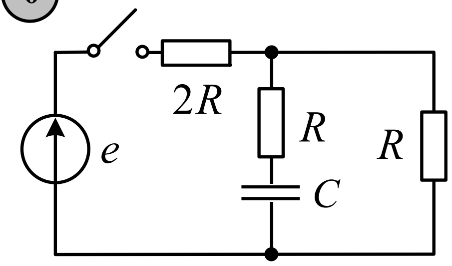
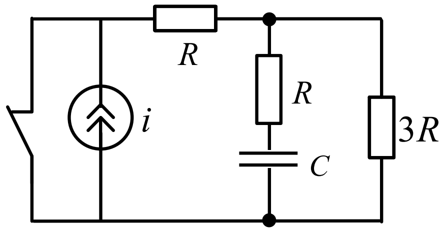
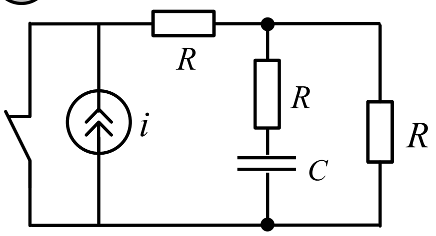
0


2R
R
R
e
C

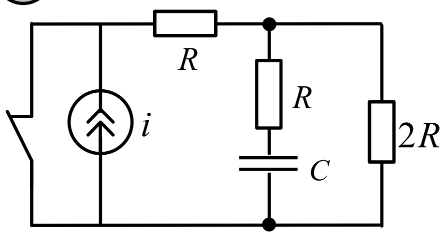
1


R
R
i
3R
C

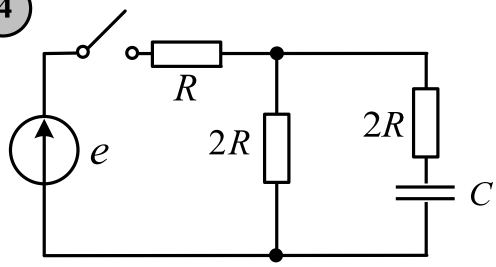
2


R
R
i
R
C

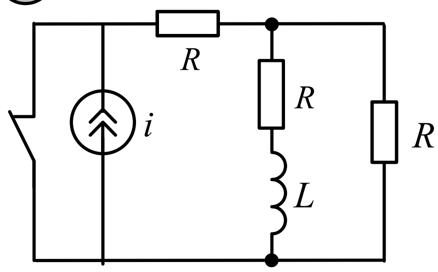
3


R
R
i
2R
C

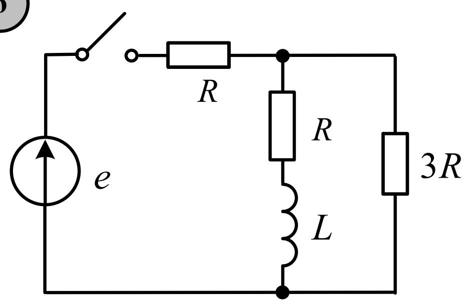
4


R
2R
2R
e
C

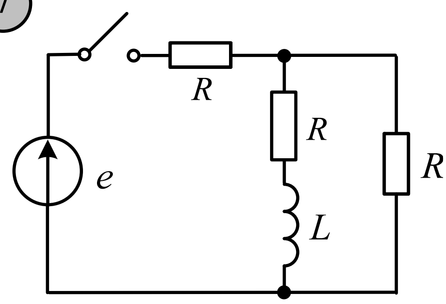
5


R
R
i
R
L

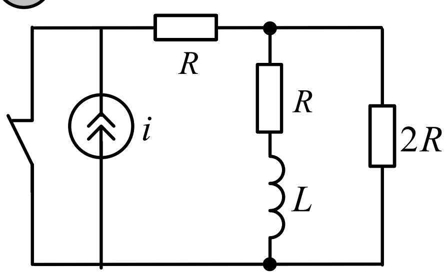
6


R
R
3R
e
L

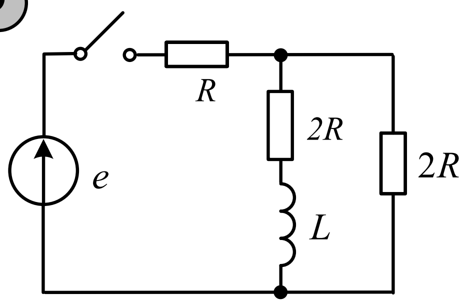
7


R
R
R
e
L

8


R
R
i
2R
L

9


R
2R
2R
e
L

Метод Фаддеева-Леверье (Метод нахождения обратных матриц)

В предыдущих параграфах мы рассмотрели теоремы разложения для восстановления оригиналов по их изображениям.
В этом параграфе мы рассмотрим метод нахождения обратных матриц изображения.
Уравнения состояния имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \tag{1}$$

Сосредоточимся на первом уравнение системы
Произведем преобразование Лапласа

$$\begin{aligned} &pX(p) = AX(p) + B\cdot U(p) \ \rightarrow \ X(p)\left(Ip - \mathrm{A}\right) = B\cdot U(p) \\ &X(p) = \left(Ip - \mathrm{A}\right)^{-1} B\cdot U(p) \end{aligned} \tag{2}$$

Таким образом, что бы получить изображение вектора состояния необходимо знать обратную матрицу $\left(\mathbf{I}p - \mathbf{A}\right)^{-1}$. Обратная матрица называется ***резольвентой***. Запишем это матрицу в виде разложения (Фаддеев).

$$\left(\mathbf{I}p - \mathbf{A}\right)^{-1} = \frac{\mathbf{M}(p)}{m(p)} = \frac{\mathbf{I}p^{n-1} + \mathbf{M}_1 p^{n-2} + \mathbf{M}_2 p^{n-3} + \ldots \mathbf{M}_{n-2} p + \mathbf{M}_{n-1}}{p^n - m_1 p^{n-1} - \ldots . - m_{n-1} p^1 - m_n} \tag{3}$$

Приведем алгоритм Фаддеева-Леверье для определения резольвенты.
Матрицы входящие в разложения определяются по формулам приведенным ниже.

Где $\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$, $n \times n$, единичная матрица,

Матрицы входящие в числитель и коэффициенты полинома знаменателя определяются по формулам:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}, && m_1 = tr(\mathbf{A}_1), && \mathbf{M}_1 = \mathbf{A}_1 - \mathbf{I}m_1, \\
&\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}\mathbf{M}_1, && m_2 = \frac{1}{2}tr(\mathbf{A}_2), && \mathbf{M}_2 = \mathbf{A}_2 - \mathbf{I}m_2, \\
&\mathbf{A}_3 = \mathbf{A}\mathbf{M}_3, && m_3 = \frac{1}{3}tr(\mathbf{A}_3), && \mathbf{M}_3 = \mathbf{A}_3 - \mathbf{I}m_3, \\
&\ldots\ldots. && \ldots\ldots. && \ldots\ldots\ldots.. \\
&\mathbf{A}_n = \mathbf{A}\mathbf{M}_n, && m_n = \frac{1}{n}tr(\mathbf{A}_n), && \mathbf{M}_n = \mathbf{A}_n - \mathbf{I}m_n.
\end{aligned}$$

Этот процесс продолжается до тех пор, пока матрица $\mathbf{M}_n$ не обратиться в нулевую матрицу.

Приведем **пример.** Задана матрица состояния и вектор внешнего воздействия

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -24 & -50 & -35 & -10 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Записать уравнения состояния и найти резольвенту. Внешнее воздействие равно единичному импульсу.

$$\frac{d}{dt}x = \mathbf{A}x + \mathbf{B}u$$

Находим изображение уравнения

$$pX = \mathbf{A}X + \mathbf{B} \ \rightarrow \ (\mathbf{I}p - \mathbf{A})X = \mathbf{B} \ \rightarrow \ X = (\mathbf{I}p - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$$

Представим резольвенту в виде разложения Фаддеева – Леверье.

$$(\mathbf{I}p - \mathbf{A})^{-1} = \frac{\mathbf{I}p^3 + \mathbf{M}_1 p^2 + \mathbf{M}_2 p + \mathbf{M}_3}{p^4 - m_1 p^3 - m_2 p^2 - m_3 p - m_4}$$ (степень n-1 , n- порядок матрицы)

Находим резольвету методом Фаддеева-Леверье

этап 1

$$\mathrm{A1} := \mathrm{A} \qquad m_1 := \mathrm{tr}(\mathrm{A1}) = -10 \qquad \mathrm{I} := \mathrm{identity}(4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{M}_1 := \mathrm{A1} - \mathrm{I}\cdot m_1 = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 1 \\ -24 & -50 & -35 & 0 \end{pmatrix}$$

этап 2

$$\mathrm{A2} := \mathrm{A}\cdot\mathrm{M}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 1 \\ -24 & -50 & -35 & 0 \\ 0 & -24 & -50 & -35 \end{pmatrix} \qquad m_2 := \frac{\mathrm{tr}(\mathrm{A2})}{2} = -35 \qquad \mathrm{M}_2 := \mathrm{A2} - \mathrm{I}\cdot m_2 = \begin{pmatrix} 35 & 10 & 1 & 0 \\ 0 & 35 & 10 & 1 \\ -24 & -50 & 0 & 0 \\ 0 & -24 & -50 & 0 \end{pmatrix}$$

этап 3

$$\mathrm{A3} := \mathrm{A}\cdot\mathrm{M}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 35 & 10 & 1 \\ -24 & -50 & 0 & 0 \\ 0 & -24 & -50 & 0 \\ 0 & 0 & -24 & -50 \end{pmatrix} \qquad m_3 := \frac{\mathrm{tr}(\mathrm{A3})}{3} = -50 \qquad \mathrm{M}_3 := \mathrm{A3} - m_3\cdot\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 50 & 35 & 10 & 1 \\ -24 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -24 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -24 & 0 \end{pmatrix}$$

этап 4

$$\mathrm{A4} := \mathrm{A}\cdot\mathrm{M}_3 = \begin{pmatrix} -24 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -24 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -24 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -24 \end{pmatrix} \qquad m_4 := \frac{\mathrm{tr}(\mathrm{A4})}{4} = -24 \qquad \mathrm{M}_4 := \mathrm{A4} - m_4\cdot\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Записываем характеристический полином знаменателя его с собственными числами матрицы состояния

$$m(p) := p^3 - m_1 \cdot p^2 - m_2 \cdot p - m_3 \qquad m(\lambda) \rightarrow \lambda^3 + 10 \cdot \lambda^2 + 35 \cdot \lambda + 50$$

$$m(p) \left| \begin{array}{l} \text{solve}, p \\ \text{float}, 4 \end{array} \right. \rightarrow \begin{pmatrix} -1.0 \\ -2.0 \\ -3.0 \\ -4.0 \end{pmatrix} \qquad \lambda := \text{eigenvals}(A) = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Записываем резольвенту

$$\left(\mathbf{I}p - \mathbf{A}\right)^{-1} = \frac{\mathbf{I}p^3 + \mathbf{M}_1 p^2 + \mathbf{M}_2 p + \mathbf{M}_3}{p^4 - m_1 p^3 - m_2 p^2 - m_3 p - m_4}$$

Находим изображение вектора состояния

$$\frac{I \cdot p^3 + M_1 \cdot p^2 + M_2 \cdot p + M_3}{m(p)} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{p^3 + 10 \cdot p^2 + 35 \cdot p + 50}{p^4 + 10 \cdot p^3 + 35 \cdot p^2 + 50 \cdot p + 24} & \frac{p^2 + 10 \cdot p + 35}{p^4 + 10 \cdot p^3 + 35 \cdot p^2 + 50 \cdot p + 24} & \frac{p + 10}{p^4 + 10 \cdot p^3 + 35 \cdot p^2 + 50 \cdot p + 24} & \frac{1}{p^4 + 10 \cdot p^3 + 35 \cdot p^2 + 50 \cdot p + 24} \\ -\frac{24}{p^4 + 10 \cdot p^3 + 35 \cdot p^2 + 50 \cdot p + 24} & \frac{p^3 + 10 \cdot p^2 + 35 \cdot p}{p^4 + 10 \cdot p^3 + 35 \cdot p^2 + 50 \cdot p + 24} & \frac{p^2 + 10 \cdot p}{p^4 + 10 \cdot p^3 + 35 \cdot p^2 + 50 \cdot p + 24} & \frac{p}{p^4 + 10 \cdot p^3 + 35 \cdot p^2 + 50 \cdot p + 24} \\ -\frac{24 \cdot p}{p^4 + 10 \cdot p^3 + 35 \cdot p^2 + 50 \cdot p + 24} & -\frac{50 \cdot p + 24}{p^4 + 10 \cdot p^3 + 35 \cdot p^2 + 50 \cdot p + 24} & \frac{p^3 + 10 \cdot p^2}{p^4 + 10 \cdot p^3 + 35 \cdot p^2 + 50 \cdot p + 24} & \frac{p^2}{p^4 + 10 \cdot p^3 + 35 \cdot p^2 + 50 \cdot p + 24} \\ -\frac{24 \cdot p^2}{p^4 + 10 \cdot p^3 + 35 \cdot p^2 + 50 \cdot p + 24} & -\frac{50 \cdot p^2 + 24 \cdot p}{p^4 + 10 \cdot p^3 + 35 \cdot p^2 + 50 \cdot p + 24} & -\frac{35 \cdot p^2 + 50 \cdot p + 24}{p^4 + 10 \cdot p^3 + 35 \cdot p^2 + 50 \cdot p + 24} & \frac{p^3}{p^4 + 10 \cdot p^3 + 35 \cdot p^2 + 50 \cdot p + 24} \end{pmatrix}$$

$$\frac{I \cdot p^3 + M_1 \cdot p^2 + M_2 \cdot p + M_3}{m(p)} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{p} \\ \frac{1}{p} \end{pmatrix} \text{simplify} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{p + 11}{p \cdot (p + 1) \cdot (p + 2) \cdot (p + 3) \cdot (p + 4)} \\ \frac{p + 11}{(p + 1) \cdot (p + 2) \cdot (p + 3) \cdot (p + 4)} \\ \frac{p \cdot (p + 11)}{(p + 1) \cdot (p + 2) \cdot (p + 3) \cdot (p + 4)} \\ -\frac{35 \cdot p^2 - p^3 + 50 \cdot p + 24}{p \cdot (p + 1) \cdot (p + 2) \cdot (p + 3) \cdot (p + 4)} \end{bmatrix}$$

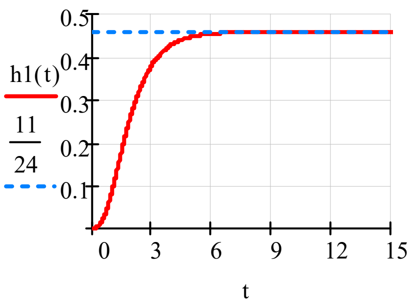
$$\frac{I \cdot p^3 + M_1 \cdot p^2 + M_2 \cdot p + M_3}{m(p)} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{p} \\ \frac{1}{p} \end{pmatrix} \text{invlaplace}, p \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\left(7 \cdot e^{-t} - 11\right) \cdot \left(e^{-t} - 1\right)^3}{24} \\ -\frac{e^{-t} \cdot \left(7 \cdot e^{-t} - 10\right) \cdot \left(e^{-t} - 1\right)^2}{6} \\ 9 \cdot e^{-2 \cdot t} - \frac{5 \cdot e^{-t}}{3} - 12 \cdot e^{-3 \cdot t} + \frac{14 \cdot e^{-4 \cdot t}}{3} \\ \frac{5 \cdot e^{-t}}{3} - 18 \cdot e^{-2 \cdot t} + 36 \cdot e^{-3 \cdot t} - \frac{56 \cdot e^{-4 \cdot t}}{3} - 1 \end{bmatrix}$$

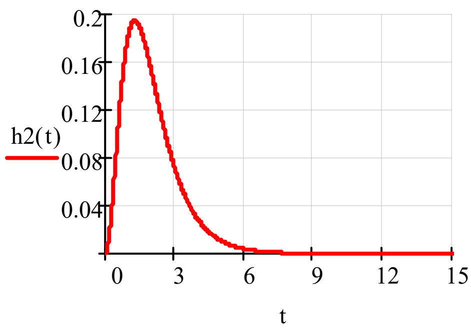
$$h1(t) := \frac{\left(7\cdot e^{-t} - 11\right)\cdot\left(e^{-t} - 1\right)^3}{24} \qquad h2(t) := -\frac{e^{-t}\cdot\left(7\cdot e^{-t} - 10\right)\cdot\left(e^{-t} - 1\right)^2}{6}$$

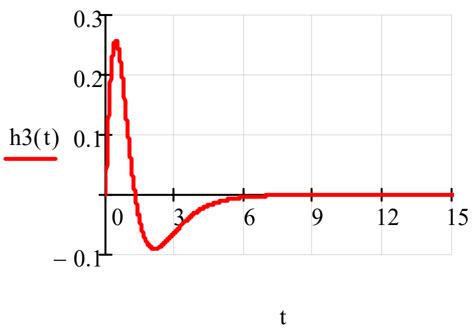
$$h3(t) := 9\cdot e^{-2\cdot t} - \frac{5\cdot e^{-t}}{3} - 12\cdot e^{-3\cdot t} + \frac{14\cdot e^{-4\cdot t}}{3}$$

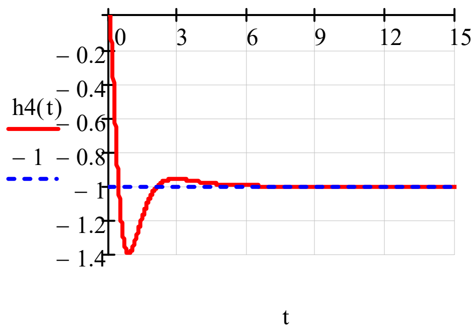
$$h4(t) := \frac{5\cdot e^{-t}}{3} - 18\cdot e^{-2\cdot t} + 36\cdot e^{-3\cdot t} - \frac{56\cdot e^{-4\cdot t}}{3} - 1$$

$t := 0, .01 .. 20$









Пример 2.

$I := \mathrm{identity}(3)$

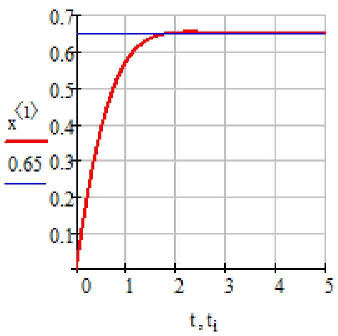
$$A := \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -2 & -3 & -3 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{eigenvals}(A) = \begin{pmatrix} -2.715 \\ -2.142 + 1.666i \\ -2.142 - 1.666i \end{pmatrix} \qquad D(p) := |I \cdot p - A| \rightarrow p^3 + 7 \cdot p^2 + 19 \cdot p + 20$$

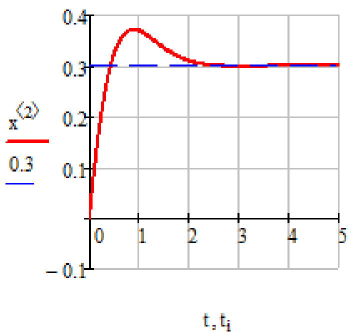
установившейся процесс

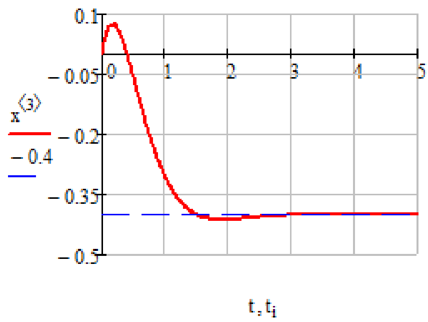
$$B := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad D(p) \left| \begin{matrix} \mathrm{solve} \\ \mathrm{float}, 4 \end{matrix} \right. \rightarrow \begin{pmatrix} -2.715 \\ -2.142 + 1.666i \\ -2.142 - 1.666i \end{pmatrix} \qquad -\left(A^{-1} \cdot B\right) = \begin{pmatrix} 0.65 \\ 0.3 \\ -0.4 \end{pmatrix}$$

$$D(t, x) := A \cdot x + B \qquad T := 5 \qquad N := 10^2 \cdot 3$$

$$x := \mathrm{rkfixed}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, 0, T, N, D\right] \qquad t := x^{\langle 0 \rangle} \qquad i := 0..N$$







Находим резольвету методом Фаддеева- Леверье

1) этап

$$A1 := A \qquad m_1 := \mathrm{tr}(A1) = -7 \qquad I := \mathrm{identity}(3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_1 := A1 - I \cdot m_1 = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ -2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

2) этап

$$A2 := A \cdot M_1 = \begin{pmatrix} -10 & 3 & 1 \\ -2 & -13 & 2 \\ -4 & -8 & -15 \end{pmatrix} \qquad m_2 := \frac{\mathrm{tr}(A2)}{2} = -19$$

$$M_2 := A2 - I \cdot m_2 = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 1 \\ -2 & 6 & 2 \\ -4 & -8 & 4 \end{pmatrix}$$

3) этап

$$A3 := A \cdot M_2 = \begin{pmatrix} -20 & 0 & 0 \\ 0 & -20 & 0 \\ 0 & 0 & -20 \end{pmatrix} \qquad m_3 := \frac{tr(A3)}{3} = -20$$

$$M_3 := A3 - m_3 \cdot I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$m(p) := p^3 - m_1 \cdot p^2 - m_2 \cdot p - m_3 \qquad m(\lambda) \rightarrow \lambda^3 + 7 \cdot \lambda^2 + 19 \cdot \lambda + 20$$

$$\frac{I \cdot p^2 + M_1 \cdot p + M_2}{m(p)} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{p^2 + 5 \cdot p + 9}{p^3 + 7 \cdot p^2 + 19 \cdot p + 20} & \frac{p + 3}{p^3 + 7 \cdot p^2 + 19 \cdot p + 20} & \frac{1}{p^3 + 7 \cdot p^2 + 19 \cdot p + 20} \\ -\frac{2}{p^3 + 7 \cdot p^2 + 19 \cdot p + 20} & \frac{p^2 + 5 \cdot p + 6}{p^3 + 7 \cdot p^2 + 19 \cdot p + 20} & \frac{p + 2}{p^3 + 7 \cdot p^2 + 19 \cdot p + 20} \\ -\frac{2 \cdot p + 4}{p^3 + 7 \cdot p^2 + 19 \cdot p + 20} & -\frac{3 \cdot p + 8}{p^3 + 7 \cdot p^2 + 19 \cdot p + 20} & \frac{p^2 + 4 \cdot p + 4}{p^3 + 7 \cdot p^2 + 19 \cdot p + 20} \end{pmatrix}$$

$$\frac{I \cdot p^2 + M_1 \cdot p + M_2}{m(p)} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{p} \\ \frac{1}{p} \\ \frac{1}{p} \end{pmatrix} \text{ simplify } \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{p^2 + 6 \cdot p + 13}{p \cdot \left(p^3 + 7 \cdot p^2 + 19 \cdot p + 20\right)} \\ \frac{p^2 + 6 \cdot p + 6}{p \cdot \left(p^3 + 7 \cdot p^2 + 19 \cdot p + 20\right)} \\ -\frac{-p^2 + p + 8}{p \cdot \left(p^3 + 7 \cdot p^2 + 19 \cdot p + 20\right)} \end{bmatrix}$$

$$p^3 + 7 \cdot p^2 + 19 \cdot p + 20 \ \Big|\begin{matrix} \text{solve} \\ \text{float}, 4 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2.715 \\ -2.142 + 1.666i \\ -2.142 - 1.666i \end{pmatrix}$$

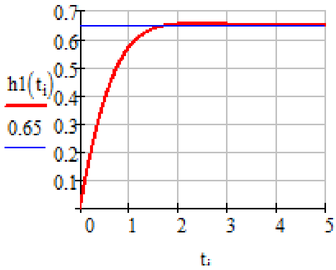
$$\frac{1}{\left(4.28478 \cdot p + p^2 + 7.3658907346\right) \cdot \left(p - \lambda_0\right)} \cdot \begin{pmatrix} \frac{p^2 + 6 \cdot p + 13}{p} \\ \frac{p^2 + 6 \cdot p + 6}{p} \\ -\frac{-p^2 + p + 8}{p} \end{pmatrix} \Big|\begin{matrix} \text{invlaplace}, p \\ \text{float}, 4 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -0.4842 \cdot e^{-2.715 \cdot t} + -0.1658 \cdot \cos(1.666 \cdot t) \cdot e^{-2.142 \cdot t} + -0.4021 \cdot \sin(1.666 \cdot t) \cdot e^{-2.142 \cdot t} + 0.65 \\ 0.3463 \cdot e^{-2.715 \cdot t} + -0.6463 \cdot \cos(1.666 \cdot t) \cdot e^{-2.142 \cdot t} + 0.3335 \cdot \sin(1.666 \cdot t) \cdot e^{-2.142 \cdot t} + 0.3 \\ -0.2477 \cdot e^{-2.715 \cdot t} + 0.6477 \cdot \cos(1.666 \cdot t) \cdot e^{-2.142 \cdot t} + 1.029 \cdot \sin(1.666 \cdot t) \cdot e^{-2.142 \cdot t} - 0.4 \end{pmatrix}$$

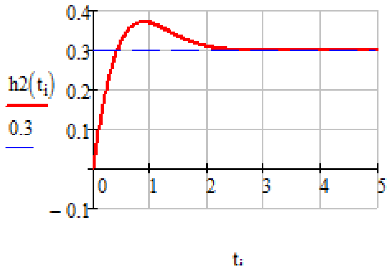
$$h1(t) := -0.4842\cdot e^{-2.715\cdot t} + -0.1658\cdot\cos(1.666\cdot t)\cdot e^{-2.142\cdot t} + -0.4021\cdot\sin(1.666\cdot t)\cdot e^{-2.142\cdot t} + 0.65$$

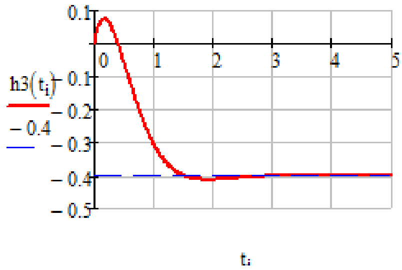
$$h2(t) := 0.3463\cdot e^{-2.715\cdot t} + -0.6463\cdot\cos(1.666\cdot t)\cdot e^{-2.142\cdot t} + 0.3335\cdot\sin(1.666\cdot t)\cdot e^{-2.142\cdot t} + 0.3$$

$$h3(t) := -0.2477\cdot e^{-2.715\cdot t} + 0.6477\cdot\cos(1.666\cdot t)\cdot e^{-2.142\cdot t} + 1.029\cdot\sin(1.666\cdot t)\cdot e^{-2.142\cdot t} - 0.4$$

$T := 5$ $\quad t1 := 0, .01\cdot T .. T$







Решим пример методом Фробениуса.

Преобразуем исходную матрицу в форму Фробениуса

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -2 & -3 & -3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \left| I\cdot\lambda - A \right| \rightarrow \lambda^3 + 7\cdot\lambda^2 + 19\cdot\lambda + 2($$

$$A_f := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -20 & -19 & -7 \end{pmatrix} \quad B_f := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ матрицы Фробениуса

$M := I$ Находим матрицу преобразования решая алгебраические матричные уравнения

given

$M\cdot A\cdot M^{-1} = A_f$

$M\cdot B = B_f$

$M := \mathrm{Find}(M)$

$$M = \begin{pmatrix} 0.143 & -0.143 & -0 \\ -0.286 & 0.429 & -0.143 \\ 0.857 & -0.714 & 0.857 \end{pmatrix}$$

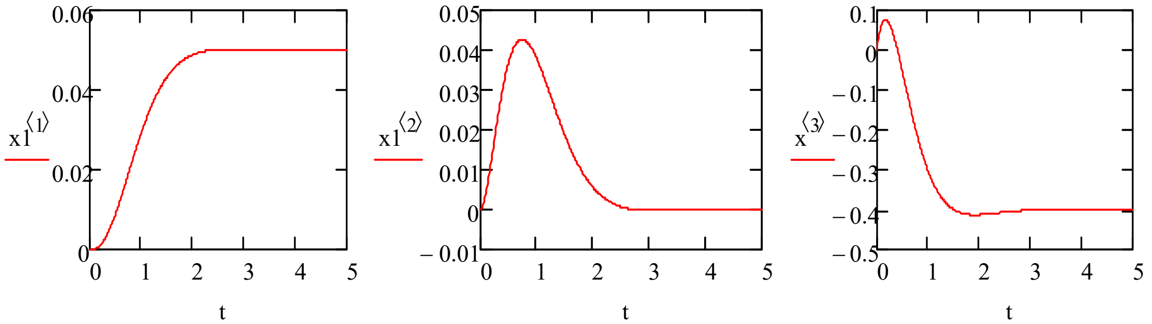
Проверяем полученную матрицу

$$M\cdot A\cdot M^{-1} = \begin{pmatrix} -0 & 1 & 0 \\ -0 & 0 & 1 \\ -20 & -19 & -7 \end{pmatrix} \quad M\cdot B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Решаем задачу для Фробениусовой формы

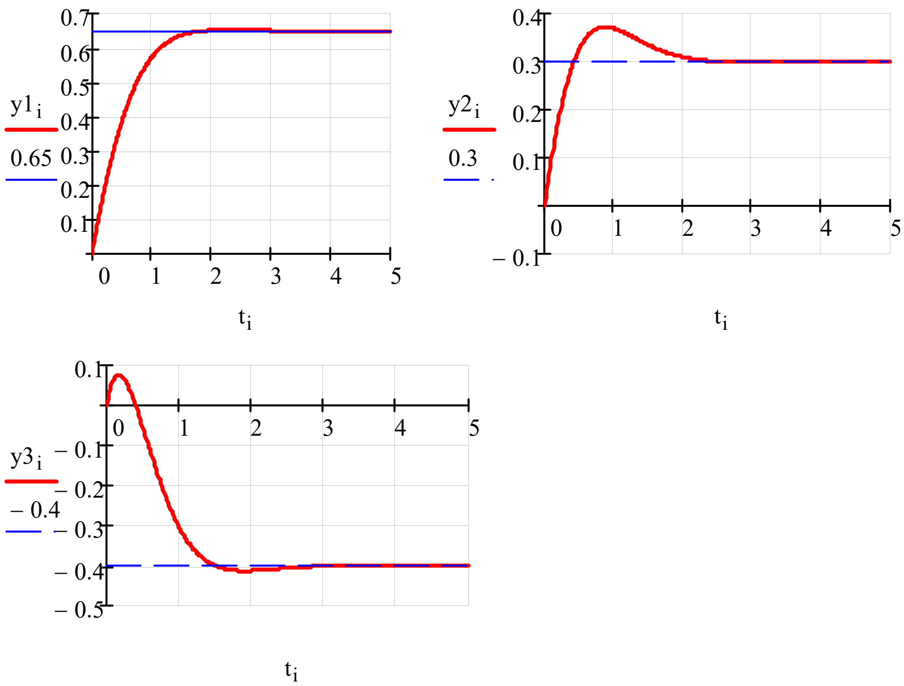
$D(t, x) := A_f\cdot x + B_f$

$$x1 := \mathrm{rkfixed}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, 0, T, N, D\right] \quad t1 := x1^{\langle 0\rangle}$$



Делаем обратное преобразование координат

$$\begin{pmatrix} y1_i \\ y2_i \\ y3_i \end{pmatrix} := M^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \left(x1^{\langle 1 \rangle}\right)_i \\ \left(x1^{\langle 2 \rangle}\right)_i \\ \left(x1^{\langle 3 \rangle}\right)_i \end{bmatrix}$$



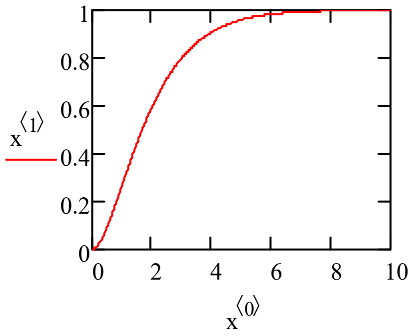
Получаем те же графические значения

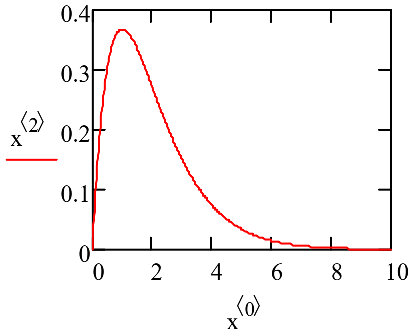
Пример системы второго порядка с кратным корнем

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \lambda := \text{eigenvals}(A) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$D(t,x) := A \cdot x + B \quad N := 10^2 \cdot 3 \quad T := 10$$

$$x := \text{rkfixed}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, 0, T, N, D\right]$$





Метод Фаддеева Леверье

$A1 := A \quad m1 := tr(A1) = -2 \quad I := identity(2) \quad M1 := A1 - m1 \cdot I = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$A2 := A \cdot M1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad m2 := \frac{tr(A)}{2} = -1 \quad M2 := A2 - m2 \cdot I = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$m(p) := p^2 - m1 \cdot p - m2$ проверяем на совпадения с собственными числами

$m(p) \ \Big|\begin{matrix} solve \\ float, 4 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1.0 \\ -1.0 \end{pmatrix}$

$B := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad => \quad \frac{I \cdot p + M1}{m(p)} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{p} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{p \cdot (p^2 + 2 \cdot p + 1)} \\ \frac{1}{p^2 + 2 \cdot p + 1} \end{bmatrix}$

Находим оригинал по теореме разложения.
для первой компоненты $h_1(t)$

$$\frac{1}{p}\frac{M(p)}{D(p)} \rightarrow D(p) = (p+1)^2, \ M(p) = 1$$

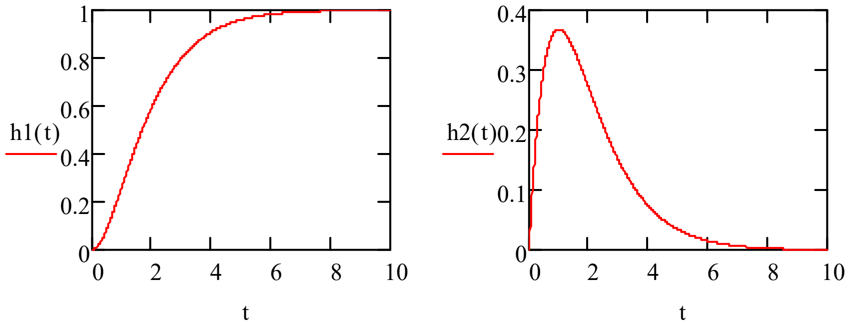
$$h_1(t) = \frac{M(0)}{D(0)} + \frac{d}{dp}\left(\frac{e^{pt}}{p}\right)\Big|_{p=-1} = 1 + \frac{te^{pt}}{p}\Big|_{p=-1} - \frac{e^{pt}}{p^2}\Big|_{p=-1} = 1 - te^{-t} - e^{-t}$$

Находим оригинал по теореме разложения.
для второй компоненты $h_2(t)$

$$\frac{M(p)}{D(p)} \rightarrow D(p) = (p+1)^2, \ M(p) = 1$$

$$h_2(t) = \frac{d}{dp}\left(e^{pt}\right)\Big|_{p=-1} = te^{pt}\Big|_{p=-1} = te^{-t}$$

$t := 0, .01 .. 10$



h1(t)
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
2
4
6
8
10
t
h2(t)
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
2
4
6
8
10
t