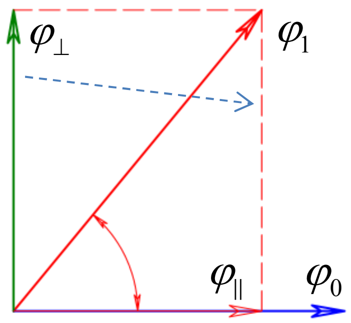
Лекция 7

ОРТОГОНАЛИЗАЦИЯ ВЕКТОРОВ (преобразование Грамма-Шмидта)



Задан вектор φ_0. Если он не нормирован, то следует его нормировать. $\tilde{\varphi}_0 = \dfrac{\varphi_0}{\langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle}$.

Выберем произвольный вектор φ_1 - не ортогональный $\tilde{\varphi}_0$, и произведем операцию ортогонализации вектора φ_1 к $\tilde{\varphi}_0$. Для этого необходимо найти скалярное произведение векторов $\langle \varphi_1, \tilde{\varphi}_0 \rangle$, затем это скалярное произведение необходимо умножить на вектор $\tilde{\varphi}_0$, то есть получить параллельный вектор $\varphi_{1\parallel} = \langle \varphi_1, \tilde{\varphi}_0 \rangle \tilde{\varphi}_0$, и вычесть из вектора φ_1. В результате получаем ортогональную часть вектора $\varphi_{1\perp}$:

$$\tilde{\varphi}_{1\perp} = \varphi_1 - \langle \varphi_1, \tilde{\varphi}_0 \rangle \tilde{\varphi}_0$$

В литературе величину $\langle \varphi_{\perp k}, \varphi_{\perp k} \rangle$ называют нормой и обозначают

$$\| \tilde{\varphi}_{\perp k} \| = \langle \tilde{\varphi}_{\perp k}, \tilde{\varphi}_{\perp k} \rangle = \int_a^b \tilde{\varphi}_{\perp k}{}^2 dx$$

Теперь нам осталось пронормировать вектор $\tilde{\varphi}_1$

$$\tilde{\varphi}_1 = \frac{\tilde{\varphi}_{\perp 1}}{\langle \tilde{\varphi}_{\perp 1}, \tilde{\varphi}_{\perp 1} \rangle}$$

Теперь мы имеем два ортогональных и нормированных вектора $\tilde{\varphi}_0$ и $\tilde{\varphi}_1$

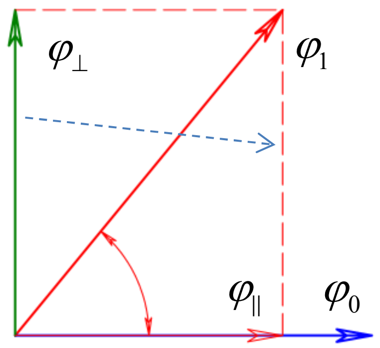
Продолжая процедуру ортогонализации можно написать

$$\varphi_{2\parallel} = \langle \varphi_2, \tilde{\varphi}_0 \rangle \tilde{\varphi}_0 + \langle \varphi_2, \tilde{\varphi}_1 \rangle \tilde{\varphi}_1, \quad \varphi_{2\perp} = \varphi_2 - \langle \varphi_2, \tilde{\varphi}_0 \rangle \tilde{\varphi}_0 - \langle \varphi_2, \tilde{\varphi}_1 \rangle \tilde{\varphi}_1$$

Нормируем полученный вектор $\tilde{\varphi}_2 = \dfrac{\tilde{\varphi}_{\perp 2}}{\langle \tilde{\varphi}_{\perp 2}, \tilde{\varphi}_{\perp 2} \rangle}$.

Запишем общую формулу ортонормирования элементов базиса

$$\varphi_{k\perp} = \varphi_k - \sum_{i=0}^{k-1} \langle \varphi_i, \tilde{\varphi}_0 \rangle \tilde{\varphi}_i, \quad \tilde{\varphi}_k = \frac{\tilde{\varphi}_{\perp k}}{\langle \tilde{\varphi}_{\perp k}, \tilde{\varphi}_{\perp k} \rangle}$$



Пример

Рассмотрим не ортогональный базис

$1, x, x^2, x^3, x^4 ..... x^n$

Произведем ортогонализацию базиса на определенном интервале. Например, на интервале [0, 1]. Выберем первый вектор из базиса *1*. Проведём ортогонализацию двух векторов x и *1*.

$$\langle 1, x\rangle = \int_0^1 x dx = \frac{x^2}{2}\Big|_{x=1} = \frac{1}{2}, \quad \varphi_1(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)$$

Нормируем

$$\langle \varphi_1, \varphi_1\rangle = \int_0^1 \varphi_1(x)^2 dx = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{12}, \rightarrow \varphi_1(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)\sqrt{12} \Rightarrow \int_0^1 \varphi_1(x)^2 dx = 1$$

Теперь получаем следующий элемент базиса ортогональный двум предыдущим по аналогии

$$x^2 \;\rightarrow\; \varphi_2(x) = x^2 - \left(\varphi_1(x)\int_0^1 \varphi_1(x)\cdot x^2 dx + \varphi_0(x)\int_0^1 \varphi_0(x) x^2 dx\right) = x^2 - x + \frac{1}{6}$$

Нормируем

$$\langle \varphi_2, \varphi_2\rangle \rightarrow \int_0^1 \varphi_2(x)^2 d = \frac{1}{180} \quad \varphi_2(x) = \sqrt{180}\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)$$

Аналогично проделывается следующая операция. Приведем ее в **Mathcad**

$\varphi 0(x) := 1$

Нормируем $\varphi 1(x) := \left(x - \frac{1}{2}\right)\cdot\sqrt{12}$ $\quad \left(\int_0^1 \varphi 1(x)\cdot\varphi 1(x)\, dx\right) \rightarrow 1$,

проверяем ортогональность $\int_0^1 \varphi 1(x)\, dx \rightarrow 0$

$$x^2 - \left(\varphi 1(x)\cdot\int_0^1 x^2\cdot\varphi 1(x)\, dx + \int_0^1 x^2\cdot\varphi 0(x)\, dx\right) \rightarrow x^2 - x + \frac{1}{6}$$

Нормируем $\varphi 2(x) := \left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)\cdot\sqrt{180}$ $\quad \int_0^1 \varphi 2(x)^2\, dx \rightarrow 1$,

проверяем ортогональность $\int_0^1 \varphi 2(x)\, dx \rightarrow 0$

$$x^3-\left(\varphi2(x)\cdot\int_0^1\varphi2(x)\cdot x^3\,dx+\varphi1(x)\cdot\int_0^1 x^3\cdot\varphi1(x)\,dx+1\cdot\int_0^1 x^3\cdot1\,dx\right)\to x^3-\frac{3\cdot x^2}{2}+\frac{3\cdot x}{5}-\frac{1}{20}$$

Нормируем $\varphi3(x):=\left(x^3-\frac{3\cdot x^2}{2}+\frac{3\cdot x}{5}-\frac{1}{20}\right)\cdot\sqrt{2800}$

$\int_0^1\varphi3(x)^2\,dx\to1$ проверяем ортогональность $\int_0^1\varphi3(x)\,dx\to0$

$$x^4-\left(\varphi3(x)\cdot\int_0^1\varphi3(x)\cdot x^4\,dx+\varphi2(x)\cdot\int_0^1\varphi2(x)\cdot x^4\,dx+\varphi1(x)\cdot\int_0^1\varphi1(x)\cdot x^4\,dx+1\cdot\int_0^1 1\cdot x^4\,dx\right)\to x^4-2\cdot x^3+\frac{9\cdot x^2}{7}-\frac{2\cdot x}{7}+\frac{1}{70}$$

$$\varphi4(x):=\left(x^4-2\cdot x^3+\frac{9\cdot x^2}{7}-\frac{2\cdot x}{7}+\frac{1}{70}\right)\cdot\sqrt{44100}\qquad\int_0^1\varphi4(x)^2\,dx\to1\qquad\int_0^1\varphi4(x)\,dx\to0$$

$$x^5-\left[\begin{aligned}&\varphi4(x)\cdot\int_0^1\varphi4(x)\cdot x^5\,dx+\varphi3(x)\cdot\int_0^1\varphi3(x)\cdot x^5\,dx+\varphi2(x)\cdot\int_0^1\varphi2(x)\cdot x^5\,dx\,\ldots\\&+\varphi1(x)\cdot\left(\int_0^1\varphi1(x)\cdot x^5\,dx\right)+1\cdot\int_0^1 1\cdot x^5\,dx\end{aligned}\right]\to x^5-\frac{5\cdot x^4}{2}+\frac{20\cdot x^3}{9}-\frac{5\cdot x^2}{6}+\frac{5\cdot x}{42}-\frac{1}{252}$$

$$\varphi5(x):=\left(x^5-\frac{5\cdot x^4}{2}+\frac{20\cdot x^3}{9}-\frac{5\cdot x^2}{6}+\frac{5\cdot x}{42}-\frac{1}{252}\right)\cdot\sqrt{69854}$$

$$x^6-\left[\begin{aligned}&\varphi5(x)\cdot\int_0^1\varphi5(x)\cdot x^6\,dx+\varphi4(x)\cdot\int_0^1\varphi4(x)\cdot x^6\,dx+\varphi3(x)\cdot\int_0^1\varphi3(x)\cdot x^6\,dx\,\ldots\\&+\varphi2(x)\cdot\left(\int_0^1\varphi2(x)\cdot x^6\,dx\right)\ldots\\&+\varphi1(x)\cdot\int_0^1\varphi1(x)\cdot x^6\,dx+1\cdot\int_0^1 1\cdot x^6\,dx\end{aligned}\right]\to x^6-3\cdot x^5+\frac{75x^4}{22}-\frac{20x^3}{11}+\frac{5\cdot x^2}{11}-\frac{x}{22}+\frac{1}{924}$$

$$\varphi6(x):=\left(x^6-3\cdot x^5+\frac{75\cdot x^4}{22}-\frac{20\cdot x^3}{11}+\frac{5\cdot x^2}{11}-\frac{x}{22}+\frac{1}{924}\right)\cdot\sqrt{1109908}$$

$$\int_0^1\varphi6(x)^2\,dx\to1\qquad\int_0^1\varphi6(x)\,dx\to0$$

Пример разложения функции (аппроксимация)

$f(x):=\sin(x\cdot5)^2\cdot2+(x\cdot3)^2$

$$a_0 := \int_0^1 f(x)\,dx \qquad a_1 := \int_0^1 f(x)\cdot\varphi 1(x)\,dx \qquad a_2 := \int_0^1 f(x)\cdot\varphi 2(x)\,dx$$

$$a_3 := \int_0^1 f(x)\cdot\varphi 3(x)\,dx \qquad a_4 := \int_0^1 f(x)\cdot\varphi 4(x)\,dx \qquad a_5 := \int_0^1 f(x)\cdot\varphi 5(x)\,dx \qquad a_6 := \int_0^1 f(x)\cdot\varphi 6(x)\,dx$$

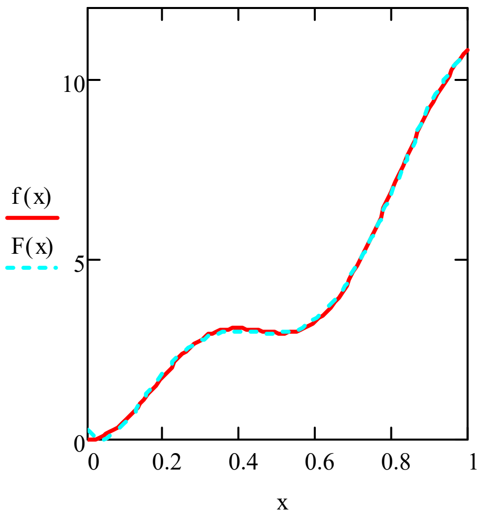
$$a^T = (4.054\ \ 2.756\ \ 0.756\ \ 0.583\ \ -0.159\ \ -0.34\ \ 0.049)$$

$$F(x) := a_0\cdot 1 + a_1\cdot\varphi 1(x) + a_2\cdot\varphi 2(x) + a_3\cdot\varphi 3(x) + a_4\cdot\varphi 4(x) + a_5\cdot\varphi 5(x) + a_6\cdot\varphi 6(x)$$

$$x := 0, 0.01 .. 1$$

Проверка на точность вычисления

$$\int_0^1 f(x)^2\,dx = 25.093 \qquad \sum_{k=0}^{6} \left(a_k\right)^2 = 25.089$$ **Теорема Парсеваля (интеграл энергии)**



КВАДРАТУРА ГАУССА

Метод прямоугольников и метод трапеция требуют большого количества точек. Рассмотрим метод, не требующий большого количества точек. Этот метод называется метод Гаусса.

Рассмотрим интеграл, который представим в виде двух слагаемых. Запишем его в двух точках

$$\int_a^b f(x)dx = w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2). \tag{1}$$

Здесь параметры x_i -точки , w_i – веса. Они подлежать определению.
Будем использовать вспомогательный квадратичный полином

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2) = x^2 + C_1 x + C_0$$

Важно заметить, что этот полином имеет корни в точках x_1, x_2. Эти корни связаны с коэффициентами полинома по теореме Виета $C_0 = x_1 x_2, C_1 = -(x_1 + x_2)$. Константы C_0, C_1 подлежат определению. При известных C_0, C_1, можно определить x_1, x_2.

Первый этап: Рассчитаем первые четыре момента функции x^n на заданном интервале. ***Для вычисления моментов будем использовать квадратуру Гаусса (1).*** Уравнения будут иметь вид (для конкретных пределов b=2, a =–1). ***Моментов выбираем столько, сколько нужно решить уравнений для определения неизвестных. В данном случае 4 неизвестных – 2 весовых коэффициента и 2 корня.***

$$\begin{aligned}
1 &: \int_a^b dx = m_0 = 3 = w_1 + w_2 \\
x &: \int_a^b x dx = m_1 = \frac{3}{2} = w_1 x_1 + w_2 x_2 \\
x^2 &: \int_a^b x^2 dx = m_2 = 3 = w_1 x_1^2 + w_2 x_2^2 \\
x^3 &: \int_a^b x^3 dx = m_3 = \frac{15}{4} = w_1 x_1^3 + w_2 x_2^3
\end{aligned}$$

Второй этап (определения C_1 и C_0) – умножим все уравнения на коэффициенты вспомогательного полинома C_1 , C_0 и *1* в следующей последовательности:

$$\begin{array}{ll|l|l}
1 : & \int_a^b dx = m_0 = 3 = w_1 + w_2 & C_0 & \\
x : & \int_a^b x dx = m_1 = \frac{3}{2} = w_1 x_1 + w_2 x_2 & C_1 & C_0 \\
x^2 : & \int_a^b x^2 dx = m_2 = 3 = w_1 x_1^2 + w_2 x_2^2 & 1 & C_1 \\
x^3 : & \int_a^b x^3 dx = m_3 = \frac{15}{4} = w_1 x_1^3 + w_2 x_2^3 & & 1
\end{array} \qquad (2)$$

Первое уравнение умножаем на C_0, второе уравнение умножаем на C_1 и треть на *1*, затем складываем три уравнения. Сначала первую группу уравнений, затем вторую группу уравнений:

$$3C_0+\frac{3}{2}C_1+3=w_1C_0+w_2C_0+w_1x_1C_1+w_2x_2C_1+w_1x_1^2+w_2x_2^2=$$
$$=w_1\left(C_0+x_1C_1+x_1^2\right)+w_2\left(C_0+x_2C_1+x_2^2\right)=0$$
$$\frac{3}{2}C_0+3C_1+\frac{15}{4}=w_1x_1C_0+w_2x_2C_0+w_1x_1^2C_1+w_2x_2^2C_1+w_1x_1^3+w_2x_2^3=$$
$$=w_1x_1\left(C_0+x_1C_1+x_1^2\right)+w_2x_2\left(C_0+x_2C_1+x_2^2\right)=0$$

$$\begin{cases}3C_0+\frac{3}{2}C_1+3=0\\ \frac{3}{2}C_0+3C_1+\frac{15}{4}=0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}3C_0+\frac{3}{2}C_1=-3\\ \frac{3}{2}C_0+3C_1=-\frac{15}{4}\end{cases}\rightarrow\begin{pmatrix}3 & \frac{3}{2}\\ \frac{3}{2} & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_0\\ C_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\ -\frac{15}{4}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}C_0\\ C_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ -1\end{pmatrix}$$

Третий этап (определение x_1 и x_2) - определим корни вспомогательного полинома при известных коэффициентах C_1 и C_0:

$$P(x)=x^2+C_1x+C_0=x^2-x-\frac{1}{2}\qquad x_1=1{,}3666,\quad x_2=-0{,}3666$$

Четвертый этап (определение весов w_1 и w_2) Теперь можно найти веса, составляя алгебраические уравнения

$$\begin{cases}m_0=3=w_1+w_2\\ m_1=\frac{3}{2}=w_1x_1+w_2x_2\end{cases}\rightarrow\begin{cases}w_1+w_2=3\\ w_1x_1+w_2x_2=\frac{3}{2}\end{cases}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1{,}3666 & -0{,}3666\end{pmatrix}\begin{pmatrix}w_1\\ w_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ \frac{3}{2}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}w_1\\ w_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1{,}3666 & -0{,}3666\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}3\\ \frac{3}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3/2\\ 3/3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1{,}5\\ 1{,}5\end{pmatrix}$$

Теперь можно сделать проверку, убедится, что коэффициенты найдены правильно.

$$\int_a^b dx = m_0 = 3 = w_1 + w_2 = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3$$

$$\int_a^b x dx = m_1 = \frac{3}{2} = w_1 x_1 + w_2 x_2 = \frac{3}{2} \cdot \left(1{,}366\right) + \frac{3}{2} \cdot \left(-0{,}366\right) = \frac{3}{2}$$

$$\int_a^b x^2 dx = m_2 = 3 = w_1 x_1^2 + w_2 x_2^2 = \frac{3}{2} \cdot \left(1{,}366\right)^2 + \frac{3}{2} \cdot \left(-0{,}366\right)^2 = 3$$

$$\int_a^b x^3 dx = m_3 = \frac{15}{4} = w_1 x_1^3 + w_2 x_2^3 = \frac{3}{2} \cdot \left(1{,}366\right)^3 + \frac{3}{2} \cdot \left(-0{,}366\right)^3 = \frac{15}{4}$$

И наконец, вычислить интеграл:

$$\int_{-1}^{2} f(x) dx = \underset{\overset{\downarrow}{w_1}}{\frac{3}{2}} \cdot f(\underset{\overset{\downarrow}{x_1}}{1{,}366}) + \underset{\overset{\downarrow}{w_2}}{\frac{3}{2}} \cdot f\left(\underset{\overset{\downarrow}{x_2}}{-0{,}366}\right)$$

Заметим, что для определения весов достаточно использовать только первые два уравнения

граничные условия **вспомогательный полином** **Квадратура Гаусса**

$a := -1 \quad b := 2$

$P(x) = 1\cdot x^2 + C_1\cdot x + C_0 = (x - x_1)\cdot(x - x_2)$

$\int_a^b f(x)\,dx = f(x_1)\cdot w_1 + f(x_2)\cdot w_2$

$m0 := \int_a^b 1\,dx = 3 \qquad m1 := \int_a^b x\,dx \rightarrow \frac{3}{2} \qquad m2 := \int_a^b x^2\,dx \rightarrow 3 \qquad m3 := \int_a^b x^3\,dx \rightarrow \frac{15}{4}$

$\int_a^b 1\,dx = 3 = w_1\cdot 1 + w_2\cdot 1$

$\int_a^b x\,dx = 1.5 = w_1\cdot x_1 + w_2\cdot x_2$

$\int_a^b x^2\,dx = 3 = w_1\cdot x_1^2 + w_2\cdot x_2^2$

$\int_a^b x^3\,dx = \frac{15}{4} = w_1\cdot x_1^3 + w_2\cdot x_2^3$

C_0, C_1, 1 $\qquad$ C_0, C_1, 1

Формирование уравнений для определения коэффициентов вспомогательного полинома

$C_0\cdot 3 + 1.5\cdot C_1 + 3 = w_1\cdot C_0 + w_2\cdot C_0 + w_1\cdot x_1\cdot C_1 + w_2\cdot x_2\cdot C_1 + w_1\cdot x_1^2\cdot 1 + w_2\cdot x_2^2\cdot 1 = w_1\cdot\left(C_0 + C_1\cdot x_1 + x_1^2\right) + w_2\cdot\left(C_0 + C_1\cdot x_2 + x_2^2\right) = 0$

$C_0\cdot 1.5 + 3\cdot C_1 + \frac{15}{4} = \ldots$
$+\left(w_1\cdot x_1\cdot C_0 + w_2\cdot x_2\cdot C_0 + w_1\cdot x_1^2\cdot C_1 + w_2\cdot x_2^2\cdot C_1 + w_1\cdot x_1^3 + w_2\cdot x_2^3 = \right) \ldots$
$+\left[w_1\cdot x_1\cdot\left(C_0 + C_1\cdot x_1 + x_1^2\right) + w_2\cdot x_2\cdot\left(C_0 + C_1\cdot x_2 + x_2^2\right) = 0\right]$

$C_0\cdot 3 + 1.5\cdot C_1 = -3$

$C_0\cdot 1.5 + 3\cdot C_1 = -\frac{15}{4}$

$A := \begin{pmatrix} m0 & m1 \\ m1 & m2 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} -m2 \\ -m3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \end{pmatrix} := A^{-1}\cdot B = \begin{pmatrix} -0.5 \\ -1 \end{pmatrix}$

$x := p^2 + C_1\cdot p + C_0 \;\Big|\; \begin{matrix} \text{solve}, p \\ \text{float}, 5 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1.366 \\ -0.36603 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := x = \begin{pmatrix} 1.366 \\ -0.366 \end{pmatrix}$

Определение координат точек x_1, x_2

$A1 := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} := A1^{-1}\cdot\begin{pmatrix} m0 \\ m1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 1.5 \end{pmatrix}$

Определение весов

Проверка

$w_1 + w_2 = 3 \qquad m0 = 3 \qquad w_1\cdot x_1 + w_2\cdot x_2 = 1.5 \qquad m1 = 1.5 \qquad w_1\cdot x_1^2 + w_2\cdot x_2^2 = 3 \qquad m2 = 3$

$f(x) := 2 - x\cdot 3 - \sin(x) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = 0.544 \qquad w_1\cdot f(x_1) + w_2\cdot f(x_2) = 0.568$

В качестве следующего примера выберем другой интервал и другую вспомогательную функцию - полином третьей степени.

Первый этап: *считаем моменты. **Моментов выбираем столько, сколько нужно решить уравнений для определения неизвестных. В данном случае 6 неизвестных – 3 весовых коэффициента и 3 корня.***

$$
\begin{array}{ll|c|c|c}
1: & \int\limits_{-1}^{1} dx = m_0 = 2 = w_1 + w_2 + w_3 & C_0 & & \\
x: & \int\limits_{-1}^{1} x dx = m_1 = 0 = w_1x_1 + w_2x_2 + w_3x_3 & C_1 & C_0 & \\
x^2: & \int\limits_{-1}^{1} x^2 dx = m_2 = \frac{2}{3} = w_1x_1^2 + w_2x_2^2 + w_3x_3^2 & C_2 & C_1 & C_0 \\
x^3: & \int\limits_{-1}^{1} x^3 dx = m_3 = 0 = w_1x_1^3 + w_2x_2^3 + w_3x_3^3 & 1 & C_2 & C_1 \\
x^4: & \int\limits_{-1}^{1} x^4 dx = m_3 = \frac{2}{5} = w_1x_1^4 + w_2x_2^4 + w_3x_3^4 & & 1 & C_2 \\
x^5: & \int\limits_{-1}^{1} x^5 dx = m_3 = 0 = w_1x_1^5 + w_2x_2^5 + w_3x_3^5 & & & 1
\end{array} \qquad (3)
$$

Второй этап: *находим* C_0, C_1 и C_2

Первое уравнение умножаем на C_0, второе уравнение на C_1 , третье на C_2 и наконец, четвертое на *1*. Затем складываем получившиеся уравнения

$$
2C_0 + 0C_1 + \frac{2}{3}C_2 + 0 = w_1C_0 + w_2C_0 + w_3C_0 + w_1x_1C_1 + w_2x_2C_1 + w_3x_3C_1 + w_1x_1^2 + w_2x_2^2 + w_3x_3^2 =
$$

$$
= w_1\left(C_0 + x_1C_1 + x_1^2C_2 + x_1^3\right) + w_2\left(C_0 + x_1C_1 + x_1^2C_2 + x_1^3\right) + w_3\left(C_0 + x_1C_1 + x_1^2C_2 + x_1^3\right) = 0
$$

$$
0C_0 + \frac{2}{3}C_1 + 0C_2 + \frac{2}{5} = w_1x_1C_0 + w_2x_2C_0 + w_3x_3C_0 + w_1x_1^2C_1 + w_2x_2^2C_1 + w_3x_3^2C_1 + w_1x_1^3 + w_2x_2^3 + w_3x_3^3 =
$$

$$
= w_1x_1\left(C_0 + x_1C_1 + C_2x_1^2 + x_1^3\right) + w_2x_2\left(C_0 + x_1C_1 + C_2x_1^2 + x_1^3\right) + w_3x_3\left(C_0 + x_1C_1 + C_2x_1^2 + x_1^3\right) = 0
$$

$$
\frac{2}{3}C_0 + 0C_1 + \frac{2}{5}C_2 + 0 = ... = 0
$$

$$\begin{cases} 2C_0 + 0C_1 + \dfrac{2}{3}C_2 = 0 \\ 0C_0 + \dfrac{2}{3}C_1 + 0C_2 = -\dfrac{2}{5} \\ \dfrac{2}{3}C_0 + 0C_1 + \dfrac{2}{5}C_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \dfrac{2}{3} \\ 0 & \dfrac{2}{3} & 0 \\ \dfrac{2}{3} & 0 & \dfrac{2}{5} \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\dfrac{2}{5} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{B}\,,\ \mathbf{C} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \qquad \begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0,6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Третий этап это определение корней вспомогательного уравнения:

$$P(x) = x^3 + C_2x^2 + C_1x + C_0 = x^3 + 0 \cdot x^2 - 0,6x + 0 = x^3 - 0,6x = x\left(x^2 - 0,6\right) = 0$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = -\sqrt{0,6} = -0,7746, \ \ x_3 = \sqrt{0,6} = 0,7746$$

Последний шаг определения весов $w_1,\ w_2$ and w_3

$$\begin{cases} m_0 = 2 = w_1 + w_2 + w_3 \\ m_1 = 0 = w_1x_1 + w_2x_2 + w_3x_3 \\ m_2 = \dfrac{2}{3} = w_1x_1^2 + w_2x_2^2 + w_3x_3^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} w_1 + w_2 + w_3 = 2 \\ w_1x_1 + w_2x_2 + w_3x_3 = 0 \\ w_1x_1^2 + w_2x_2^2 + w_3x_3^2 = \dfrac{2}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ \dfrac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{pmatrix},\ \mathbf{B1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ \dfrac{2}{3} \end{pmatrix}, \mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{w} = \mathbf{A1}^{-1}\mathbf{B1} = \begin{pmatrix} 0,889 \\ 0,556 \\ 0,556 \end{pmatrix}$$

Следует проверить полученные корни полинома и веса, подставив их в квадратуру Гаусса

$$\int_a^b dx = m_0 = 2 = w_1 + w_2 + w_3 = 0,889 + 0,556 + 0,556 = 2$$

$$\int_a^b x dx = m_1 = 0 = w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_3 x_3 =$$

$$= 0,889 \cdot (-0,7746) + 0,556 \cdot 0 + 0,556 \cdot (0,7746) = 0$$

$$\int_a^b x^2 dx = m_2 = \frac{2}{3} = w_1 x_1^2 + w_2 x_2^2 + w_3 x_3^2 =$$

$$= 0,889 \cdot (-0,7746)^2 + 0,556 \cdot 0^2 + 0,556 \cdot (0,7746)^2 = \frac{2}{3}$$

$$\int_a^b x^3 dx = m_3 = 0 = w_1 x_1^3 + w_2 x_2^3 + w_3 x_3^3 =$$

$$= 0,889 \cdot (-0,7746)^3 + 0,556 \cdot 0^3 + 0,556 \cdot (0,7746)^3 = 0$$

$$\int_a^b x^4 dx = m_3 = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\begin{array}{cccccc} w_1 & x_1 & w_2 & x_2 & w_3 & x_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array}$$

$$\int_{-1}^{1} f(x) dx = 0,889 \cdot f(0,7746) + 0,556 \cdot f(0) + 0,556 \cdot f(-0,7746)$$

Граничные условия

$a := -1 \qquad b := 1$

Вспомогательный полином

$P(x) = x^3 + C_2 \cdot x^2 + C_1 \cdot x + C_0 = (x - x_1)\cdot(x - x_2)$

Квадратура Гаусса

$\int_a^b f(x)\,dx = f(x_1)\cdot w_1 + f(x_2)\cdot w_2 + f(x_3)\cdot w_3$

Moments

$m0 := \int_a^b 1\,dx = 2 \quad m1 := \int_a^b x\,dx = 0 \quad m2 := \int_a^b x^2\,dx \to \frac{2}{3} \quad m3 := \int_a^b x^3\,dx \to 0 \quad m4 := \int_a^b x^4\,dx \to \frac{2}{5} \quad m5 := \int_a^b x^5\,dx \to 0$

$$\int_a^b 1\,dx = 2 = w_1 \cdot 1 + w_2 \cdot 1 + w_3 \cdot 1$$

$$\int_a^b x\,dx = 0 = w_1 \cdot x_1 + w_2 \cdot x_2 + w_3 \cdot x_3$$

$$\int_a^b x^2\,dx = \frac{2}{3} = w_1 \cdot x_1^2 + w_2 \cdot x_2^2 + w_3 \cdot x_3^2$$

$$\int_a^b x^3\,dx = 0 = w_1 \cdot x_1^3 + w_2 \cdot x_2^3 + w_3 \cdot x_3^3$$

$$\int_a^b x^4\,dx = \frac{2}{5} = w_1 \cdot x_1^4 + w_2 \cdot x_2^4 + w_3 \cdot x_3^4$$

$$\int_a^b x^5\,dx = 0 = w_1 \cdot x_1^5 + w_2 \cdot x_2^5 + w_3 \cdot x_3^5$$

$$\begin{vmatrix} C_0 \\ \blacksquare \\ \blacksquare \\ C_1 \\ \blacksquare \\ \blacksquare \\ C_2 \\ \blacksquare \\ \blacksquare \\ 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} C_0 \\ \blacksquare \\ \blacksquare \\ C_1 \\ \blacksquare \\ \blacksquare \\ C_2 \\ \blacksquare \\ \blacksquare \\ 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} C_0 \\ \blacksquare \\ \blacksquare \\ C_1 \\ \blacksquare \\ \blacksquare \\ C_2 \\ \blacksquare \\ \blacksquare \\ 1 \end{vmatrix}$$

Формирование уравнений для определения коэффициентов вспомогательного полинома

$$C_0 \cdot I1 + C_1 \cdot I2 + C_2 \cdot I3 - I4 = \blacksquare \ldots$$
$$+ \left(w_1 \cdot C_0 + w_2 \cdot C_0 + w_1 \cdot x_1 \cdot C_1 + w_2 \cdot x_2 \cdot C_1 + w_1 \cdot x_1^2 \cdot C_2 + w_2 \cdot x_2^2 \cdot C_2 = \blacksquare\right) \ldots$$
$$+ \left[w_1 \cdot \left(C_0 + C_1 \cdot x_1 + x_1^2\right) + w_2 \cdot \left(C_0 + C_1 \cdot x_2 + x_2^2\right) = 0\right]$$

$$C_0 \cdot I2 + I3 \cdot C_1 + C_2 \cdot I4 + I5 = \blacksquare \ldots$$
$$+ \left(w_1 \cdot x_1 \cdot C_0 + w_2 \cdot x_2 \cdot C_0 + w_1 \cdot x_1^2 \cdot C_1 + w_2 \cdot x_2^2 \cdot C_1 + w_1 \cdot x_1^3 + w_2 \cdot x_2^3 = \blacksquare\right) \ldots$$
$$+ \left[w_1 \cdot x_1 \cdot \left(C_0 + C_1 \cdot x_1 + x_1^2\right) + w_2 \cdot x_2 \cdot \left(C_0 + C_1 \cdot x_2 + x_2^2\right) = 0\right]$$

$$C_0 \cdot I3 + I4 \cdot C_1 + C_2 \cdot I5 + I6 = 0$$

$$A := \begin{pmatrix} m0 & m1 & m2 \\ m1 & m2 & m3 \\ m2 & m3 & m4 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} -m3 \\ -m4 \\ -m5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} := A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x := p^3 + p^2 \cdot C_2 + C_1 \cdot p + C_0 \ \Big|\begin{smallmatrix}\text{solve}, p \\ \text{float}, 5\end{smallmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0.7746 \\ -0.7746 \end{pmatrix}$$ находим корни вспомогательного полинома

Находим весовые коэффициенты квадратуры Гаусса

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.7746 \\ -0.7746 \end{pmatrix} \qquad A1 := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} := A1^{-1} \cdot \begin{pmatrix} m0 \\ m1 \\ m2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.889 \\ 0.556 \\ 0.556 \end{pmatrix}$$

Проверка

$$w_1 + w_2 + w_3 = 2 \qquad m0 = 2$$

$$w_1 \cdot x_1 + w_2 \cdot x_2 + w_3 \cdot x_3 = 0 \qquad m1 = 0$$

$$w_1 \cdot x_1^2 + w_2 \cdot x_2^2 + w_3 \cdot x_3^2 = 0.667 \qquad m2 = 0.667$$

расчет интеграла квадратурой Гаусса

$$f(x) := 2 - \cos(x)^{\frac{1}{4}} \qquad \int_a^b f(x)\,dx = 2.0898 \qquad w_1 \cdot f(x_1) + w_2 \cdot f(x_2) + w_3 \cdot f(x_3) = 2.0895$$

Сухой остаток предложенного алгоритма следующий

1. Определение моментов на заданном интервале **a b**. Порядок моментов в два раза больше порядка вспомогательного полинома. ***Моментов выбираем столько, сколько нужно решить уравнений для определения неизвестных.***
2. Определение коэффициентов вспомогательного полинома
3. Определение корней вспомогательного полинома
4. Определяем веса квадратуры Гаусса
5. Вычисление интеграла - использование квадратуры Гаусса

Чем выше порядок вспомогательного полинома, тем выше точность.

Первый этап - моменты

$$A := \begin{pmatrix} M_0 & M_1 & M_2 & M_3 \\ M_1 & M_2 & M_3 & M_4 \\ M_2 & M_3 & M_4 & M_5 \\ M_3 & M_4 & M_5 & M_6 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} -M_4 \\ -M_5 \\ -M_6 \\ -M_7 \end{pmatrix}$$

Второй этап - коэффициенты $C_0\ C_1\ C_2\ C_3$

$$C := A^{-1} \cdot B \qquad C \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{8}{35} \\ -\frac{16}{7} \\ \frac{36}{7} \\ -4 \end{pmatrix}$$

Третий этап - коэффициенты $x_0\ x_1\ x_2\ x_3$

$$\begin{pmatrix} x0 \\ x1 \\ x2 \\ x3 \end{pmatrix} := C_0 + C_1 \cdot x + C_2 \cdot x^2 + C_3 \cdot x^3 + x^4 \ \left|\begin{matrix} \text{solve}, x \\ \text{float}, 4 \end{matrix}\right. \rightarrow \begin{pmatrix} 1.861 \\ 1.34 \\ 0.1389 \\ 0.66 \end{pmatrix}$$

Четвертый этап - коэффициенты $w_0\ w_1\ w_2\ w_3$

$$\begin{pmatrix} w0 \\ w1 \\ w2 \\ w3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x0 & x1 & x2 & x3 \\ x0^2 & x1^2 & x2^2 & x3^2 \\ x0^3 & x1^3 & x2^3 & x3^3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.348 \\ 0.652 \\ 0.348 \\ 0.652 \end{pmatrix} \qquad f(x) := x^2 \cdot 2 + x^3 - \sin(3 \cdot x)$$

проверка $\int_a^b f(x)\,dx = 9.32$ $\qquad w3 \cdot f(x3) + w1 \cdot f(x1) + w2 \cdot f(x2) + w0 \cdot f(x0) = 9.32$

Интерполяция Лагранжа

Пусть мы имеем полином, представленный в виде

$$L(\mathrm{x}) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4),$$

$$L(x_1) = 0,\ L(x_2) = 0,\ L(x_3) = 0,\ L(x_4) = 0$$

Сформируем фрагменты из исходного полинома делением исходного полинома на сомножитель вида $(x - x_i)$

$$L_1(x) = (x - x_2)(x - x_3)(x - x_4), \quad L_1(x_1) \neq 0$$

$$L_2(x) = (x - x_1)(x - x_3)(x - x_4), \quad L_2(x_2) \neq 0$$

$$L_3(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_4), \quad L_3(x_3) \neq 0$$

$$L_4(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3), \quad L_4(x_4) \neq 0$$

Следующий шаг. Формируем полином со свойствами

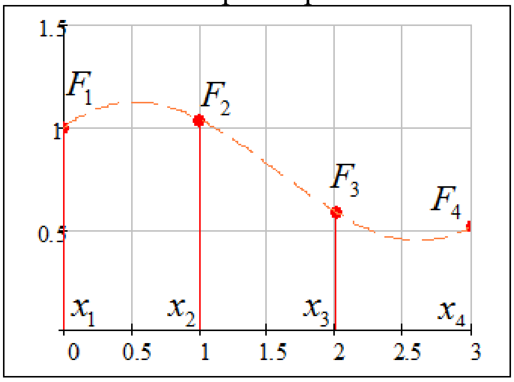
$$\frac{L_1(x)}{L_1(x_1)},\quad \frac{L_2(x)}{L_2(x_2)},\ \frac{L_3(x)}{L_3(x_1)},\ \frac{L_4(x)}{L_4(x_1)}$$

$$\frac{L_j(x_i)}{L_j(x_j)} = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & if\ \ i = j \\ 0 & if\ \ i \neq j \end{cases} \quad -символ\ \ Кронекера$$

Если мы имеем данные значения в виде столбца то можно сформировать непрерывную функцию

$$x_1,\ \ x_2,\ \ x_3,\ x_4$$
$$F_1,\ F_2,\ F_3,\ F_4$$

Её можно интерполировать



$$F(x) = \frac{L_1(x)}{L_1(x_1)}F_1 + \frac{L_2(x)}{L_2(x_2)}F_2 + \frac{L_3(x)}{L_3(x_3)}F_3 + \frac{L_4(x)}{L_4(x_4)}$$

В самом общем случае полином Лагранжа можно представить в виде

$$F(x) = \sum_{k=1}^{N} \frac{L_k(x)}{L_k(x_k)}F_k = d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + \ldots d_n x^n$$

Коэффициента разложения могут быть найдены по формуле Тейлора

$$d_0 = F(0),\ \ d_1 = \frac{d}{dx}F(x)\Big|_{x=0},\ \ d_2 = \frac{1}{2!}\frac{d^2}{dx^2}F(x)\Big|_{x=0} \ldots d_n = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dx^n}F(x)\Big|_{x=0}$$

Но проще их найти через табличные данные с помощью матрицы Вондермонда, используя табличные данные - точки $x_0, x_1, \ldots x_n$ и значения функции в этих точках $F_1,\ F_2,\ F_3, \ldots. F_n$.

$$\left.\begin{array}{l} F(x_0) = d_0 + d_1 x_0 + d_2 x_0{}^2 + \ldots d_n x_0{}^n \\ F(x_1) = d_0 + d_1 x_1 + d_2 x_1{}^2 + \ldots d_n x_1{}^n \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ F(x_n) = d_0 + d_1 x_n + d_2 x_n^2 + \ldots d_n x_n{}^n \end{array}\right\} \ \Rightarrow \begin{pmatrix} F(x_0) \\ F(x_1) \\ \ldots\ldots \\ F(x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots. & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots. & x_1^n \\ . & . & . & \ldots. & . \\ 1 & x_n & x_1^2 & \ldots. & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \ldots\ldots \\ d_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} F(x_0) \\ F(x_1) \\ \ldots\ldots \\ F(x_n) \end{pmatrix} = W \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \ldots\ldots \\ d_n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \ldots\ldots \\ d_n \end{pmatrix} = W^{-1} \begin{pmatrix} F(x_0) \\ F(x_1) \\ \ldots\ldots \\ F(x_n) \end{pmatrix}$$

Приведём пример в Mathcad15

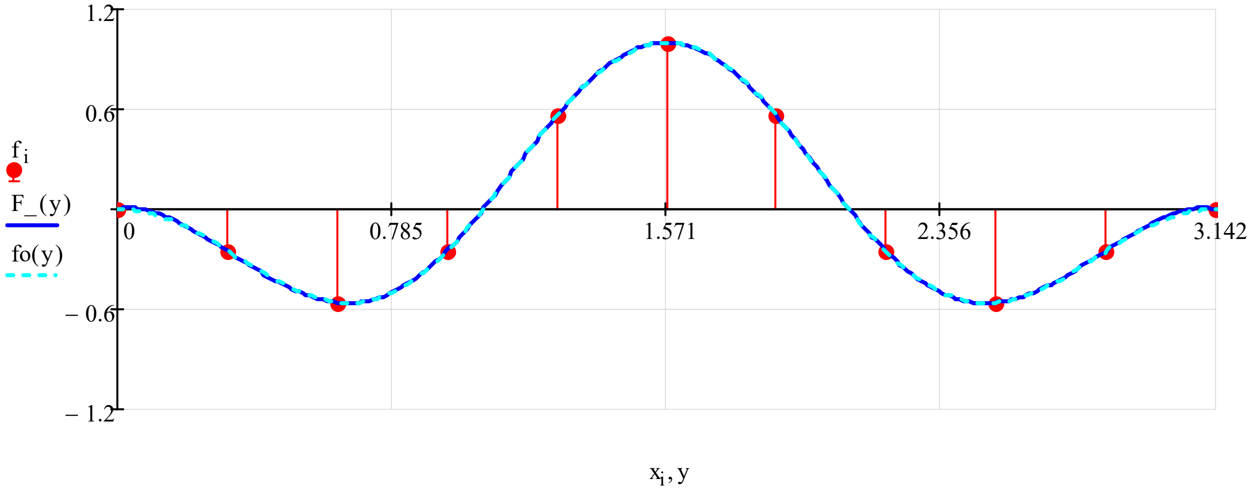
Интерполяция функции $fo(x) := \sin(x)^2 - \sin(x \cdot 2)^2$ **по 11 точкам**

$N := 10 \quad i := 0..N \quad x_i := \frac{\pi}{N} \cdot i \qquad f_i := \sin(x_i)^2 - \sin(x_i \cdot 2)^2$

Интерполяционный полином Лагранжа

$$F(y) := \prod_{k=0}^{N} (y - x_k) \qquad F1(y,j) := \prod_{k=0}^{N} if(x_k = x_j, 1, y - x_k)$$

$$F\_(y) := \sum_{k=0}^{N} \left(\frac{F1(y,k)}{Fo_k} f_k \right)$$



$j := i \qquad W_{i,j} := (x_i)^j$

$$W \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & x_0 & (x_0)^2 & (x_0)^3 & (x_0)^4 & (x_0)^5 & (x_0)^6 & (x_0)^7 & (x_0)^8 & (x_0)^9 & (x_0)^{10} \\ 1 & x_1 & (x_1)^2 & (x_1)^3 & (x_1)^4 & (x_1)^5 & (x_1)^6 & (x_1)^7 & (x_1)^8 & (x_1)^9 & (x_1)^{10} \\ 1 & x_2 & (x_2)^2 & (x_2)^3 & (x_2)^4 & (x_2)^5 & (x_2)^6 & (x_2)^7 & (x_2)^8 & (x_2)^9 & (x_2)^{10} \\ 1 & x_3 & (x_3)^2 & (x_3)^3 & (x_3)^4 & (x_3)^5 & (x_3)^6 & (x_3)^7 & (x_3)^8 & (x_3)^9 & (x_3)^{10} \\ 1 & x_4 & (x_4)^2 & (x_4)^3 & (x_4)^4 & (x_4)^5 & (x_4)^6 & (x_4)^7 & (x_4)^8 & (x_4)^9 & (x_4)^{10} \\ 1 & x_5 & (x_5)^2 & (x_5)^3 & (x_5)^4 & (x_5)^5 & (x_5)^6 & (x_5)^7 & (x_5)^8 & (x_5)^9 & (x_5)^{10} \\ 1 & x_6 & (x_6)^2 & (x_6)^3 & (x_6)^4 & (x_6)^5 & (x_6)^6 & (x_6)^7 & (x_6)^8 & (x_6)^9 & (x_6)^{10} \\ 1 & x_7 & (x_7)^2 & (x_7)^3 & (x_7)^4 & (x_7)^5 & (x_7)^6 & (x_7)^7 & (x_7)^8 & (x_7)^9 & (x_7)^{10} \\ 1 & x_8 & (x_8)^2 & (x_8)^3 & (x_8)^4 & (x_8)^5 & (x_8)^6 & (x_8)^7 & (x_8)^8 & (x_8)^9 & (x_8)^{10} \\ 1 & x_9 & (x_9)^2 & (x_9)^3 & (x_9)^4 & (x_9)^5 & (x_9)^6 & (x_9)^7 & (x_9)^8 & (x_9)^9 & (x_9)^{10} \\ 1 & x_{10} & (x_{10})^2 & (x_{10})^3 & (x_{10})^4 & (x_{10})^5 & (x_{10})^6 & (x_{10})^7 & (x_{10})^8 & (x_{10})^9 & (x_{10})^{10} \end{bmatrix}$$

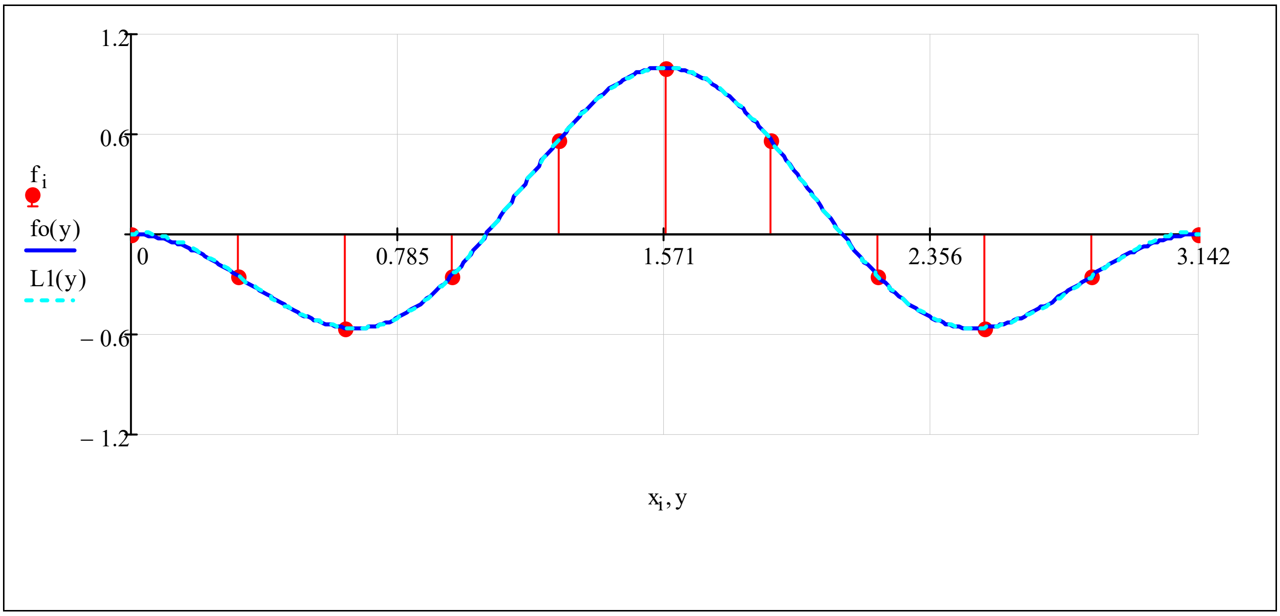
$$W_{i,j} := (x_i)^j$$

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0.314 & 0.099 & 0.031 & 9.741\times 10^{-3} & 3.06\times 10^{-3} & 9.614\times 10^{-4} & 3.02\times 10^{-4} & 9.489\times 10^{-5} & 2.981\times 10^{-5} & 9.365\times 10^{-6} \\ 1 & 0.628 & 0.395 & 0.248 & 0.156 & 0.098 & 0.062 & 0.039 & 0.024 & 0.015 & 9.59\times 10^{-3} \\ 1 & 0.942 & 0.888 & 0.837 & 0.789 & 0.744 & 0.701 & 0.661 & 0.623 & 0.587 & 0.553 \\ 1 & 1.257 & 1.579 & 1.984 & 2.494 & 3.134 & 3.938 & 4.948 & 6.218 & 7.814 & 9.82 \\ 1 & 1.571 & 2.467 & 3.876 & 6.088 & 9.563 & 15.022 & 23.596 & 37.065 & 58.221 & 91.453 \\ 1 & 1.885 & 3.553 & 6.697 & 12.624 & 23.796 & 44.855 & 84.549 & 159.371 & 300.407 & 566.254 \\ 1 & 2.199 & 4.836 & 10.635 & 23.388 & 51.433 & 113.106 & 248.734 & 546.995 & 1.203\times 10^{3} & 2.645\times 10^{3} \\ 1 & 2.513 & 6.317 & 15.875 & 39.899 & 100.277 & 252.022 & 633.401 & 1.592\times 10^{3} & 4.001\times 10^{3} & 1.006\times 10^{4} \\ 1 & 2.827 & 7.994 & 22.604 & 63.91 & 180.702 & 510.922 & 1.445\times 10^{3} & 4.085\times 10^{3} & 1.155\times 10^{4} & 3.265\times 10^{4} \\ 1 & 3.142 & 9.87 & 31.006 & 97.409 & 306.02 & 961.389 & 3.02\times 10^{3} & 9.489\times 10^{3} & 2.981\times 10^{4} & 9.365\times 10^{4} \end{pmatrix}$$

$$d := W^{-1}\cdot f$$

$$d^T = (0 \;\; 0.461 \;\; -7.465 \;\; 17.875 \;\; -34.501 \;\; 53.665 \;\; -49.457 \;\; 25.76 \;\; -7.549 \;\; 1.167 \;\; -0.074)$$

$$L1(x) := \sum_{k=0}^{10} \left(d_k \cdot x^k\right)$$



Задание 7

Выберете полином 5-той степени. Представите его через дискретное множество точек $F_1, F_2 \ldots F_6$ в 5-ти точках $x_1, x_2 \ldots x_6$ (как показано выше) на интервале $x \in [-2,4]$. Представьте полином в двух формах

$$F(x) = \sum_{k=1}^{N} \frac{L_k(x)}{L_k(x_k)} F_k \quad \text{и} \quad d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + \ldots d_n x^n$$

Найдите коэффициенты разложения через матрицу Вондермонда и сравните результаты, Сделайте вывод.