

Лекция 7 Жорданова (нормальная) форма матрицы

При решении системы линейных динамических уравнений, при помощи преобразования подобия, систему можно свести к скалярной форме.

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu, \quad x = \Lambda y, \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dt} = \text{diag}(\lambda)y + \tilde{B}u, \quad \tilde{B} = \Lambda^{-1}B$$

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 y_1 \\ \lambda_2 y_2 \\ \lambda_3 y_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \\ \tilde{b}_3 \end{pmatrix} u$$

Скалярная форма дифференциальных уравнений легко решается аналитическим методом. Для преобразования подобия используются матрицы сводящие матрицу состояния исходной динамической системы к диагональному виду. Причем матрицы позволяющие делать такие преобразования являются матрицами, состоящими из собственных векторов матрицы состояния. Однако такой подход справедлив, в случае если собственные числа матрицы состояния являются не кратными.

Как поступать в случае если собственные числа являются кратными? К какому наиболее простому виду можно привести исходную матрицу состояния? В случае кратных корней матрицу состояния можно свести к матрице близкой к диагональной форме. В таких матрицах в качестве диагональных «элементов» стоят так называемые Жордановы клетки (блоки). Такие матрицы называются блочно-диагональными.

Рассмотрим **пример** жордановых форм

$$J = \begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & 0 & 0 \\ 0 & J_{n_2}(\lambda_2) & 0 \\ 0 & 0 & J_{n_3}(\lambda_3) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} n_1=1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} n_2=3 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} n_3=2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow J = \begin{pmatrix} \boxed{\lambda_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\lambda_2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{\lambda_3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = (J_1(\lambda_1), J_3(\lambda_2), J_2(\lambda_3))$$

$$J = \begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & 0 \\ 0 & J_{n_2}(\lambda_2) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} n_1=2 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} n_2=2 \\ \lambda_2 \end{pmatrix},$$

$$\rightarrow J = \begin{pmatrix} \boxed{\lambda_1} & \boxed{1} & 0 & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\lambda_2} & \boxed{1} \\ 0 & 0 & \boxed{0} & \boxed{\lambda_2} \end{pmatrix} = (J_2(\lambda_1), J_2(\lambda_2))$$

Пример-1. Матрица является Жордановой

$$J = \left(\begin{array}{ccc|cc} \alpha & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta \end{array} \right) = (J_3(\alpha), J_2(\beta))$$

Эта матрица состоит из двух клеток (блоков). Числа α и β являются собственными числами матрицы состояния, которая имеет характеристический полином в виде

$$|I\lambda - A| = (\lambda - \alpha)^3 (\lambda - \beta)^2,$$

Пример-2. Записать в развернутом виде Жордановы матрицы

- 1) $(J_1(-2), J_1(-1))$ 2) $J_2(4)$, 3) $(J_2(-2), J_2(1))$, 4) $(J_1(-2), J_1(1), J_2(-3))$, 5) $(J_2(2), J_1(-1), J_2(0))$
 6) $(J_1(2), J_1(1), J_1(-1), J_2(-4))$, 7) $(J_2(-2), J_1(0), J_3(6))$

Решение:

$$1) J = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, 2) J = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, 3) J = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, 4) J = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$5) J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, 6) J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}, 7) J = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Пример-3. Является ли представленная матрица Жордановой?

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Разобьём на блоки и получим

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right)$$

Очевидно, что блоки, стоящие на диагонали являются клетками Жордана:

$$J_1(3), J_2(-2), J_3(4), \quad J_1(3)=3, \quad J_2(-2)=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad J_3(4)=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

В краткой записи, матрицу Жордана можно представить в виде:

$$A = \begin{pmatrix} J_1(3) & 0 & 0 \\ 0 & J_2(-2) & 0 \\ 0 & 0 & J_3(4) \end{pmatrix} = (J_1(3), J_2(-2), J_3(4)).$$

Приведение матрицы к Жордановой Форме

Если существует такая невырожденная матрица C , что $J = C^{-1}AC$ - жорданова матрица, то матрица J называется жордановой формой матрицы A . При этом говорят что матрица A приводящейся к жордановой форме. А матрица C называется матрицей приводящей матрицу A к жордановой форме.

Существуют несколько методов нахождения жордановых форм матриц, основанные на построении канонического (жорданова) базиса.

Приведем теоремы позволяющие находить жорданову форму не вычисляя базиса.

Теорема 1. Число клеток Жордана определяются по формуле

$$m = \sum_{i=1}^k (n - \text{rank}(\lambda_i E - A)), \quad E - \text{единичная матрица}. \quad (2)$$

Здесь k - число различных собственных значений матрицы A , n - её порядок, λ_i - собственные значения матрицы A .

Теорема 2. Пусть $g_n(\lambda_i)$ число клеток Жордана порядка n с собственным числом λ_i в жордановой форме матрицы A . Тогда имеет место формула

$$g_n(\lambda_i) = \text{rank}\left((\lambda_i E - A)^{n-1}\right) - 2\text{rank}\left((\lambda_i E - A)^n\right) + \text{rank}\left((\lambda_i E - A)^{n+1}\right) \quad (3)$$

Таким образом, для любой заданной квадратной матрицы A порядка n можно определить её жорданову форму (без выяснения, каким именно преобразованием подобия она достигнута, т.е. ничего не зная о матрицы C). Для этого нужно выполнить следующие действия.

1. Найти все собственные значения (числа) матрицы A .
2. Для каждого собственного значения образовать степени матриц типа $(\lambda_i E - A)^k$, $k = 0, 1, \dots, n$ и определить ранги этих матриц, установит для матрицы A размеры и число жордановых клеток, отвечающих собственным значениям λ_i

Этот метод используют при небольшом порядке матрицы. При больших размерах используют другие методы.

Пример-4. Найти жорданову форму матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

Будем использовать **Mathcad**

$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad E := \text{identity}(3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ - единичная матрица

$|E \cdot \lambda - A| \rightarrow \lambda^3 - 6 \cdot \lambda^2 + 12 \cdot \lambda - 8$ характеристический полином

$\lambda := \lambda^3 - 6 \cdot \lambda^2 + 12 \cdot \lambda - 8 \quad \left| \begin{array}{l} \text{solve} \\ \text{float}, 4 \end{array} \right. \rightarrow \begin{pmatrix} 2.0 \\ 2.0 \\ 2.0 \end{pmatrix}$ кратные корни полинома или собственные

числа матрицы A . Корень уравнения имеет кратность равную $s=3$.

Находим матрицу $\lambda_0 \cdot E - A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ и её ранг $\text{rank}(\lambda_0 \cdot E - A) = 1$

Число клеток Жордана $-m$ в жордановой форме матрицы A определяем по

формуле (2)

$$m = 3 - \text{rank}(\lambda_0 \cdot E - A) \quad m := 3 - 1 = 2$$

Поскольку порядок матрицы A равен 3 то единственным расположением клеток

Будет матрица (с точностью до расположения клеток)

$$J := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad J := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = (J_1(2), J_2(2))$$

Пример-5. Найти жорданову форму матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad E := \text{identity}(4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{- единичная матрица}$$

$|E \cdot \lambda - A| \rightarrow \lambda^4 - 8 \cdot \lambda^3 + 24 \cdot \lambda^2 - 32 \cdot \lambda + 16$ - характеристический полином

$$\lambda := \lambda^4 - 8 \cdot \lambda^3 + 24 \cdot \lambda^2 - 32 \cdot \lambda + 16 \quad \left| \begin{array}{l} \text{solve} \\ \text{float}, 4 \end{array} \right. \rightarrow \begin{pmatrix} 2.0 \\ 2.0 \\ 2.0 \\ 2.0 \end{pmatrix} \quad \text{корни характеристического уравнения,}$$

собственные числа матрицы A

Порядок исходной матрицы A равен s=4.

$$\text{Ищем ранг матрицы вида } E \cdot \lambda_0 - A \rightarrow \begin{pmatrix} 0.0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0.0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0.0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0.0 \end{pmatrix} \quad \text{rank}(E \cdot \lambda_0 - A) = 3$$

Находим число клеток Жордана $m := 4 - \text{rank}(E \cdot \lambda_0 - A) = 1$

Это значит, что вся матрица Жордана будет одной клеткой

$$J := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = J_4(2)$$

Пример-6. Найти жорданову форму матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{A} := \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix} \quad \underline{E} := \text{identity}(4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{единичная матрица}$$

$$|E \cdot \lambda - A| \rightarrow \lambda^4 - 4\lambda^3 + 6\lambda^2 - 4\lambda + 1 \quad \text{характеристический полином}$$

$$\underline{\lambda} := \lambda^4 - 4\lambda^3 + 6\lambda^2 - 4\lambda + 1 \quad \left| \begin{array}{l} \text{solve} \\ \text{float}, 4 \end{array} \right. \rightarrow \begin{pmatrix} 1.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \end{pmatrix} \quad \text{корни характеристического полинома}$$

Порядок исходной матрицы равен 4. Находим число клеток Жордана

$$E \cdot \lambda_0 - A \rightarrow \begin{pmatrix} 0.0 & 3 & 0 & -3 \\ 2 & 7.0 & 0 & -13 \\ 0 & 3 & 0.0 & -3 \\ 1 & 4 & 0 & -7.0 \end{pmatrix} \quad \text{rank}(E \cdot \lambda_0 - A) = 2$$

$\underline{m} := 4 - \text{rank}(E \cdot \lambda_0 - A) = 2$ получаем две клетки Жордана. Это могут быть 2 клетки порядка 1 и 3 ($J_1(1)J_3(1)$) или 2 клетки порядка 2 и 2 ($J_2(1)J_2(1)$)

Для внесения ясности будем использовать формулу (3)

Определим количество клеток второго порядка

$$g_2(1) = \text{rank}\left((1E - A)^1\right) - 2\text{rank}\left((1E - A)^2\right) + \text{rank}\left((1E - A)^3\right)$$

$$\text{rank}(E \cdot \lambda_0 - A) - 2 \cdot \text{rank}\left[(E \cdot \lambda_0 - A)^2\right] + \text{rank}\left[(E \cdot \lambda_0 - A)^3\right] = 0$$

Это значит, что клеток второго порядка не существует. Следовательно, мы имеем первый случай ($J_1(1)J_3(1)$)

$$\underline{J} := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$