Лекция 1.

1. Преобразование Лапласа (операционное исчисление)

1.1. Зачем инженеру преобразование Лапласа?

Метод преобразование Лапласа широко используется в технических расчетах, он полезен при исследовании поведения динамических систем. Основное его преимущество заключается в том, что метод позволяет свести дифференциальные уравнения в алгебраические уравнения, которые проще решаются, чем дифференциальные. Метод преобразования Лапласа позволяет определять частотные характеристики механической системы. Частотные характеристики важны потом, что они показывают реакцию системы на внешние частотные воздействия. При этом систему можно рассматривать частотный фильтр, реагирующий на те, или иные частоты внешнего сигнала. Входящий в систему сигнал, имеет некоторое частотное наполнение. При прохождении сигнала через системы относительный вклад некоторых частот беде увеличивать через систему дет терять одни частоты.

1.2. Преобразование Лапласа

В наших лекциях мы не будем придерживаться строгих математических рассуждений (тонкостей), и скорее будем отдавать предпочтение физическим или техническим формулировкам.

Формула прямого преобразования Лапласа для некоторой функции времени $x(t)$ имеет следующий вид

$$X(p)=\int_0^{\infty} e^{-pt}\cdot x(t)\cdot dt = L\left[x(t)\right],$$
$$x(t)=L^{-1}\left[X(p)\right] = \frac{1}{2\pi j}\int_{\gamma-j\infty}^{\gamma+j\infty} e^{pt}\cdot X(p)\cdot dp \tag{1}$$

Здесь $x(t)$- оригинал функции, функция во временной области (во временном пространстве), $X(p)$- изображение функции, L – оператор Лапласа (p – комплексное число). Конечно, обратный оператор Лапласа L^{-1} можно строго определить с точки зрения теории вычетов. Но на практике обратный оператор L^{-1} определяется по-разному, в зависимости от изображения. В большинстве практических приложениях это теорема разложения, о которой мы будем говорить ниже.

Рассмотрим действие оператора Лапласа на константу

$$x(t) = A, \quad X(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} A dt = \frac{Ae^{-pt}}{p}\Big|_0^{\infty} = \frac{A}{p}. \tag{2}$$

Оригинал $x(t)$	Изображение $X(p)$
A	$\frac{A}{p}$ (2)

Следующей часто используемой функцией является экспонента $x(t) = Ae^{at}$, считая, что A, a константы, причем как положительные, так и отрицательные

$$x(t) = Ae^{at}, \quad X(p) = A\int_0^{\infty} e^{-pt} e^{at} dt = A\int_0^{\infty} e^{-(p-a)t} dt = \frac{Ae^{-(p-a)t}}{p-a}\Big|_0^{\infty} = \frac{A}{p-a}. \tag{3}$$

Запишем таблицу соответствия для положительной и отрицательной величин a.

Оригинал $x(t)$	Изображение $X(p)$
Ae^{at}	$\frac{A}{p-a}$ (3)
Ae^{-at}	$\frac{A}{p+a}$

Следующие часто применяемые функции это тригонометрические функции синус и косинус, хорошо описывающие колебания систем. Вспомним, что функции синус и косинус могут быть представлены через экспоненту. Используя формулу Эйлера, получим связь между тригонометрическими функциями и комплексной экспонентой:

$$e^{-j\omega t} = \cos(\omega t) + j\sin(\omega t) \ (a), \quad e^{j\omega t} = \cos(\omega t) - j\sin(\omega t) \ (b). \tag{4}$$

Если просуммировать формулы (a) и (b) то можно получить

$$\cos(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}, \quad \sin(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \tag{5}$$

Найдем изображения для функции $\cos(\omega t)$

$$x(t) = \cos(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} \quad X(p) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{p - j\omega} + \frac{1}{p + j\omega}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{p + j\omega + p - j\omega}{p^2 + \omega^2}\right) = \frac{p}{p^2 + \omega^2} \tag{6}$$

Аналогично проделываем операцию с синусом

$$x(t)=\sin(\omega t)=\frac{e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}}{2j} \qquad X(p)=\frac{1}{2j}\cdot\left(\frac{1}{p-j\omega}-\frac{1}{p+j\omega}\right)=$$
$$=\frac{1}{2j}\cdot\left(\frac{p+j\omega-p+j\omega}{p^2+\omega^2}\right)=\frac{\omega}{p^2+\omega^2} \tag{7}$$

Оригинал $x(t)$	Изображение $X(p)$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$ (6)
$\cos(\omega t)$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$ (7)

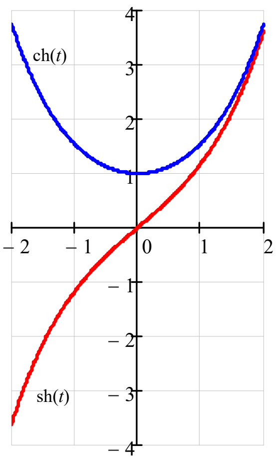


Рис. 1 Синус и косинус гиперболические.

Определим изображения для гиперболических функций синуса и косинуса. Эти функции имеют вид:

$$\mathrm{ch}(\omega t)=\frac{e^{\omega t}+e^{-\omega t}}{2}, \quad \mathrm{sh}(\omega t)=\frac{e^{\omega t}-e^{-\omega t}}{2}. \tag{8}$$

Можно проделать те же операции как мы делали для тригонометрических функций. Но можно поступить проще. Заметим, что тригонометрические функции связаны с гиперболическими следующими соотношениями.

$$\cos(j\omega t)=\frac{e^{j(j\omega t)}+e^{-j(j\omega t)}}{2}=\frac{e^{-\omega t}+e^{\omega t}}{2}=\mathrm{ch}(\omega)$$
$$\sin(j\omega t)=\frac{e^{j(j\omega t)}-e^{-j(j\omega t)}}{2j}=\frac{e^{-\omega t}-e^{\omega t}}{2j}= \tag{9}$$
$$=j\frac{e^{\omega t}-e^{-\omega t}}{2}=j\,\mathrm{sh}(\omega t) \rightarrow -j\sin(j\omega t)=\mathrm{sh}(\omega t)$$

Следовательно, можно получит изображения для гиперболических функций в виде

$$x(t)=\mathrm{sh}(\omega t) \rightarrow X(p)=\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$$
$$x(t)=\mathrm{ch}(\omega t) \rightarrow X(p)=\frac{p}{p^2-\omega^2} \tag{10}$$

Оригинал $x(t)$	Изображение $X(p)$
$\mathrm{sh}(\omega t)$	$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$ (9)

$\mathrm{ch}(\omega t)$	$\dfrac{p}{p^2-\omega^2}$ (10)

Рассмотрим, как определяется изображение производной $\dot{x}(t)=\dfrac{dx(t)}{dt}$. Для этого нужно вспомнить интегрирование по частям.

$$\frac{dx(t)}{dt}\ \to\ \int_0^\infty e^{-pt}\frac{dx(t)}{dt}dt=\left(dx=\frac{dx(t)}{dt}dt\right)=x(t)e^{-pt}\Big|_0^\infty+p\int_0^\infty x(t)e^{-pt}dt= \\ =-x(0)+pX(p)=pX(p)-x(0) \qquad (11)$$

Нам еще понадобится изображение интеграла функции

$$\int_0^t x(t)dt\ \to\ \int_0^\infty e^{-pt}\left(\int_0^t x(t')dt'\right)dt\ =\ \frac{\left(\int_0^t x(t')dt'\right)}{p}e^{-pt}\Big|_0^\infty+\frac{1}{p}\int_0^\infty x(t)e^{-pt}dt=\frac{X(p)}{p} \qquad (12)$$

Оригинал $x(t)$	Изображение $X(p)$
$x(t)$	$X(p)-p\cdot x(0)$ (11)
$\int_0^t x(t)dt$	$\dfrac{X(p)}{p}$ (12)

Рассмотрим изображения затухающих сигналов типа $x(t)e^{\alpha t}$

$$x(t)e^{\alpha t}\ \to\ \int_0^\infty e^{-pt}x(t)e^{\alpha t}dt=\int_0^\infty x(t)e^{-(p-\alpha)t}dt=X(p-\alpha) \\ x(t)e^{-\alpha t}\ \to\ X(p+\alpha) \qquad (13)$$

Рассмотрим изображение запаздывающего сигнала. Такого типа преобразования полезно для рассмотрения импульсных сигналов. $x(t-\tau)$

$$x(t-\tau)\to\int_0^\infty x(t-\tau)e^{-pt}dt=\left(e^{\tau p}e^{-p\tau}\right)=e^{-p\tau}\int_0^\infty x(t-\tau)e^{-pt}e^{\tau p}dt= \\ =e^{-p\tau}\int_0^\infty x(t-\tau)e^{-(p-\tau)t}dt=e^{-p\tau}\int_0^\infty x(t)e^{-pt}dt=e^{-p\tau}X(p) \qquad (14)$$

Сведем в таблицу полученные соотношения.

Оригинал $x(t)$	Изображение $X(p)$
$x(t)e^{\alpha t}$ $x(t)e^{-\alpha t}$	$X(p-\alpha)$ (13) $X(p+\alpha)$
$x(t-\tau)$ $x(t+\tau)$	$e^{-p\tau}X(p)$ (14) $e^{p\tau}X(p)$

Приведём без доказательства теорему о свертке двух функций.

$$x(t)=\int_0^t x_1(\tau)x_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = x_1 * x_2 \;\to\; X(p)=X_1(p)\cdot X_2(p).$$

Полученных свойств нам достаточно для дальнейшей работы. В дальнейшем добавочные свойства преобразования Лапласа мы будем получать по мере необходимости.

2. Применение преобразования Лапласа.

2.1. Теорема разложения

Пример 1. (действительные корни) Рассмотрим дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами.

$$\ddot{x}+4\dot{x}+3x=1$$

С начальными условиями $x(0)=\dot{x}(0)=0$.

Применим метод преобразования Лапласа

Формально можно поступить так, заменить все производные на операторы

$$\frac{d}{dt}\to p,\;\; p^2\to\frac{d^2}{dt^2},\;\; x(\mathrm{t})\to X(p)$$

$$p^2X(p)+4pX(p)+3X(p)=\frac{1}{p}$$

Из последнего выражения получаем изображение $X(p)$

$$X(p)\left(p^2+4p+3\right)=\frac{1}{p}\;\to\; X(p)=\frac{1}{p\left(p^2+4p+3\right)}$$

Сомножитель при $X(p)$ называется характеристическим полиномом. Порядок определения оригинала изображения таков:

1) Определяем корни характеристического полинома.

$$\left(p^2+4p+3\right)=(p+3)\left(p+1\right),\ \ p_1=-1,\ \ p_2=-3$$ (По теореме Виета)

2) Теперь изображение можно представить в виде произведения простейших сомножителей

$$X(p)=\frac{1}{p\left(p^2+4p+3\right)}=\frac{1}{p\left(p+3\right)\left(p+1\right)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(p+3\right)-\left(p+1\right)}{p\left(p+3\right)\left(p+1\right)}=$$

$$=\frac{1}{2p}\left(\frac{1}{p+1}-\frac{1}{p+3}\right)=$$

3) Проделываем туже процедуру еще раз

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p\left(p+1\right)}-\frac{1}{p\left(p+3\right)}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{p+1-p}{p\left(p+1\right)}-\frac{p+3-p}{3p\left(p+3\right)}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\left(p+1\right)}-\frac{1}{3p}+\frac{1}{3\left(p+3\right)}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3p}-\frac{1}{\left(p+1\right)}+\frac{1}{3\left(p+3\right)}\right)$$

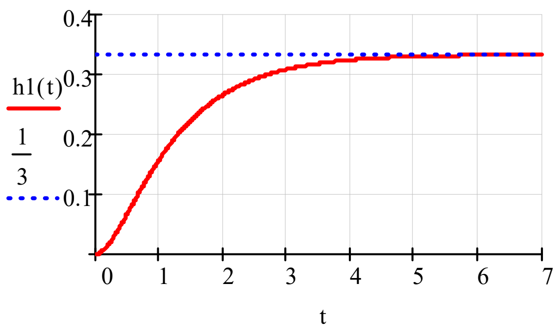
4) По таблице соответствия находим оригинал

$$x(t)=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{1}{6}e^{-3t}.$$

Приведения к простейшим дробям производится разными способами.

Рекомендуется рисовать графики

$\tau := 1$ $\quad\quad$ $t := 0, .01 .. \tau\cdot 7$



Другой метод заключается в том, что нужно использовать ***теорему разложения.***

Если изображение имеет вид правильной дроби

$$X(p)=\frac{N(p)}{pD(p)}$$

То последовательность действий такова:

1) Находятся корни характеристического полинома

$D(p)=0 \ \rightarrow \ p_k, \quad k=1...n$, n - число корней характеристического полинома.

2) Эти корни подставляются в числитель

$N(p_k)$ и производную знаменателя в характеристический полином

$$D'(p)=\frac{dD(p)}{dp}, \quad D'(p_k)=\frac{dD(p_k)}{dp}$$

3) Решение записывается в виде оригинала

$$x(t)=\frac{N(0)}{D(0)}+\sum_{k=1}^{n}\frac{N(p_k)}{p_k D'(p_k)}e^{p_k t}$$

Если изображение представлено в виде (отсутствует нулевой корень в знаменателя)

$$X(p)=\frac{N(p)}{D(p)} ,$$

пункты 1 и 2 повторяются, но решение записывается в виде:

$$x(t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{N(p_k)}{D'(p_k)}e^{p_k t} .$$

Отсутствует так называемый свободный член.

Если получаются кратные корни. То пункты 1-2 проделываются в том же порядке. Решение записывается в виде

$$X(p)=\frac{N(\mathrm{p})}{pD(p)}=\frac{N(\mathrm{p})}{pM(p)\left(p-\lambda\right)^{\alpha}}, \quad \alpha \text{ - кратность корней}$$

нужно использовать следующую теорему разложения

$$f(\mathrm{t})=\frac{N(0)}{D(0)}+\sum_{k=1}^{n}\frac{N(p_k)}{pM'(p_k)}e^{p_k t}+\frac{1}{(\alpha-1)!}\frac{d^{\alpha-1}}{dp^{\alpha-1}}\left[\frac{N(\mathrm{p})\mathrm{e}^{pt}}{pM(\mathrm{p})}\right]_{p=\lambda}$$

Пример с теоремой разложения

Рассмотрим тот же **пример 2 (пример 1) (действительные корни)**

$$X(p)=\frac{1}{p\left(p^2+4p+3\right)}=\frac{N(p)}{pD(p)}$$

Установившийся режим уже можно сразу найти (свободный член) нужно выбрать выражение без сомножителя $\frac{1}{p}$ и подставить в оставшееся выражение в место $p=0$ $\qquad \frac{1}{\left(0^2+4\cdot 0+3\right)}=\frac{1}{3}$

1) Корни характеристического полинома
   $\left(p^2+4p+3\right)=(p+3)\left(p+1\right),\ p_1=-1,\ p_2=-3$ (По теореме Виета)
2) Находим производную характеристического полинома
   $D'(p)=2p+4,\quad D'(-3)=2\cdot\left(-3\right)+4=-2,\quad D'(-1)=2\cdot\left(-1\right)+4=2$
3) По тереме разложения получаем

$$x(t)=\frac{N(0)}{D(0)}+\frac{N(p_1)}{p_1D'(p_1)}e^{p_1t}+\frac{N(p_1)}{p_1D'(p_1)}e^{p_1t}=$$
$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{3\cdot\left(-2\right)}e^{-3t}-\frac{1}{1\cdot\left(2\right)}e^{-1t}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}e^{-3t}-\frac{1}{2}e^{-1t}$$

Рассмотрим **пример** с комплексными корнями

Пример 3 (комплексные корни). Рассмотрим дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами.

$$\ddot{x}+4\dot{x}+5x=10$$

С начальными условиями $x(0)=\dot{x}(0)=0$.

$$p^2X(p)+4pX(p)+3X(p)=\frac{10}{p}$$

Из последнего выражения получаем изображение $X(p)$

$$X(p)\left(p^2+4p+5\right)=\frac{10}{p}\ \rightarrow\ X(p)=\frac{10}{p\left(p^2+4p+5\right)}$$

1) Из последнего выражения видно, что в установившемся режиме оригинал будет равен $x(\infty)=2$. Находим корни уравнения

$$\left(p^2+4p+5\right)\quad\rightarrow\quad -\frac{4}{2}\pm\frac{D}{2}=-2\pm\frac{\sqrt{16-20}}{2}=-2\pm j,\qquad p_1=-2+j,\ p_2=-2-j$$

Находим производную характеристического полинома

$D(p)=\left(p^2+4p+5\right)\quad D'(p)=2p+4,\quad D'(-2+j)=2\cdot\left(-2+j\right)+4=2j$

$D'(-2-j)=2\cdot\left(-2-j\right)+4=-2j$

Записываем решение уравнения в виде

$$x(t)=\frac{N(0)}{D(0)}+\frac{N(p_1)}{p_1D'(p_1)}e^{p_1t}+\frac{N(p_2)}{p_kD'(p_2)}e^{p_2t}=\frac{N(0)}{D(0)}+2\cdot\mathrm{Re}\left(\frac{N(p_1)}{p_1D'(p_1)}e^{p_1t}\right)$$

Выражение в скобка будет выглядеть так

$$\frac{N(p_1)}{p_1D'(p_1)}=Ae^{j\varphi}$$

Умножим это выражение в экспоненту с корнем ($p_1=-\alpha+j\omega$) и получим

$$\frac{N(p_1)}{p_1D'(p_1)}e^{p_1t}=Ae^{j\varphi-\alpha t+j\omega t}=Ae^{-\alpha t}\left(\cos(\omega t+\alpha)+j\sin(\omega t+\alpha)\right)$$

Берем удвоенную действительную часть и получаем окончательное решение.

Подсчитаем величину для нашего случая

$$\frac{N(p_1)}{p_1D'(p_1)}=Ae^{j\varphi}=\frac{10}{(-2+j)2j}=\frac{-j10\cdot(-2-j)}{5\cdot 2}=2j-1=\sqrt{5}e^{j2{,}034}$$

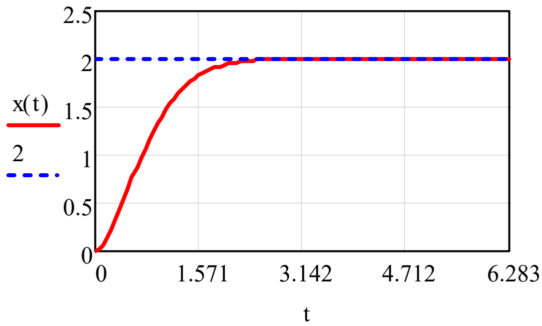
$p_1=-2+j$

$$x(t)=\frac{N(0)}{D(0)}+2\cdot Ae^{-\alpha t}\cos(\omega t+\alpha)=\frac{10}{5}+2\sqrt{5}\,\mathrm{e}^{-2t}\cos(t+2{,}034)=$$

$$=2+2\sqrt{5}\,\mathrm{e}^{-2t}\cos(t+2{,}034)$$

Строим график

$T := 2\cdot\pi \quad t := 0, 0.01\cdot T .. T\cdot 1 \quad x(t) := 2+2\cdot\sqrt{5}\cdot e^{-2\cdot t}\cdot\cos(t+2.034)$ (получились незаметные колебания)



Пример 4 (комплексные корни). Рассмотрим дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами.

$$\ddot{x}+1\dot{x}+5x=4$$

С начальными условиями $x(0)=\dot{x}(0)=0$.

$$p^2X(p)+pX(p)+5X(p)=\frac{4}{p}$$

Из последнего выражения получаем изображение $X(p)$

$$X(p)\left(p^2+p+5\right)=\frac{4}{p}\ \rightarrow\ X(p)=\frac{4}{p\left(p^2+p+5\right)}$$

2) Из последнего выражения видно, что в установившемся режиме оригинал будет равен $x(\infty)=2$. Находим корни уравнения

$$\left(p^2+p+5\right)\quad\rightarrow\quad -\frac{1}{2}\pm\frac{D}{2}=-2\pm\frac{\sqrt{1-20}}{2}=-1/2\pm j\sqrt{19}/2,$$

$$p_1=-1/2+j\sqrt{19}/2,\ \ p_2=-1/2-j\sqrt{19}/2$$

Находим производную характеристического полинома

$$D(p)=\left(p^2+p+5\right)\quad D'(p)=2p+1,$$

$$D'(-1/2+j\sqrt{19}/2)=2\cdot\left(-1/2+j\sqrt{19}/2\right)+1=j\sqrt{19}$$

Записываем решение уравнения в виде

$$x(t)=\frac{N(0)}{D(0)}+\frac{N(p_1)}{p_1D'(p_1)}e^{p_1t}+\frac{N(p_2)}{p_kD'(p_2)}e^{p_2t}=\frac{N(0)}{D(0)}+2\cdot\mathrm{Re}\left(\frac{N(p_1)}{p_1D'(p_1)}e^{p_1t}\right)$$

Выражение в скобка будет выглядеть так

$$\frac{4}{\left(-1/2+j\sqrt{19}/2\right)j\sqrt{19}}=-0.4+j0.0916=0,416e^{j2,916}$$

Умножим это выражение в экспоненту с корнем ($p_1=-1/2+j\sqrt{19}$) и получим

$$\frac{N(p_1)}{p_1D'(p_1)}e^{p_1t}=Ae^{j\varphi-\alpha t+j\omega t}=Ae^{-\alpha t}\left(\cos(\omega t+\alpha)+j\sin(\omega t+\alpha)\right)$$

Берем удвоенную действительную часть и получаем окончательное решение.
Подсчитаем величину для нашего случая

$$\frac{N(p_1)}{p_1D'(p_1)}=Ae^{j\varphi}=0,416e^{j2,916}$$

$$p_1=-1/2+j\sqrt{19}/2$$

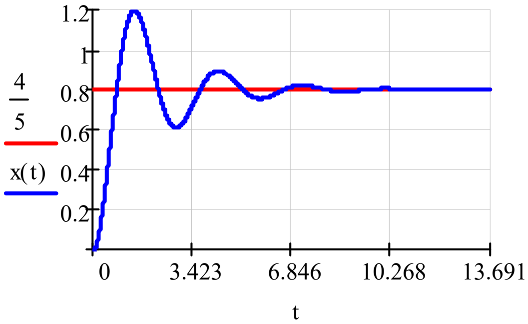
$$x(t)=\frac{N(0)}{D(0)}+2\cdot Ae^{-t\alpha}\cos(\omega t+\varphi)=\frac{4}{5}+0,416\cdot2\,\mathrm{e}^{-t/2}\cos(t\sqrt{19}/2+2,916)=\backslash$$

$$=0,8+0,832\,\mathrm{e}^{-t/2}\cos(t\sqrt{19}/2+2,916)$$

Строим график

$\omega := \left|\mathrm{Im}(\lambda_0)\right| = 2.179 \quad T := 2\cdot\pi\cdot\omega \quad t := 0, 0.01 .. T\cdot 1$

$x(t) := 0.8 + 0.832\cdot e^{\frac{-t}{2}}\cdot\cos\left(\frac{\sqrt{19}}{2}\cdot t + 2.916\right)$



Пример 5 (кратные корни) . Рассмотрим дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами.

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 1$$

С начальными условиями $x(0) = \dot{x}(0) = 0$.

$$p^2 X(p) + 4pX(p) + 4X(p) = \frac{1}{p}$$

Из последнего выражения получаем изображение $X(p)$

$$X(p)\left(p^2 + 4p + 4\right) = \frac{1}{p} \rightarrow X(p) = \frac{1}{p\left(p^2 + 4p + 4\right)}$$

3) Из последнего выражения видно, что в установившемся режиме оригинал будет равен $x(\infty) = 2$. Находим корни уравнения

$$\left(p^2 + 4p + 4\right) \rightarrow -\frac{4}{2} \pm \frac{D}{2} = -2 \pm \frac{\sqrt{16-16}}{2} = -2, \ p_{1,2} = -2$$

Находим производную характеристического полинома

Записываем решение уравнения в виде

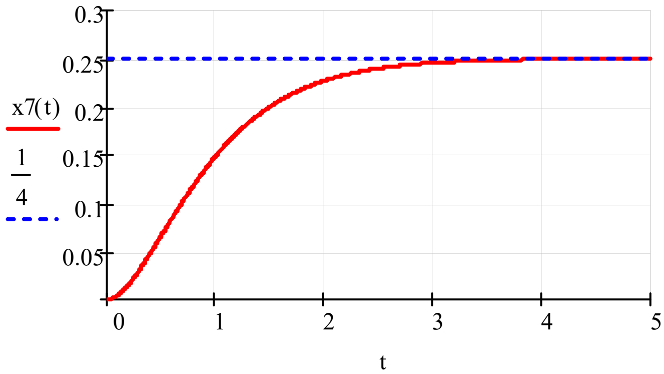
$$x(t) = \frac{N(0)}{D(0)} + \frac{1}{1!}\frac{d}{dp}\left(\frac{N(\mathrm{p})}{pM(\mathrm{p})}e^{pt}\right)\Bigg|_{p=-2} = \frac{1}{4} + \frac{d}{dp}\left(\frac{1}{p}e^{pt}\right)\Bigg|_{p=-2} =$$

$$= \frac{1}{4} + \left(\frac{t}{p}e^{pt} - \frac{1}{p^2}e^{pt}\right)\Bigg|_{p=-2} = \frac{1}{4} + \left(-\frac{t}{2}e^{-2t} - \frac{1}{4}e^{-2t}\right) = \frac{1}{4} - \frac{e^{-2t}}{2}\left(t + \frac{1}{2}\right)$$

$$x(t) = \frac{1}{4} - \frac{e^{-2t}}{2}\left(t + \frac{1}{2}\right)$$

Строим график

$$x7(t) := \frac{1}{4} - \frac{t \cdot e^{-2 \cdot t}}{2} - \frac{e^{-2 \cdot t}}{4} \qquad \tau := \frac{1}{2} = 0.5 \qquad t := 0, .01 \cdot \tau \,..\, \tau \cdot 10$$



Применение в электротехнике