2–3:  $F_{R1,2}$ ,  $F_{R2,3}$ ,  $F_{R3,0}$ .

Найдем точку приложения реакции  $F_{R0,3}$  в поступательной кинематической паре  $\Pi_{0,3}$ , для чего составим уравнение равновесия звена 3 (ползуна) в форме моментов.

В данном случае силы  $F_{i3}$ ,  $F_{R2,3}$  проходят через центр шарнира  $D$ , тогда для звена 3 момент сил относительно точки  $D$

$$M_D = F_{R0,3} \cdot h_5 - F_{G3} \cdot h_4 = 0, \quad (3.11)$$

отсюда

$$h_5 = \frac{F_{G3} \cdot h_4}{R_{0,3}} = \dots \text{мм.} \quad (3.12)$$

Если  $h_4 = 0$ , то и  $h_5 = 0$ , т. е. векторы всех сил и давлений в кинематической паре будут проходить через одну и ту же точку – центр шарнира  $D$ .

При необходимости учесть силы трения расчет ведется, как правило, методом последовательных приближений, за начальное приближение берется расчет без учета сил трения.

### 3.2.4. Силовой расчет начального механизма 1 – 0

Начальным механизмом является кривошип 1, образующий со стойкой вращательную кинематическую пару  $B_{0,1}$ .

Как известно, силовой расчет в этом случае сводится к определению реакции в кинематической паре  $F_{R0,1}$  и величины уравновешивающей силы  $F_b$  либо уравновешивающего момента  $M_b$ , что определяется схемой привода.

Определим уравновешивающую силу  $F_b$ , приложенную по касательной к точке  $B$ . Схема действия сил показана на рис. 3.10,а.

К кривошпиу 1 приложены силы:

$F_{R2,1} = \dots$  Н, реакция в шарнире  $B$  – давление со стороны звена 2, полученное из расчета предыдущей группы;

$F_{G2} = \dots$  Н, вес звена 1;

$F_{i1} = \dots$  Н – сила инерции звена 1.

Пусть уравновешивающая сила  $F_b$  приложена в точке  $B$  и линия действия её перпендикулярна кривошпиу.

Уравновешивающую силу найдем из уравнения моментов

$$M_A = F_b \cdot AB + F_{G1} \cdot h_1 - F_{R2,1} \cdot h_2 = 0, \quad (3.13)$$

отсюда

$$F_b = \frac{-F_{G1} \cdot h_1 + F_{R2,1} \cdot h_2}{AB} = \dots \text{ Н.} \quad (3.14)$$

Здесь плечи сил  $h_1, h_2$  определяются из чертежа.

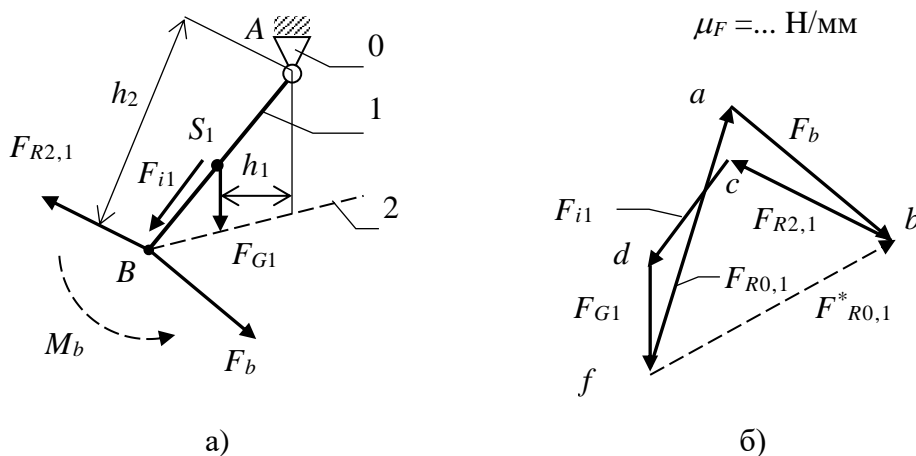


Рис. 3.10. Начальный механизм: а – схема; б – план сил

Реакцию  $F_{R0,1}$  в кинематической паре  $B_{0,1}$  (в шарнире  $A$ ) определим из условия равновесия звена 1:

$$\sum \bar{F} = \bar{F}_b + \bar{F}_{R2,1} + \bar{F}_{i1} + \bar{F}_{G1} + \bar{F}_{R0,1} = 0. \quad (3.15)$$

Строим план сил (см. рис. 3.10,б, начало построения – точка  $a$ ), отсюда найдем  $F_{R0,1}$ :

$$F_{R0,1} = \overline{fa} \cdot \mu_F = \dots \text{Н.}$$

Если к начальному механизму будет приложен уравнивающий момент  $M_b$  (показан на рис. 3.10,а пунктиром, его направление можем задать произвольно, с учетом предполагаемого направления составим уравнения равновесия), то его величина и направление также определятся из уравнения равновесия кривошипа:

$$M_A = M_b + F_{G1} \cdot h_1 - F_{R2,1} \cdot h_2 = 0, \quad (3.16)$$

отсюда

$$M_b = F_{R2,1} \cdot h_2 - F_{G1} \cdot h_1 = \dots \text{Н.} \quad (3.17)$$

Здесь  $h_1, h_2$  – действительные значения плеч действующих сил для механизма!

Если после подстановки в уравнение (3.17) момент  $M_b$  получится отрицательным, следовательно, направление его будет противоположным первоначально предположенному.

Реакция в кинематической паре  $F_{R0,1}^*$  в этом случае определится из уравнения

$$\sum \overline{F} = \overline{F}_{R2,1} + \overline{F}_{i2} + \overline{F}_{G1} + \overline{F}_{R0,1}^* = 0. \quad (3.18)$$

Из плана сил найдем

$$F_{R0,1}^* = \overline{fb} \cdot \mu_F = \dots \text{Н.}$$

Как видно, величина реакции в шарнире  $A$  может существенно отличаться, а от этого будут зависеть размеры цапф (подшипников). Если вал кривошипа получает вращение через соединительную муфту, то к нему будет приложен момент и при силовом расчете следует определять величину уравнивающего момента  $M_b$ . Если вал кривошипа получает вращение через зубчатое зацепление, то в этом случае на кривошип будет действовать уравнивающая сила  $F_b$ , приложенная в полюсе зацепления, и будет направлена по линии зацепления. При передаче вращения посредством цепной или ременной передачи уравнивающая сила будет направлена по ветви цепи или ремня.

Из сравнения уравнений (3.13) и (3.16) следует, что

$$M_b = F_b \cdot l_{AB},$$

т. е. определив  $F_b$ , при необходимости можно найти  $M_b$ , и наоборот:

$$F_b = \frac{M_b}{l_{AB}}.$$

### 3.3. Примеры силового расчета

#### 3.3.1. Кривошипно-шатунный механизм

Требуется определить реакции во всех кинематических парах и величину уравновешивающей силы кривошипно-шатунного механизма (рис. 3.12).  $F_3$  – сила полезного сопротивления, приложенная к звену 3.

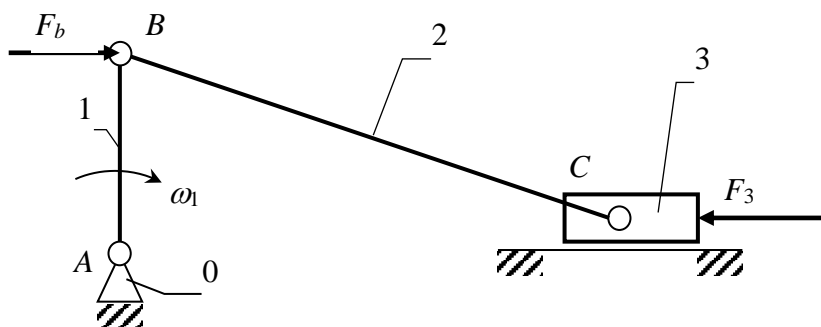


Рис. 3.12. Схема механизма

Пусть вес звеньев и силы инерции пренебрежимо малы по сравнению с внешней силой  $F_3$ .

При решении этих примеров соблюдаем порядок, указанный ранее. Данный механизм состоит из начального механизма (кривошипа 1 и стойки 0) и группы Ассура (2–3) 2-го класса второго вида с двумя вращательными и одной внешней поступательной кинематической парой.

1. Вычерчиваем группу 2–3 в масштабе (рис. 3.13,а).
2. Расставляем неизвестные реакции во *внешних* кинематических парах:  $F_{R1,2}$  – известна точка приложения – центр шарнира  $B$ ;  $F_{R0,3}$  – известна по направлению – перпендикулярна к направляющей  $\alpha$ – $\alpha$ .

3. Составляем уравнение равновесия группы в форме сил:

$$\sum \bar{F} = \bar{F}_{R1,2} + \bar{F}_3 + \bar{F}_{R0,3} = 0. \quad (3.28)$$

Разложим реакции в шарнире  $B$  на составляющие:

$$\bar{F}_{R1,2} = \bar{F}_{R1,2}^n + \bar{F}_{R1,2}^\tau. \quad (3.29)$$

$\bar{F}_{F1,2}^\tau$  найдем из уравнения равновесия звена 2:

$$M_C = F_{R1,2}^\tau \cdot l_{BC} = 0. \quad (3.30)$$

Следовательно,  $F_{F1,2}^\tau = 0$  и  $F_{R1,2} = F_{R1,2}^n$ .

В соответствии с уравнением (3.28) строим план сил группы (рис. 3.13,б).

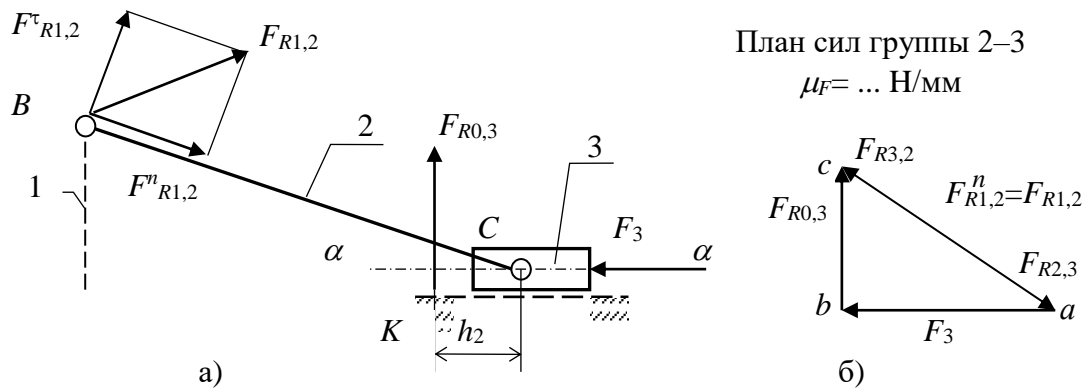


Рис. 3.13. Группа Ассура 2–3: а – схема; б – план сил

Из точки  $a$  (начало плана) откладываем вектор  $F_3$ , из конца этого вектора проводим направление вектора  $F_{R0,3}$ , а из точки  $a$  плана проводим направление вектора  $F_{R1,2}^n \parallel BC$ . Эти направления пересекаются в точке  $C$  (многоугольник сил должен быть замкнутым). Из плана находим

$$F_{R0,3} = \overline{bc} \cdot \mu_F = \dots \text{Н}, \quad (3.31)$$

$$F_{R1,2} = F_{R1,2}^n = \overline{ac} \cdot \mu_F = \dots \text{Н}. \quad (3.32)$$

Для определения реакции во внутренней кинематической паре (шарнир  $C$ ) достаточно рассмотреть условие равновесия одного из звеньев.

Рассмотрим звено 2, тогда

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_{R1,2} + \vec{F}_{R3,2} = 0, \quad (3.33)$$

отсюда

$$F_{R3,2} = -F_{R1,2}. \quad (3.34)$$

Если рассмотреть звено 3, тогда

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_3 + \vec{F}_{0,3} + \vec{F}_{R2,3} = 0. \quad (3.35)$$

Из плана найдем

$$F_{R2,3} = F_{R1,2} = -F_{R3,2}. \quad (3.36)$$

Точку приложения к реакции  $F_{R0,3}$  найдем из уравнений равновесия звена 3. Здесь линии действия реакции  $F_{R2,3}$  и силы  $F_3$  проходят через точку  $C$ , тогда

$$M_C = F_{R0,3} \cdot h_2 = 0. \quad (3.37)$$

Так как  $F_{R0,3} \neq 0$ , следовательно,  $h_2 = 0$ , т. е. в данном случае реакция  $F_{R0,3}$  также будет проходить через центр шарнира  $C$ .



### Расчет начального механизма 1–0

К кривошипу 1 (рис. 3.14,а) приложены в точке  $B$  нагрузка  $F_{R2,1}$  ( $F_{R2,1} = -F_{R1,2}$ ) со стороны звена 2 и уравнивающая сила  $F_b$ , перпендикулярная кривошипу, которую найдем из уравнения равновесия:

$$M_A = F_{R2,1} \cdot h_1 - F_b \cdot l_{AB} = 0, \quad (3.38)$$

отсюда

$$F_b = \frac{F_{R2,1} \cdot h_1}{l_{AB}}. \quad (3.39)$$

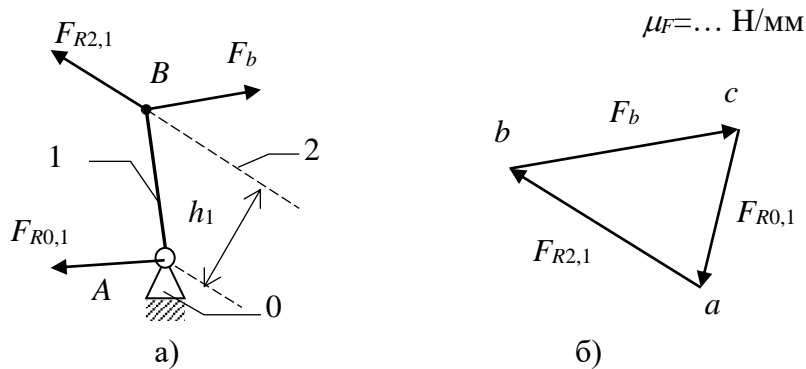


Рис. 3.14. Начальный механизм: а – схема; б – план сил

Реакцию в шарнире  $A$  найдем из плана сил, для чего составим уравнение равновесия звена 1 в форме сил:

$$\sum \bar{F} = \bar{F}_{F2,1} + \bar{F}_b + \bar{F}_{R0,1} = 0. \quad (3.40)$$

План сил построен на рис. 3.14,б.

### 3.3.2. Шарнирный четырехзвенный механизм

Пусть  $F_2 = F_3$  – внешние силы, приложенные к звеньям 2 и 3 в точках  $K$  и  $E$  посередине звеньев (рис. 3.15).

**Решение.** Выделим группу Ассур 2–3.  $[B_{1,2} - B_{2,3} - B_{3,0}]$  – группа 2-го класса первого вида (рис. 3.16,а) с приложенными к звеньям 2 и 3 силами  $F_2$  и  $F_3$ .

Во внешних кинематических парах – шарнирах  $B$  и  $C$  приложим неизвестные реакции  $F_{R2,1}$  и  $F_{R0,3}$ . Уравнение равновесия группы 2–3 примет вид

$$\sum F = F_{R1,2} + F_2 + F_3 + F_{R0,3} = 0. \quad (3.41)$$

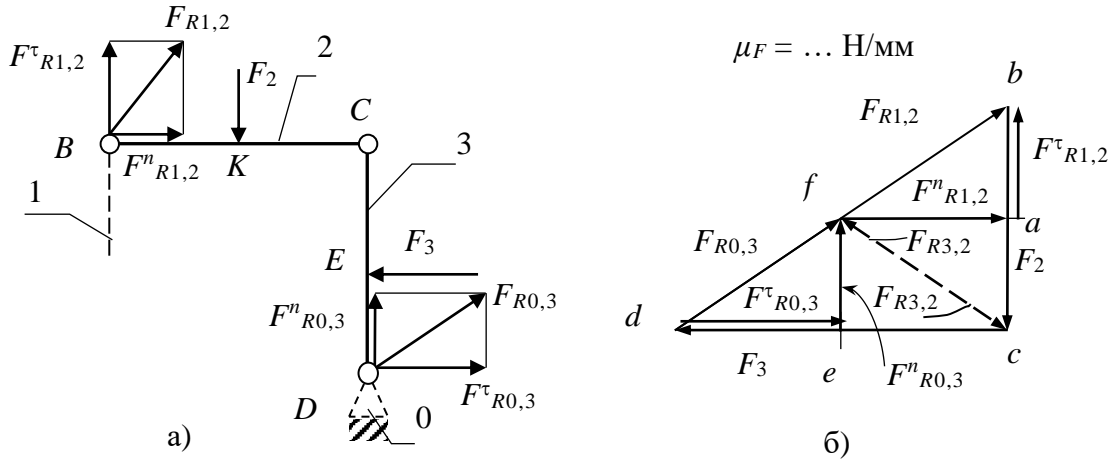


Рис. 3.16. Группа 2–3: а – план группы; б – план сил группы

Так как реакции  $F_{R2,1}$  и  $F_{R0,3}$  неизвестны ни по величине, ни по направлению, разложим их на составляющие, направив их по звену ( $F_{R1,2}^n$  и  $F_{R0,3}^n$ ) и перпендикулярно звену ( $F_{R1,2}^\tau$  и  $F_{R0,3}^\tau$ ), т. е.

$$\bar{F}_{R1,2} = \bar{F}_{R1,2}^n + \bar{F}_{R1,2}^\tau, \quad (3.42)$$

$$\bar{F}_{R0,3} = \bar{F}_{R0,3}^n + \bar{F}_{R0,3}^\tau. \quad (3.43)$$

Тангенциальные составляющие найдем из условия равновесия звеньев 2 и 3.

Для звена 2

$$M_C = -F_{R1,2}^\tau \cdot l_{BC} + F_2 \cdot l_{KC} = 0, \quad (3.44)$$

отсюда

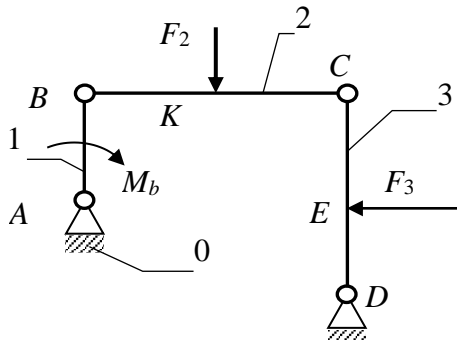


Рис. 3.15. Схема механизма

$$F_{R1,2}^\tau = F_2 \frac{l_{KC}}{l_{BC}} = 0,5F_2. \quad (3.45)$$

Для звена 3

$$M_C = F_{R0,3}^\tau \cdot l_{DC} - F_3 \cdot l_{FC} = 0, \quad (3.46)$$

отсюда

$$F_{F0,3}^\tau = F_3 \frac{l_{EC}}{l_{DC}} = 0,5F_3. \quad (3.47)$$

Подставив (3.42) и (3.43) в уравнение (3.41), получим

$$\sum \bar{F} = \bar{F}_{R1,2}^n + \bar{F}_{R1,2}^\tau + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \bar{F}_{R0,3}^\tau + \bar{F}_{R0,3}^n = 0. \quad (3.48)$$

В строгом соответствии с этим уравнением строим план сил (рис. 3.16,б).

Начало плана – точка  $a$ , из которой откладываем вектор  $F_{R1,2}^\tau$ , затем из точки  $b$  – вектор  $F_2$ , из точки  $c$  – вектор  $F_3$ , из точки  $d$  – вектор  $F_{R0,3}^\tau$ . Из точек  $c$  и  $a$  проводим направления нормальных составляющих, которые пересеклись в точке  $f$ . Из плана находим  $F_{R1,2}$  и  $F_{R0,3}$  (отрезки  $fb$  и  $df$ ).

Реакцию во внутреннем шарнире найдем по общему правилу – из уравнения равновесия одного из звеньев, например звена 2, тогда

$$\sum \bar{F} = \bar{F}_{R1,2} + \bar{F}_2 + \bar{F}_{R3,2} = 0. \quad (3.49)$$

На плане сил реакция  $F_{R3,2}$  будет представлена отрезком  $cf$ .

#### Начальный механизм 1 – 0

В точке  $B$  (рис. 3.17) кривошипа приложена сила  $F_{R1,2}$  (из плана).

Пусть к кривошипу приложен уравновешивающий момент  $M_b$ , который найдется из условия равновесия:

$$M_A = F_{R2,1} \cdot h - M_b = 0, \quad (3.50)$$

тогда

$$N_b = F_{R2,1} \cdot h. \quad (3.51)$$

(Заметим, что здесь «плечо» силы определяется с учетом масштаба, т. е.  $h = \bar{h} \cdot \mu_l$ .)

Реакция  $F_{R0,1}$  в данном случае будет равна и противоположна  $F_{R2,1}$

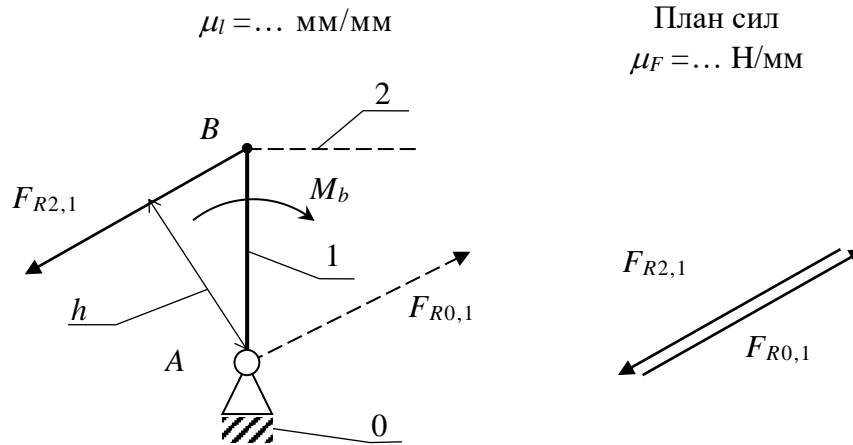


Рис. 3.17. Начальный механизм

### 3.3.3. Пример силового расчета группы 2-го класса третьего вида

Механизмы с подобной структурой применяются, например, в строгальных, долбежных станках.

Пусть это последняя группа шестизвенного механизма строгального станка, на звенья которой действуют сила резания  $F_5$ , сила инерции  $F_{i5}$  и сила тяжести  $F_{G5}$  ползуна 5 – группа 4–5 [В<sub>3,4</sub>–П<sub>4,5</sub>–В<sub>5,0</sub>] (рис. 3.18,а).

Как уже было показано в первом примере, реакция  $F_{R3,4}$  будет приложена в точке С шарнира и перпендикулярна направляющей камня ED, а реакция  $F_{0,5}$  перпендикулярна AB и приложена в некоторой точке К.

Уравнение равновесия группы 4–5:

$$\sum \bar{F} = \bar{F}_{R3,4} + \bar{F}_5 + \bar{F}_{i5} + \bar{F}_{G5} + \bar{F}_{R0,5} = 0. \quad (3.52)$$

Строим план сил (рис. 3.18,в). Начало плана – точка *a*, из которой откладываем вектор  $F_5$ , затем  $F_{i5}$ ,  $F_{G5}$ , из точки *d* проводим направление вектора  $F_{R3,4}$ , а из начала плана – направление вектора  $F_{R0,5}$ . В точке *e* многоугольник сил замкнулся, следовательно, реакция  $F_{R3,4}$  на плане представлена отрезком *de*, а реакция  $F_{R0,5}$  – отрезком *ea*.

Из условия равновесия камня 4 (рис. 3.18 б)

$$F_{R5,4} = -F_{R3,4}, \quad (3.53)$$

$$F_{R4,5} = -F_{R5,4} = F_{R3,4}. \quad (3.54)$$

Точку приложения реакции  $F_{R0,5}$  можно найти из уравнения моментов сил звена 5 (например, относительно точки D).

Группа Ассура 4–5 [В<sub>3,4</sub>–П<sub>4,5</sub>–П<sub>5,0</sub>]

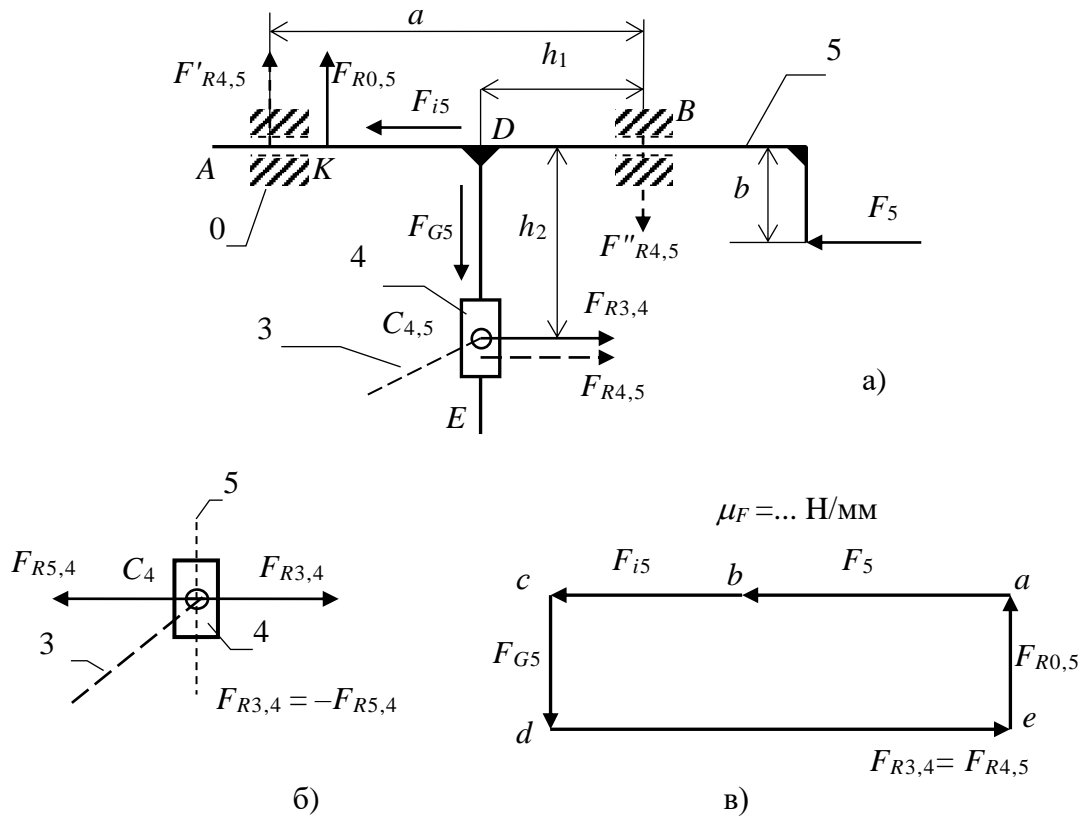


Рис. 3.18. Механизм строгального станка:  
 а – схема; б – фрагмент нагружения звена 4; в – план сил группы 4–5

Но для расчета направляющих и опорных поверхностей ползуна целесообразнее определить реакции в конечных точках  $A$  и  $B$  направляющих  $F'_{R0,5}$  и  $F''_{R0,5}$  ( $\bar{F}_{R0,5} = \bar{F}'_{R0,5} + \bar{F}''_{R0,5}$ ).

Рассмотрим звено 5:

$$M_B = -F'_{R0,5} \cdot a + F_{G5} \cdot h_1 + F_{R4,5} \cdot h_2 - F_5 \cdot b = 0, \quad (3.55)$$

отсюда найдем  $F'_{R0,5}$ ;

$$M_A = -F''_{R0,5} \cdot a + F_{G5} \cdot (a - h_1) + F_{R4,5} \cdot h_2 - F_5 \cdot b = 0, \quad (3.56)$$

отсюда найдем  $F''_{R0,5}$ .

## Контрольные вопросы

1. Перечислите, какие силы действуют в механизмах.
2. Для чего рассчитывается, чему равна и как направлена сила инерции?
3. Для чего рассчитывается, чему равен и как направлен момент сил инерции?
4. Для какой цели необходимо знать реакции во всех кинематических парах?
5. Опишите методы силового расчета механизмов.
6. В чем отличие силового расчета групп Ассура и начального механизма?
7. Чем отличается определение реакций в двухповодковой группе с внешней поступательной и двумя вращательными парами от двухповодковой группы с внутренней поступательной парой?
8. Как направлены реакции в высших и низших кинематических парах?
9. Опишите план силового расчета многозвенного рычажного механизма.
10. Что такое уравновешивающий момент или уравновешивающая сила?