

М.В. Горбенко

## **КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ**

## ЛЕКЦИЯ 2. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ (3)

### Кинематический анализ зубчатых механизмов

Зубчатые механизмы находят очень широкое применение во многих машинах и приборах для передачи вращательного движения (с изменением угловой скорости и крутящего момента) в широком диапазоне мощностей (до 100 тыс. кВт) и скоростей (до 200 м/с), а также для преобразования вращательного движения в поступательное или наоборот (реечные передачи). Они имеют высокий КПД (до 0,98-0,99 для одной пары колёс – ступени), надёжны в работе, просты в обслуживании, компактны.

Зубчатые механизмы относятся к механизмам с высшими кинематическими парами. Передача движения осуществляется *зацеплением*. Высшая кинематическая пара, образуемая последовательно взаимодействующими поверхностями зубьев, называется *зубчатым зацеплением*.

Простейшим зубчатым механизмом является механизм, состоящий из пары зубчатых колёс и стойки. Меньшее из этих колёс (с меньшим числом зубьев) называется *шестерней*, большее – *колесом*. Механизмы с числом зубчатых колёс больше двух являются сложными.

В кинематическом отношении зубчатые передачи можно разделить на две группы:

1) *рядовые* механизмы – механизмы, у которых оси вращения зубчатых колёс неподвижны;

2) *сателлитные* механизмы – механизмы, у которых имеются зубчатые колёса с подвижными осями вращения. Если степень подвижности таких механизмов равна единице, они называются *планетарными*, а механизмы с двумя и более степенями подвижности – *дифференциальными*.

Основной задачей кинематического анализа зубчатых механизмов является определение угловых скоростей или частоты вращения звеньев механизма, частоты вращения звеньев механизма, направления вращения. Эта задача обычно решается через вычисление передаточных отношений.

### Передаточные отношения и их определение

Передаточное отношение является основным кинематическим параметром зубчатых механизмов. Согласно ГОСТу 16530–83 передаточ-

ным отношением называется *отношение угловых скоростей звеньев* (или частоты вращения), т. е.

$$i_{j,k} = \frac{\omega_j}{\omega_k} = \frac{n_j}{n_k}, \quad (1)$$

где  $i_{jk}$  – передаточное отношение от звена  $j$  к звену  $k$ ;

$\omega_j(n_j), \omega_k(n_k)$  – угловые скорости (частоты вращения) звеньев  $j, k$ .

В указанном выше ГОСТе есть такое примечание: «При отсутствии дополнительных указаний имеется в виду отношение угловой скорости ведущего к угловой скорости ведомого зубчатого колеса».

Передаточное отношение для двух зубчатых колёс с неподвижными осями можно выразить через диаметры (*начальных или делительных окружностей*) зубчатых колёс и числа зубьев (обратные отношения):

$$|i_{1,2}| = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{d_2}{d_1} = \frac{z_2}{z_1}. \quad (2)$$

При параллельных осях вращения (плоские механизмы) для определения направления вращения зубчатых колёс передаточному отношению приписывают знак. Передаточное отношение считается положительным, если направления вращения колёс одинаковы (для зубчатой пары с *внутренним зацеплением*), и отрицательным, если направления вращения (угловых скоростей) противоположны (для зубчатой пары с *внешним зацеплением* – рис. 1, а, б).

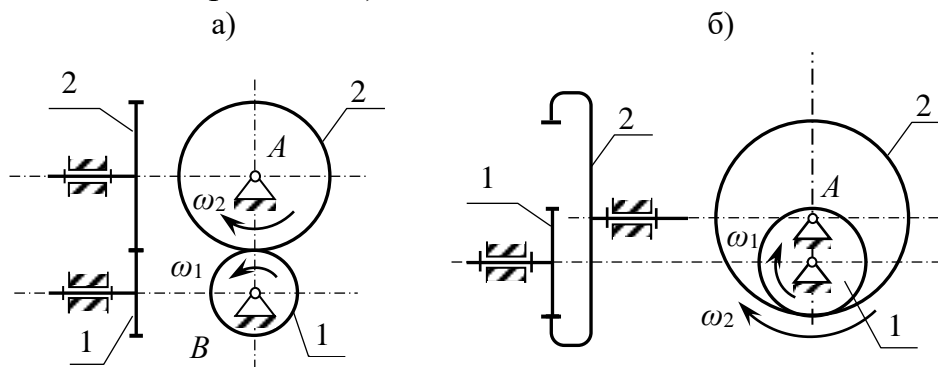


Рис. 1. Зубчатые механизмы

При пересекающихся или скрещающихся осях вращения (*конические, винтовые, червячные передачи*) передаточное отношение равно отношению модулей угловых скоростей.

Если рассматривать угловые скорости как векторные величины, то

$$i_{1,2} = \frac{\omega_1}{\omega_2}.$$

Знак передаточного отношения в данном случае получится автоматически, поскольку учтены направления угловых скоростей.

При определении передаточного отношения через частоты вращения, диаметры или числа зубьев (величины скалярные) используются соотношения

$$i_{1,2} = \pm \frac{n_1}{n_2} = \pm \frac{d_2}{d_1} = \pm \frac{z_2}{z_1}. \quad (3)$$

Здесь знак «+» принимается для пары внутреннего зацепления, а знак «-» для пары внешнего зацепления.

Для круглых зубчатых колёс передаточное отношение постоянное. В приборостроении и в общем машиностроении также применяются зубчатые механизмы с переменным передаточным отношением, которое воспроизводится некруглыми зубчатыми колесами различного вида.

Зацепление одной пары зубчатых колес называется *ступенью* с передаточным отношением до 6–8. Для обеспечения большего передаточного отношения применяются многоступенчатые зубчатые механизмы. Если угловая скорость ведомого звена меньше угловой скорости ведущего звена ( $|i| > 1$ ), то этот механизм является замедляющим, или *редуктором*. В том случае, когда угловая скорость ведомого звена больше угловой скорости ведущего звена ( $|i| < 1$ ) механизм является ускоряющим, или *мультипликатором*. В машиностроении более широкое применение нашли замедляющие передачи (редукторы).

По ГОСТу 16530–83 кроме термина «передаточное отношение», используется термин «*передаточное число*», под которым понимается отношение числа зубьев колеса к числу зубьев шестерни (зубчатого колеса с меньшим числом зубьев), т. е.

$$U_{1,2} = \frac{z_2}{z_1}.$$

Передаточное число  $U > 1$  и не имеет знака. Оно может быть равным или обратным передаточному отношению.

$U_{1,2} = |i_{1,2}|$  для редуцирующих (понижающих) передач и

$U_{1,2} = \frac{1}{|i_{1,2}|}$  для мультипликаторов (повышающих) передач.

Передаточное число показывает только во сколько раз изменили угловую скорость (или частоту вращения) выходного звена относительно входного, но *не показывает* соотношение направлений вращения входа и выхода (одно и то же направление или противоположные), и не показывает ускорили вращение или замедлили.

Для кинематических исследований предпочтение следует отдавать передаточному отношению.

### Передаточные отношения многоступенчатых рядовых механизмов

*Механизмы с параллельным соединением зубчатых колёс*

На рис. 2 представлена схема трехступенчатого механизма с неподвижными осями. На промежуточных валах  $O_2 - O_2$  и  $O_3 - O_3$  жёстко насажены по два зубчатых колеса.

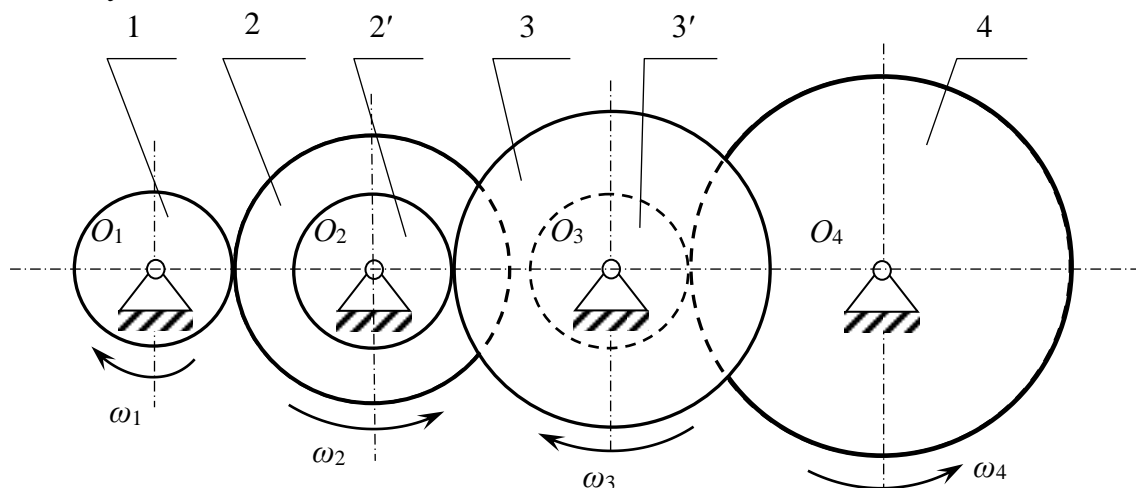


Рис. 2. Многоступенчатые зубчатые механизмы

Передаточное отношение механизма будет равно

$$i_{1,4} = \frac{\omega_1}{\omega_4}. \quad (4)$$

Передаточное отношение каждой пары колёс (ступени):

$$i_{1,2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{z_2}{z_1}, \quad i_{2,3} = \frac{\omega_{2'}}{\omega_3} = -\frac{z_2}{z_{2'}}, \quad i_{3',4} = \frac{\omega_{3'}}{\omega_4} = -\frac{z_4}{z_{3'}}. \quad (5)$$

Перемножив полученные передаточные отношения (5), получим

$$i_{1,2} \cdot i_{2,3} \cdot i_{3',4} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \cdot \frac{\omega_{2'}}{\omega_3} \cdot \frac{\omega_{3'}}{\omega_4} = -\frac{\omega_1}{\omega_4}.$$

Так как  $\frac{\omega_1}{\omega_4} = i_{1,4}$ , то

$$i_{1,4} = i_{1,2} \cdot i_{2,3} \cdot i_{3',4}. \quad (6)$$

Следовательно, передаточное отношение сложного зубчатого механизма с неподвижными осями равно произведению передаточных отношений отдельных ступеней.

Это уравнение справедливо для любых механизмов с неподвижными осями, которые могут содержать цилиндрические, конические зубчатые колёса, червячные, винтовые и другие передачи.

Для передаточного числа эта формула в общем случае несправедлива, поскольку и для понижающих передач, и для повышающих передач величина передаточного числа одинакова.

Общее передаточное число многоступенчатого механизма через передаточные числа ступеней определяется по следующей формуле:

$$U = \frac{\prod U_{\text{редуц}}}{\prod U_{\text{мультиплик}}}.$$

Или общее передаточное число многоступенчатого механизма равно произведению передаточных чисел редуцирующих (понижающих) ступеней деленное на произведение передаточных чисел мультипликативных (повышающих) ступеней.

Для механизмов с параллельными осями при необходимости определения направления вращения валов передаточные отношения следует брать со своим знаком. Так как направление вращения изменяется при внешнем зацеплении (знак минус), то оно и будет изменяться столько раз, сколько кинематических пар с внешним зацеплением. Тогда формулу передаточного отношения сложного механизма можно представить в виде

$$i_{1,n} = \frac{\omega_1}{\omega_n} = (-1)^m \cdot |i_{1,2} \cdot i_{2',3} \cdot i_{3',4} \dots i_{(k-1),k}|, \quad (7)$$

где  $m$  – число пар с внешним зацеплением;  $k$  – число колёс.

Подставив значение передаточных отношений из формулы (5) в формулу (7), выразим общее передаточное отношение через числа зубьев. В данном механизме число пар с внешним зацеплением  $m=3$ , тогда

$$i_{1,4} = (-1)^m \cdot |i_{1,2} \cdot i_{2',3} \cdot i_{3',4}| = (-1)^3 \cdot \frac{z_2 \cdot z_3 \cdot z_4}{z_1 \cdot z_2' \cdot z_3'} = - \frac{z_2 \cdot z_3 \cdot z_4}{z_1 \cdot z_2' \cdot z_3'}. \quad (8)$$

То есть общее передаточное отношение равно отношению произведения числа зубьев (диаметров) ведомых колёс к произведению числа зубьев (диаметров) ведущих колёс, взятых со своими знаками.

#### *Механизмы с последовательным соединением зубчатых колёс*

В таком механизме (рис. 3) каждое колесо имеет собственную ось вращения.

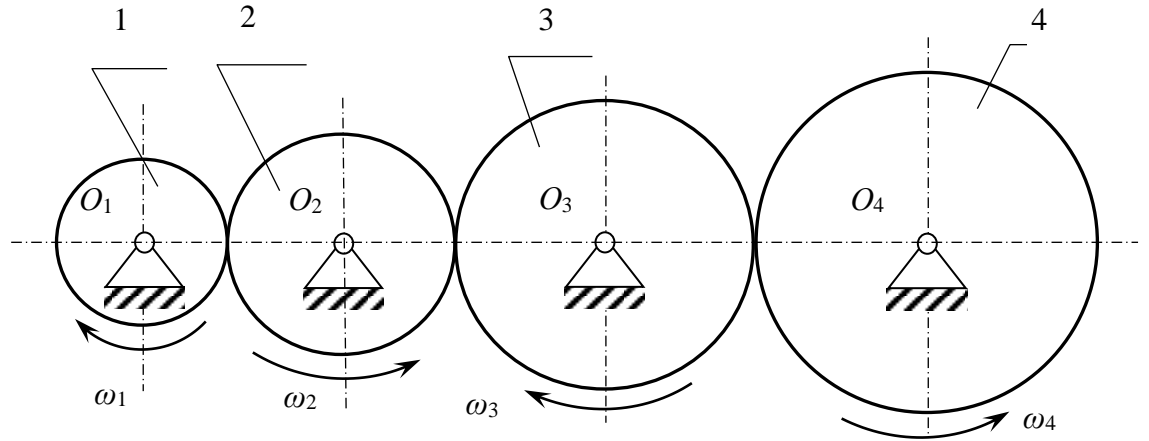


Рис. 3. Зубчатый механизм с паразитными колесами

Общее передаточное отношение рассматриваемого механизма, состоящего из четырёх зубчатых колёс, или трёх ступеней ( $m=3$ ), равно

$$i_{1,4} = (-1)^m \cdot |i_{1,2} \cdot i_{2,3} \cdot i_{3,4}| = -\left(\frac{z_2}{z_1}\right) \cdot \left(\frac{z_3}{z_2}\right) \cdot \left(\frac{z_4}{z_3}\right) = -\frac{z_4}{z_1} = -\frac{d_4}{d_1}. \quad (9)$$

Или в общем случае при  $k$  колёсах в механизме с последовательным соединением

$$i_{1,k} = (-1)^m \cdot \frac{z_k}{z_1} = (-1)^m \cdot \frac{d_k}{d_1}. \quad (10)$$

Как следует из формулы (10), общее передаточное отношение рядового механизма определяется только размерами (числом зубьев или диаметрами) ведущего и ведомого зубчатых колёс, называемых промежуточными (или паразитными). Следует отметить, что последнее определение необъективно, так как промежуточные колёса выполняют существенную роль, заключающуюся в том, что в передаче движения при большом межосевом расстоянии значительно уменьшаются габариты механизма, а также в обеспечении надлежащего направления вращения ведомого вала.