Лекция 8

Интерполяция Лагранжа

Пусть мы имеем полином, представленный в виде

$$L(\mathrm{x}) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4),$$

$$L(x_1) = 0,\ L(x_2) = 0,\ L(x_3) = 0,\ L(x_4) = 0$$

Сформируем фрагменты из исходного полинома делением исходного полинома на сомножитель вида $(x - x_i)$

$$L_1(x) = (x - x_2)(x - x_3)(x - x_4),\quad L_1(x_1) \neq 0$$

$$L_2(x) = (x - x_1)(x - x_3)(x - x_4),\quad L_2(x_2) \neq 0$$

$$L_3(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_4),\quad L_3(x_3) \neq 0$$

$$L_4(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3),\quad L_4(x_4) \neq 0$$

Следующий шаг. Формируем полином со свойствами

$$\frac{L_1(x)}{L_1(x_1)},\quad \frac{L_2(x)}{L_2(x_2)},\ \frac{L_3(x)}{L_3(x_1)},\ \frac{L_4(x)}{L_4(x_1)}$$

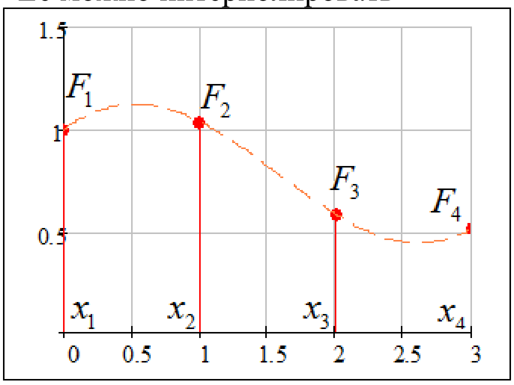
$$\frac{L_j(x_i)}{L_j(x_j)} = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & if\ \ i = j \\ 0 & if\ \ i \neq j \end{cases} \quad - \textit{символ Кронекера}$$

Если мы имеем данные значения в виде столбца то можно сформировать непрерывную функцию

$$x_1,\ \ x_2,\ \ x_3,\ x_4$$

$$F_1,\ F_2,\ F_3,\ F_4$$

Её можно интерполировать



$$F(x) = \frac{L_1(x)}{L_1(x_1)}F_1 + \frac{L_2(x)}{L_2(x_2)}F_2 + \frac{L_3(x)}{L_3(x_3)}F_3 + \frac{L_4(x)}{L_4(x_4)}$$

В самом общем случае полином Лагранжа можно представить в виде

$$F(x) = \sum_{k=1}^{N} \frac{L_k(x)}{L_k(x_k)} F_k = d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + \dots d_n x^n$$

Коэффициента разложения могут быть найдены по формулам

$$d_0 = F(0),\ d_1 = \frac{d}{dx}F(x)\Big|_{x=0},\ d_2 = \frac{1}{2!}\frac{d^2}{dx^2}F(x)\Big|_{x=0} \dots d_n = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dx^n}F(x)\Big|_{x=0}$$

Но проще их найти через табличные данные с помощью матрицы Вондермонда, используя точки $x_0, x_1, \dots x_n$ и значения функции в этих точках $F_1,\ F_2,\ F_3, \dots. F_n$.

$$\left.\begin{aligned} F(x_0) &= d_0 + d_1x_0 + d_2x_0{}^2 + \ldots d_nx_0{}^n \\ F(x_1) &= d_0 + d_1x_1 + d_2x_1{}^2 + \ldots d_nx_1{}^n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F(x_n) &= d_0 + d_1x_n + d_2x_n^2 + \ldots d_nx_n{}^n \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} F(x_0) \\ F(x_1) \\ \ldots\ldots \\ F(x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ . & . & . & \ldots & . \\ 1 & x_n & x_1^2 & \ldots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \ldots\ldots \\ d_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} F(x_0) \\ F(x_1) \\ \ldots\ldots \\ F(x_n) \end{pmatrix} = W \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \ldots\ldots \\ d_n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \ldots\ldots \\ d_n \end{pmatrix} = W^{-1} \begin{pmatrix} F(x_0) \\ F(x_1) \\ \ldots\ldots \\ F(x_n) \end{pmatrix}$$

Приведём пример в Mathcad15

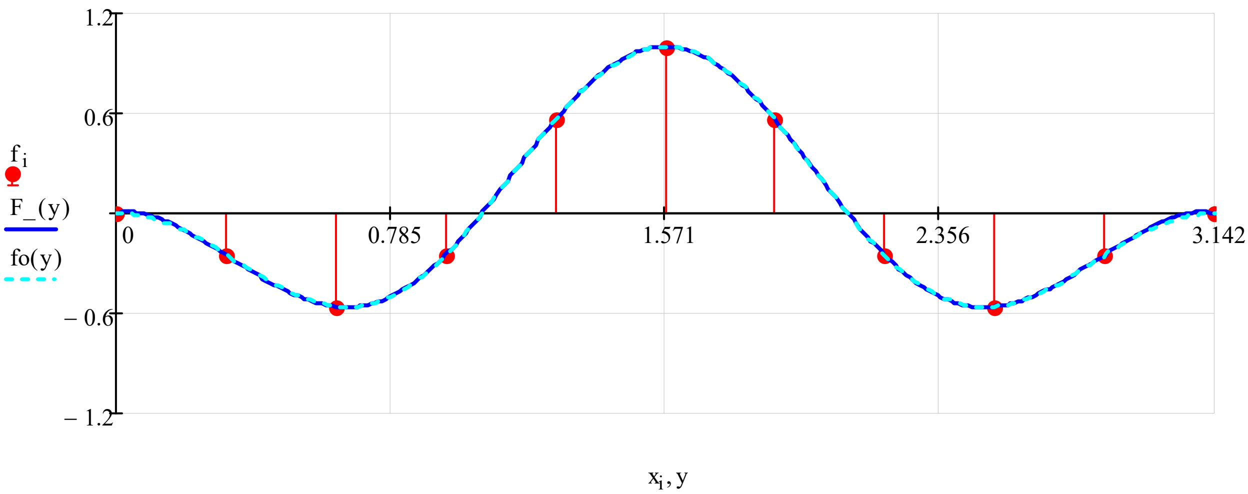
Интерполяция функции $fo(x) := \sin(x)^2 - \sin(x \cdot 2)^2$ **по 11 точкам**

$N := 10 \quad i := 0..N \quad x_i := \frac{\pi}{N} \cdot i \qquad f_i := \sin(x_i)^2 - \sin(x_i \cdot 2)^2$

Интерполяционный полином Лагранжа

$$F(y) := \prod_{k=0}^{N} (y - x_k) \qquad F1(y,j) := \prod_{k=0}^{N} \mathrm{if}(x_k = x_j, 1, y - x_k)$$

$$F\_(y) := \sum_{k=0}^{N} \left(\frac{F1(y,k)}{Fo_k} f_k \right)$$



$j := i \qquad W_{i,j} := (x_i)^j$

$$W \rightarrow \begin{bmatrix}
1 & x_0 & (x_0)^2 & (x_0)^3 & (x_0)^4 & (x_0)^5 & (x_0)^6 & (x_0)^7 & (x_0)^8 & (x_0)^9 & (x_0)^{10} \\
1 & x_1 & (x_1)^2 & (x_1)^3 & (x_1)^4 & (x_1)^5 & (x_1)^6 & (x_1)^7 & (x_1)^8 & (x_1)^9 & (x_1)^{10} \\
1 & x_2 & (x_2)^2 & (x_2)^3 & (x_2)^4 & (x_2)^5 & (x_2)^6 & (x_2)^7 & (x_2)^8 & (x_2)^9 & (x_2)^{10} \\
1 & x_3 & (x_3)^2 & (x_3)^3 & (x_3)^4 & (x_3)^5 & (x_3)^6 & (x_3)^7 & (x_3)^8 & (x_3)^9 & (x_3)^{10} \\
1 & x_4 & (x_4)^2 & (x_4)^3 & (x_4)^4 & (x_4)^5 & (x_4)^6 & (x_4)^7 & (x_4)^8 & (x_4)^9 & (x_4)^{10} \\
1 & x_5 & (x_5)^2 & (x_5)^3 & (x_5)^4 & (x_5)^5 & (x_5)^6 & (x_5)^7 & (x_5)^8 & (x_5)^9 & (x_5)^{10} \\
1 & x_6 & (x_6)^2 & (x_6)^3 & (x_6)^4 & (x_6)^5 & (x_6)^6 & (x_6)^7 & (x_6)^8 & (x_6)^9 & (x_6)^{10} \\
1 & x_7 & (x_7)^2 & (x_7)^3 & (x_7)^4 & (x_7)^5 & (x_7)^6 & (x_7)^7 & (x_7)^8 & (x_7)^9 & (x_7)^{10} \\
1 & x_8 & (x_8)^2 & (x_8)^3 & (x_8)^4 & (x_8)^5 & (x_8)^6 & (x_8)^7 & (x_8)^8 & (x_8)^9 & (x_8)^{10} \\
1 & x_9 & (x_9)^2 & (x_9)^3 & (x_9)^4 & (x_9)^5 & (x_9)^6 & (x_9)^7 & (x_9)^8 & (x_9)^9 & (x_9)^{10} \\
1 & x_{10} & (x_{10})^2 & (x_{10})^3 & (x_{10})^4 & (x_{10})^5 & (x_{10})^6 & (x_{10})^7 & (x_{10})^8 & (x_{10})^9 & (x_{10})^{10}
\end{bmatrix}$$

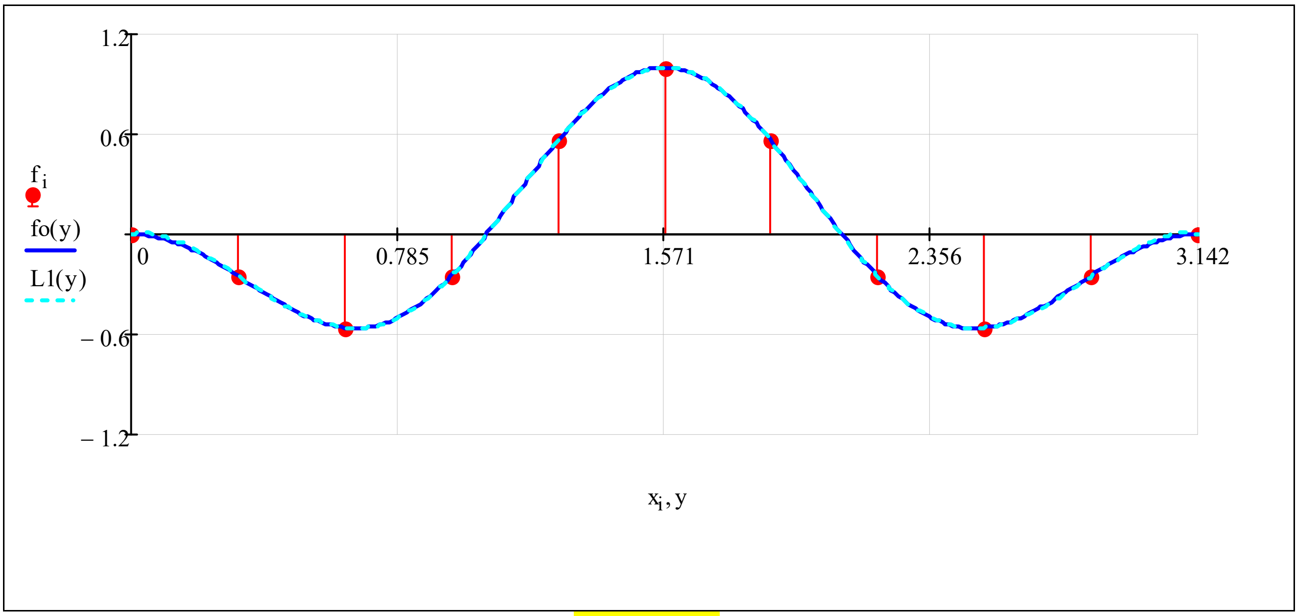
$$W_{i,j} := (x_i)^j$$

$$W = \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0.314 & 0.099 & 0.031 & 9.741\times10^{-3} & 3.06\times10^{-3} & 9.614\times10^{-4} & 3.02\times10^{-4} & 9.489\times10^{-5} & 2.981\times10^{-5} & 9.365\times10^{-6} \\
1 & 0.628 & 0.395 & 0.248 & 0.156 & 0.098 & 0.062 & 0.039 & 0.024 & 0.015 & 9.59\times10^{-3} \\
1 & 0.942 & 0.888 & 0.837 & 0.789 & 0.744 & 0.701 & 0.661 & 0.623 & 0.587 & 0.553 \\
1 & 1.257 & 1.579 & 1.984 & 2.494 & 3.134 & 3.938 & 4.948 & 6.218 & 7.814 & 9.82 \\
1 & 1.571 & 2.467 & 3.876 & 6.088 & 9.563 & 15.022 & 23.596 & 37.065 & 58.221 & 91.453 \\
1 & 1.885 & 3.553 & 6.697 & 12.624 & 23.796 & 44.855 & 84.549 & 159.371 & 300.407 & 566.254 \\
1 & 2.199 & 4.836 & 10.635 & 23.388 & 51.433 & 113.106 & 248.734 & 546.995 & 1.203\times10^{3} & 2.645\times10^{3} \\
1 & 2.513 & 6.317 & 15.875 & 39.899 & 100.277 & 252.022 & 633.401 & 1.592\times10^{3} & 4.001\times10^{3} & 1.006\times10^{4} \\
1 & 2.827 & 7.994 & 22.604 & 63.91 & 180.702 & 510.922 & 1.445\times10^{3} & 4.085\times10^{3} & 1.155\times10^{4} & 3.265\times10^{4} \\
1 & 3.142 & 9.87 & 31.006 & 97.409 & 306.02 & 961.389 & 3.02\times10^{3} & 9.489\times10^{3} & 2.981\times10^{4} & 9.365\times10^{4}
\end{pmatrix}$$

$$d := W^{-1}\cdot f$$

$$d^T = (0 \;\; 0.461 \;\; -7.465 \;\; 17.875 \;\; -34.501 \;\; 53.665 \;\; -49.457 \;\; 25.76 \;\; -7.549 \;\; 1.167 \;\; -0.074)$$

$$L1(x) := \sum_{k=0}^{10} \left(d_k \cdot x^k\right)$$



Задание 7

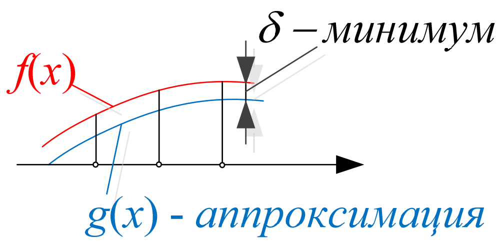
Выберете полином 5-той степени. Представите его через дискретное множество точек $F_1, F_2 \ldots F_6$ в 5-ти точках $x_1, x_2 \ldots x_6$ (как показано выше) на интервале $x \in [-2, 4]$.
Представьте полином в двух формат

$$F(x) = \sum_{k=1}^{N} \frac{L_k(x)}{L_k(x_k)} F_k \quad \text{и} \quad d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + \ldots d_n x^n$$

Найдите коэффициенты разложения через матрицу Вондермонда и сравните результаты,
Сделайте вывод.

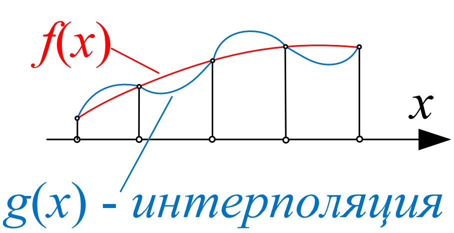
Какая разница между аппроксимацией и интерполяцией?

Аппроксимация это когда мы представляемя сигнал ввиде вспомогательных функций называемых базисами.



Функции должны быть квадратично интегрируемы. Вспомогательные функции-базис, это известные простые функции. ортогональные на определенном интервале.

При этом мы получаем минимальную квадратичную ошибку в каждой точке интервала.



Когда мы говорим об интерполяции функции, это значит, что мы заменяем исходную функцию другой функцией, которая имеет совпадения с исходной функцией в некотором дискретном множестве точек.

Интерполяция это значит найти значения функции между множеством дискретных точек при известных значениях функции в этом множестве дискретных точек.

Аппроксимация Паде (Анри Паде) (экстраполяция)

Пусть задан сигнал $f(z) = \mathrm{e}^z$. Представим аппроксимацию сигнала в виде разложения Тейлора, (Лорана):

$$f(z) = \sum_{k=0}^{L} \frac{z^k}{k!}, \quad f(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^6}{6!} = \\ = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24} + \frac{z^5}{120} + \frac{z^6}{720} = \sum_{k=0}^{L} c_k z^k, \tag{1}$$

Коэффициенты разложения заданы $c_k = \dfrac{1}{k!}$, и функция определена на определенном интервале.

Для того что бы сделать экстраполяцию сигнала за интервал необходимо использовать аппроксимацию Паде.

$$F(z) = \frac{\sum_{k}^{K} n_k z^k}{\sum_{m}^{M} d_k z^k}$$

Между степенью полинома числителя и степени полинома знаменателя должно соблюдаться соотношение в виде

$$K + M = L$$

Здесь L – максимальная степень в разложения Тейлора. Обозначим коэффициенты разложения полинома числителя как n- (*numerator*-числитель), а коэффициенты знаменателя как d- (*denominator*- знаменатель),

$$F(z) = \frac{\sum_{k=0}^{N} n_k z^k}{\sum_{m=0}^{M} d_m z^m} = f(z) = \sum_{i=0}^{L} c_i z^i \quad \to \quad \sum_{i=0}^{L} c_i z^i \sum_{m=0}^{M} d_m z^m = \sum_{k=0}^{N} n_k z^k$$

$$\sum_{i=0}^{L} \sum_{m=0}^{M} d_m c_i z^{i+m} = \sum_{k=0}^{N} n_k z^k$$

Нам нужно приравнять коэффициента при одинаковых степенях переменной z слева и справа.

$$\sum_{i=0}^{L}\sum_{m=0}^{M} d_m c_i z^{i+m} = \sum_{k=0}^{N} n_k z^k$$

$$\begin{array}{l|l}
z^0 & d_0 c_0 = n_0, \quad \textit{положим что } \; d_0 = 1 \\
z^1 & d_0c_1 + d_1c_0 = n_1 \\
z^2 & d_0c_2 + d_1c_1 + d_2c_0 = n_2 \\
z^3 & d_0c_3 + d_1c_2 + d_2c_1 + d_3c_0 = n_3
\end{array}
\Rightarrow
\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} & d_1c_0 & \\ d_1c_1 & + & d_2c_0 \\ d_1c_2 + & d_2c_1 + & d_3c_0 \end{pmatrix}$$

$$\Uparrow$$

$$\left.\begin{array}{l|l}
z^4 & c_4 + d_1c_3 + d_2c_2 + d_3c_1 = 0 \\
z^5 & c_5 + d_1c_4 + d_2c_3 + d_3c_2 = 0 \\
z^6 & c_6 + d_1c_5 + d_2c_4 + d_3c_3 = 0
\end{array}\right\} \Rightarrow
\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_2 & c_3 & c_4 \\ c_3 & c_4 & c_5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_3 \\ d_2 \\ d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_4 \\ -c_5 \\ -c_6 \end{pmatrix}$$

В последних трех уравнениях коэффициенты разложения в ряд Тейлора- c_k нам известны, поэтому можно найти коэффициенты разложения полинома знаменателя d_k . Далее моно найти недостающие коэффициента полинома числителя n_k

$$f(z) = \sum_{k=0}^{L}\frac{z^k}{k!}, \quad f(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^6}{6!} =$$

$$= 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24} + \frac{z^5}{120} + \frac{z^6}{720} = \sum_{k=0}^{L} c_k z^k,$$

$i := 0..6 \quad c_i := \frac{(-1)^i}{i!}$

$c^T = (1\ \ -1\ \ 0.5\ \ -0.166667\ \ 0.041667\ \ -0.008333\ \ 0.001389)$

$$C := \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_2 & c_3 & c_4 \\ c_3 & c_4 & c_5 \end{pmatrix} \quad C1 := \begin{pmatrix} -c_4 \\ -c_5 \\ -c_6 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0.5 \\ -0.16667 \\ 0.04167 \\ -0.00833 \\ 0.00139 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} d_3 \\ d_2 \\ d_1 \end{pmatrix} := C^{-1}\cdot C1 = \begin{pmatrix} 0.008333 \\ 0.1 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

$b_0 := 1$

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1\cdot c_0 \\ d_1\cdot c_1 + d_2\cdot c_0 \\ d_1\cdot c_2 + d_2\cdot c_1 + d_3\cdot c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0.1 \\ -0.008333 \end{pmatrix}$$

$n_0 := 1 \quad d_0 := 1$

$d^T = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.1 & 8.333\times 10^{-3} \end{pmatrix}$

$n^T = \begin{pmatrix} 1 & -0.5 & 0.1 & -8.333\times 10^{-3} \end{pmatrix}$

$D(z) := \begin{pmatrix} 1 & z & z^2 & z^3 \end{pmatrix}$

$N(z) := D(z)$

$N(z)\cdot n \rightarrow -0.0083333333333329984\cdot z^3 + -0.49999999999999845\cdot z + 0.099999999999998979\cdot z^2 + 1$

$D(z)\cdot b \rightarrow 0.0083333333333334286\cdot z^3 + 0.10000000000000053\cdot z^2 + 0.50000000000000155\cdot z + 1$

$F(z) := \dfrac{N(z)\cdot n}{D(z)\cdot d} \qquad f(z) := \sum_{i=0}^{6} \dfrac{(-z)^i}{i!}$

Разложение Паде $\quad F(z) := \dfrac{N(z)\cdot n}{D(z)\cdot d}$

Разложение Тейлора $\quad L := 6 \quad f(z) := \sum_{k=0}^{L} \dfrac{(-z)^k}{k!}$

$z := 0, 0+0.1 .. 3$