Лекция 14

Понятие о градиенте

Экстремум функции многих переменных

Функции, для которых мы будем искать экстремум, будем называть ***целевыми функциями (ЦФ).*** Точки, в которых находится экстремум, будем называть ***стационарными*** (это понятие для точек в которых производная функции равна нулю)

Чтобы найти экстремум функции многих переменных $f(x_1, x_2, x_3, ..)$ необходимо найти частные производные функции по всем аргументам и приравнять их нулю.

Совокупность всех частных производных называется градиентом

$$\frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, x_2, x_3, ..) = 0, \ \frac{\partial}{\partial x_2} f(x_1, x_2, x_3, ..) = 0, \ \frac{\partial}{\partial x_3} f(x_1, x_2, x_3, ..) = 0, ...$$

$$\to \nabla f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} f, \frac{\partial}{\partial x_2} f, \frac{\partial}{\partial x_3} f ... \right)$$

Решая полученную систему уравнений, получаем стационарные точки.

Что бы определить характер стационарной точки нужно использовать вторые производные. Матрица, образованная из вторых производных называется ***матрицей Гессе*** или ***Гессиан***

$$H(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} f(x_1, x_2, x_3) & \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_2} f(x_1, x_2, x_3) & \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_3} f(x_1, x_2, x_3) \\ \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_2} f(x_1, x_2, x_3) & \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} f(x_1, x_2, x_3) & \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial x_3} f(x_1, x_2, x_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_3} f(x_1, x_2, x_3) & \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial x_3} f(x_1, x_2, x_3) & \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} f(x_1, x_2, x_3) \end{pmatrix}$$

Вычисляется Гессиан в стационарной точке $(x_1 = xo_1, x_2 = xo_2, x_3 = xo_3)$, и получаем матрицу с постоянными элементами

$$H(xo_1, xo_2, xo_3) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Дальше используется ***критерий Сильвестра***, который формулируется следующим образом

Если угловые миноры (главные) матрицы Гессе больше нуля, то стационарная точка является ***точкой минимума*** функции. (Матрица Гессе - положительно определенная)

$$H(xo_1, xo_2, xo_3) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \; a_{11} > 0, \; \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \; \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = |\mathbf{A}| > 0$$

Здесь **A**, матрица Гессе

Если угловые миноры (главные) матрицы Гессе чередуются по знаку (начиная с отрицательного значения), то стационарная точка является ***точкой максимума*** функции. (Матрица Гессе - отрицательно определенная)

$$H(xo_1, xo_2, xo_3) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \; a_{11} < 0, \; \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \; \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = |\mathbf{A}| < 0$$

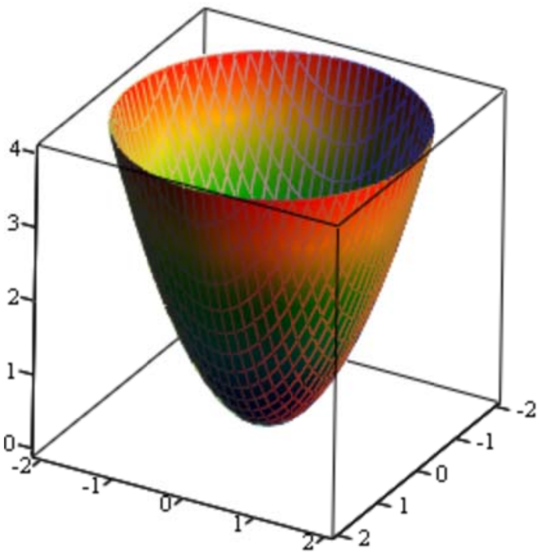
Примеры

$$f(x,y) := \left(x^2 + y^2\right) \qquad \frac{d}{dx}f(x,y) \rightarrow 2\cdot x \qquad \frac{d}{dy}f(x,y) \rightarrow 2\cdot y$$

$$(xo \;\; yo) := \begin{pmatrix} -2\cdot x\cdot e^{-x^2-y^2} \\ -2\cdot y\cdot e^{-x^2-y^2} \end{pmatrix} \text{ solve}, x, y \rightarrow (0 \;\; 0)$$ ***Стационарная точка***

$$\frac{d^2}{dx^2}f(x,y) \text{ simplify} \rightarrow 2 \qquad \frac{d^2}{dy^2}f(x,y) \text{ simplify} \rightarrow 2$$

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{d}{dx}f(x,y)\right) \text{ simplify} \rightarrow 0$$

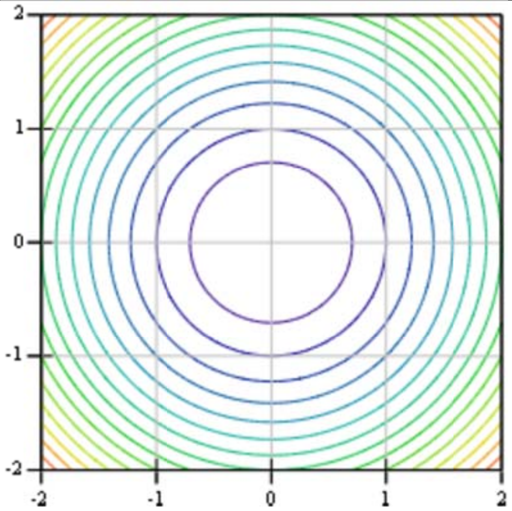


Гессиан

$$H(x,y) := \begin{bmatrix} \frac{d^2}{dx^2}f(x,y) & \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dy}f(x,y)\right) \\ \frac{d}{dy}\left(\frac{d}{dx}f(x,y)\right) & \frac{d^2}{dx^2}f(x,y) \end{bmatrix}$$

$$H(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad |H(0,0)| = 4$$

Линии уровня (изолинии)



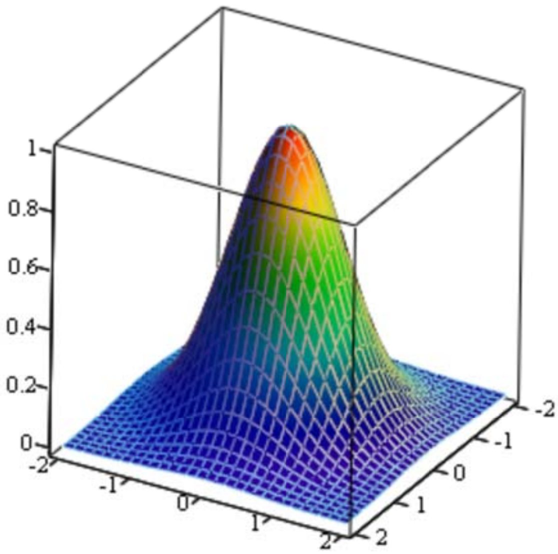
Пример функции двух переменных с максимумом

$f(x,y) := e^{-\left(x^2+y^2\right)}$ $\qquad \frac{d}{dx}f(x,y) \rightarrow -2\cdot x\cdot e^{-x^2-y^2}$ $\qquad \frac{d}{dy}f(x,y) \rightarrow -2\cdot y\cdot e^{-x^2-y^2}$

$(xo\ \ yo) := \begin{pmatrix} -2\cdot x\cdot e^{-x^2-y^2} \\ -2\cdot y\cdot e^{-x^2-y^2} \end{pmatrix} \text{solve}, x, y \rightarrow (0\ \ 0)$ ***Стационарная точка***

$\frac{d^2}{dx^2}f(x,y) \text{ simplify } \rightarrow 2\cdot e^{-x^2-y^2}\cdot\left(2\cdot x^2 - 1\right)$ $\qquad \frac{d^2}{dy^2}f(x,y) \text{ simplify } \rightarrow 2\cdot e^{-x^2-y^2}\cdot\left(2\cdot y^2 - 1\right)$

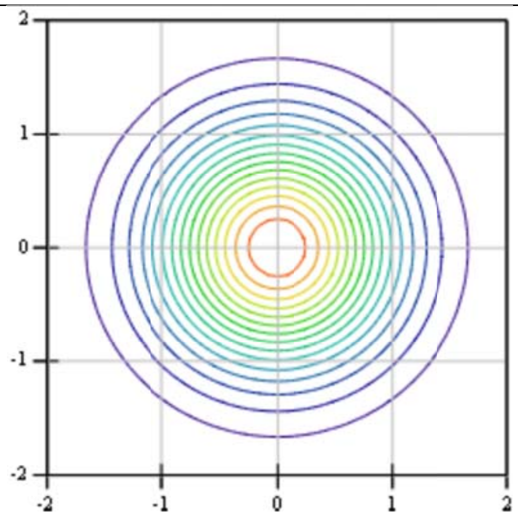
$\frac{d}{dy}\left(\frac{d}{dx}f(x,y)\right) \text{ simplify } \rightarrow 4\cdot x\cdot y\cdot e^{-x^2-y^2}$



Гессиан

$$H(x,y) := \begin{bmatrix} \frac{d^2}{dx^2}f(x,y) & \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dy}f(x,y)\right) \\ \frac{d}{dy}\left(\frac{d}{dx}f(x,y)\right) & \frac{d^2}{dx^2}f(x,y) \end{bmatrix}$$

$H(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ $\qquad |H(0,0)| = 4$



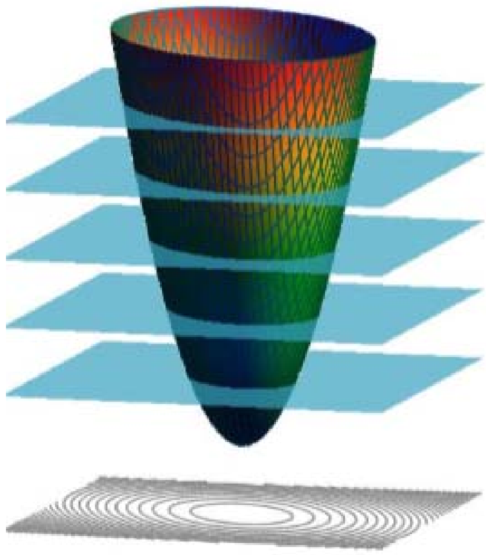
Линии уровня (изолини)

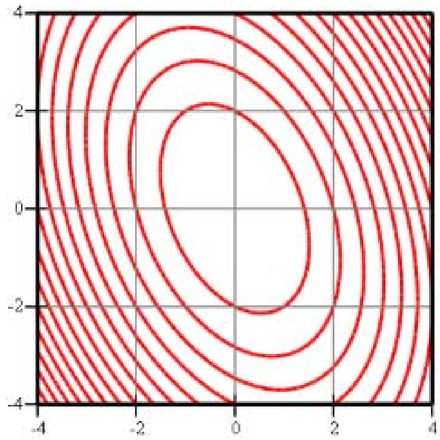
Последовательность действий при исследовании функции.

1. Находим частные производные функции по координатам (градиент) и приравниваем их нулю. Решаем алгебраические уравнения и извлекаем (находим) стационарные точки
2. Формируем Гессиан из вторых производных и подставляем в него стационарные точки - (координаты стационарных точек).
3. Используем критерий Сильвестра и определяем характер точки.

Несколько слов ***о градиенте*** и как его представляют на графике
Градиент это вектор, компонентами которого являются частные производные от функции по координатам

$$\nabla f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} f, \frac{\partial}{\partial x_2} f, \frac{\partial}{\partial x_3} f \ldots \right) = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x_1} f + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial x_2} f + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial x_3} f$$





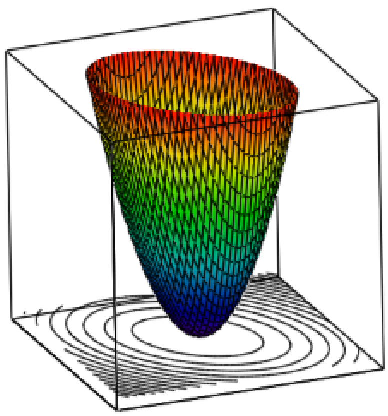
Градиент показывает наибольшее изменение функции. На графике видно, что наибольший градиент там, где гуще контурные линии (линии уровня). Направление противоположное градиенту иногда называют антиградиент.

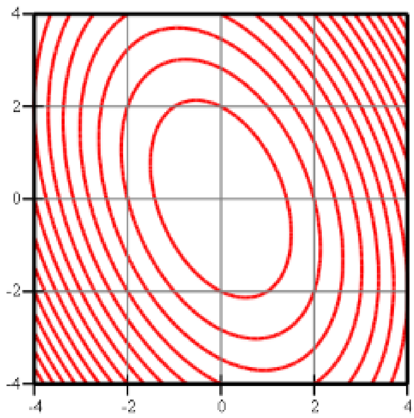
Рассмотрим задачу по определению градиента.

Задана целевая функция $f(x,y) = 2x^2 + y^2 + xy$. В точке с координатами $xo = 1,\ yo = 1$ заданы три вектора с компонентами: $\mathbf{d}_1 = 4\mathbf{i}, \mathbf{d}_2 = 3\mathbf{i} - 3\mathbf{j}\ \mathbf{d}_3 = -4\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$. Какие из направлений обеспечивают убывание функции из точки $xo = 1,\ yo = 1$?

$f(x,y) := 2 \cdot x^2 + y^2 + x \cdot y$ $\qquad$ $\mathrm{gradf}(x,y) := \left(\frac{d}{dx}f(x,y)\ \ \frac{d}{dy}f(x,y)\right)^T$

$\mathrm{gradf}(x,y) \rightarrow \begin{pmatrix} 4 \cdot x + y \\ x + 2 \cdot y \end{pmatrix}$



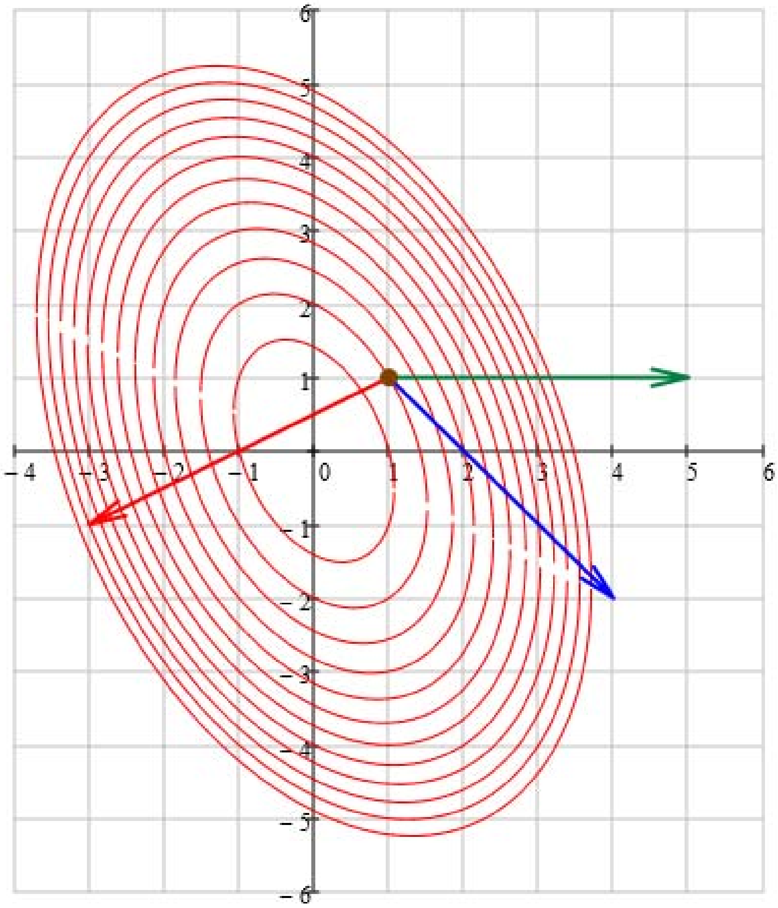


Находим градиент и скалярное произведение градиента и векторами $\mathbf{d}_1 = 4\mathbf{i}, \mathbf{d}_2 = 3\mathbf{i} - 3\mathbf{j}\ \mathbf{d}_3 = -4\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ в точки $xo = 1,\ yo = 1$

$$\left(\nabla f,\mathbf{d}_1\right)=\frac{\partial f}{\partial x}(xo,yo)\,\mathrm{d}_{1x}+\frac{\partial f}{\partial y}(xo,yo)\,\mathrm{d}_{1y}=\left(4\cdot1+1\right)\cdot4+\left(1+2\cdot1\right)\cdot0=20$$

$$\left(\nabla f,\mathbf{d}_2\right)=\frac{\partial f}{\partial x}(xo,yo)\,\mathrm{d}_{2x}+\frac{\partial f}{\partial y}(xo,yo)\,\mathrm{d}_{2y}=\left(4\cdot1+1\right)\cdot3+\left(1+2\cdot1\right)\cdot\left(-3\right)=15-9=6$$

$$\left(\nabla f,\mathbf{d}_3\right)=\frac{\partial f}{\partial x}(xo,yo)\,\mathrm{d}_{3x}+\frac{\partial f}{\partial y}(xo,yo)\,\mathrm{d}_{3y}=\left(4\cdot1+1\right)\cdot\left(-4\right)+\left(1+2\cdot1\right)\cdot\left(-2\right)=-20-6=-26$$



$d1 := (4\ \ 0)^T$

$d2 := (3\ \ -3)^T$

$d3 := (-4\ \ -2)^T$

$gradf(1,1)\cdot d1 = 20$

$gradf(1,1)\cdot d2 = 6$

$gradf(1,1)\cdot d3 = -26$

Вектор $\mathbf{d}_3=-4\mathbf{i}-2\mathbf{j}$ обеспечивает убывание функции

Матричная запись квадратичных функций (квадратичные формы). Пусть задана функция $f(x,y)=-x^2-y^2+xy+x+y$. Запишем функцию в матричном виде. Перепишем функцию в виде

$f(x,y)=a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{12}xy+a_{21}xy+b_1x+b_2y,\;\; X=\left(x,y\right)$

Сформируем матрицу коэффициентов

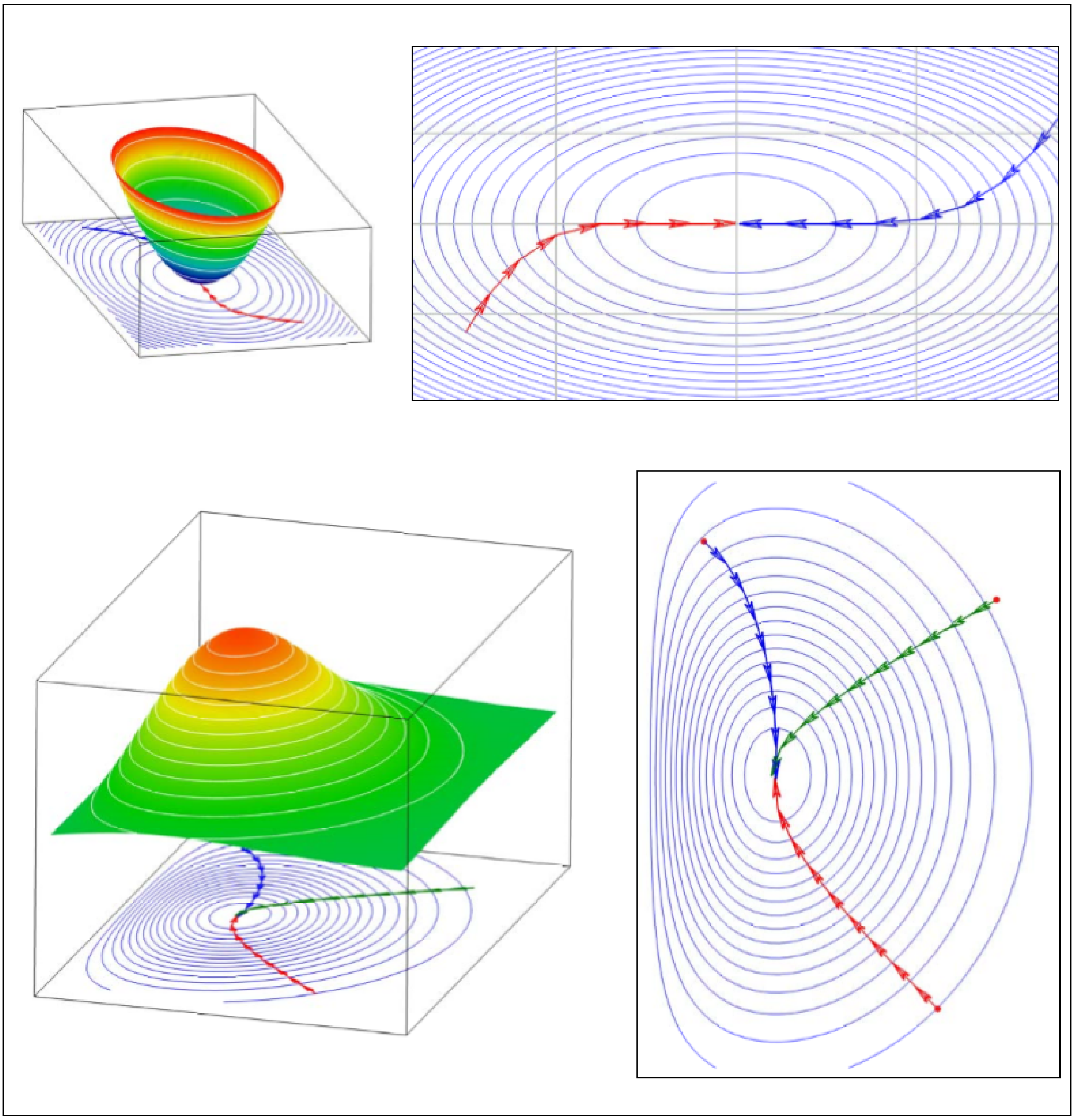
$$\frac{1}{2}A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix},\;\; B=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix},\;\; X=\left(x,y\right)$$

$$f(x,y)=X^T\frac{1}{2}AX+B^TX=\left(x\ y\right)^T\frac{1}{2}A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}+B^T\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

Если внимательно посмотреть на матричную запись функции то можно заметить что Гессиан равен выражению

$$H = \frac{1}{2} A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Несколько примеров градиента функции



Прямой метод Ляпунова (второй метод устойчивости)

Метод основан на использовании скалярных функций, обладающих на решениях динамической системы некоторыми специальными свойствами и получивших название функций Ляпунова. Функции Ляпунова позволяют оценить устойчивость и качество системы, а также синтезировать алгоритмы управления, обеспечивающие заданные качественные показатели процессов.

Для системы, описанной системой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f_1(x,y) \\ \dfrac{dy}{dt} = f_2(x,y) \end{cases} \qquad (11)$$

где функции f_1, f_2 произвольны и содержат любого вида нелинейности, но всегда удовлетворяют условию $f_1 = f_2 = 0$, при $x = y = 0$, так как в установившемся состоянии все отклонения переменных и их производные равны нулю, можно ввести некоторую функцию всех фазовых координат системы (11) $V(x,y)$ где x, y представляют собой отклонения переменных от некоторых установившихся значений. Функцию можно представить в 2-мерном фазовом пространстве. Тогда в каждой точке фазового пространства V будет принимать определенное значение, а в начале координат будет равна нулю.

Функцию V будем называть ***знакоопределенной*** *в некоторой области, если в любых точках внутри ее функция V – имеет определенный знак и в ноль обращается только в начале координат.* Рассмотрим пример знакоопределенной положительной функции для системы второго порядка $n = 2$

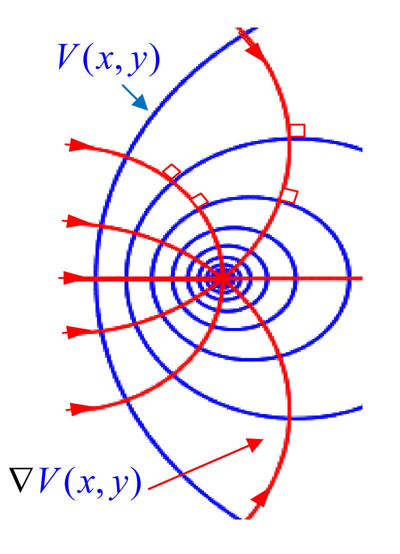
$$V(x,y) = x^2 + y^2 \qquad (12)$$

очевидно, что $V > 0$, и $V = 0$, только при $x = y = 0$.

Функция V называется ***знакопостоянной****, если она сохраняет один и тот же знак, но может обращаться в нуль не только в начале координат, но и в других точках данной области.*

Функция V называется ***знакопеременной***, *если она в данной области вокруг начала координат может иметь разные знаки.*

Произвольная функция $V = V(x, y)$, которая обращается в ноль только при $x = y = 0$, и где x, y – отклонения, в которых записано уравнение движения системы, называется ***функцией Ляпунова***. Определим производную функции V по времени. Для этого необходимо вспомнить, что такое оператор градиента ∇:



Функция и её градиент

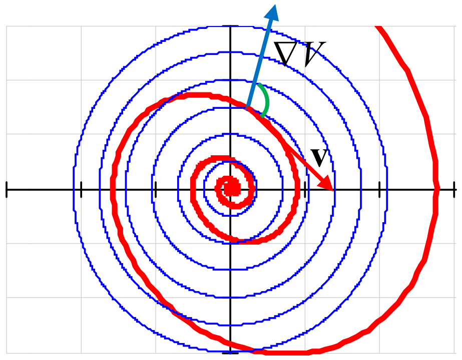
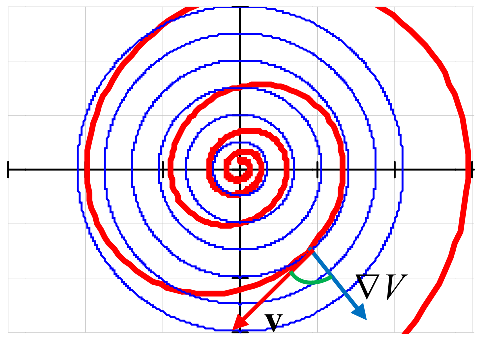
$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial x} \rightarrow \nabla V(x,y) = \mathbf{grad}\, V(x,y)$$

– направления наибольшего (быстрого) изменения функции. Теперь можно записать производную функции $V(x,y)$ по времени, предполагая зависимость x, y от t :

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x}\overset{v_x}{\overset{\downarrow}{\frac{dx}{dt}}} + \frac{\partial V}{\partial y}\overset{v_y}{\overset{\downarrow}{\frac{dy}{dt}}} = \cancel{\frac{\partial V}{\partial t}} + \frac{\partial V}{\partial x}\overset{v_x}{\overset{\downarrow}{f_1(x,y)}} + \frac{\partial V}{\partial y}\overset{v_y}{\overset{\downarrow}{f_2(x,y)}}$$

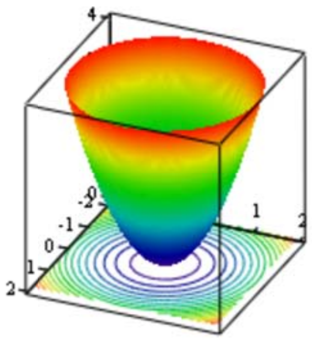
$$\frac{dV}{dt} = (\nabla V, \mathbf{v}),\ \mathbf{v} = (f_1, f_2) \rightarrow |\nabla V||\mathbf{v}|\cos(\phi)$$

Производная будет отрицательной, если косинус угла отрицательный, следовательно, угол между векторами тупой. Производная будет положительной, если косинус угла положительный, следовательно, угол между векторами острый.

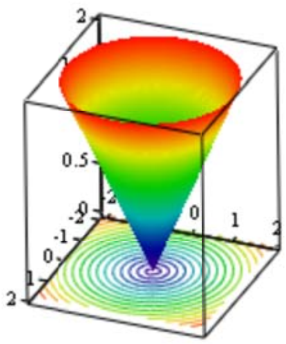
 Косинус угла отрицательный – система устойчивая	 Косинус угла положительный – система неустойчивая

Второй критерий Ляпунова об устойчивости нелинейных систем: *если при заданных в форме (11) уравнениях системы можно подобрать такую знакоопределенную функцию Ляпунова V(x, y), чтобы ее производная по времени* dV/dt *тоже была* ***знакоопределенной*** *(или* ***знакопостоянной****), но имела знак, противоположный знаку V, то данная система устойчива.*

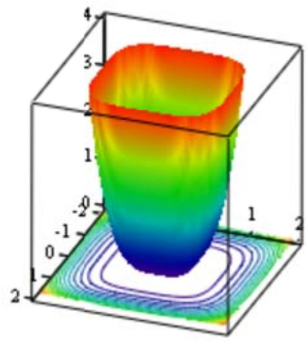
$V(x,y) = x^2 + y^2$



$V(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$



$V(x,y) = x^4 + y^4$

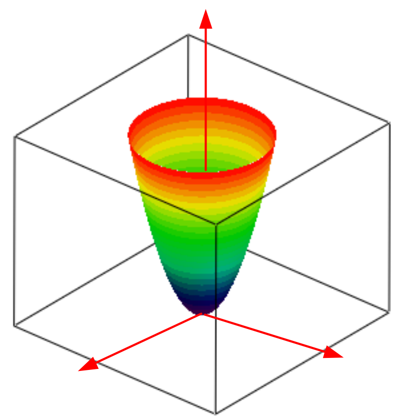


Варианты ***знакоопределенной функции Ляпунова***

При выборе функции Ляпунова руководствуются простотой, поэтому отдают предпочтение функции вида $V(x,y) = x^2 + y^2$

Пример: Пусть нелинейная система описывается уравнениями

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - x^3 \\ \dfrac{dy}{dt} = -y^3 \end{cases}$$



Знакоопределенная функция Ляпунова $V(x, y) = x^2 + y^2$

Подберем ***знакоопределенную*** функцию Ляпунова вида:

$$V(x, y) = x^2 + y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = X^T Q X$$

Находим производную по времени функции Ляпунова

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x}\overset{\overset{v_x}{\downarrow}}{\frac{dx}{dt}} + \frac{\partial V}{\partial y}\overset{\overset{v_y}{\downarrow}}{\frac{dy}{dt}} = \frac{\partial V}{\partial x}\overset{\overset{v_x}{\downarrow}}{f_1(x, y)} + \frac{\partial V}{\partial y}\overset{\overset{v_y}{\downarrow}}{f_2(x, y)}$$

$$\frac{dV}{dt} = 2x\left(-x - x^3\right) + 2y\left(-y^3\right) = -2\left(x^2 + x^4 + y^4\right)$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} f_1(x, y) + \frac{\partial V}{\partial y} f_2(x, y)$$

$$\frac{dV}{dt} = 2x\left(-x - x^3\right) + 2y\left(-y^3\right) = -2\left(x^2 + x^4 + y^4\right) < 0$$

Функции dV/dt является функцией ***знакопостоянной***, но противоположна по знаку функции $V(x, y)$, следовательно, система устойчивая. Нужно помнить, что отрицательность означает тупой угол между градиентом и вектором скорости фазовой траектории.

Критерий Ляпунова часто используется для оптимизации линейных и нелинейных систем

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f_1(x, y) = y \\ \dfrac{dy}{dt} = f_2(x, y) = -2x - 0{,}2y \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dx}{dt} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad (**)$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -0{,}3 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{dX}{dt} = AX \qquad (*)$$

Введем функцию Ляпунова в виде

$$V(x, y) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = X^T P X \qquad (1)$$

Полезно помнить, что $(AX)^T = X^T A^T$

Продифференцируем уравнение (1) по времени, с учетом (*) получим:

$$\frac{dV}{dt}=\frac{dX^T}{dt}PX+X^TP\frac{dX}{dt}=\frac{dX^T}{dt}PX+X^TP\frac{dX}{dt}=\left(AX\right)^TPX+X^TP\left(AX\right)=$$
$$=X^T\left(A^TP\right)X+X^T\left(PA\right)X=X^T\left(A^TP+PA\right)X$$

$$\frac{dV}{dt}=\frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{dt}=\frac{\partial V}{\partial x}f_1(x,y)+\frac{\partial V}{\partial y}f_2(x,y)=\left(x\ \ y\right)\left(A^TP+PA\right)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}<0$$

Если выражение в скобочках обозначить через *C*, то производная будет меньше нуля, если матрицу *C* выбрать соответствующим образом.

$$\frac{dV}{dt}=\left(x,y\right)\left(A^TP+PA\right)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\left(x\ \ y\right)C\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=-x^2-y^2<0,\quad C=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

По критерию Сильвестра для того чтобы функция $V(x,y)$ (1) была ***знакоположительной*** (имела минимум) необходимо что бы главные миноры P были положительными.

На практике поступают наоборот. Берут $C=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ и решают матричное уравнение в виде

$$\left(A^TP+PA\right)=C,\quad \begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}0&1\\-2&-0{,}3\end{pmatrix}\ \rightarrow\ P=\begin{pmatrix}7{,}55&0{,}25\\0{,}25&3{,}75\end{pmatrix}$$

И если матрица P удовлетворяет критерию Сильвестра (***см. лекция 1***), Поверхность Ляпунова с минимумом, и значит система устойчивая.

Приведем пример анализа линейной системы

$a := (1\ \ 0.2\ \ 2)^T$

$$A := \begin{pmatrix}0 & 1\\ \dfrac{-a_2}{a_0} & \dfrac{-a_1}{a_0}\end{pmatrix}\qquad a_0\cdot\frac{d^2}{dt^2}x(t)+a_1\cdot\frac{d}{dx}x(t)+a_2\cdot x=1$$

$$\frac{d}{dt}x(t)=y$$
$$\frac{d}{dt}y(t)=-y\cdot\frac{a_1}{a_0}-x\cdot\frac{a_2}{a_0}$$

$$a_0\cdot\frac{d}{dt}y+a_1\cdot y+a_2\cdot x=1$$
$$\frac{d}{dt}x(t)=y$$

$$A=\begin{pmatrix}0&1\\-2&-0.2\end{pmatrix}\qquad C := -\mathrm{identity}(2)=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dt}V=X^T\cdot\left(A^T\cdot P+P\cdot A\right)\cdot X$$

Стартовые значения для матрицы P $P := \mathrm{identity}(2)$

Given

$A^T\cdot P+P\cdot A=C$

$P := \mathrm{Find}(P)$

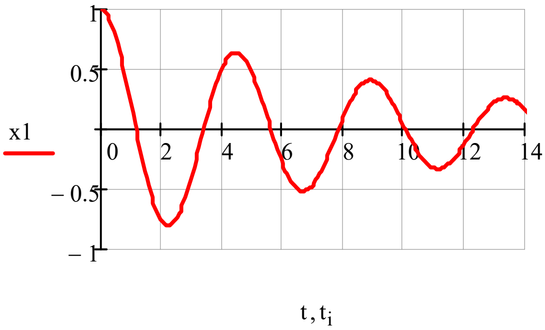
Критерий Сильвестра: Если матрица положительна определённая (у функции имеющий минимум) то её главные миноры должны быть положительными

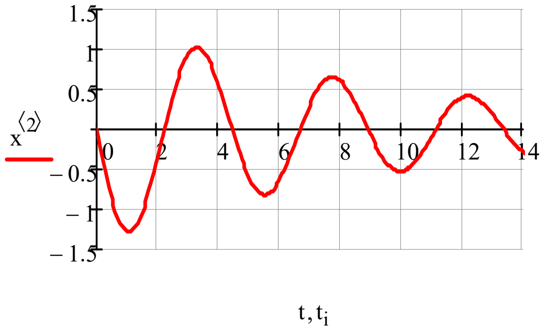
$P = \begin{pmatrix} 7.55 & 0.25 \\ 0.25 & 3.75 \end{pmatrix} \quad P_{0,0} = 7.55 \quad |P| = 28.25$

$N := 10^3 \quad T := 14 \quad D(t,x) := A\cdot x$

$x := \mathrm{rkfixed}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, 0, T\cdot 4, N, D\right]$

$t := x^{\langle 0 \rangle} \quad i := 0..N \quad x2 := x^{\langle 2 \rangle}$





$P := \begin{pmatrix} 7.55 & 0.25 \\ 0.25 & 3.75 \end{pmatrix} \quad V(x,y) := (x \;\; y)P\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$V(x,y)\ \mathrm{simplify} \rightarrow 7.55\cdot x^2 + 0.5\cdot x\cdot y + 3.75\cdot y^2$

Вычисляем компоненты градиента функции Ляпунова $V(x,y)$

$dV_x(x,y) := \frac{\partial}{\partial x}V(x,y) \rightarrow 15.1\cdot x + 0.5\cdot y \quad dV_y(x,y) := \frac{\partial}{\partial y}V(x,y) \rightarrow 7.5\cdot y + 0.5\cdot x$

Компоненты скорости (они записаны в уравнении)

$v_x(x,y) := y$

$v_y(x,y) := -y\cdot a_1 - x\cdot a_2$

Записываем два варианта записи производной по времени функции Ляпунова.

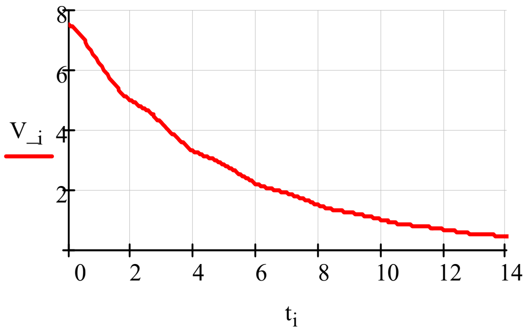
1)

$$dV_i := dV_x(x1_i, x2_i)\cdot v_x(x1_i, x2_i) + dV_y(x1_i, x2_i)\cdot v_y(x1_i, x2_i)$$

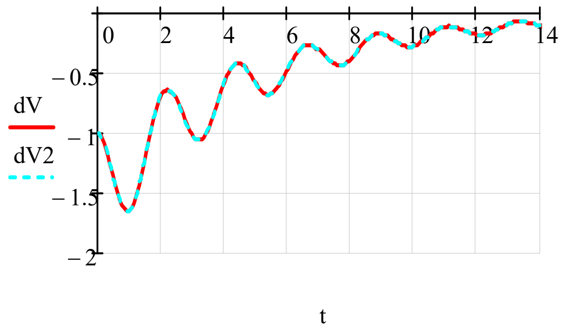
2)

$$C := A^T\cdot P + P\cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad dV2_i := \begin{pmatrix} x1_i & x2_i \end{pmatrix}\cdot C\cdot \begin{pmatrix} x1_i \\ x2_i \end{pmatrix}$$

$V\_i := V(x1_i, x2_i)$ - зависимость функции Ляпунова по времени



На первом графике видно, что функция Ляпунова от времени является функцией убывающей



На втором графике видно, что производная функции Ляпунова отрицательна на всем диапазоне.

Вспомогательная программа построения вектора

$$Vec(s,z) := \begin{bmatrix} 0 \\ z \\ z + s\cdot e^{i\cdot(\arg(z)+170\cdot deg)} \\ z - 0.5\cdot s\cdot e^{i\cdot \arg(z)} \\ z + s\cdot e^{i\cdot(\arg(z)-170\cdot deg)} \\ z \\ 0 \end{bmatrix}$$

Программа построения градиента

$$V3(xo, yo, x, y, s) := \left| \begin{array}{l} z_v \leftarrow Vec(s, x + i\cdot y) \\ z_6 \leftarrow 0 \\ v \leftarrow \begin{pmatrix} Re(z_v) & Im(z_v) & z \end{pmatrix}^T + (xo \;\; yo \;\; 0)^T \end{array} \right.$$

$V3(xo, yo, x, y, s)$ - в программе
1) xo, yo – координаты токи в которой ищется градиент.
2) x, y – это величины компонентов градиента
3) s- длина стрелки вектора

Выбираем произвольную точку в пространстве для построения градиента

Точка, в которой вычисляется градиент $xo := -0.78 \quad yo := 0.3$

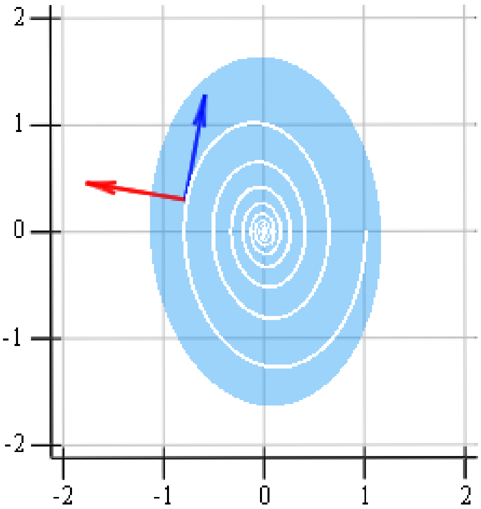
$s := 0.3$ - длина стрелки вектора

$gr := dV_x(xo, yo) + i\cdot dV_y(xo, yo)$ - градиент

$$gr1 := V3\left(xo, yo, \frac{dV_x(xo,yo)}{|gr|}, \frac{dV_y(xo,yo)}{|gr|}, s\right)$$ построение вектора градиента

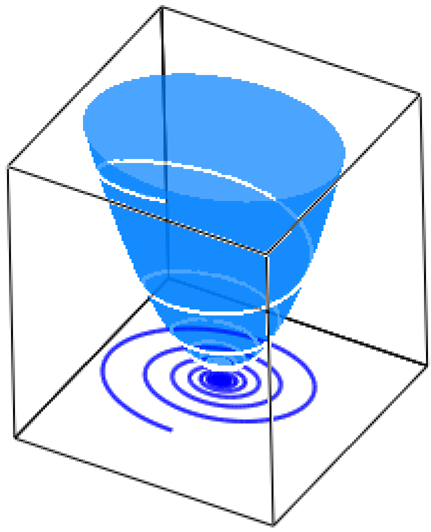
$v := v_x(xo, yo) + j\, v_y(xo, yo)$

$$v1 := V3\left(xo, yo, \frac{v_x(xo, yo)}{|v|}, \frac{v_y(xo, yo)}{|v|}, s\right)$$



V, (x1, x2, V1), gr1, v1

$V1_i := V\left(x1_i, x2_i\right) \qquad V0_i := -0.5$



V, (x1, x2, V1), (x1, x2, V0)