

ЛЕКЦИЯ № 3

5. Метод малых колебаний для анализа статической устойчивости

Рассмотрим применение теории устойчивости к уравнению относительного движения ротора генератора, для этого будем использовать метод линеаризации

Если учесть влияние явлений вызывающих демпфирование колебаний, то известное нам дифференциальное уравнение примет вид:

$$T_J \frac{d^2 \delta}{dt^2} + K_D \frac{d\delta}{dt} = P_T - P_r(\delta)$$

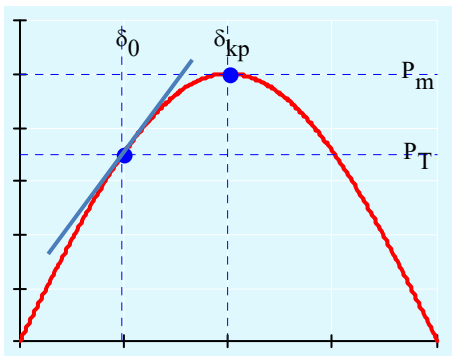
Здесь слагаемое с первой производной обусловлено влиянием демпферных контуров ротора.

Выберем точку положения равновесия δ_0 и будем рассматривать изменение мощности системы в окрестности точки положения равновесия. Перепишем уравнение относительного движения ротора генератора, применяя линеаризацию системы.

$$T_J \frac{d^2 (\delta_0 + \Delta \delta)}{dt^2} + K_D \frac{d(\delta_0 + \Delta \delta)}{dt} = P_T - P_r(\delta_0 + \Delta \delta)$$

Выражение для мощности генератора можно записать в виде

$$P_r(\delta_0 + \Delta \delta) = P_m \sin(\delta_0 + \Delta \delta)$$



Разлагая выражение мощности генератора в окрестности точки положения равновесия в ряд Тейлора получаем, с учетом постоянного и линейного членов разложения

$$P_r(\delta_0 + \Delta \delta) = P_m \sin(\delta_0) + \frac{dP_r(\delta_0)}{d\delta} \Delta \delta + \dots$$

Перепишем уравнение относительного движения ротора генератора

$$T_J \frac{d^2 \Delta \delta}{dt^2} + K_D \frac{d\Delta \delta}{dt} = \cancel{P_T} - \cancel{P_m \sin(\delta_0)} - \frac{dP_r(\delta_0)}{d\delta} \Delta \delta \rightarrow$$

$$\rightarrow T_J \frac{d^2 \Delta \delta}{dt^2} + K_D \frac{d\Delta \delta}{dt} + \frac{dP_r(\delta_0)}{d\delta} \Delta \delta = 0$$

Запишем для последнего уравнения **характеристический полином**

$$\begin{array}{ccc} a_0 & a_1 & a_2 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \textcircled{T_J} p^2 + \textcircled{K_D} p + \textcircled{\frac{dP_r}{d\delta}} = 0 & = a_0 p^2 + a_1 p + a_2 & \end{array} \quad (1)$$

Очень часто уравнения качания записывают в виде уравнения состояния

$$\begin{array}{ccc}
& \Delta\delta & \Delta\omega \\
& \downarrow & \downarrow \\
\left\{ \begin{array}{l} T_J \frac{d\Delta\omega}{dt} + K_{\mathcal{D}} \Delta\omega + \frac{dP_{\Gamma}(\delta_0)}{d\delta} \Delta\delta = 0 \\ \frac{d\Delta\delta}{dt} = \Delta\omega \end{array} \right. & \Rightarrow & \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\Delta\delta}{dt} = \Delta\omega \\ \frac{d\Delta\omega}{dt} = -\frac{1}{T_J} \frac{dP_{\Gamma}(\delta_0)}{d\delta} \Delta\delta - \frac{K_{\mathcal{D}}}{T_J} \Delta\omega \end{array} \right.
\end{array}$$

Выписывая коэффициенты при переменных состояния $\Delta\delta, \Delta\omega$, получим матрицу состояния и характеристическое уравнение.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{T_J} \frac{dP_{\Gamma}(\delta_0)}{d\delta} & -\frac{K_{\mathcal{D}}}{T_J} \end{pmatrix} \Rightarrow p^2 - \text{tr}(A)p + \det(A) = 0$$

$$-\text{tr}(A) = -(a_{11} + a_{22}) = -\left(0 - \frac{K_{\mathcal{D}}}{T_J}\right) = \frac{K_{\mathcal{D}}}{T_J},$$

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = -\left(-\frac{1}{T_J} \frac{dP_{\Gamma}(\delta_0)}{d\delta} \cdot 1\right) = \frac{1}{T_J} \frac{dP_{\Gamma}(\delta_0)}{d\delta}$$

$$p^2 + \frac{K_{\mathcal{D}}}{T_J} p + \frac{1}{T_J} \frac{dP_{\Gamma}(\delta_0)}{d\delta} = 0$$

В дальнейшем будем использовать характеристический полином (1) дифференциального уравнения второго порядка.

В полученном характеристическом уравнении свободный член равен синхронизирующей мощности $a_2 = \frac{dP_{\Gamma}}{d\delta}$. Знак этого свободного члена определяет статическую апериодическую устойчивость системы. До критической точки в диапазоне изменения угла $\delta = \{0, \delta_{KP}\}$ синхронизирующая мощность положительна $\frac{dP_{\Gamma}}{d\delta} > 0$ и система

устойчива. В критической точке δ_{KP} синхронизирующая мощность равна нулю $\frac{dP_{\Gamma}}{d\delta} = 0$ и система находится на границе устойчивости. После критической точки в диапазоне изменения угла $\delta = \{\delta_{KP}, 0\}$ синхронизирующая мощность отрицательна $\frac{dP_{\Gamma}}{d\delta} < 0$ и

система на этом интервале не устойчива.

Количественное соотношение позволяющее определить относительный вклад коэффициентов в дифференциальном уравнении определяется решением характеристического уравнения

$$T_J \frac{d^2 \Delta\delta}{dt^2} + K_{\mathcal{D}} \frac{d\Delta\delta}{dt} + \frac{dP_{\Gamma}(\delta_0)}{d\delta} \Delta\delta = 0 \rightarrow a_0 \frac{d^2 \Delta\delta}{dt^2} + a_1 \frac{d\Delta\delta}{dt} + a_2 \Delta\delta = 0$$

$$a_0 p^2 + a_1 p + a_2 = 0$$

Запишем решение характеристического уравнения

$$p_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_0} = \frac{-a_1}{2a_0} \pm \sqrt{\left(\frac{a_1}{2a_0}\right)^2 - \frac{a_2}{a_0}} = \frac{-a_1}{2a_0} \pm \sqrt{\frac{D}{4a_0^2}} =$$

$$= -\alpha \pm \beta, \quad \alpha = \frac{K_d}{2T_J}, \quad \beta = \sqrt{\frac{D}{4a_0^2}} = \sqrt{\left(\frac{K_d}{2T_J}\right)^2 - \frac{1}{T_J} \frac{dP}{d\delta}}.$$

Рассмотрим полученные корни в для области углов где находятся устойчивые решения $0 \leq \delta \leq \pi/2$ то есть где $a_2 = \frac{dP}{d\delta} > 0$.

Если $D > 0$ то получает соотношение между демпферным коэффициентом K_d и синхронизирующей мощностью $\frac{dP}{d\delta}$:

$$\frac{D}{4a_0^2} = \left(\frac{a_1}{2a_0}\right)^2 - \frac{a_2}{a_0} > 0, \rightarrow \frac{a_1^2}{4a_0} > a_2 \rightarrow \boxed{\frac{K_d^2}{4T_J} > \frac{dP}{d\delta}}$$

корни уравнения получаются отрицательными и действительными, а решение получается аperiodическим

$$p = p_{1,2} = \frac{-a_1}{2a_0} \pm \sqrt{\frac{D}{4a_0^2}} < 0, \rightarrow \Delta\delta(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$$

Ниже на первом графике приведена картина, когда выполняется соотношение $\frac{K_d^2}{4T_J} > \frac{dP}{d\delta}$, эта верхняя область синусоиды $P(\delta)$ (См. рис. а).

Другой случай, когда $D < 0$. В этом случае получает соотношение между демпферным коэффициентом и синхронизирующей мощностью

$$\frac{D}{4a_0^2} = \left(\frac{a_1}{2a_0}\right)^2 - \frac{a_2}{a_0} < 0, \rightarrow \frac{a_1^2}{4a_0} < a_2 \rightarrow \boxed{\frac{K_d^2}{4T_J} < \frac{dP}{d\delta}}$$

$$\frac{D}{4a_0^2} = \left(\frac{K_d}{T_J}\right)^2 - \frac{4}{T_J} \frac{dP}{d\delta} < 0, \rightarrow \frac{a_1^2}{4a_0} < a_2 \rightarrow \frac{K_d^2}{4T_J} < \frac{dP}{d\delta}$$

$$p = p_{1,2} = \frac{-a_1}{2a_0} \pm \sqrt{-\frac{|D|}{4a_0^2}} = \frac{-a_1}{2a_0} \pm j\sqrt{\frac{|D|}{4a_0^2}} = -\alpha + j\omega$$

корни уравнения получаются комплексные, режим получается колебательный

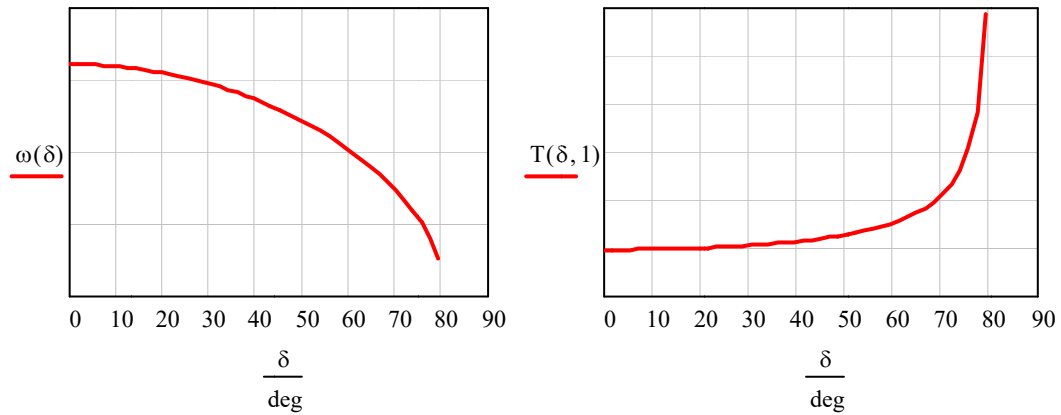
$$\Delta\delta(t) = \underline{A}_1 e^{p_1 t} + \underline{A}_2 e^{p_2 t} = 2 \operatorname{Re}(\underline{A}_1 e^{p_1 t}) = 2 A_1 e^{-\alpha t} \cos(\omega t + \varphi)$$

Здесь учтено, что

$$\underline{A}_1 = \underline{A}_2^* = A_1 e^{j\varphi}$$

Отдельно выделим выражение для частоты и периода колебаний:

$$\omega = \sqrt{\frac{|D|}{4a_0^2}} = \sqrt{\frac{|D|}{4a_0^2}} = \sqrt{\frac{4}{T_J} \frac{dP}{d\delta} - \left(\frac{K_d^2}{T_J}\right)^2}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{4}{T_J} \frac{dP}{d\delta} - \left(\frac{K_d^2}{T_J}\right)^2}}$$



Качественный график изменения частоты и периода колебаний

Ниже на втором и третьем графиках приведены картины колебательных процессов. Эта область находится ближе к нижней части синусоиды $P(\delta)$, (См. рис. б и в).

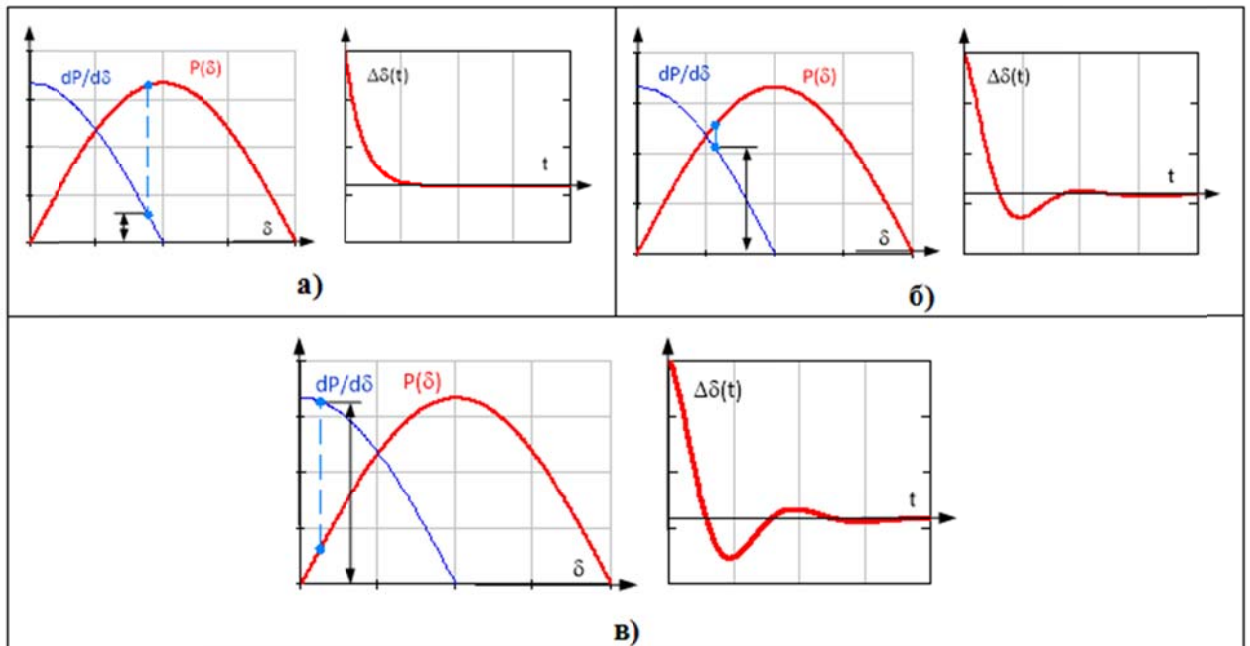


Рис. 3.1

Если корни характеристического уравнения одинаковые (кратные) тогда решение для свободной составляющей записывается в виде:

$$\frac{D}{4a_0^2} = \left(\frac{a_1}{2a_0}\right)^2 - \frac{a_2}{a_0} = 0, \rightarrow \frac{a_1^2}{4a_0} = a_2 \rightarrow \frac{K_d^2}{4T_J} = \frac{dP}{d\delta} \quad p_{1,2} = \frac{-a_1}{2a_0} = -\alpha$$

$$\Delta\delta(t) = A \cdot (1 - pt) \cdot e^{pt} = A \cdot (1 + \alpha t) \cdot e^{-\alpha t} = A \cdot \left(1 + \frac{K_d}{2T_J} t\right) \cdot e^{-\frac{K_d}{2T_J} t}$$

Рассмотрим систему агрегат турбина-генератор при отсутствии демпфирующих обмоток ротора, т.е. член с первой производной в дифференциальном уравнении будет отсутствовать:

$$T_J \frac{d^2 \delta}{dt^2} = P_T - P_r(\delta)$$

Выбираем точку положения равновесия и применяем линеаризацию

$$T_J \frac{d^2 \Delta \delta}{dt^2} = P_T - P_r(\delta_0) - \frac{dP_r(\delta)}{d\delta} \Delta \delta + \dots \rightarrow$$

$$\rightarrow T_J \frac{d^2 \Delta \delta}{dt^2} + \frac{dP_r(\delta)}{d\delta} \Delta \delta = 0$$

Разделим последнее уравнение на T_J и получим уравнение осциллятора.

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

$\downarrow \quad \quad \downarrow \quad \quad \swarrow$

$\frac{d^2 \Delta \delta}{dt^2} + \frac{1}{T_J} \frac{dP_r(\delta)}{d\delta} \Delta \delta = 0$

Отсутствие члена с первой производной означает, что режим колебательный $a_1 = 0$, то есть решение должно находиться на границе устойчивости.

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$p^2 + \frac{1}{T_J} \frac{dP_r(\delta)}{d\delta} = 0 \rightarrow p = \pm \sqrt{-\frac{1}{T_J} \frac{dP_r(\delta)}{d\delta}} = \pm j \sqrt{\frac{1}{T_J} \frac{dP_r(\delta)}{d\delta}} = j\omega$$

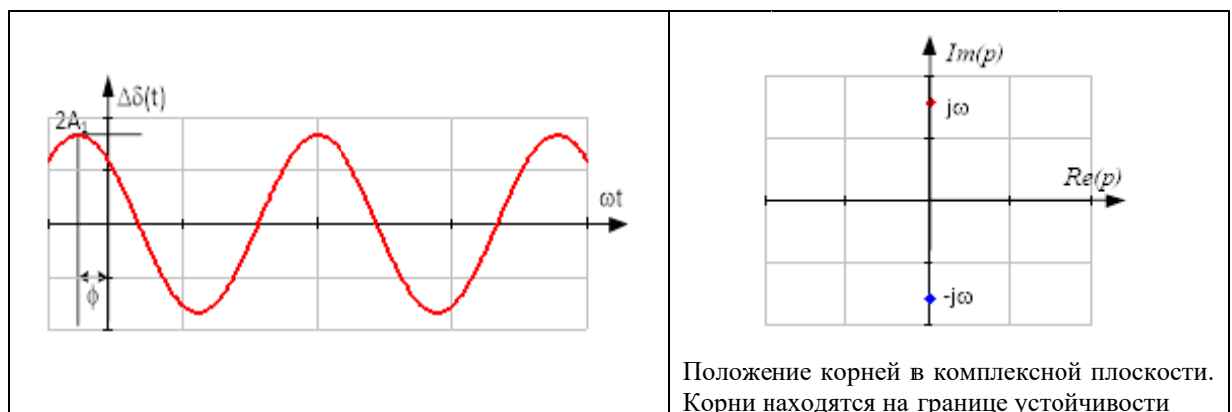
Тогда решение можно записать в виде учитывая, что знак синхронизирующей мощности положительный $\frac{dP_r(\delta)}{d\delta} > 0$

$$\Delta \delta(t) = \underline{A}_1 e^{j\omega t} + \underline{A}_2 e^{-j\omega t} = 2 \operatorname{Re}(\underline{A}_1 e^{j\omega t}), \quad \underline{A}_1 = A_1 e^{j\varphi} = \underline{A}_2^*$$

Или

$$\Delta \delta(t) = 2 A_1 \cos(\omega t + \varphi)$$

Приведем на рисунке один из возможных вариантов решения:



Если синхронизирующая мощность отрицательна $\frac{dP_r(\delta)}{d\delta} < 0$, то решение будет записано в виде

$$p = p_1, p_2 \rightarrow p_1 > 0, p_2 < 0, \Delta\delta(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$$

Приведем на рисунке один из возможных вариантов решения:

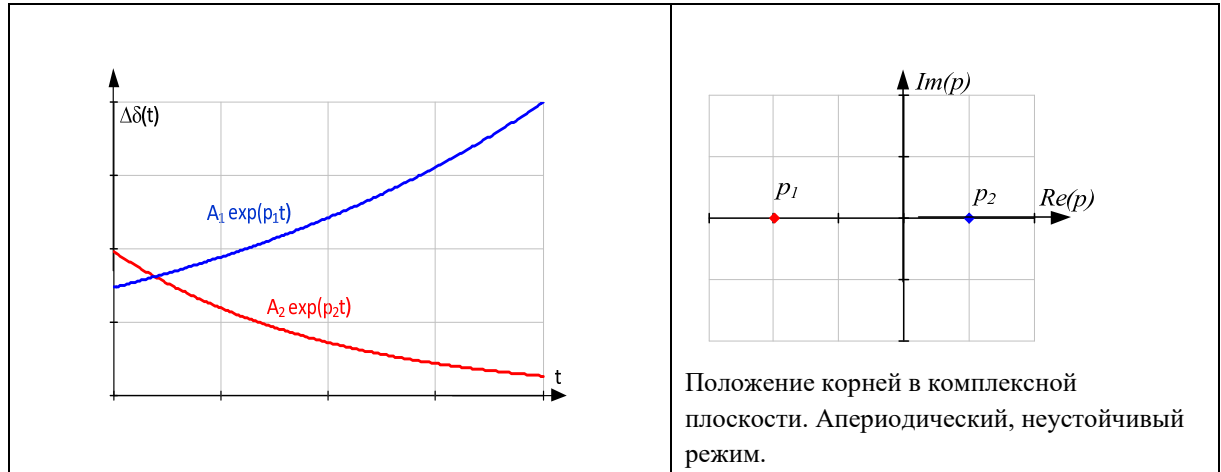
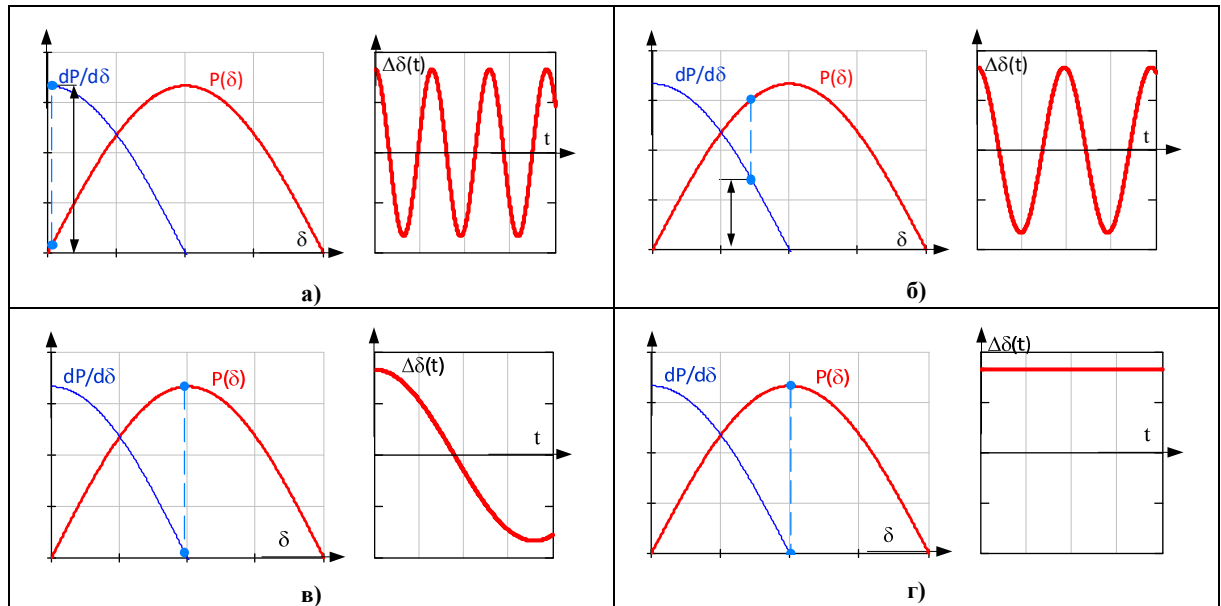


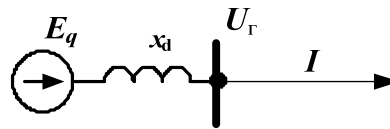
График изменения частоты с изменением величины синхронизирующей мощности для колебательного режима.

$$p^2 + \frac{1}{T_j} \frac{dP_r(\delta)}{d\delta} = 0 \rightarrow p = \pm \sqrt{-\frac{1}{T_j} \frac{dP_r(\delta)}{d\delta}} = \pm j \sqrt{\frac{1}{T_j} \frac{dP_r(\delta)}{d\delta}} = j\omega$$



Статическая устойчивость регулируемого генератора

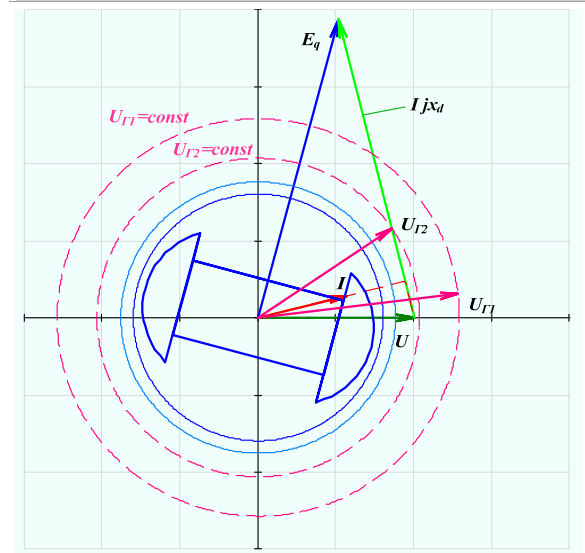
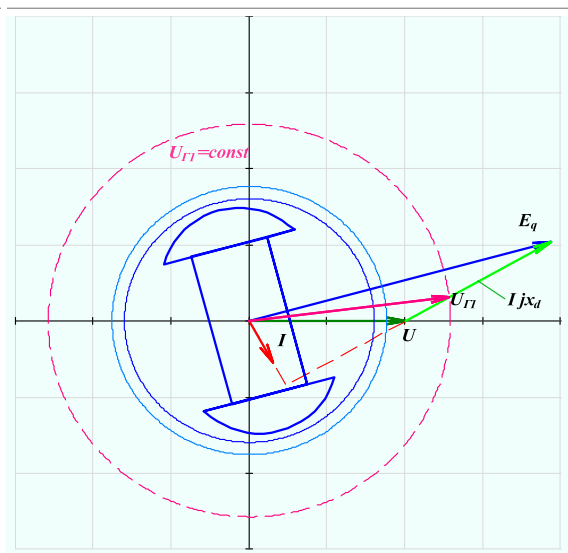
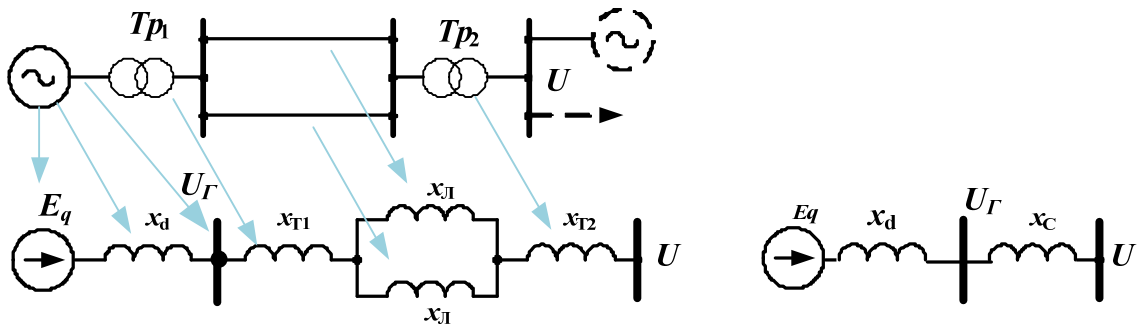
До сих пор мы рассматривали генератор как устройство с постоянной ЭДС. При слабых изменениях тока это оправдано, и можно представить схему как синхронное ЭДС за синхронным сопротивлением.



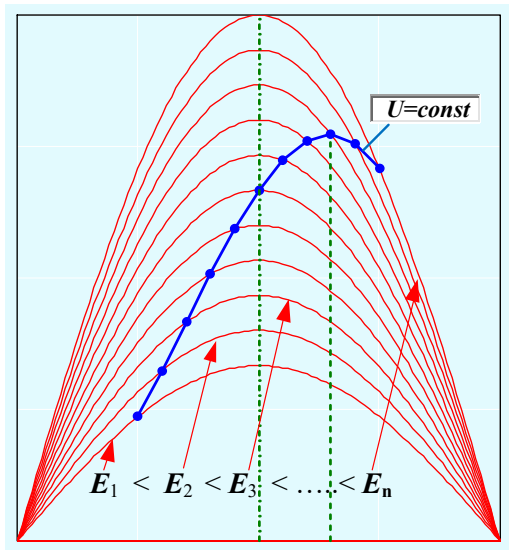
При этом мы записываем соотношение между напряжением на выходе генератора и ЭДС в виде

$$E_q = U_r + I \cdot jx_d$$

Из последнего соотношения видно, что слабые изменения тока в цепи влекут за собой слабые изменения напряжения при постоянстве ЭДС. Для удержания постоянного напряжения на выходе генератора используют автоматические регуляторы возбуждения (АРВ), за счет которого удерживается постоянное напряжение на выходе генератора. Цель АРВ заключается в парировании возмущений т.е. в их компенсации. Продемонстрируем работу генератора без АРВ для схемы приведенной ниже и покажем, что в этом случае невозможно удержание постоянного напряжения на выходе генератора без изменения ЭДС.



На первой картинке приведена векторная диаграмма связывающая ЭДС- E_q , ток- I и напряжения на выходе генератора- $U_{Г1}$. На второй

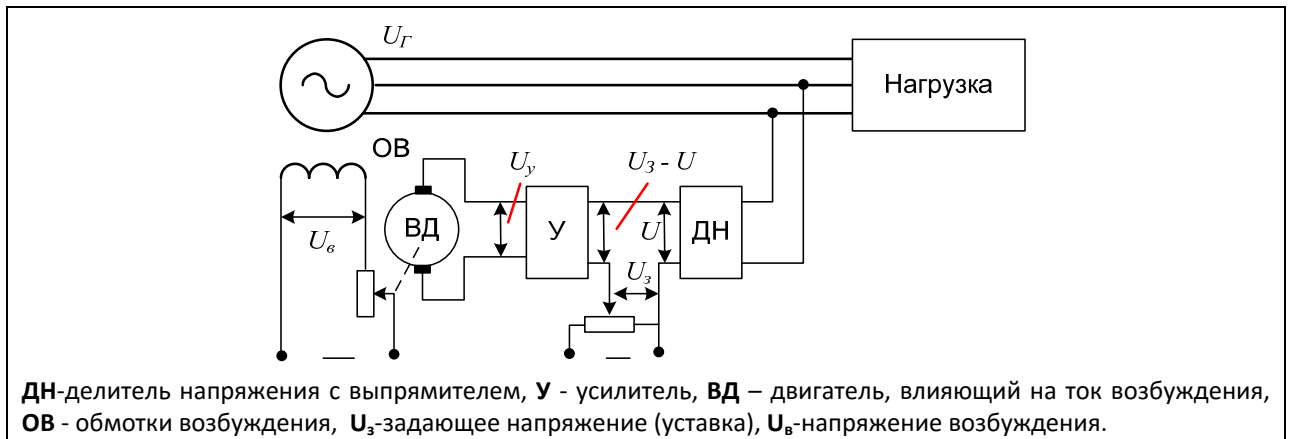


картинке приведены те же связи но при изменении тока вызванного возмущением в цепи. Для сравнения на второй картинке приводится и прежнее значение напряжения на выходе генератора $U_{Г1}$ и напряжение для текущего режима $U_{Г2}$. Из представленных диаграмм видно, что при изменении тока- I изменяется и напряжение на выходе генератора- $U_{Г2}$, при чем, оно существенно отличается от прежнего режима - $U_{Г1}$. Для того чтобы удержать прежнее значение напряжения необходимо увеличить величину ЭДС. Графическая зависимость удержания напряжения на выходе генератора постоянным значением приведена на рисунке. Это удержание или стабилизация напряжения на выходе генератора

осуществляется с помощью соотношения (как проявления действия АРВ)

$$E_q = E_{q0} + k(U_{Г0} - U_{Г})$$

Действие это соотношение можно представить в виде схемы приведенной на рисунке ниже.

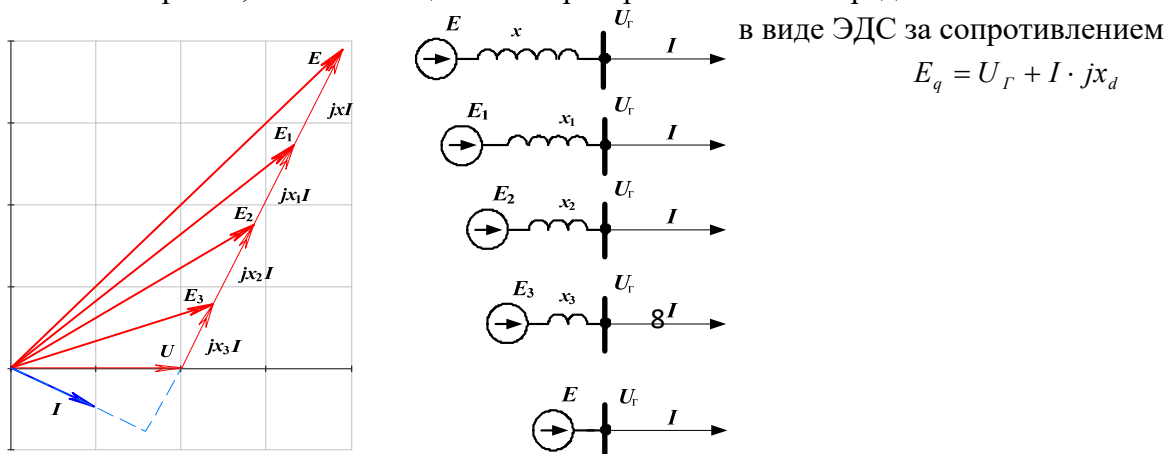


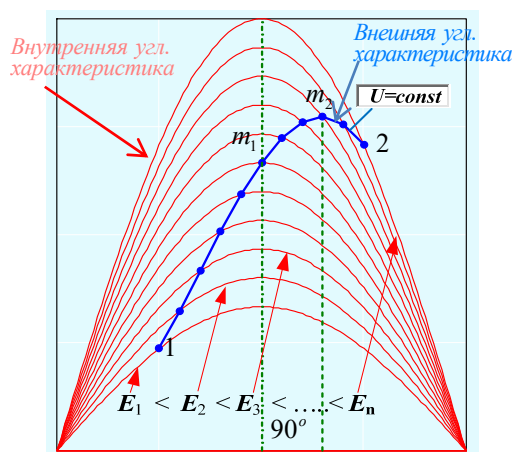
Коэффициент усиления k является скорость изменения E по напряжению $U_{Г}$ то есть

$$k = \frac{dE}{dU}$$

Чем больше k , тем быстрее реагирует АРВ, поэтому k выбирают как можно больше. Величина этого коэффициента лимитирована с учетом ограничений предельных значений тока возбуждения, в системе предусматриваются ограничители по току возбуждения.

Таким образом, схема замещения генератора может быть представлена схемой замещения



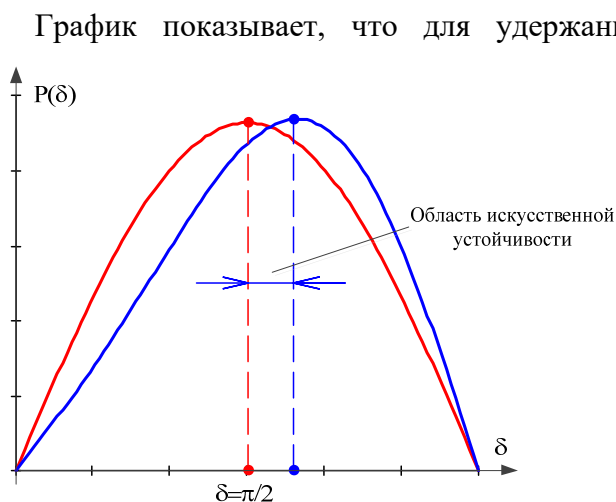


представляется в виде

$$E = U_r$$

Вернемся к нашему графику зависимости активной мощности от угла

$$P(\delta) = \frac{EU}{x} \sin(\delta)$$



упрощенном (красная кривая) и точном (синяя кривая) учете действия АРВ.

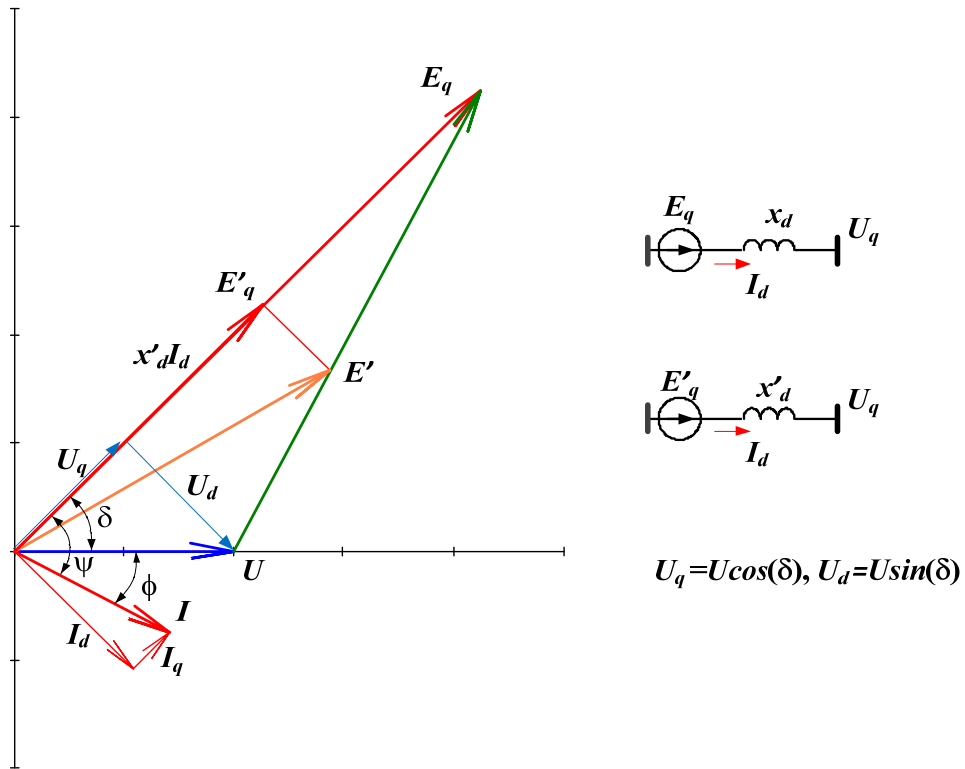
Используя векторную диаграмму, покажем, что при наличии АРВ пропорционального действия схему замещения можно представить в виде

$$E'_q = U_q + I \cdot jx'_d$$

Из последнего соотношения видно, что чем меньше сопротивление, тем меньше значение ЭДС и тем она (ЭДС) ближе к выходному напряжению генератора, и тем меньше изменяется напряжение на выходе генератора. При действии АРВ пропорционального действия схема замещения генератора может быть представлена в виде

$$E'_q = U_r + I \cdot jx'_d$$

В пределе, если считать АРВ работает идеально (в случае АРВ сильного действия), то схема замещения



Для этого запишем выражение для мощности генератора

$$\underline{S} = U \underline{I}^* = U I e^{-j\varphi} = U I e^{-j(\psi - \delta)} = U e^{j\delta} I e^{-j\psi} = (U \cos(\delta) + j U \sin(\delta)) (I_q - j I_d)$$

$$P = \operatorname{Re}(\underline{S}) = I_q U \cos(\delta) + I_d U \sin(\delta)$$

Учитывая, что

$$I_d = \frac{E'_q - U \cos(\delta)}{x'_d}, \quad I_q = \frac{U \sin(\delta)}{x_d},$$

подставляем полученные значения и получаем

$$\begin{aligned} P = \operatorname{Re}(\underline{S}) &= \frac{U \sin(\delta)}{x_d} U \cos(\delta) + \frac{E'_q - U \cos(\delta)}{x'_d} U \sin(\delta) = \\ &= \frac{E'_q U}{x'_d} \sin(\delta) + \frac{U^2}{2x_d} \sin(2\delta) - \frac{U^2}{2x'_d} \sin(2\delta) = \frac{E'_q U}{x'_d} \sin(\delta) - \frac{U^2 (x_d - x'_d)}{2x_d x'_d} \sin(2\delta) \\ P(\delta) &= \frac{E'_q U}{x'_d} \sin(\delta) - \frac{U^2 (x_d - x'_d)}{2x_d x'_d} \sin(2\delta) \end{aligned}$$

Приведем график зависимости $P(\delta)$

