

М.В. Горбенко

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

ЛЕКЦИЯ 2. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ (1)

Планы положений звеньев групп и построение траекторий, описываемых точками звеньев механизма

Задачи о положениях, скоростях и ускорениях решаются применительно к группам Ассура, которыми образован механизм.

Эти задачи решаются в такой последовательности.

1. Выполняется структурный анализ и классификация механизма по Ассуру–Артоболовскому.

2. Указываются ведущие звенья (их количество соответствует степени подвижности механизма). Задаются их законы движения. При построении планов положений обычно задаются равномерным движением ведущего звена (ведущих звеньев). Выбирается обобщенная координата.

3. Выбирается масштаб построения чертежа.

При выполнении чертежа обязательно применение масштаба.

ГОСТ 2.302-68 предусматривает следующие масштабы:

Масштабы уменьшения	1:2; 1:2,5; 1:4; 1:5; 1:10; 1:15; 1:20; 1:25; 1:40; 1:50; 1:75; 1:100; 1:200; 1:400; 1:500; 1:800; 1:1000
Натуральная величина	1:1
Масштабы увеличения	2:1; 2,5:1; 4:1; 5:1; 10:1; 20:1; 40:1; 50:1; 100:1

При проектировании генеральных планов крупных объектов допускается применять масштабы 1:2000, 1:5000, 1:10000, 1:20000; 1:25000, 1:50000.

Дополнения в ГОСТ 2.302-68 (протокол № 23 от 28.02.2006):

«Документы в электронной форме в своей реквизитной части должны содержать реквизит, указывающий на принятый масштаб изображения. **При выводе документов в электронной форме на бумажный носитель масштаб изображения должен соответствовать указанному**»

4. Наносятся все неподвижные элементы кинематических пар механизма в некоторой координатной сетке в соответствии с их расположением.

5. По заданной обобщенной координате строится положение ведущего звена.

6. Последовательно по группам Ассура строится план положений механизма.

Масштабы построения выбираются таким образом, чтобы была возможность и достаточно точного построения, и наилучшим образом использовалось поле чертежа.

При вращательном движении ведущего звена в качестве обобщенной координаты используется угол, определяющий положение данного звена в выбранной системе координат, при поступательном движении ведущего звена – соответствующая линейная координата. Само построение плана выполняется элементарными геометрическими построениями (рис. 1). При построении используются координаты точек расположения стоек, метод «засечек» для определения положения кинематических пар между подвижными звеньями.

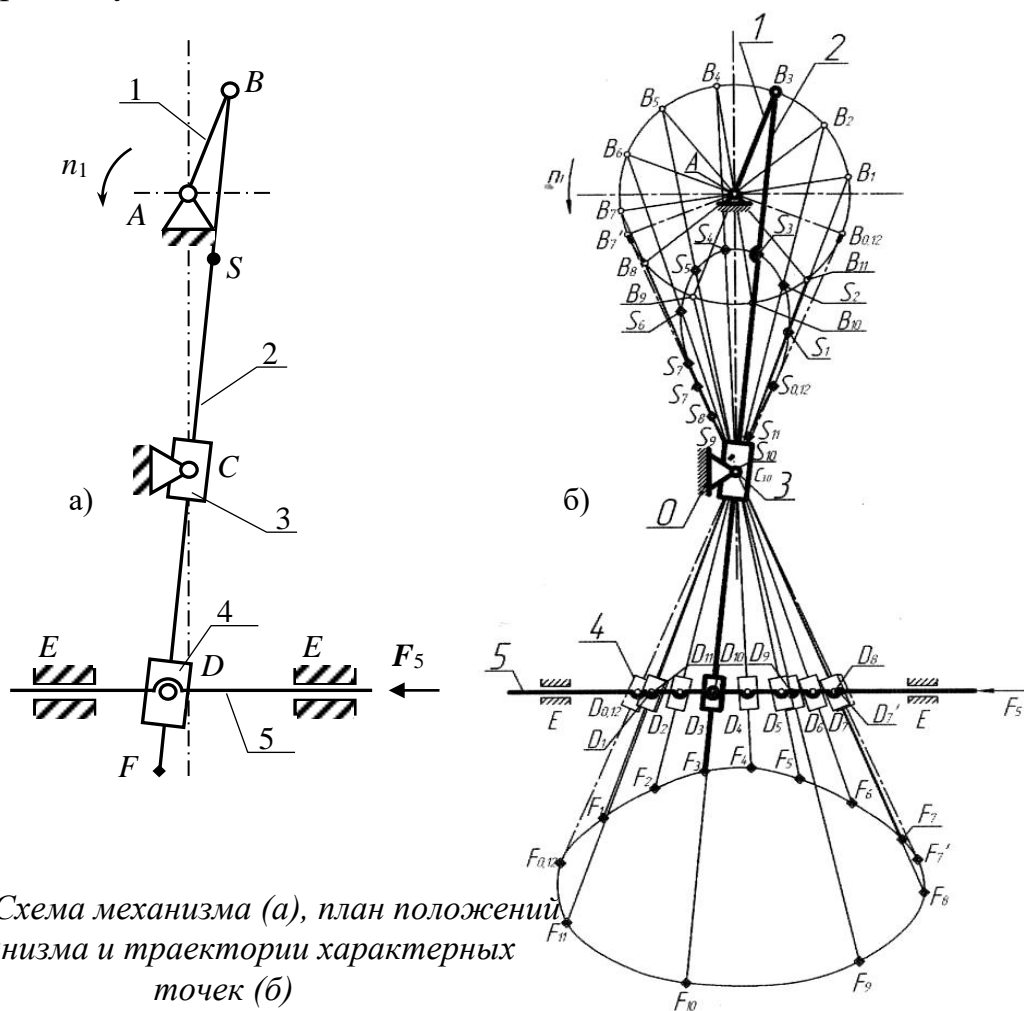


Рис. 1. Схема механизма (а), план положений механизма и траектории характерных точек (б)

Для определения размера пространства, необходимого для работы механизма, траекторий, описываемых различными точками звеньев, выполняется, как правило, построение не менее 12 положений за цикл ра-

боты механизма. За начальное положение обычно принимается одно из крайних положений, соответствующее началу *рабочего хода*.

Рабочим ходом называется часть цикла работы механизма, когда выходное звено, нагруженное полезной силой или моментом, совершает движение против направления полезной нагрузки.

Последовательные положения интересующих точек соединяются кривой. Например, при ведущем кривошипе 1 (рис. 1) строится его 12 равноотстоящих положений – через 30° , нумерация начинается соответственно от крайнего левого положения по выходному звену 5, так как полезная сила, приложенная к звену 5, направлена влево.

Рассмотрим пример, поясняющий порядок построения планов скоростей и ускорений, а также форму записей в поясняющей текстовой части.

На рис. 2.3,а приведена схема шестизвенного рычажного механизма с качающейся кулисой. Размеры звеньев и частота вращения ведущего звена – известны:

$$l_{AB} = 150 \text{ мм}, l_{BC} = 700 \text{ мм},$$

$$l_{CD} = 600 \text{ мм}, l_{CF} = 270 \text{ мм},$$

$$l_{KL} = 650 \text{ мм}, n_1 = 225 \text{ об/мин.}$$

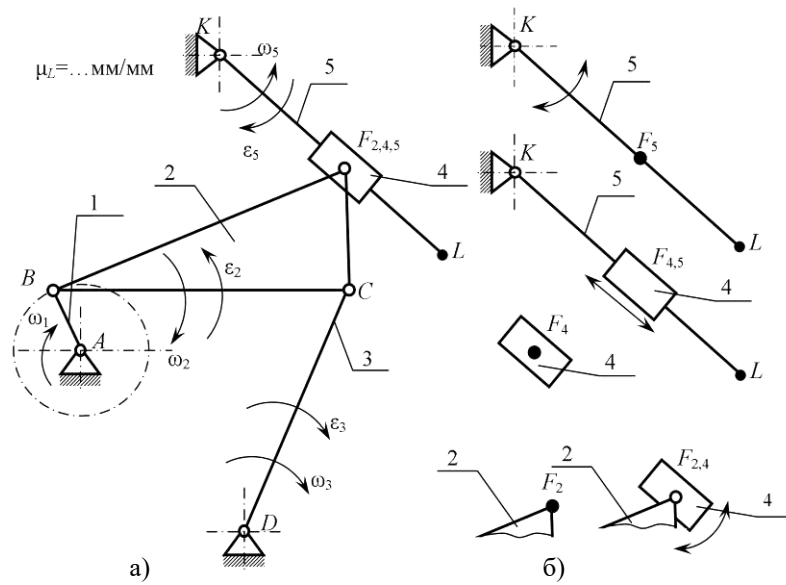
Этот механизм состоит из начального механизма – кривошипа 1 с вращательной кинематической парой $B_{0,1}$ и двух последовательно присоединенных групп Ассур, содержащих звенья 2–3 и 4–5. В общем виде формулу строения механизма можно записать в такой форме:

$$1 - [2-3] - [4-5],$$

или в развернутом виде

$$B_{0,1} - [B_{1,2} - B_{2,3} - B_{3,0}] - [B_{2,4} - \Pi_{4,5} - B_{5,0}].$$

Это механизм 2-го класса.



План скоростей
 $\mu_v = \dots (\text{м/с})/\text{мм}$

План ускорений
 $\mu_a = \dots (\text{м/с}^2)/\text{мм}$

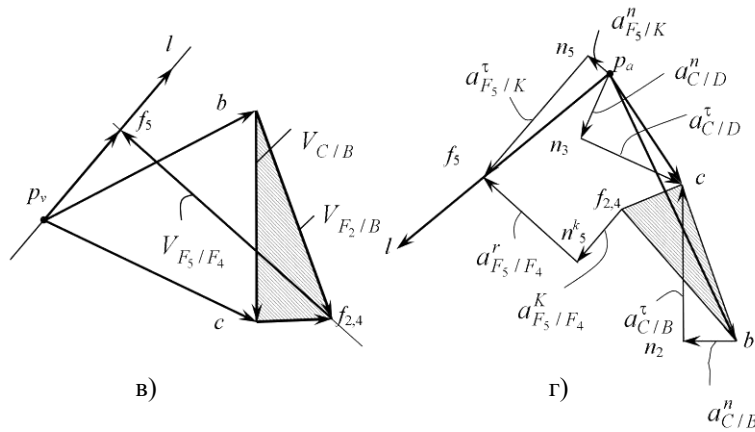


Рис. 2.3. К кинематическому исследованию методом планов:
 а – схема механизма; б – фрагменты; в – план скоростей; г – план ускорений

Для лучшего понимания характера *абсолютного* и *относительного* движения звеньев кулисной пары и правильного составления векторных уравнений при построении планов скоростей и ускорений рядом показаны (см. рис. 2.3,б): отдельно звено 2 с точкой F_2 , звено 4 – камень кулисы с точкой F_4 и звено 5 – кулиса с точкой F_5 (на механизме эти точки совпадают).

Отдельно показаны соединения: звенья 2 и 4 образуют вращательную кинематическую пару $B_{2,4}$, следовательно, относительное движение этих звеньев может быть только вращательным, а звенья 4 и 5 входят в поступательную кинематическую пару $\Pi_{4,5}$, и относительное движение этих звеньев – поступательное.

2.3. Построение планов скоростей механизма

Кинематический анализ выполняется последовательно от начального механизма (ведущего звена, для которого известен закон движения) по группам Ассура, начиная с первой присоединенной группы.

Для механизма, образованного только диадными группами (группами Ассура 2-го класса), на каждом этапе исследования присоединенной группы ищется такая точка механизма, движение которой может быть рассмотрено через две другие известные точки механизма согласно теореме о скоростях точек твердого тела.

Порядок выполнения кинематического анализа методом планов может быть структурирован следующим образом:

1. Вычерчивается механизм в масштабе в заданном положении.
2. Определяется скорость точки начального механизма, в которой присоединена первая группа Ассура, т. е. точки звена, закон движения которого задан. В данном случае это точка B звена 1:

$$V_B = \omega_1 \cdot L_{AB},$$

где

$$\omega_1 = \frac{\pi \cdot n}{30} = \frac{3,14 \cdot 225}{30} = 23,56 \text{ 1/с.}$$

Подставив значения, получим

$$V_B = 23,56 \cdot 0,15 = 3,53 \text{ м/с.}$$

3. Примем масштаб построения плана скоростей, например: $\mu_v = 0,05 \frac{\text{м/с}}{\text{мм}}$. (Масштаб определяется абсолютными значениями величин скорости, располагаемым форматом, и его следует выбирать из ряда предпочтительных значений: 1; 2; 2,5; 4; 5; 10 и т. д. или 0,1; 0,2 и т. д.)

Вектор скорости точки B на плане отобразится отрезком длиной

$$\bar{V} = \frac{V_B}{\mu_v} = \frac{3,53}{0,05} = 70,6 \text{ мм},$$

он перпендикулярен кривошипу AB и направлен в сторону вращения. (В дальнейшем будем записывать символом $\bar{V}_B \perp AB$). Концы векторов удобно обозначать теми же, но малыми буквами, что и на механизме.

Выбираем произвольную точку – полюс плана скоростей p_v (см. рис. 2.3,в) и откладываем отрезок $p_v b = 70,6$ мм.

4. Ищется на механизме ближайшая точка, скорость которой может быть определена через две другие известные точки. В рассматриваемом примере такой точкой является точка C – центр кинематической пары между звеньями 2 и 3. Точка C принадлежит звеньям 2 и 3 (см. рис. 2.3,а). Рассматривая звено 2 (твердое тело, для которого закон движения точки B уже определен), можно записать уравнение

$$\bar{V}_C = \bar{V}_B + \bar{V}_{C/B}.$$

В силу предположения об абсолютной жесткости звеньев расстояние между точками B и C неизменно, следовательно, в своем относительном движении точка C относительно точки B может совершать только вращение, значит, вектор относительной скорости

$$\bar{V}_{C/B} \perp CB.$$

С другой стороны, рассматривая звено 3, совершенно аналогично можно записать: $\bar{V}_C = \bar{V}_D + \bar{V}_{C/D}$. Здесь $\bar{V}_D = 0$, а $\bar{V}_C \perp CD$.

Таким образом, скомпонована система векторных уравнений

$$\begin{cases} \bar{V}_C = \bar{V}_B + \bar{V}_{C/B} \\ \bar{V}_C = \bar{V}_D + \bar{V}_{C/D} \end{cases},$$

в которой первые составляющие известны полностью по величине и направлению, а последние компоненты известны по их линиям действия. Данная система может быть решена графически.

Заметим, что *суть метода планов (скоростей, ускорений, ...)* заключается в графическом решении системы векторных уравнений или закольцованного уравнения.

Из точки b плана проводим прямую, перпендикулярную BC , а из полюса (поскольку скорость точки D равна 0) – перпендикуляр к CD и на пересечении получаем точку c , это единственная точка, удовлетворяющая одновременно обоим уравнениям системы. Отрезок bc представляет относительную скорость точки C относительно B . Направление этой скорости (согласно уравнению) от b к c . В силу характера геометрических построений длины полученных на плане отрезков в том же

самом масштабе представляют искомые относительные скорости. Изменяя их на плане и переводя через масштабный фактор, получим

$$V_C = p_v c \cdot \mu_v = 68 \cdot 0,05 = 3,4 \text{ м/с};$$

$$V_{C/B} = cb \cdot \mu_v = 64 \cdot 0,05 = 3,2 \text{ м/с}.$$

5. Скорость точки F_2 . Скорость точки F_2 проще определить на основании свойства подобия: Δbf_2c на плане скоростей должен быть подобен ΔBF_2C с сохранением того же порядка обхода букв (на плане скоростей образуются фигуры, подобные и сходственно расположенные жестким звеньям механизма, но повернутые на 90° в сторону мгновенного вращения). Построив на стороне bc треугольник, подобный треугольнику на механизме с сохранением того же порядка обхода букв, получим точку f_2 . Соединив точку f_2 с полюсом, получим вектор скорости точки F_2 .

6. Скорость точки F_4 . Так как звенья 4 и 2 образуют вращательную кинематическую пару,

$$V_{F4} = V_{F2} = 4,6 \text{ м/с}.$$

Точка F_4 является точкой присоединения к механизму следующей группы Ассур, образованной звеньями 4 и 5. Для последней группы Ассур теперь известны скорости двух точек звеньев 4 и 5 (F_4 и K). Скорость точки K равна 0. Теперь можно определить скорость в точке внутренней для данной группы кинематической пары.

7. Скорость точки F_5 . Рассматривая соединения звеньев 4 и 5, получим уравнение

$$\bar{V}_{F5} = \bar{V}_{F4} + \bar{V}_{F5/F4}.$$

Здесь $\bar{V}_{F5/F4} // KL$ (относительное движение – поступательное).

Рассматривая точку F_5 как принадлежащую звену 5, следует $\bar{V}_{F5} \perp KL$ и можно записать $\bar{V}_{F5} = \bar{V}_K + \bar{V}_{F5/K}$.

Таким образом, опять скомпонована система двух векторных уравнений:

$$\begin{cases} \bar{V}_{F5} = \bar{V}_K + \bar{V}_{F5/K} \\ \bar{V}_{F5} = \bar{V}_{F4} + \bar{V}_{F5/F4} \end{cases},$$

которая решается графически, дополняя план скоростей: из конца вектора $f_{2,4}$ проводим линию, параллельную KL , а через полюс проводим линию, перпендикулярную KL . На пересечении этих направлений получим точку f_5 .

8. Скорость точки L . Скорость точки L найдем на основании свойства подобия из пропорциональных отрезков

$$\frac{kl}{kf_5} = \frac{KL}{KF_5},$$

отсюда

$$kl = kf_5 \frac{KL}{KF_5} = 30 \cdot \frac{65}{40} = 49 \text{ мм.}$$

Из плана получим

$$V_{F_5} = p_v f_5 \cdot \mu_v = 30 \cdot 0,05 = 1,5 \text{ м/с,}$$

$$V_{F_5/F_4} = f_5 f_4 \cdot \mu_v = 86 \cdot 0,05 = 4,3 \text{ м/с,}$$

$$V_L = p_v l \cdot \mu_v = 49 \cdot 0,05 = 2,45 \text{ м/с.}$$

9. Определение угловых скоростей звеньев. Угловые скорости звеньев определяются из отношений:

$$\omega_2 = \frac{V_{C/B}}{l_{CB}} = \frac{3,2}{0,7} = 4,56 \text{ 1/с,}$$

$$\omega_3 = \frac{V_C}{l_{CD}} = \frac{3,4}{0,6} = 5,66 \text{ 1/с,}$$

$$\omega_4 = \omega_5 = \frac{V_{F_5}}{l_{F_5K}} = \frac{1,5}{0,4} = 3,75 \text{ 1/с.}$$

Направления мгновенных угловых скоростей ω_2 , ω_3 , $\omega_{4,5}$ определяются направлениями линейных скоростей точки C относительно B , точки C относительно D и точки F_5 относительно K соответственно (на рис. 2.3,а показаны эти направления). Для определения направлений угловых скоростей звеньев векторы относительных скоростей с плана переносим в соответствующие точки механизма, например, bc ($V_{C/B}$) переносим в точку C , и направление вращения звена BC – по часовой стрелке.

2.4. Построение планов ускорений механизма

Построение плана ускорений ведут в том же порядке и последовательности, как и план скоростей.

1. Ускорение точки B звена 1. Так как $\omega_1 = \text{const}$, угловое ускорение $\varepsilon_1 = 0$ и тангенциальное ускорение $a_{B/A}^{\tau} = 0$. Следовательно, полное ускорение точки B будет равно нормальному ускорению, т. е.

$$a_B = a_{B/A}^n = \omega_1^2 \cdot l_{AB} = 23,56 \cdot 0,15 = 3,534 \text{ м/с}^2.$$

Нормальное ускорение всегда направлено к центру вращения, в данном случае от B к точке A (будем в дальнейшем обозначать \overline{BA}), т. е. $a_{B/A}^n \parallel \overline{BA}$.

2. Ускорение точки C .

Рассматривая звено 2, можно записать уравнение

$$\bar{a}_C = \bar{a}_B + \bar{a}_{C/B} = \bar{a}_B + \bar{a}_{C/B}^n + \bar{a}_{C/B}^\tau.$$

Здесь a_B – переносное ускорение; $a_{C/B}$ – относительное ускорение. Точка C относительно B совершает вращательное движение.

Нормальную составляющую ускорения можно найти, поскольку угловая скорость звена BC известна:

$$a_{C/B}^n = \omega_2^2 \cdot l_{CB} = 4,56^2 \cdot 0,7 = 14,62 \text{ м/с}^2,$$

$$\bar{a}_{C/B}^n = \frac{a_{C/B}^n}{\mu_a} = \frac{14,62}{1} = 14,62 \text{ мм};$$

$$\bar{a}_{C/B}^n \parallel \overline{CB}$$

(вектор параллелен CB и направлен от C к B).

Для тангенциального ускорения $\bar{a}_{C/B}^\tau \perp \overline{CB}$ известна линия действия.

Рассматривая движение звена 3, можно записать

$$\bar{a}_C = \bar{a}_D + \bar{a}_{C/D} = \bar{a}_D + \bar{a}_{C/D}^n + \bar{a}_{C/D}^\tau.$$

Здесь переносное ускорение $a_D = 0$ (точка D – неподвижна):

$$a_{C/D}^n = \omega_3^2 \cdot l_{CD} = 5,66^2 \cdot 0,6 = 19,26 \text{ мм},$$

$$\bar{a}_{C/D}^n = \frac{a_{C/D}^n}{\mu_a} = \frac{19,26}{1} = 19,26 \text{ мм},$$

$$\bar{a}_{C/D}^n \parallel \overline{CD}, \quad \bar{a}_{C/D}^\tau \perp \overline{CD}.$$

В результате для определения ускорения точки C имеется система векторных уравнений

$$\begin{cases} \bar{a}_C = \bar{a}_B + \bar{a}_{C/B} = \bar{a}_B + \bar{a}_{C/B}^n + \bar{a}_{C/B}^\tau, \\ \bar{a}_C = \bar{a}_D + \bar{a}_{C/D} = \bar{a}_D + \bar{a}_{C/D}^n + \bar{a}_{C/D}^\tau. \end{cases}$$

В данной системе тангенциальные ускорения известны по линиям действия, все остальные векторы известны полностью. Данная система может быть решена графически.

3. Если принять масштаб плана ускорений $\mu_a = 1 \frac{\text{м/с}^2}{\text{мм}}$, вектор ускорения B определится отрезком

$$\bar{a}_B = \frac{a_B}{\mu_a} = \frac{83,2}{1} = 83,2 \text{ мм.}$$

На плане (см. рис. 2.3,г) – это отрезок $p_a b$, где p_a – полюс плана ускорений.

Из конца вектора $p_a b$ откладывается отрезок bn_2 в соответствии с величиной и направлением $\bar{a}_{C/B}^n$ и из конца его проводится направление (линия действия) тангенциального ускорения $\bar{a}_{C/B}^{\tau}$.

Из полюса откладывается вектор отрезок $p_a n_3$ в соответствии с величиной и направлением нормального ускорения $\bar{a}_{C/D}^n$, из конца его проводится линия действия тангенциального ускорения $\bar{a}_{C/D}^{\tau}$. На пересечении этих линий векторов $\bar{a}_{C/B}^{\tau}$ и $\bar{a}_{C/D}^{\tau}$ получается точка c . Соединив её с полюсом, получим вектор полного ускорения точки C , а отрезок bc на плане представит относительное ускорение $a_{C/B}$.

Из плана могут быть найдены:

$$\begin{aligned} a_C &= p_a c \cdot \mu_a = 40 \cdot 1 = 40 \text{ м/с}^2, \\ a_{C/B} &= cb \cdot \mu_a = 43 \cdot 1 = 43 \text{ м/с}^2, \\ a_{C/B}^{\tau} &= \bar{a}_{C/B}^{\tau} \cdot \mu_a = 40 \cdot 1 = 40 \text{ м/с}^2, \\ a_{C/D}^{\tau} &= \bar{a}_{C/D}^{\tau} \cdot \mu_a = 34 \cdot 1 = 34 \text{ м/с}^2. \end{aligned}$$

4. Ускорение точки F_2 . Ускорение точки F_2 , как и скорость, может быть найдено на основании свойства подобия. На стороне bc плана ускорений построится фигура (в данном случае – треугольник), подобная звену 2 на механизме, т. е. $\Delta b f_2 c \sim \Delta B F_2 C$ с тем же правилом обхода. Соединяя точку f_2 с полюсом, получим вектор $p_a f_2$ полного ускорения точки F_2 .

Из плана ускорений будет определена величина:

$$a_{F_2} = p_a f_2 \cdot \mu_a = 41 \cdot 1 = 41 \text{ м/с}^2.$$

Все характерные точки группы 2–3 исследованы. Можно перейти к анализу следующей присоединенной группы Ассур – группы 4–5.

5. Ускорение точки F_4 . Звенья 2 и 4 образуют вращательную кинематическую пару, следовательно, линейные ускорения этих точек F_4 и F_2 будут равны, т. е.

$$a_{F_4} = a_{F_2} = 41 \text{ м/с}^2.$$

6. Ускорение точки K внешней кинематической пары известно. $a_K=0$.

7. Ускорение точки F_5 . Звенья 4 и 5 образуют поступательную кинематическую пару. Звено 5 (кулиса) является подвижной направляющей для звена 4 (камня), тогда

$$\bar{a}_{F_5} = \bar{a}_{F_4} + \bar{a}_{F_5/F_4}^K + \bar{a}_{F_5/F_4}^r,$$

где кориолисово ускорение

$$a_{F_5/F_4}^K = 2 \cdot \omega_5 \cdot V_{F_5/F_4} = 2 \cdot 3,75 \cdot 4,3 = 32,2 \text{ м/с}^2.$$

Для определения направления этого ускорения нужно вектор относительной скорости V_{F_5/F_4} повернуть на 90° в сторону ω_5 (на рис. 2.4 показан фрагмент к определению направления кориолисова ускорения).

Ускорение a_{F_5/F_4} – это относительное ускорение в поступательном движении звеньев (его также называют *релятивным*), оно всегда направлено по кулисе (векторы \bar{a}^K и \bar{a}^r всегда перпендикулярны между собой).

С другой стороны, рассматривать движение точки F_5 можно через твердое тело – звено 5.

Ускорение точки F_5 можно выразить уравнением

$$\bar{a}_{F_5} = \bar{a}_K + \bar{a}_{F_5/K} = \bar{a}_K + \bar{a}_{F_5/K}^n + \bar{a}_{F_5/K}^\tau$$

(здесь $a_K = 0$, точка K неподвижна),

$$a_{F_5/K}^n = \omega_5^2 \cdot l_{F_5K} = 3,75^2 \cdot 0,4 = 5,61 \text{ м/с}^2,$$

$$\bar{a}_{F_5/K}^n = \frac{a_{F_5/K}^n}{\mu_a} = \frac{5,61}{1} = 5,6 \text{ мм},$$

$$\bar{a}_{F_5/K}^n \parallel \overrightarrow{F_5K}, \quad \bar{a}_{F_5/K}^\tau \perp \overrightarrow{F_5K}.$$

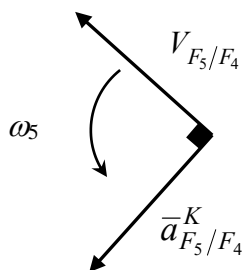


Рис. 2.4. К определению направления кориолисова ускорения

Таким образом, для исследования группы Ассура 4–5 определилась система векторных уравнений

$$\begin{cases} \bar{a}_{F_5} = \bar{a}_{F_4} + \bar{a}_{F_5/F_4}^K + \bar{a}_{F_5/F_4}^r, \\ \bar{a}_{F_5} = \bar{a}_K + \bar{a}_{F_5/K} = \bar{a}_K + \bar{a}_{F_5/K}^n + \bar{a}_{F_5/K}^\tau. \end{cases}$$

Из точки f_4 (она же f_2) проводится вектор \bar{a}_{F_5/F_4}^K в соответствии с его направлением. Из конца его проводится линия действия реля-

тивного ускорения \bar{a}_{F_5/F_4}^r .

Из полюса p_a откладывается вектор $\bar{a}_{F_5/K}^n$, а из конца его проводится направление $\bar{a}_{F_5/K}^\tau$. На пересечении $\bar{a}_{F_5/K}^\tau$ и \bar{a}_{F_5/F_4}^r будет получена точка f_5 . Соединив её с полюсом, получим вектор полного ускорения точки F_5 . Из плана посредством измерения полученных отрезков и перевычисления через масштаб найдутся

$$a_{F_5} = p_a f_5 \cdot \mu_a = 61 \cdot 1 = 61 \text{ м/с}^2,$$

$$a_{F_5/F_4}^r = \bar{a}_{F_5/F_4}^r \cdot \mu_a = 37 \cdot 1 = 37 \text{ м/с}^2,$$

$$a_{F_5/K}^\tau = \bar{a}_{F_5/K}^\tau \cdot \mu_a = 60 \cdot 1 = 60 \text{ м/с}^2.$$

7. Ускорение точки L . Ускорение точки L может быть найдено на основании свойства подобия из пропорциональности отрезков:

$$\frac{kl}{kf_5} = \frac{KL}{KF_5},$$

отсюда

$$kl = kf_5 \frac{KL}{KF_5} = 60 \cdot \frac{65}{40} = 97,5 \text{ мм.}$$

Ускорение точки L :

$$a_L = kl \cdot \mu_a = 97,5 \cdot 1 = 97,5 \text{ м/с}^2 \quad (kl = p_a l).$$

8. Определение угловых ускорений звеньев. Угловые ускорения звеньев определяются из следующих отношений:

$$\varepsilon_2 = \frac{a_{C/B}^\tau}{l_{CB}} = \frac{40}{0,7} = 57,1 \frac{1}{\text{с}^2},$$

$$\varepsilon_3 = \frac{a_{C/D}^\tau}{l_{CD}} = \frac{34}{0,6} = 56,8 \frac{1}{\text{с}^2},$$

$$\varepsilon_4 = \varepsilon_5 = \frac{a_{F_5/K}^\tau}{l_{F_5K}} = \frac{60}{0,4} = 150 \frac{1}{\text{с}^2}.$$

Направления угловых ускорений определяются направлениями соответствующих тангенциальных ускорений (показано на рис. 2.3,а).

Как следует из анализа, звено 3 движется ускоренно (направления угловой скорости и ускорения совпадают), звенья 2 и 5 движутся замедленно.